

Technischer Prüfstand

Nur für den Dienstgebrauch

Technische Berichte

und

Vorabdrucke

aus

Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung

Lieferung 7

7521

Herausgegeben

**von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB) - Berlin-Adlershof**

Inhaltsverzeichnis

„Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Optik von gekrümmten Plexiglasscheiben“. Von J. Hock, Friedrichshafen a. B.	1
„Elektrisches Drehmagnetsystem für großen Ausschlagsbereich“. Von W. Fischer, Berlin-Adlershof	9
„Zur Theorie der Beugung einer ebenen Schallwelle an der Kugel“. Von H. G. Küßner	12
Berichtigung	12
„Über die Berechnung der Druckverteilung von Profilen“. Von F. Riegels, Göttingen	13
„Wirkung von Zusatzstoffen auf die Verkokungsneigung von Schmierölen“	20
„Anwendung der Kältetechnik in Flugzeugbau und Luftfahrt“. Von G. A. Emmerling, Dessau	21
„Zur Ermittlung der Beanspruchung von Flugzeugfahrwerken beim Start“. Von K. Schlefke, RLM-Festigkeitsprüfstelle, Berlin-Adlershof	29
Aus deutschen Forschungsanstalten	31

Zur Beachtung!

Dieser Bericht ist bestimmt für die Arbeiten im Dienstbereich des Empfängers. Der Bericht darf innerhalb dieses Dienstbereichs nur an Persönlichkeiten ausgehändigt werden, die aus dem Inhalt Anregungen für ihre Arbeiten zu schöpfen vermögen.

Verwendung zu Veröffentlichungen (ganz oder teilweise) sowie Weiterleitung an Persönlichkeiten außerhalb des Dienstbereichs des Empfängers ist ausgeschlossen.

Der Bericht ist unter Stahlblechverschluß mit Patenschloß zu halten.

TECHNISCHE BERICHTE

Herausgegeben
von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB) / Berlin-Adlershof

Bd. 10 (1943)

Heft 1

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Optik von gekrümmten Plexiglasscheiben

J. Hock, Friedrichshafen a. B.

Bericht der Dornier-Werke G. m. b. H., Friedrichshafen a. B.

A 5, E 5

Übersicht: An zwei gekrümmten Plexiglasscheiben für eine Flugzeugbugkanzel wurden die Sehstrahlablenkungen beim Visieren gemessen. Eine eingehende theoretische Untersuchung, die zu einer allgemein brauchbaren Lösung führte, ermöglichte es, die einzelnen Einflüsse auf die Strahlablenkung zu zergliedern. Es werden Vorschläge für die weitere Entwicklung der Flugzeugverglasungen und ihrer optischen Prüfung gemacht.

Gliederung

- I. Einleitung
- II. Die Optik gekrümmter Glasscheiben
 1. Grundgesetze und Voraussetzungen
 2. Die sogenannte Parallelverschiebung des Lichtstrahls
 3. Der Ablenkwinkel infolge der Scheibenkrümmung
 4. Die Ablenkung eines Lichtstrahls durch ein keilförmiges Prisma
 5. Die Fehlereinflüsse
 - a) Allgemeine Betrachtung
 - b) Der Einfluß des Formfehlers
 - c) Der Einfluß des Keilfehlers
 - d) Die gesamte Sehstrahlablenkung in der optischen Ebene
 - e) Die resultierende Sehstrahlablenkung im Raum
 - f) Die optische Unruhe
- III. Versuchsergebnisse
 1. Gegenstand und Aufgabe
 2. Durchführung
 3. Die geometrischen Verhältnisse hinter der Scheibe
 4. Die Auswertung der Meßergebnisse
 5. Die Beurteilung der Ergebnisse
- IV. Ausgleich der theoretischen Ablenkung durch den Keilfehler
- V. Vorschläge für die Prüfung gekrümmter Scheiben
 1. Prüfung der einzelnen Scheiben bei lotrechter Durchstrahlung
 2. Prüfung der eingebauten Scheiben bei richtigen Sichtverhältnissen
- VI. Bemerkung zum Entwurf neuer Verglasungen
- VII. Die Vorausberechnung des Zielfehlers
- VIII. Schrifttum

I. Einleitung

Von Verglasungen militärischer Flugzeuge wird neben genügender Festigkeit und Splittersicherheit vor al-

lem eine bestimmte optische Güte gefordert, um die Ablenkung des Sehstrahles beim Visieren und Navigieren auf ein Mindestmaß zu beschränken. Während früher fast ausschließlich ebene Glasscheiben verwendet wurden, werden die Verglasungen in neuerer Zeit aus aerodynamischen Gründen gekrümmt ausgeführt. Dadurch und durch die Einführung von Zielgeräten, deren Visiere im Innern des Flugzeuges angeordnet sind, hat die Optik gekrümmter Glasscheiben eine erhöhte Bedeutung erlangt. Aber auch wo wegen besonders strenger optischer Forderungen heute noch ebene Scheiben verwendet werden, muß der Krümmungseinfluß beachtet werden, da sich die ebenen Scheiben unter der Belastung durch die Luftkräfte durchbiegen.

In den folgenden Ausführungen wird zuerst die Optik gekrümmter Scheiben theoretisch behandelt und dann die Durchführung, Auswertung und die Ergebnisse von optischen Messungen an zwei gekrümmten Plexiglasscheiben angegeben.

II. Die Optik gekrümmter Glasscheiben

1. Grundgesetze und Voraussetzungen

Ein Lichtstrahl ändert beim Übergang von einem durchsichtigen Stoff in einen anderen optisch dichteren oder dünneren Stoff seine Richtung, er wird „gebrochen“. Beim Durchgang durch eine Glasscheibe wird ein Lichtstrahl daher zweimal gebrochen, s. Bild 1. Der an einer Trennfläche ankommende und der von dort abgehende Teil eines Lichtstrahles liegen in einer Ebene. Der ankommende und der gebrochene Teil des Lichtstrahles

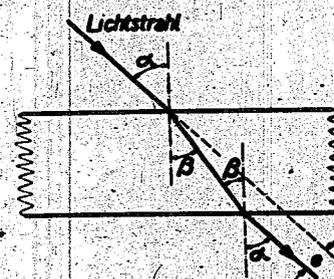


Bild 1. Gang eines Lichtstrahls durch eine planparallele Scheibe. Der Winkel, unter dem der Strahl die Scheibe verläßt, ist gleich dem Einfallswinkel. Der Strahl erfährt nur eine Parallelverschiebung c .

bilden mit dem Lot auf die Trennfläche zwei spitze Winkel, den Einfallswinkel α und den Brechungswinkel β , für die das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad (1)$$

gilt. Die Brechzahl n beträgt für den Übergang von Luft in Plexiglas $\sim 1,49$.

Für die zunächst folgenden Betrachtungen über den Strahlengang bei gekrümmten Scheiben wird vorausgesetzt, daß die Brechzahl n konstant ist, und daß es sich um Scheiben mit äquidistanten Oberflächen, d. h. mit vollkommen gleichmäßiger Dicke handelt. Im Falle veränderlicher Krümmung sei der Krümmungsradius r so klein, so daß die Krümmung über den Durchgangsbereich des Lichtstrahls als konstant, d. h. kreisförmig angesehen werden kann. Die beiden Lote an den Übergangspunkten haben dann den Krümmungsmittelpunkt gemeinsam und bilden eine Ebene mit den drei Abschnitten des Lichtstrahls. Da es sich bei den betrachteten Scheiben um solche von geringer Dicke im Verhältnis zum Krümmungsradius handelt, ist der Durchgangsbereich von so geringer Ausdehnung, daß die Annahme konstanter Krümmung als zulässig anzusehen ist. Es kann daher mit großer Genauigkeit gesagt werden, daß sich auch beim Durchgang eines Lichtstrahls durch eine gekrümmte Glasscheibe der ganze Vorgang der Strahlenbrechung in einer Ebene vollzieht. Diese Ebene wird im folgenden als „optische Ebene“ bezeichnet.

In Bild 2 stellt Punkt A das Auge des Flugzeugführers und Punkt D das anvisierte Objekt dar. Der Lichtstrahl verläuft von D über C und B nach A . Es ist jedoch zweckmäßiger, den Strahlengang in umgekehrter Richtung von A nach D zu verfolgen. Das ist erlaubt, da der Vorgang umkehrbar ist.

Der Lichtstrahl, jetzt „Sehstrahl“ genannt, trifft bei B unter dem Winkel α_1 zum Einfallslot N_1 auf die Innenfläche der Scheibe und wird unter dem Winkel β_1 gebrochen. Der gebrochene Strahl trifft die Außenfläche unter dem Winkel β_2 und verläßt die Scheibe unter dem Winkel α_2 zum Ausfallslot N_2 . Diese vier Winkel sind untereinander durch das Brechungsgesetz und die geometrischen Verhältnisse verknüpft. Aus (1) und dem Sinussatz folgt:

$$\sin \beta_1 = \frac{1}{n} \sin \alpha_1 \quad (2)$$

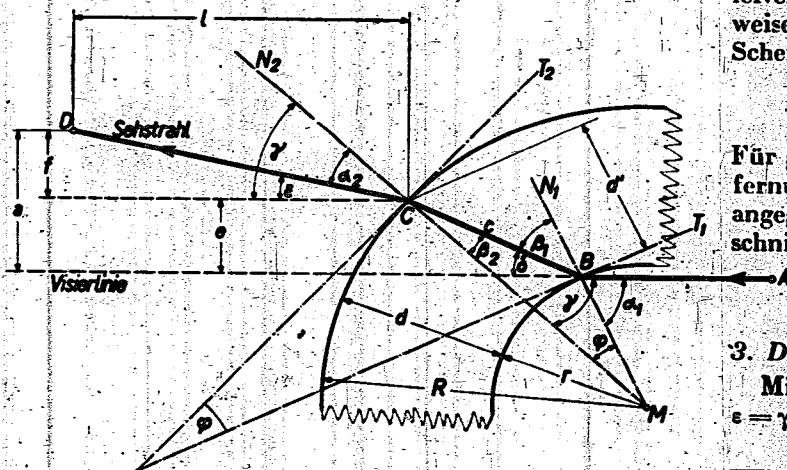


Bild 2. Gang eines Lichtstrahls durch eine gekrümmte Scheibe. Außer der Parallelverschiebung e erfährt der Strahl eine Richtungsänderung, den Ablenkwinkel ϵ (Die optische Ebene liegt in der Bildebene).

$$\sin \beta_2 = \frac{r}{R} \sin \beta_1 = \frac{r}{nR} \sin \alpha_1 \quad (3)$$

$$\sin \alpha_2 = n \sin \beta_2 = \frac{r}{R} \sin \alpha_1 \quad (4)$$

Wie Bild 2 zeigt, setzt sich die gesamte Ablenkung ϵ des Sehstrahls von der ursprünglichen Richtung aus der „Parallelverschiebung e “ und einem von dem Ablenkwinkel ϵ und der Entfernung l abhängigen Anteil f zusammen. Die Größen e und ϵ werden in den folgenden Abschnitten als Funktionen des Einfallswinkels α_1 , der Brechzahl n und der Krümmungsradien r und R abgeleitet.

2. Die sogenannte Parallelverschiebung e des Sehstrahls

Die Ablenkung e , die ein Lichtstrahl beim Durchgang durch eine gekrümmte Scheibe von der Dicke d und dem Krümmungsradius R erfährt, entspricht der Parallelverschiebung eines Strahles beim Durchgang durch eine planparallele Scheibe (s. auch Bild 1) von der Dicke $d' = d - R(1 - \cos \varphi)$, worin $\varphi = \beta_1 - \beta_2$ ist. Diese Ablenkung wird im folgenden auch bei der gekrümmten Scheibe als „Parallelverschiebung“ bezeichnet.

Nach Bild 2 ermittelt sich der Wert e zu $e = c \sin \delta$, worin sich c aus Dreieck BCM zu $c = R \frac{\sin \delta}{\sin \beta_1}$ und $\delta = \alpha_1 - \beta_1$ ergibt. Es ist also

$$e = R \frac{\sin(\alpha_1 - \beta_1) \sin(\alpha_1 - \beta_1)}{\sin \beta_1}$$

oder umgeformt

$$e = R (\cos \beta_2 - \text{ctg} \beta_1 \sin \beta_2) (\sin \alpha_1 \cos \beta_1 - \cos \alpha_1 \sin \beta_1)$$

Formt man diese Beziehung mit Hilfe von (2) bis (4) weiter um, so erhält man die gesuchte Funktion für die Parallelverschiebung

$$e = \frac{r \sin \alpha_1}{n^2} \left(\sqrt{\frac{n^2 R^2}{r^2} - \sin^2 \alpha_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} \right) (\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \cos \alpha_1) \quad (5)$$

Bei der Betrachtung praktischer Fälle, bei denen es sich immer um das Anvisieren von Zielen in größerer Entfernung handelt, ist e zu vernachlässigen. Dagegen muß ϵ , wie später gezeigt wird, bei Messungen in geringer Entfernung berücksichtigt werden¹⁾. In der im Schrifttum aufgeführten Arbeit [1]²⁾ ist für die Parallelverschiebung in der gekrümmten Scheibe näherungsweise die Parallelverschiebung der planparallelen Scheibe abgeleitet

$$e = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right)$$

Für genaue Auswertung von Messungen in geringer Entfernung empfiehlt sich jedoch die Anwendung der oben angegebenen exakten Formel. In einem späteren Abschnitt V wird auch noch angegeben, von welcher Entfernung des Zieles an die Parallelverschiebung vernachlässigt werden kann.

3. Der Ablenkwinkel ϵ infolge der Scheibenkrümmung

Mit den Bezeichnungen von Bild 2 ergibt sich

$$\epsilon = \gamma - \alpha_2 = \alpha_1 - \varphi - \alpha_2 = \alpha_1 - (\beta_1 - \beta_2) - \alpha_2 \quad (6)$$

1) Wo ein Kollimator zur Verfügung steht, kann die Parallelverschiebung schon bei der Messung ausgeschaltet werden.

2) Die Angaben in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumverzeichnis am Ende der Arbeit.

oder

$$\varepsilon = (\alpha_1 - \alpha_2) - (\beta_1 - \beta_2) \dots (6a)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (2) bis (4) kann der Ablenkwinkel ε als Funktion des Einfallswinkels α_1 und der Krümmungsradien R und r geschrieben werden:

$$\varepsilon = \alpha_1 - \arcsin\left(\frac{r}{R} \sin \alpha_1\right) - \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha_1\right) + \arcsin\left(\frac{r}{nR} \sin \alpha_1\right) \dots (6b)$$

Diese exakte Formel liefert bei zahlenmäßiger Auswertung infolge der Differenzbildung von großen Werten zur Ermittlung einer sehr kleinen Größe nur bei großem Rechenaufwand brauchbare Ergebnisse. Sie kann jedoch durch eine Näherungsformel von genügender Genauigkeit ersetzt werden.

Faßt man in (6) die Winkeldifferenzen $\alpha_1 - \alpha_2$ und $\beta_1 - \beta_2$ als kleine Größen auf und führt man dafür die Bezeichnungen Δ_1 und Δ_2 ein, so kann man auch schreiben

$$\varepsilon = \Delta_1 - \Delta_2 \dots (6c)$$

Zur Entwicklung dieses Ausdruckes wird auf die Beziehungen (2) bis (4) zurückgegriffen. Es ist

$$\sin \alpha_2 = \frac{r}{R} \sin \alpha_1 \dots (4)$$

Mit $\alpha_2 = \alpha_1 - \Delta_1$ wird

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 \cos \Delta_1 - \cos \alpha_1 \sin \Delta_1 \dots (7)$$

Da Δ_1 ein sehr kleiner Winkel ist, kann näherungsweise gesetzt werden:

$$\cos \Delta_1 = 1; \sin \Delta_1 = \Delta_1$$

und man erhält durch Verbindung von (4) und (7)

$$\frac{r}{R} \sin \alpha_1 = \sin \alpha_1 - \Delta_1 \cos \alpha_1$$

Daraus

$$\Delta_1 = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \operatorname{tg} \alpha_1 \dots (8)$$

Ferner ist

$$\sin \beta_2 = \frac{r}{R} \sin \beta_1 \dots (3)$$

Mit $\beta_2 = \beta_1 - \Delta_2$ und derselben Vereinfachung wird

$$\Delta_2 = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \operatorname{tg} \beta_1 \dots (9)$$

Aus (6c), (8) und (9) ergibt sich

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{r}{R}\right) (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \beta_1)$$

Führt man anstelle der beiden Krümmungsradien das Verhältnis des äußeren Radius zur Scheibendicke, die Formzahl

$$p = \frac{R}{d} = \frac{r}{R-r} \dots (10)$$

ein und setzt man

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}} \dots (11)$$

so ergibt sich die angenäherte Funktion für den Ablenkwinkel ε zu

$$\varepsilon = \frac{1}{p} \left(\operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}} \right) \dots (12)$$

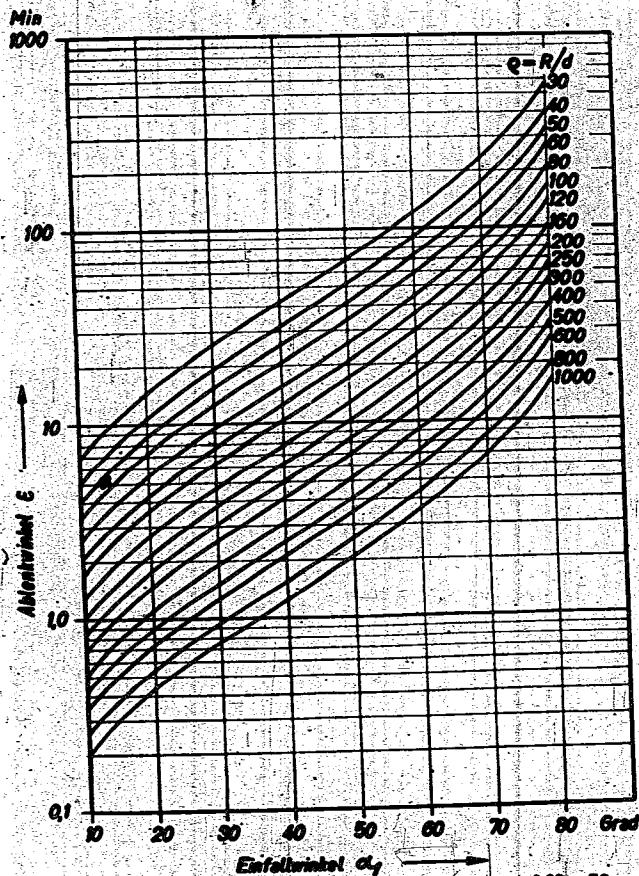


Bild 3 (oben). Ablenkwinkel ε infolge Scheibenkrümmung, abhängig vom Einfallswinkel α_1 und von der Formzahl $p = R/d$

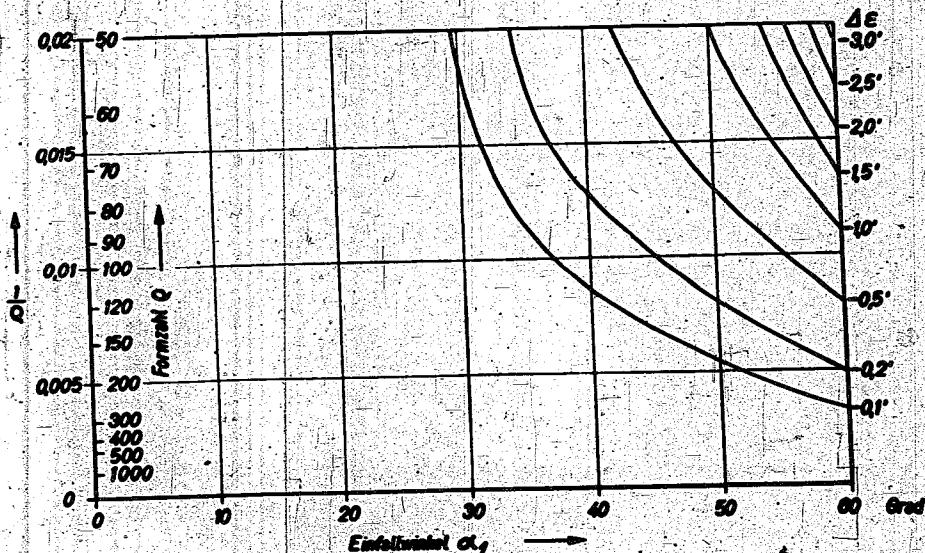


Bild 4 (rechts). Absoluter Fehler $\Delta\varepsilon$ des Ablenkwinkels ε infolge Scheibenkrümmung; der durch Anwendung der Näherungsformel (12) anstelle der exakten Beziehung (6b) entsteht.

Bild 5. Fehler $\Delta \varepsilon$ von Bild 4 in % von ε

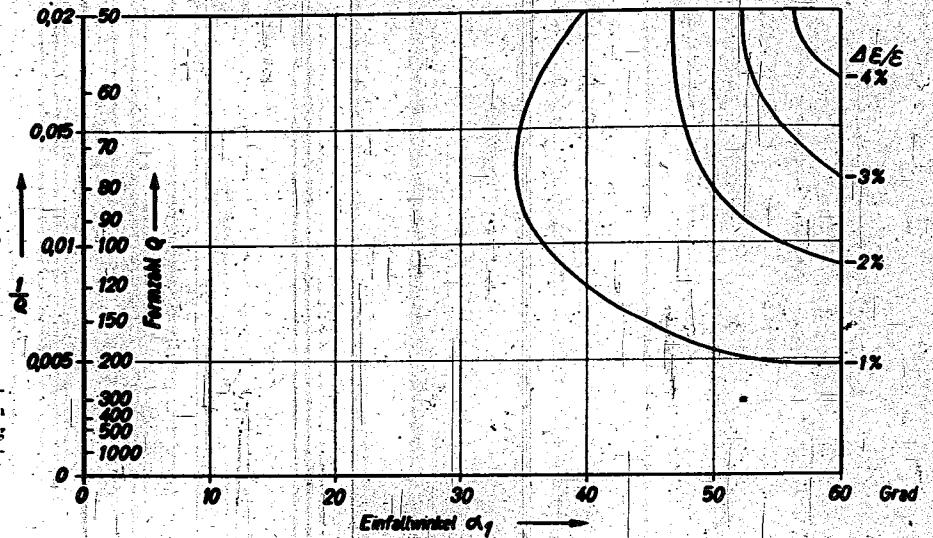
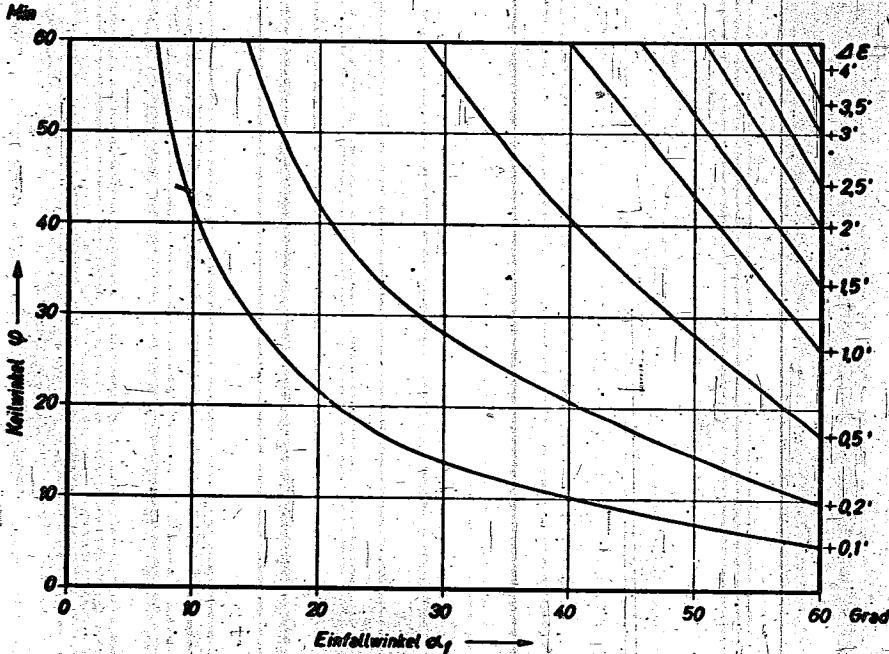


Bild 6 (unten). Absoluter Fehler $\Delta \varepsilon$ des Ablenkwinkels ε eines Lichtstrahls beim Durchgang durch ein keilförmiges Prisma, der durch Anwendung der Näherungsformel (15) anstelle der exakten Beziehung (14) entsteht



der gleiche ist wie durch ein keilförmiges Prisma mit dem Keilwinkel $\varphi = \beta_1 - \beta_2 = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin z_1\right) - \arcsin\left(\frac{r}{nR} \sin z_1\right)$, der, da $\beta_1 - \beta_2 = \Delta_2$, nach (9), (10) und (11) näherungsweise

$$\varphi \approx \frac{1}{\rho} \frac{\sin z_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 z_1}} \quad (13)$$

gesetzt werden kann.

Die Ablenkung eines Lichtstrahls, der vom dicken Ende eines keilförmigen Prismas her auf dieses fällt, ergibt sich, wenn man wieder von (6) ausgeht, zu:

$$\varepsilon = z_1 - \varphi - \alpha_2 \quad (6)$$

Mit $\sin z_2 = n \sin \beta_2 = n \sin(\beta_1 - \varphi)$ wird nach Umformung des Ablenkwinkels des Keilprismas

$$\varepsilon = z_1 - \varphi - \arcsin\left[n \sin\left(\arcsin\frac{\sin z_1}{n} - \varphi\right)\right] \quad (14)$$

oder

$$\varepsilon = z_1 - \varphi - \arcsin(\sin z_1 \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 z_1}) \quad (14a)$$

Zu einer Näherungslösung gelangt man für den vorliegenden Fall wieder unter der Voraussetzung, daß es sich bei dem Keilwinkel φ und der Winkeldifferenz $\beta_1 = z_1 - \alpha_2$ um sehr kleine Größen handelt. Aus (6), (8), (10) und (13) ergibt sich dann

$$\varepsilon = z_1 - \varphi \left[\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 z_1} - 1}{\rho \cos z_1} \right] \quad (15)$$

In den Bildern 6 und 7 wird gezeigt, wie groß die Fehler $\Delta \varepsilon$ sind, die durch Anwendung der Näherungsfunktion entstehen.

5. Die Fehlereinflüsse

a) Allgemeine Betrachtung

Der im Abschnitt II. 3. bestimmte Ablenkwinkel ε stellt den aufgrund der Sollabmessungen R und d und der unter II. 1. angegebenen Voraussetzungen theoretisch zu erwartenden Ablenkwinkel dar. Die Voraussetzungen werden jedoch von wirklichen Glasscheiben nicht vollkommen erfüllt. Diese weisen immer Dicken- und Krümmungsunterschiede auf, die Ablenkwinkeländerungen verursachen.

Diese Formel ergibt ε im Bogenmaß, die folgende im Winkelmaß, und zwar in Winkelminuten:

$$\varepsilon = \frac{3438}{\rho} \left(\operatorname{tg} z_1 - \frac{\sin z_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 z_1}} \right) \quad (12a)$$

Wenn ρ und n als Konstante betrachtet werden, hängt ε also nur noch vom Einfallswinkel z_1 ab. Bild 3 zeigt die Funktion ε schaubildlich, wobei $n = 1,49$ konstant, z_1 als unabhängige Veränderliche und ρ als Parameter angegeben ist. Dieses Schaubild kann zur grafischen Bestimmung von ε benutzt werden. Die Bilder 4 und 5 geben an, mit welchen Fehlern $\Delta \varepsilon$ man rechnen muß, wenn man anstelle der exakten die angenäherte Beziehung für ε verwendet. Man sieht, daß dieser Fehler relativ außerordentlich klein ist und für den in Frage kommenden Bereich vernachlässigt werden kann.

4. Der Ablenkwinkel ε eines Lichtstrahls beim Durchgang durch ein keilförmiges Prisma

Denkt man sich in Bild 2 an den Übergangspunkten B und C die Tangentialebenen T_1 und T_2 an die Scheibenoberflächen gelegt, so ist ohne weiteres zu sehen, daß der Strahlengang durch eine gekrümmte Scheibe

3) Im folgenden werden sämtliche Beziehungen immer im Bogenmaß angegeben und können durch Multiplikation mit 3438 in Winkelminuten umgerechnet werden.

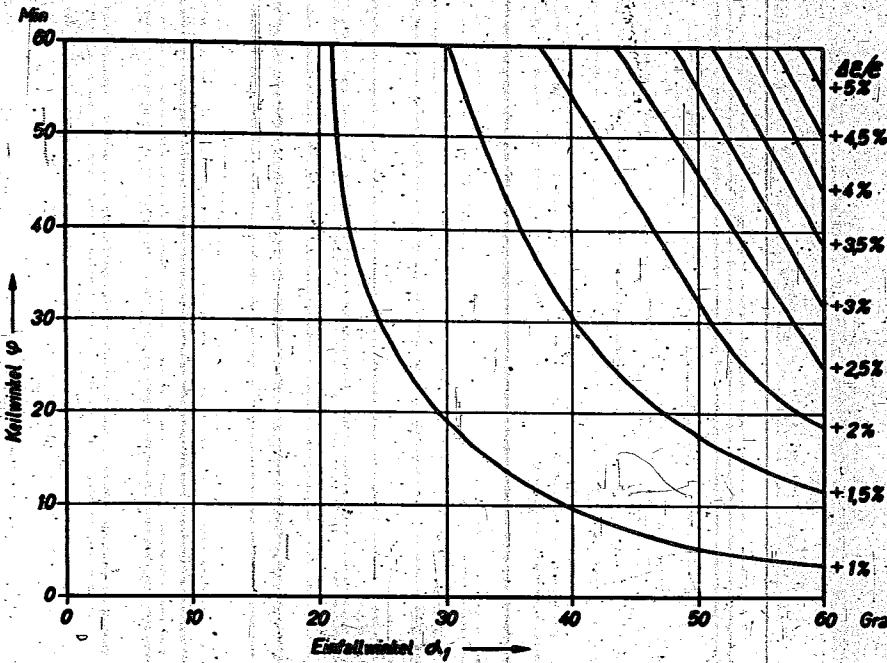


Bild 7. Fehler Δε von Bild 6 in % von ε

Tafel 1

Nr.	Fehlertypen	Werkstoff	erfüllt durch	Abblendwinkeländerung
1	konstanter Dickenfehler	Δd = konst.	Formfehler ΔQ	$\Delta \epsilon_Q$
2	konstanter Krümmungsfehler	ΔR = konst.		
3	veränderlicher Dickenfehler (Dickengradient (Keilfehler))	grad d = konst.	Keilfehler ΔX	$\Delta \epsilon_X$
4	Wellenform der ganzen Scheibe	ΔR = var.	Scheiben mit solchen Fehlern sind für Flugzeugoptiken wegen optischer Ursache nicht geeignet.	
5	wellenartige Überformbarkeit der beiden Oberflächen	Δd = var.	(opt. Ursache, s. unter f)	

Der für Glasscheiben gebräuchliche Begriff „Optik“ bildet eine Zusammenfassung der einzelnen optischen Erscheinungen, vor allem der Scheibenfehler. Diese lassen sich in folgende Grundtypen, die gleicherweise für ebene wie für gekrümmte Scheiben passen, einteilen; vgl. Tafel 1.

Für die Berechnung der Fehlerinflüsse muß vorausgesetzt werden, daß der Krümmungsgradient verschwin-

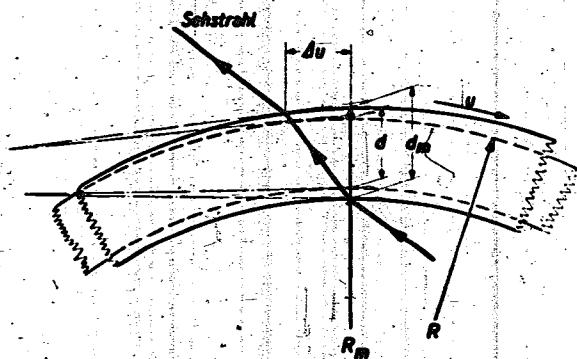


Bild 8 (oben). Für die Berechnung des Formfehlers Δρ wird der Dickenfehler Δd = d_m - d im Durchgangsbereich Δu als konstant angenommen

Bild 8 (rechts). Zur Entstehung der Ablenkungsänderung infolge Keilfehlers; spezieller Fall. Ablenkungsänderung Δε₂ bei einer Drehung Δφ der äußeren Tangentialebene T₂ um eine zur optischen Ebene (= Bildebene) normale Achse

det, d. h. daß die Krümmung und damit der Krümmungsfehler ΔR konstant ist. Der Dickengradient soll so klein sein, daß — für die Berechnung des Formfehlers Δρ — die Dickenzunahme im Bereich des Strahldurchgangs $\frac{\partial d}{\partial u} \Delta u$ vernachlässigt, der Dickenfehler Δd also konstant gesetzt werden kann, s. Bild 8. Der Dickengradient selbst wird als Unterschied in der Neigung der Tangentialebenen T₁ und T₂ behandelt. Wie später noch gezeigt wird, werden also die konstanten Fehler der Krümmung und der Dicke ΔR und Δd in dem sogenannten Formfehler Δρ, die Neigungsunterschiede der beiden Tangentialebenen in dem sog. Keilfehler ΔX zusammengefaßt.

b) Der Einfluß des Formfehlers Δρ

Wie vorher gezeigt wurde, bestehen zwischen den theoretischen und wirklichen Abmessungsgrößen — Krümmung und Dicke — Unterschiede, die von Herstellung und Einbau der Scheibe herrühren. Ihr Einfluß auf die Ablenkung soll bestimmt werden. Die Beziehung (12) gilt für die Sollabmessungen R und d, also für die Sollformzahl ρ. Die mit den Fehlern ΔR und Δd behafteten tatsächlichen Scheibenabmessungen R_m = R + ΔR und d_m = d + Δd bilden die wirkliche Formzahl

$$\rho_m = \frac{R_m}{d_m} = \rho + \Delta \rho.$$

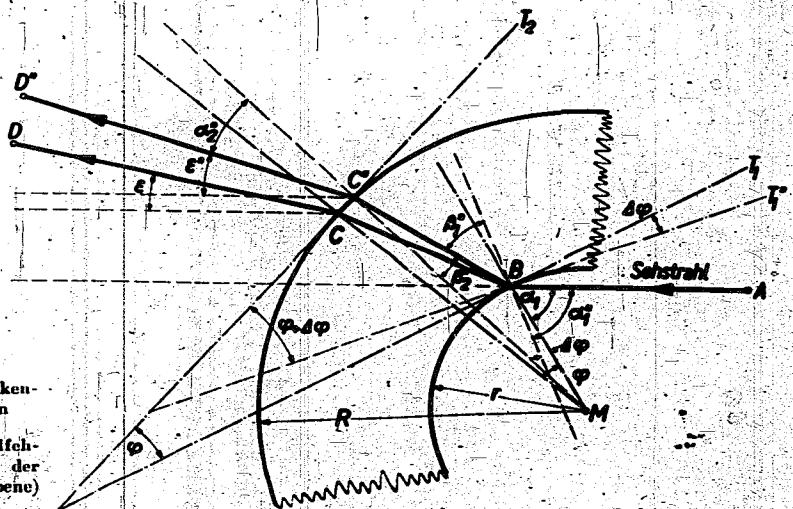
Infolge des Formfehlers Δρ = (ΔR - ρ Δd) / d_m entsteht die Ablenkungsänderung Δε_ρ. Diese ergibt sich nach folgender Überlegung:

Nimmt man in (12) n und α₁ als konstant und ρ als veränderlich an, so kann man die Beziehung auch ε = k/ρ schreiben. Daraus k = ερ. Der Ablenkungswinkel der fehlerhaften Scheibe ist

$$\epsilon + \Delta \epsilon = \frac{k}{\rho + \Delta \rho} = \frac{\epsilon \rho}{\rho + \Delta \rho}$$

Daraus ergibt sich die Ablenkungsänderung infolge des Formfehlers

$$\Delta \epsilon = - \frac{\Delta \rho}{\rho + \Delta \rho} \epsilon \quad (16)$$



Der Ablenkwinkel der fehlerhaften Scheibe kann auch geschrieben werden:

$$\varepsilon + \Delta\varepsilon = \frac{1}{\varphi_m} \left(\operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}} \right) \quad (17)$$

c) Der Einfluß des Keilfehlers $\Delta\varphi$

Wie schon im Abschnitt II. 5. einleitend bemerkt wurde, äußert sich eine Ungleichmäßigkeit der Scheibendicke, ein Dickengradient, in einem Unterschied der Neigungen der Tangentialebenen. Dies läßt sich am besten am Beispiel eines rechtwinklig einfallenden Lichtstrahls erklären. Bei gleichmäßiger Dicke liegen die beiden Tangentialebenen an den Übergangspunkten parallel, bei ungleichmäßiger Dicke liegen sie irgendwie zueinander geneigt, wie die Flächen eines Keiles, weshalb die Ungleichmäßigkeit der Dicke auch als Keiligkeit oder Keilfehler bezeichnet wird. Diese Neigung der Tangentialebenen kann man sich als durch eine Drehung um Achsen, die in den Tangentialebenen selbst liegen, entstanden denken. Im allgemeinsten Fall wird eine Drehung beider Tangentialebenen vorliegen, und die Drehachsen werden nicht rechtwinklig zur optischen Ebene stehen. Bei der Untersuchung des Einflusses des Keilfehlers soll jedoch von einem speziellen Fall ausgegangen und erst später zum allgemeinen übergegangen werden.

Zunächst soll, wie Bild 9 zeigt, der Fall untersucht werden, daß nur eine Drehung $\Delta\varphi$ der äußeren Tangentialebene T_2 um eine zur optischen Ebene rechtwinklige Achse durch den Übergangspunkt C vorliegt. Die Änderung $\Delta\varepsilon$ des Ablenkwinkels ε infolge dieses Keilfehlers $\Delta\varphi$ soll ermittelt werden.

Die Beziehung (6a) wird zu

$$\varepsilon' = \varepsilon + \Delta\varepsilon = (\alpha_1 - \alpha_2') - (\beta_1 - \beta_2') \quad (18)$$

und es gilt

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varphi \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \Delta\varphi} \quad (19)$$

(Das unterstrichene $\Delta\varphi$ bedeutet einen bestimmten Festwert des Keilfehlers, während unter $\Delta\varphi$ im übrigen die unabhängige Veränderliche der Funktion ε' zu verstehen ist.)

In (18) ist $\beta_2' = \beta_2 - \Delta\varphi$ und nach dem Brechungsgesetz gilt

$$\sin \alpha_2' = n \sin \beta_2' = n \sin (\beta_2 - \Delta\varphi),$$

daraus $\alpha_2' = \operatorname{arc} \sin [n \sin (\beta_2 - \Delta\varphi)]$.

Beziehung (18) wird damit zu

$$\varepsilon' = \alpha_1 - \operatorname{arc} \sin [n \sin (\beta_2 - \Delta\varphi)] - \beta_1 + \beta_2 - \Delta\varphi.$$

Diese Beziehung nach $\Delta\varphi$ differenziert ergibt

$$\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \Delta\varphi} = - \frac{n \cos (\beta_2 - \Delta\varphi) \cdot (-1)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 (\beta_2 - \Delta\varphi)}} = 1.$$

Für das Endergebnis können die $\Delta\varphi$ in den Winkelfunktionen vernachlässigt werden. Mit (3) erhält man schließlich

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varphi \left[\sqrt{\frac{n^2 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \alpha_1}{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \alpha_1}} - 1 \right] \quad (20)$$

Zur weiteren Klärung der Zusammenhänge wird ferner der Fall untersucht, daß nur eine Drehung $\Delta\varphi$ der inneren Tangentialebene T_1 um eine zur optischen Ebene rechtwinklige Achse durch den Übergangspunkt B vorliegt (s. Bild 10).

In diesem Fall ist der infolge von $\Delta\varphi$ veränderte Ablenkwinkel

$$\varepsilon'' = \varepsilon + \Delta\varepsilon = (\alpha_1'' - \alpha_2'') - (\beta_1'' - \beta_2'') \quad (21)$$

Es bestehen weiter folgende Beziehungen:

$$\alpha_1'' = \alpha_1 + \Delta\varphi;$$

$$\sin \beta_1'' = \frac{1}{n} \sin \alpha_1'' = \frac{1}{n} \sin (\alpha_1 + \Delta\varphi);$$

$$\sin \beta_2'' = \frac{r}{R} \sin (\beta_1'' - \Delta\varphi) = \frac{r}{R} (\sin \beta_1'' - \Delta\varphi \cos \beta_1'')$$

$$= \frac{r}{nR} \sin (\alpha_1 + \Delta\varphi) - \Delta\varphi \frac{r}{nR} \sqrt{n^2 - \sin^2 (\alpha_1 + \Delta\varphi)};$$

$$\sin \alpha_2'' = n \sin \beta_2'' = \frac{r}{R} \sin (\alpha_1 + \Delta\varphi) -$$

$$- \Delta\varphi \frac{r}{R} \sqrt{n^2 - \sin^2 (\alpha_1 + \Delta\varphi)}.$$

Daraus die Winkel:

$$\alpha_1'' = \alpha_1 + \Delta\varphi;$$

$$\beta_1'' = \operatorname{arc} \sin \left[\frac{1}{n} \sin (\alpha_1 + \Delta\varphi) \right];$$

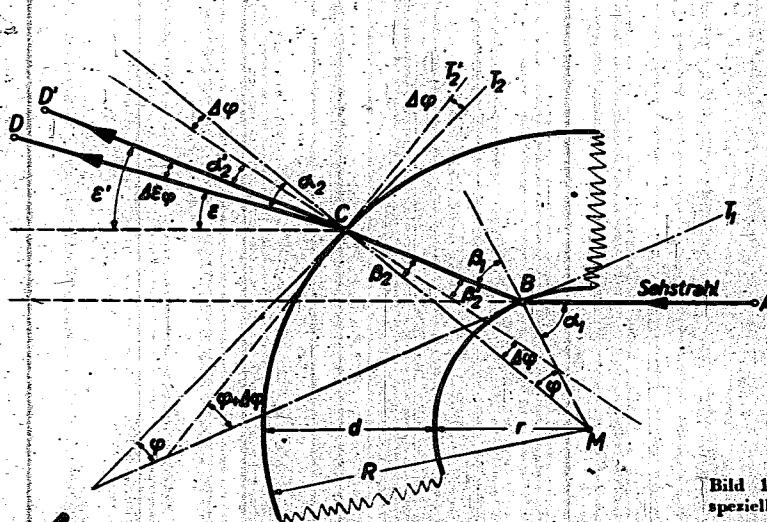


Bild 10. Zur Entstehung der Ablenkwinkeländerung infolge Keilfehlers: spezieller Fall. Ablenkwinkeländerung $\Delta\varepsilon$ bei einer Drehung $\Delta\varphi$ der inneren Tangentialebene T_1 um eine zur optischen Ebene (= Bildebene) normale Achse

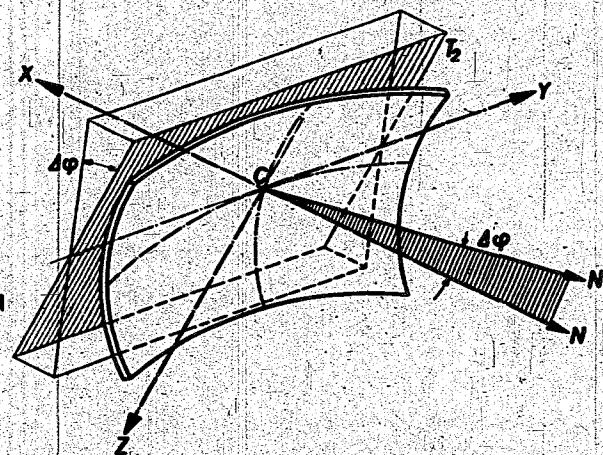


Bild 11. Zur Entstehung der Ablenkwinkeländerung infolge Keilfehlers: spezieller Fall

X-Achse \equiv Lot N

XZ-Ebene \equiv optische Ebene

YZ-Ebene \equiv Tangentialebene T_1

Einer Drehung $\Delta\varphi$ von T_2 um die Y-Achse entspricht eine Drehung $\Delta\varphi$ des Lotes N in der optischen Ebene nach N' .

$$\beta_2'' = \arcsin \left[\frac{r}{nR} \sin(\alpha_1 + \Delta\varphi) - \Delta\varphi \frac{r}{nR} \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_1 + \Delta\varphi)} \right];$$

$$\alpha_2'' = \arcsin \left[\frac{r}{R} \sin(\alpha_1 + \Delta\varphi) - \Delta\varphi \frac{r}{R} \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_1 + \Delta\varphi)} \right].$$

Es besteht wieder entsprechend (19) die Beziehung

$$\Delta\varepsilon_2 = \Delta\varphi \frac{\partial \varepsilon_2''}{\partial \Delta\varphi}$$

Die Ableitung der Beziehung (21) für ε_2'' nach $\Delta\varphi$ wird nach einigen Umformungen zu

$$\frac{\partial \varepsilon_2''}{\partial \Delta\varphi} = +1 - \frac{r}{R} \frac{\cos(\alpha_1 + \Delta\varphi) - \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_1 + \Delta\varphi)} + \Delta\varphi \frac{\sin(\alpha_1 + \Delta\varphi) \cos(\alpha_1 + \Delta\varphi)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_1 + \Delta\varphi)}}}{\sqrt{1 - \left[\frac{r}{R} \sin(\alpha_1 + \Delta\varphi) - \Delta\varphi \frac{r}{R} \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_1 + \Delta\varphi)} \right]^2}}$$

$$+ \frac{\cos(\alpha_1 + \Delta\varphi)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_1 + \Delta\varphi)}} + \frac{r}{R} \frac{\cos(\alpha_1 + \Delta\varphi) - \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_1 + \Delta\varphi)} + \Delta\varphi \frac{\sin(\alpha_1 + \Delta\varphi) \cos(\alpha_1 + \Delta\varphi)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_1 + \Delta\varphi)}}}{\sqrt{n^2 - \left[\frac{r}{R} \sin(\alpha_1 + \Delta\varphi) - \Delta\varphi \frac{r}{R} \sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha_1 + \Delta\varphi)} \right]^2}}$$

Durch Vernachlässigung der Glieder mit dem Faktor $\Delta\varphi$ und der $\Delta\varphi$ in den Winkelfunktionen vereinfacht sich diese Beziehung und man erhält

$$\Delta\varepsilon_2 = \Delta\varphi \left[+1 - \frac{r \cos \alpha_1 - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \alpha_1}} - \frac{\cos \alpha_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}} + \frac{r \cos \alpha_1 - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{R \sqrt{n^2 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \alpha_1}} \right] \quad (22)$$

Für die Beziehungen (20) und (22) läßt sich eine Näherungslösung durch die Voraussetzung finden, daß die Scheibendicke d klein ist im Vergleich zum Krümmungsradius R . Diese Annahme dürfte bei Flugzeugverglasungen in den meisten Fällen zutreffen. In diesem Fall kann das Verhältnis r/R näherungsweise gleich 1 gesetzt werden. Beide Beziehungen vereinfachen sich dadurch zu der Formel

$$\Delta\varepsilon_2 = \Delta\varphi \left[\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - 1}{\cos \alpha_1} \right]^4 \quad (23)$$

die identisch mit der Näherungsformel (15) ist.

Auf die gleiche Weise ließe sich nachweisen, daß man mit denselben Vereinfachungen zu derselben Beziehung gelangt, wenn der Keilfehler z. T. innen, z. T. außen auftritt. Man kann daher die gesamte Ablenkungsänderung $\Delta\varepsilon_2$ als durch einen einzigen Keilfehler entstanden denken, der für die weitere Untersuchung immer an die Außenfläche der Scheibe gelegt wird. Damit stimmt überein, daß auch bei den Messungen der Einfluß der inneren und äußeren Keilfehler immer nur in ihrer Gesamtwirkung erfaßt werden kann.

Bisher wurde angenommen, der Keilfehler $\Delta\varphi$ habe eine solche Lage, daß das Lot N auf die Tangentialebene T_2 an den Übergangspunkt C des Sehstrahls sich bei der Drehung der Tangentialebene um $\Delta\varphi$ nur in der optischen Ebene bewege. In Bild 11 ist dieser Fall perspektiv dargestellt. Ein rechtwinkliges Koordinatensystem ist so an die Oberfläche der gekrümmten Scheibe

4) Diese Beziehung ist auch bei ebenen Scheiben gültig.

gelegt, daß der Ursprung mit dem Übergangspunkt C zusammenfällt, ferner die XZ -Ebene mit der optischen Ebene und die YZ -Ebene mit der Tangentialebene identisch ist. Bei einer Drehung der Ebene T_2 um die Y -Achse bewegt sich das Lot N in der XZ -Ebene nach N' .

Im allgemeinen wird aber ein Keilfehler $\Delta\chi$ vorliegen, der, wie Bild 12 zeigt, einer Drehung der Ebene T_2 um eine irgendwie in ihr liegende, durch den Punkt C gehende Achse $A-A$ entspricht. Das in C auf T_2 errichtete Lot macht dabei dieselbe Drehung $\Delta\chi$ nach N'' . Es genügt für die weitere Untersuchung nur die Bewegung des Lotes zu betrachten. Die Drehung $\Delta\chi$ des Lotes kann durch die zwei Teildrehungen $\Delta\varphi$ um die Y -Achse von N nach N' und $\Delta\psi$ um die Z -Achse von N' nach N'' entstanden gedacht werden.

Nach einer einfachen Formel der sphärischen Trigonometrie ist

$$\cos \Delta\chi = \cos \Delta\varphi \cos \Delta\psi.$$

Da es sich um sehr kleine Winkel handelt, kann man für diese Beziehung näherungsweise schreiben:

$$1 - \frac{\Delta\chi^2}{2} = \left(1 - \frac{\Delta\varphi^2}{2} \right) \left(1 - \frac{\Delta\psi^2}{2} \right)$$

$$= 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{2} - \frac{\Delta\psi^2}{2} + \frac{\Delta\varphi^2 \Delta\psi^2}{4}$$

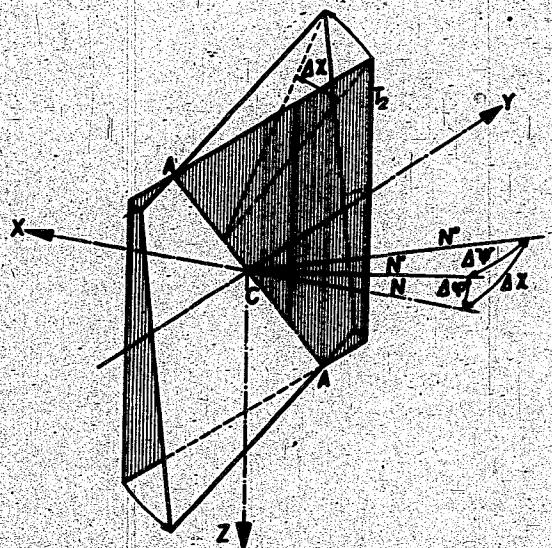


Bild 12. Zur Entstehung der Ablenkungsänderung infolge Keilfehlers; allgemeiner Fall.

Achsenkreuz $X Y Z$ wie in Bild 11.

Einer Drehung $\Delta\chi$ von T_2 um die Achse $A-A$ entspricht eine Drehung $\Delta\chi$ des Lotes N nach N'' , die sich in die beiden Teildrehungen $\Delta\varphi$ in der optischen Ebene und $\Delta\psi$ normal zur optischen Ebene zerlegen läßt.

Das letzte Glied kann als klein von höherer Ordnung vernachlässigt werden, so daß nach Umformung bleibt:

$$\Delta\chi^2 = \Delta\varphi^2 + \Delta\psi^2 \quad (24)$$

Diese Beziehung zeigt, daß es wegen der Kleinheit der Winkel möglich ist, die beiden Teildrehungen $\Delta\varphi$ und $\Delta\psi$ getrennt zu behandeln und die daraus berechneten Ablenkwinkeländerungen in der optischen Ebene und rechtwinklig dazu vektoruell wieder zusammenzusetzen.

Die rechtwinklig zur optischen Ebene auftretende Sehstrahlablenkung infolge der Keilfehlerkomponente $\Delta\psi$ ergibt sich nach Bild 13 aus

$$\Delta\varepsilon_z + \Delta\psi = n \Delta\psi$$

zu

$$\Delta\varepsilon_z = (n-1) \Delta\psi \quad (25)$$

Dieselbe Beziehung erhält man nach (23), wenn man $\Delta\psi$ für $\Delta\varphi$ und $\alpha_1 = 0$ setzt.

Nach diesen Überlegungen kann nun die Ablenkwinkeländerung infolge eines beliebig gerichteten Keilfehlers $\Delta\chi$ angegeben werden. Aufgrund der Verhältnisse

$$\Delta\varphi = \Delta\chi \cos \nu \quad (26)$$

$$\Delta\psi = \Delta\chi \sin \nu \quad (27)$$

und der Beziehungen (23) und (25) erhält man die Größe der Ablenkwinkeländerung infolge $\Delta\chi$ nach Bild 14 zu

$$\Delta\varepsilon_z = \Delta\chi \sqrt{\cos^2 \nu \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1} - 1 \right)^2 + \sin^2 \nu (n-1)^2} \quad (28)$$

Die Richtung der Ablenkwinkeländerung ergibt sich aus

$$\tau = \arctan \left[\operatorname{tg} \nu \frac{n-1}{\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1} - 1} \right] \quad (29)$$

Darin ist $\nu = \sigma - \mu$, (30), wobei σ die Richtung des Keilfehlers $\Delta\chi$ angibt (ν und τ s. auch Bild 31).

Wegen Bestimmung des Winkels μ s. Beziehung (40).

Die Abhängigkeit der Größen $\Delta\varepsilon_z$ und τ von α_1 und ν geht aus Bild 15 hervor.

d) Die gesamte Sehstrahlablenkung in der optischen Ebene durch die fehlerhafte Scheibe ist nach (17) und (23)

$$\varepsilon + \Delta\varepsilon_z + \Delta\varepsilon_y = \frac{1}{\varphi_m} \left[\operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}} \right] + \Delta\varphi \left[\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1} - 1 \right] \quad (31)$$

e) Die resultierende Sehstrahlablenkung im Raum

infolge des Formfehlers $\Delta\rho$ und des Keilfehlers $\Delta\chi$ erhält man aus

$$\varepsilon_m = \sqrt{(\varepsilon + \Delta\varepsilon_z + \Delta\varepsilon_y)^2 + \Delta\varepsilon_y^2} \quad (32)$$

und ihre Richtung

$$\omega = \lambda + \arctan \frac{\Delta\varepsilon_y}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_z + \Delta\varepsilon_y} \quad (\text{s. Bild 25}) \quad (33)$$

Der Winkel λ kann aus der Beziehung (41) bestimmt werden.

Bild 15. Verhältnis der Ablenkwinkeländerung $\Delta\varepsilon_z$ zum Keilfehler $\Delta\chi$ und Richtung τ der Ablenkwinkeländerung in Abhängigkeit von der Richtung ν des Keilfehlers und vom Einfallswinkel α_1 .

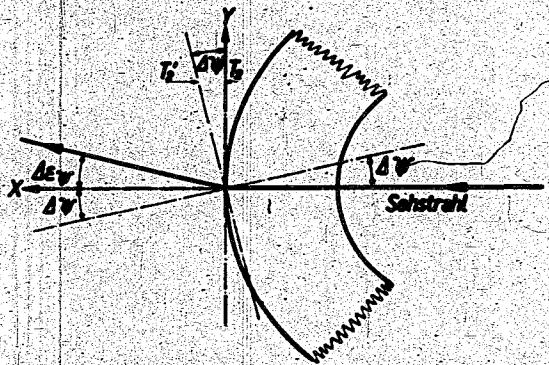


Bild 13. Zur Entstehung der Ablenkwinkeländerung infolge Keilfehlers spezieller Fall.

Achsenkreuz $X Y Z$ wie in Bild 11. Ablenkwinkeländerung $\Delta\varepsilon_z$ bei einer Drehung $\Delta\psi$ der äußeren Tangentialebene T_2 um eine in der optischen Ebene liegende Achse (Die optische Ebene geht rechtwinklig zur Bildebene durch die X -Achse).

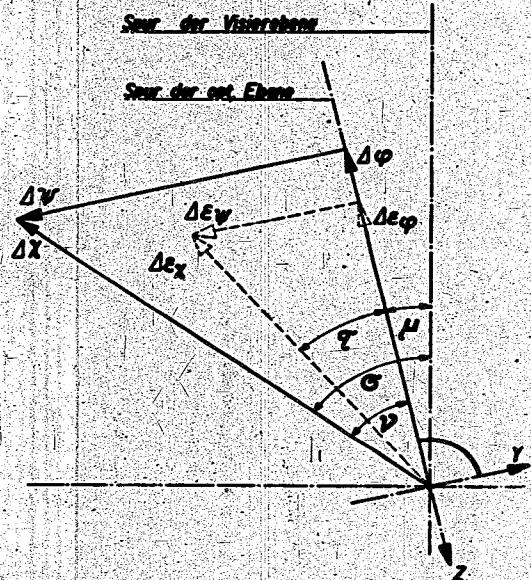
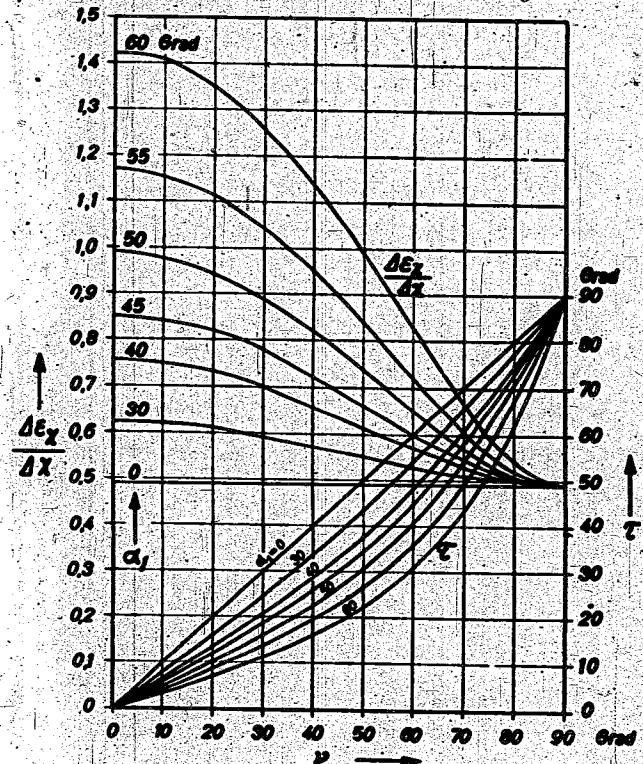


Bild 14. Die Richtung der Ablenkwinkeländerung $\Delta\varepsilon_z$ infolge Keilfehlers. Achsenkreuz $X Y Z$ wie in Bild 11. Ansicht aus der Richtung des Lotes auf die äußere Tangentialebene.



f) Die optische Unruhe

Unregelmäßigkeiten der Oberflächen (s. Tafel 1) sowie Schlieren und Bläschen im Glas führen zu Bildverzerrungen, die — da nach Beziehung (23) der Einfallswinkel von großem Einfluß ist — besonders bei schrägem Durchblick stark in Erscheinung treten. Kommt es beim Durchblick auf unbewegte Gegenstände zu Relativbewegungen zwischen Augen und Scheibe, besonders normal zur Blickrichtung, dann ändern sich die Bildverzerrungen, das Bild wird „unruhig“. Optisch unruhige Scheiben eignen sich nicht für Flugzeugverglasungen.

Da die Voraussetzungen der Abschnitte II. 1 und 5a nicht erfüllt werden und die Unregelmäßigkeiten des Glases nicht gesetzmäßig verlaufen, lassen sich diese Fehler auch nicht theoretisch erfassen. Sie lassen sich jedoch größenmäßig ausdrücken, indem beispielsweise beim lotrechten Durchvisieren der Ablenkwinkel $\Delta \varepsilon_i^*$ festgestellt wird. Ein dieser Ablenkung entsprechender fiktiver Keilfehler $\Delta \varphi^*$ könnte nach Beziehung (25) aus

$$\Delta \varphi^* = \frac{\Delta \varepsilon_i^*}{n - 1}$$

ermittelt werden⁵⁾. Da in diesen Werten auch der Einfluß einer etwa vorhandenen allgemeinen Keiligkeit enthalten ist, kann die Änderung der Werte $\Delta \varepsilon_i^*$ und $\Delta \varphi^*$ nach Größe und Richtung als ein Maß für die optische Unruhe angesehen werden. Soll auf dieser Grundlage die Güte von Scheiben bei der Abnahmeprüfung quantitativ beurteilt werden, so muß die Scheibe entweder kontinuierlich abgetastet werden, oder die Meßpunkte müssen sehr eng liegen, da es bei weiter Teilung der Meßpunkte denkbar wäre, daß zufällig Stellen mit kleinen Ablenkungen getroffen werden und dadurch, wie bei jedem Stichprobenverfahren, dazwischenliegende Fehler entgehen.

Wie bereits erwähnt, lassen sich solche, die optische Unruhe verursachende Unregelmäßigkeiten der Scheiben nicht theoretisch erfassen. Daher läßt sich auch der Einfluß von Keilfehlern, die bei lotrechtem Durchblick gemessen wurden, auf die Ablenkung bei schrägem Durchblick nicht berechnen, wenn es sich um unruhige Scheiben handelt. Dies läßt sich nach Bild 16 ohne weitere Begründung verstehen.

5) Eine andere, auf Reflexion beruhende Methode wird von Reil und Lerch in den Glastechnischen Berichten 1940, H. 5, S. 113, beschrieben.

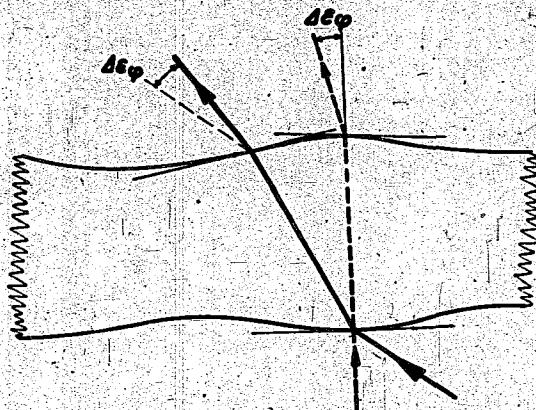


Bild 16. Verschiedenartiger Einfluß von Keilfehlern infolge „optischer Unruhe“ bei lotrechtem und bei schrägem Durchblick. Bildebene = optische Ebene

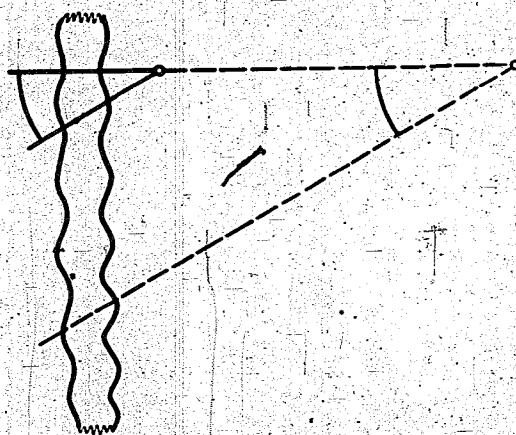


Bild 17. Verbesserung der Sicht durch optisch unruhige Scheiben bei kleinerer Entfernung der Augen von der Scheibe

Es wird manchmal empfohlen, zur Verbesserung der Sicht bei unruhigen Scheiben mit den Augen sehr nahe an die Scheibe heranzugehen. Diese Verringerung der Bildverzerrungen erklärt sich, wie Bild 17 zeigt, daraus, daß bei gleichem Bildwinkel bei geringer Entfernung der Augen von der Scheibe weniger Unregelmäßigkeiten eingeschlossen werden, als bei größerer Entfernung. Es ist jedoch zu beachten, daß die Sehstrahlablenkung beim Visieren hiervon nicht berührt wird und unabhängig von der Entfernung der Augen von der Scheibe ist.

Fortsetzung folgt in Heft 2

Elektrisches Drehmagnetsystem für großen Ausschlagsbereich

W. Fischer, Berlin-Adlershof

C 7

Bericht des Instituts für Bordgerät und Navigation der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V.

Übersicht: Drehmagnetgeräte wirken physikalisch wie Drehspulgeräte, haben jedoch im Gegensatz zu diesen zur Vermeidung der stromführenden Federn feststehende Spule und drehbare Magnetanordnung. Es wird im folgenden über ein neues Drehmagnetsystem für 270° berichtet, dessen drehbare Magnetanordnung das notwendige geringe Gewicht hat und das eine für viele meßtechnische Zwecke genügend kleine Verlustleistung benötigt.

Gliederung

- I. Vorüberlegungen
- II. Systemaufbau
- III. Magnetanordnung
- IV. Verlustleistung
- V. Verwendungsmöglichkeiten
- VI. Zusammenfassung

I. Vorüberlegungen

In elektrischen Meßgeräten sinkt bei Verringerung des Systemgewichts für gleichbleibende Einstellgenau-

igkeit der Aufwand an elektrischer Verlustleistung. Dieses gilt auch für Drehmagnetgeräte, die wegen des Fortfalles der stromführenden Federn und wegen ihres einfachen konstruktiven Aufbaues neuerdings stark in Erwägung gezogen werden, obwohl bei ihnen infolge des verringerten Flusses auch das Drehmoment zurückgeht. Bei der Herstellung, vor allem bei Serienbau, ergeben nun im wesentlichen die Auswuchtschwierigkeiten eine untere Grenze für das spezifische Einstellmoment. Da erfahrungsgemäß bei den üblichen Herstellungsverfahren der Luftfahrtbordüberwachungsgeräte mit einem

Unwuchtmoment von ungefähr 1 mgcm bei 1 g Beschleunigung gerechnet werden muß, ist bei Zulassung eines Unwuchtfehlers von 2% des Vollausschlags bei 1g ein spezifisches Einstellmoment von 50 mgcm pro Vollausschlag zu fordern. Es ergibt sich damit für ein bestimmtes Lager eine oberste Grenze für das Systemgewicht, weil ja eine gewisse Einstellgenauigkeit immer gefordert wird. Wir schätzen dieses zulässige Gewicht für die Klein- und Kleinstnorm, deren Geräteausführungen in der Regel nur Überwachungszwecken dienen und bei denen auch unter normalen Ablesebedingungen bei 270° Ausschlagbereich nur noch die — für die vorgesehenen Zwecke aber genügende — Ablesegenauigkeit von 1,2 bzw. 1,8% vorliegt¹⁾, auf 1,5 bis 2 gr, weil für diese Verwendungszwecke eine Steigerung der Einstellgenauigkeit über die Ablesegenauigkeit sicher nicht gewünscht wird. Es besteht nun die Aufgabe, mit diesem Gewicht des beweglichen Systems eine Magnetanordnung zu finden, die möglichst viel wirksamen Fluß bereitstellt, damit sich das geforderte Einstellmoment bei möglichst geringer Stromdurchflutung und damit Verlustleistung ergibt, um das Meßsystem für möglichst viele meßtechnische Aufgaben heranziehen zu können.

II. Systemaufbau

Zur Erreichung möglichst großer magnetischer Energie bei geringem Gewicht der Magnetanordnung sucht man zunächst die ganze Magnetanordnung aus Magnetstahl aufzubauen. Die meßtechnische Aufgabe verlangt jedoch andererseits in manchen Fällen (z. B. bei Quotientengeräten) die genaue Einhaltung eines bestimmten Feldverlaufes, was dann eher möglich ist, wenn die das Feld begrenzenden Flächen aus Weicheisen bestehen, weil sonst die Art der Magnetisierung weitgehend das Feld mitbestimmt, was zusätzliche Vorsichtsmaßnahmen bei der Herstellung erfordern würde. Im folgenden ist nun eine Anordnung angegeben, bei der neben dem Magneten nur der eine Polschuh wesentlich zum Gewicht des beweglichen Systems beiträgt, weil die sowieso notwendige Achse geringen Gewichts gleichzeitig den zweiten Weicheisenpol bildet. Die Anordnung besitzt einen relativ hohen Luftleitwert, so daß sie den Bedingungen für höchstwirksamen magnetischen Aufbau entsprechend bemessen werden kann²⁾.

Das bewegliche System besteht aus einem in der feststehenden Spule drehbaren Weicheisenring, der durch den radial angeordneten Magneten mit der Weicheisenachse fest verbunden ist, Bild 1. Es bildet sich also ein radiales Feld zwischen dem Ring- und dem Achsenpol aus, so daß bei Stromdurchgang in der Spule sich zwischen Spule und Magnetanordnung eine Kraftwirkung ergibt, die die Magnetanordnung zu drehen sucht.

III. Magnetanordnung

Auffallend an der Magnetanordnung ist, daß der Magnet auf einen seiner eigenen Länge gleichen Luftspalt arbeitet. Es wird dies möglich, weil der für optimales Arbeiten des Magneten notwendige Entmagnetisierungsfaktor³⁾ $tg\alpha = \frac{\tau}{\mu_v} \cdot \frac{F_m}{F_l} \cdot \frac{l_l}{l_m}$ trotz des großen Verhältnisses von Luftspalllänge zu Magnetlänge durch genü-

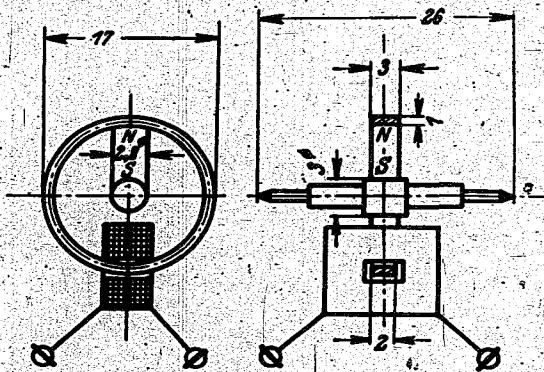


Bild 1 und 2. Schematische Darstellung und Bild eines Drehmagnetgeräts mit Achsenpol für großen Ausschlagbereich

gend kleines Verhältnis von Magnetquerschnitt zu Luftspaltquerschnitt erreicht wird. Es nimmt nämlich der Magnet am Achsenpol und noch mehr am Ring nur einen Teil des Kreisumfanges ein und außerdem ist die Polachse über die Höhe des Magneten hinaus aus magnetisch leitendem Material gemacht, so daß bis zu den Lagerzapfen hin magnetische Kraftlinien austreten können (großes F_l). Bei genügend langer Achse herrscht ein wesentlicher magnetischer Widerstand sogar nur noch in der Nähe des äußeren Ringes, der naturgemäß mit wachsendem Durchmesser kleiner wird. Man hat es also durchaus in der Hand, den Magnetstahl zum optimalen Arbeiten zu bringen. Da eine beliebige Vergrößerung von Achslänge und Ringdurchmesser jedoch aus konstruktionsgründen und wegen der Notwendigkeit der Geringshaltung des Gewichts nicht zugänglich ist, sorgt man für das notwendige Verhältnis der Querschnitte F_m/F_l durch geeignete Bemessung des Magnetquerschnitts F_m . Damit wird jedoch die Größe des wirksamen magnetischen Flusses festgelegt. Bei Stählen mit kleinem $tg\alpha_{opt}$ muß also die Magnetquerschnittsfläche kleiner werden bei sonst gleichen Abmessungen.

Die Durchrechnung macht wegen des selbst durch Feldbilder nicht mehr erfassbaren Feldverlaufs Schwierigkeiten. Zur Kennzeichnung sind deshalb in Bild 1 die Maße des in Bild 2 gezeigten Versuchsgeräts eingetragen. Der Magnet besteht aus dem im Magnetfeld wärmebehandelten Stahl Orstit 190-23-65. Das Gesamtgewicht des beweglichen Systems beträgt mit Ausgleichsgewichten und Zeiger 1,7 gr.

Diese Anordnung ergibt bei 5,18 A Durchflutung ein mittleres Drehmoment von etwa 50 mgcm. Das Feld muß nun nicht nur über 270° sondern wegen der Rähmbreite und den notwendigen Anfangs- und Endge-

1) Vergl. v. Grundherr: Betriebssicherheit und Meßgenauigkeit der elektrischen Bordgeräte. Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung 1937 Seite III 58.

2) Vergl. W. Fischer: Berechnung von Stahlmagneten, Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung 1937, Seite III 61.

3) Siehe W. Fischer l. c. Formel (6).

bieten in einem Bereich von etwa 330° herrschen. Mit diesen Zahlen errechnet sich ein Fluß von etwa $2 \cdot 300$ Maxwell. Die Belastung des Magneten beträgt also, wenn man schätzungsweise 10% Streuung hinzurechnet, 660 Maxwell, so daß sich bei dem Magnetquerschnitt von $6,15 \text{ mm}^2$ eine Magnetinduktion von 10700 Gauß (!) ergibt. Dies entspricht dann gerade dem optimalen Arbeitspunkt des verwendeten Stahles, der zwischen 10000 und 11000 Gauß liegt. Der Ringquerschnitt beträgt an der Stelle, wo der Fluß in den Ring eintritt, 3 mm^2 , so daß im Ring sich eine Induktion von 10000 Gauß ergibt, weil der Fluß sich hälftig nach beiden Seiten in dem Ring teilt.

Die Magnetisierung wird zwischen den Polen eines starken Elektromagneten in fertig gebautem Zustand vorgenommen. Abgleichung und Stabilisierung geschieht wie üblich in einem magnetischen Wechselfeld.

IV. Verlustleistung

Wir erörtern oben die Notwendigkeit eines geringen Systemgewichts. Dies hat eine Beschränkung des wirksamen Flusses zur Folge. Dieser Fluß ist nun irgendwie über den Ausschlagsbereich verteilt. Wir bekommen dann aus der Formel für das Drehmoment

$$M_D = \Theta \cdot \frac{d\Phi}{dz} \quad \text{wobei } \Phi \text{ der jeweils von der Spule umfaßte}$$

Fluß ist, die Durchflutung $\Theta = i \cdot w$. Die elektrische Verlustleistung errechnet sich dann zu $N = \Theta^2 \cdot \frac{\rho \cdot l_m}{k \cdot F}$.

Hierbei ist ρ der spezifische Widerstand, l_m die mittlere Windungslänge, F die Spulenquerschnittsfläche (nicht zu verwechseln mit den oben benützten Bezeichnungen) und k der Kupferfüllfaktor. Nach Wahl einer Anordnung, die höchsten wirksamen Fluß zur Verfügung stellt, kann bei einmal gestellter Forderung in bezug auf Einstellgenauigkeit (also Gewicht, also Magnetquerschnitt, also Fluß, also Durchflutung) die Verlustleistung nur noch durch die Spulenausbildung verändert werden, weil ja Θ und ρ (Kupfer) festliegt und auch k kaum geändert werden kann (etwa 0,4 bis 0,6).

Es ist also der Formel entsprechend notwendig, daß die Spule möglichst eng (Herstellungstoleranzen) um das Eisen liegt und daß die Spulenfläche möglichst groß ist. Es ist hier jedoch zu beachten, daß bei Wickelhöhenvergrößerung auch die mittlere Windungslänge steigt, weshalb die Vergrößerung der Wickelfläche durch breitere Spule erfolgen sollte. Dies hat jedoch auch eine Grenze durch den Ausschlagsbereich. Der Versuch, die Herabsetzung des Ausschlagsbereiches durch größeren Ring zu vermeiden, führt zu höherem Systemgewicht, oder bei gleichem Gewicht zu kleinerem Magneten, also geringerem Fluß und damit erhöhter Durchflutung (Leistung).

Bei unserem ausgeführten Muster sind zur Erreichung von 50 mgcm bei einem wirksamen Fluß von $2 \cdot 300$ Maxwell 5,18 AW Durchflutung nötig. Bei 270° Ausschlagsbereich hat die Spule eine Wickelfläche von 11 mm^2 und eine mittlere Windungslänge von 25 mm. Die elektrische Verlustleistung beträgt also $\sim 2 \text{ mW}$. Es ist dabei gleichgültig, ob viele Windungen dünnen Drahtes (Spannungsmesser) oder wenig Windungen dicken Drahtes (Strommesser) verwendet werden. Wir können also z. B. ein Gerät für 100 mA Strom und 20 mV Spannungsabfall aufbauen.

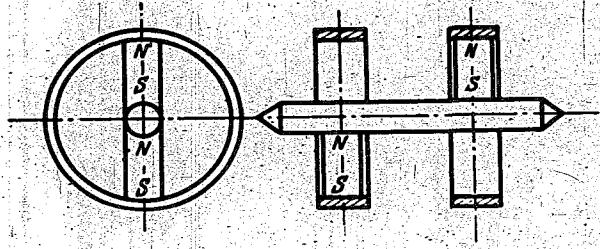


Bild 3. Drehmagnetanordnung mit zwei Ringen für homogenes Feld

V. Verwendungsmöglichkeiten

Das eigentliche Meßsystem geringen Gewichts kann nun in Geräten verschiedenster Art Verwendung finden. Bei einem bestimmten Meßzweck ist natürlich jeweils ein bestimmter Feldverlauf vorgeschrieben. Homogener Feldverlauf, wie er im allgemeinen für die Intensitätsmeßgeräte verlangt wird, tritt bei gleichmäßiger Ringhöhe bei niedriger Ringinduktion auf. Unhomogenen Feldverlauf erhält man bei niedriger Ringinduktion durch Bemessung der Ringhöhe. Bei gleichmäßiger Ringhöhe kann man ein unhomogenes und zwar in der Ausschlagsmitte niedrigeres Feld auch durch hohe Ringinduktion erreichen. Die Krümmung des Feldverlaufes wird dabei durch die Ringinduktion, den Magnet- und den Luftwiderstand bestimmt. Je höher die Induktion ist, desto stärker ist die Krümmung.

Derartige gekrümmte Feldverläufe werden bei Quotientengeräten gebraucht. Durch Alterung des Magneten kann dabei auf einfache Weise die Bemessung der Ringinduktion und damit die Abstimmung der Magnetanordnung auf ein bestimmtes Quotientenverhältnis erfolgen. Mit hochgesättigten dünnen Ringen, wie sie aus Gewichtsgründen angestrebt werden, lassen sich also nicht beliebig kleine Quotientenverhältnisse messen, weil der Kreuzungswinkel aus Leistungs- und Herstellungsgründen nicht unter eine bestimmte Grenze gehen kann.

Eine große Gleichmäßigkeit des Kurvenverlaufes auch bei dünnen Ringen kann man durch die Anwendung einer magnetischen Kompensationsschaltung erreichen⁴⁾, bei der 2 Ringe jeweils so zusammenarbeiten, daß die Kraftlinien mit größerem Spannungsabfall in dem einen Ring erleiden und umgekehrt, Bild 3. Damit ergibt sich auch eine gegenseitige Auswuchtung der einseitig in jedem Ring angeordneten Magnete. Die mit dieser Anordnung verbundene Erhöhung des Leitwertes läßt größere Magnetquerschnitte (größerer wirksamen Fluß) zu. Es werden dann zweckmäßig zwei Spulen angeordnet.

Oberhaupt lassen mehrere Ringe auf einer Achse auf höchst einfache Weise den Aufbau der verschiedensten Arten von Summen-, Differenzen- und Quotientenmessern zu, ohne die jeweiligen Schwierigkeiten der zahlreichen Stromzuführungsfedern überwinden zu müssen.

Bei der Verwendung des Systems als Intensitätsmesser muß natürlich ein Federmoment vorhanden sein. Wird dies durch eine mechanische Feder erreicht, so genügt eine einzige Feder. Bei der Verwendung als Quotientengerät fällt die Meßfeder weg und man hat lediglich zur Vermeidung von Irrtümern bei Spannungsausfall dafür zu sorgen, daß der Zeiger aus dem Skalenfeld gedreht wird, was durch eine kleine Feder (mechanisch oder magnetisch) sehr leicht geschehen kann.

4) Siehe DRP Nr. 705539 der DVL.

Die Kleinheit des Systems erlaubt seine Verwendung für Geräte mit kleinsten Außenabmessungen. Der Aufbau von Profilgeräten ist auf höchst einfache Weise durchzuführen. Die Beschriftung kann dabei sogar unmittelbar auf dem Ringpol angebracht werden.

VI. Zusammenfassung

Die neuerdings wegen ihres für Großserie besonders geeigneten Aufbaus stark in Erwägung gezogenen Drehmagnetgeräte werden besser, wenn das bewegliche System leichter gemacht wird. Die starken Flugzeugbeschleunigungen und die notwendigen Herstellungstoleranzen verlangen ein ziemlich hohes spezifisches Ein-

stellmoment. Damit und mit den zur Zeit zur Verfügung stehenden Lagern wird bei einer bestimmten Einstellgenauigkeitsforderung das Höchstgewicht des beweglichen Systems festgelegt. Zur Erreichung geringer Durchflutung und damit geringer Verlustleistung ist ein möglichst großer wirksamer Fluß bereitzustellen. Dieser Aufgabenstellung genügt weitgehend eine Achsenpolanordnung, bei der ein Magnet radial an einer Weichenachse und einem dazu konzentrischen Weichenring, der innerhalb der Stromspule läuft, befestigt ist. Es werden die Wirkungsweise und die grundlegenden Überlegungen zu der Bemessung der Anordnung näher erläutert und einige Hinweise über die Verwendungsmöglichkeiten des Systems gegeben.

Zur Theorie der Beugung einer ebenen Schallwelle an der Kugel

Kurzbericht über eine Arbeit von L. Schwarz, die demnächst in der Akustischen Zeitschrift erscheinen soll.

Das Problem der Beugung ebener Schallwellen an einer schallharten Kugel gehört zu den mathematisch einfachsten Beugungsproblemen und verdient nicht nur als solches Interesse, sondern hat auch eine unmittelbare praktische Bedeutung für die akustische Meßtechnik. Für quantitative Schalldruckmessungen im freien Schallfeld werden die Mikrophone häufig in Kugeln eingebaut, und man möchte wissen, wie das Verhältnis des Schalldrucks p am Mikrophon zum Schalldruck p_0 im freien Schallfeld ist. Der Abstand der Schallquelle ist dabei meistens so groß, daß man die Schallwellen mit genügender Näherung als eben betrachten kann.

Die analytische Lösung des vorliegenden Beugungsproblems ist zwar seit Rayleigh bekannt. Ihre numerische Auswertung ist jedoch insofern mit Schwierigkeiten verknüpft, als die angegebene Reihenentwicklung insbesondere für höhere Werte der Parameter $\omega = kr_0$ schlecht konvergiert; $k = v/c$ ist die Wellenzahl, r_0 der Kugelhalbmesser. Die im Schrifttum vorliegenden Zahlenangaben beschränken sich daher meistens auf kleine Werte von ω und den Berührungspunkt der ebenen Wellenfront mit der Kugel, den Achsenpunkt. Diese Angaben waren für den oben genannten Zweck unzureichend. Sie sind auch unter sich nicht einheitlich normiert und zum Teil sehr ungenau.

Daher wurde das vorliegende Problem von Grund auf neu bearbeitet mit dem Ziele, Zahlentafeln für die technisch wichtigen Funktionen zu berechnen, welche hinsichtlich der reduzierten Frequenz ω genügend weit reichen und hinsichtlich des Azimutes ϑ genügend fein unterteilt sind.

Zunächst wird die Formel für das Geschwindigkeitspotential des durch die Kugel verursachten Zusatzfeldes aus der Wellengleichung abgeleitet. Daraus wird folgende Formel für das vom Faktor $exp ivt$ befreite komplexe Geschwindigkeitspotential des Gesamtfeldes im Außenraum gewonnen:

$$\psi(\omega, kr, \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n P_n(\cos \vartheta)}{n H_{n+1/2}^{(2)}(\omega) - \omega H_{n+3/2}^{(2)}(\omega)} \cdot \frac{J_{n+1/2}(kr) n J_{n+1/2}(\omega) - \omega J_{n+3/2}(\omega)}{H_{n+1/2}^{(2)}(kr) n H_{n+1/2}^{(2)}(\omega) - \omega H_{n+3/2}^{(2)}(\omega)} \quad (31)$$

J, H sind Zylinderfunktionen, P Kugelfunktionen. Für das Potential des Gesamtfeldes an der Kugeloberfläche $r = r_0$ ergibt sich aus (31) speziell

$$\psi(\omega, \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \omega}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n P_n(\cos \vartheta)}{n H_{n+1/2}^{(2)}(\omega) - \omega H_{n+3/2}^{(2)}(\omega)} \quad (35)$$

Für diesen Spezialfall wurde aus (35) das Verhältnis der Schalldruckamplitude zwischen gebeugter und ungestörter Welle

$$\frac{p}{p_0} = \psi \quad (33)$$

sowie der Phasenwinkel der gebeugten Welle

$$\varphi = \text{arc } \psi - \omega \cos \vartheta \quad (34)$$

berechnet. Anstelle von Zylinderfunktionen halbganzer Ordnung wurden Polynome $f_n(\omega), g_n(\omega)$ verwendet, die rekursiv berechnet worden sind.

Die Tafeln enthalten die genannten Funktionen auf 5 Dezimalen für die Parameterwerte

$$\omega = 1, 2, 3, \dots, 10$$

$$\vartheta = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \dots, 180^\circ$$

Um eine spätere Erweiterung des Tafelwerks zu erleichtern, sind auch die Zahlenwerte der erwähnten Polynome und die aus ihnen berechneten Summenfaktoren A_n, B_n tabuliert. Zur Veranschaulichung und zum Zwecke der graphischen Interpolation sind sämtliche berechneten Funktionen in geeigneter Weise graphisch dargestellt, teils im kartesischen, teils im Polarkoordinaten. Eine Besprechung des vorhandenen Schrifttums schließt die Arbeit.

H. G. Küssner

Berichtigung!

In der in Technische Berichte Bd. 9 (1942) Heft 5 S. 133 erschienenen Arbeit von R. Focke: „Thermodynamik in strömenden Gasen“ sind folgende Berichtigungen vorzunehmen.

S. 133 linke Spalte Zeile 2 muß es heißen Erwärmung statt Erwartung

In Gleichung 5b fehlt rechts der Faktor $\frac{c^2}{2g}$

S. 136 linke Spalte Zeile 11 muß es heißen 1 at abs 0° C statt 1 at als 0° C

In Gleichung (19) fehlt der Zähler 1 auf dem Bruchstrich vor der geschwungenen Klammer.

Über die Berechnung der Druckverteilung von Profilen

F. Riegels, Göttingen

P 31 11, P 31 13

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V. Institut für theoretische Aerodynamik

Übersicht: Die folgenden Ausführungen weisen auf ein einfaches numerisches Verfahren zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen in ebener Strömung hin, welches in der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen (AVA) seit einiger Zeit in Benutzung ist und mit wenig Aufwand gute Ergebnisse liefert. Die Grundlagen des Verfahrens sind bereits vom Verfasser und H. Wittlich ausführlich dargelegt [1]¹⁾. Jetzt sollen lediglich einige weitere Tabellen mitgeteilt werden, die der unmittelbaren Anwendung des Verfahrens dienen, und eine Ergänzung gegeben werden, die die Wirkung der dicken Saugseitengrenzschicht auf die Ausbildung des Auftriebs betrifft. Dadurch wird es möglich, auch bei hohen c_x -Werten außerordentliche Zuverlässigkeit der Rechnung zu erzielen, wie Vergleiche mit Windkanalmessungen bestätigen. Eine Umrechnung gemessener oder gerechneter Druckverteilungen auf andere Anstellwinkel ist näherungsweise auf einfache Weise möglich.

Gliederung

- I. Das Verfahren der Druckverteilungsberechnung
- II. Beeinflussung der Druckverteilung durch die Saugseitengrenzschicht
- III. Umrechnung gemessener oder gerechneter Druckverteilungen auf andere Anstellwinkel
- IV. Schrifttum
- V. Anhang. Erläuterungen zu den Tabellen A bis D

I. Das Verfahren der Druckverteilungsberechnung

Für ein beliebiges Profil, das durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{l}{2} \cos \varphi$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\varphi \quad (1)$$

gegeben ist, (vgl. Bild 1), ist die Geschwindigkeitsverteilung an der Profiloberfläche durch die geschlossene Näherungsformel

$$w = \frac{\cos \alpha \left(-\frac{1}{2} \sin \varphi - \sum v a_n \cos n\varphi - \sum v b_n \sin n\varphi + \sum v a_n \right) + \sin \alpha \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \varphi - \sum v a_n \sin n\varphi + \sum v b_n \cos n\varphi - \sum v b_n \right)}{\sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 \varphi + \left(-\sum v a_n \sin n\varphi + \sum v b_n \cos n\varphi \right)^2}} \quad (2)$$

anzugeben, wie T. Moriya zuerst gezeigt hat. Diese Darstellung erfordert die Fourierreentwicklung der Profilmform nach dem durch die erste der beiden Gleichungen (1) definierten Kreiswinkel φ (Bild 1). Das neue AVA-Verfahren geht nun noch einen Schritt weiter, indem es auch diese Fourierreentwicklung noch vermeidet, und zwar durch Anwendung mechanischer Quadraturverfahren. Dadurch wird erreicht, daß in die Druckverteilungsberechnung nur noch die Profilkordinaten x und y eingehen. Die Ordinaten y sind dabei an den fest vorgegebenen Stellen x zu nehmen. Diese Stellen sind bei gleichen Winkelabständen φ gewählt, so daß die Punkte in der Umgebung der Profilhinterkante dichter als in Profilmitte liegen²⁾.

Ist die Anzahl der vorgegebenen Punkte gleich $2N$

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumverzeichnis am Ende der Arbeit.

²⁾ Weitere Zwischenpunkte für die Druckverteilung lassen sich leicht durch Interpolation zwischen den unten eingeführten Werten $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ und $D(n)$ (aus Tabelle A bis D) gewinnen, wenn man diese über $n = \frac{N}{180} \varphi$ aufträgt.

³⁾ Die x_m bzw. x_n sind in den Tabellen so gewählt, daß $x = 0$ der Profilhinterkante und $x = 1$ der Profilhinterkante entspricht (also anders als in Gl. (1)).

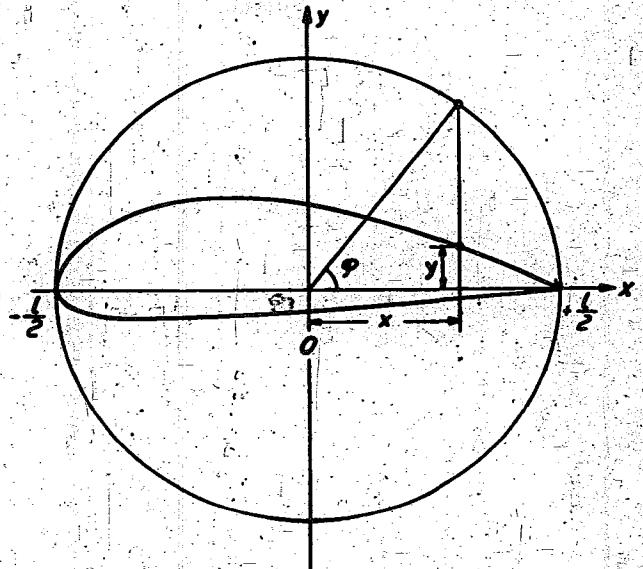


Bild 1. Zur Definition der Koordinaten

und ist an der Stelle x_m ³⁾ der Wert der Profilkordinate auf der Saugseite durch y_m , der auf der Druckseite

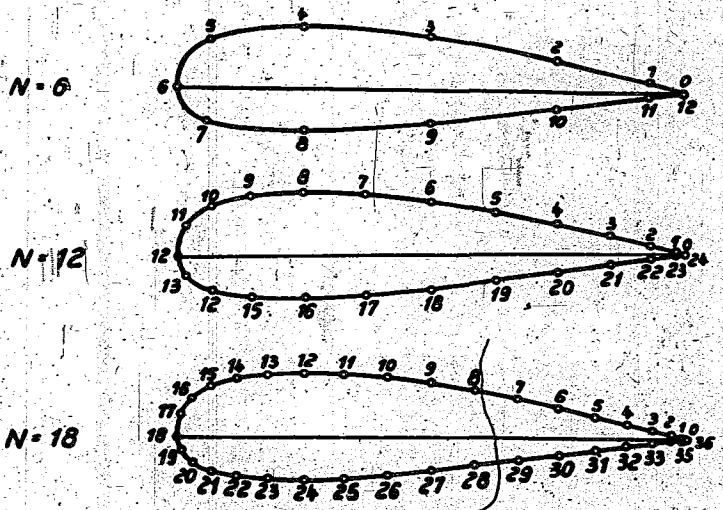


Bild 2. Die Lage der Punkte bei den Punktzahlen, für die die Tabellen berechnet sind

durch y_{2N-m} gegeben (Bild 2), so werden die Fourierreihen der Gl. (2) durch die folgenden endlichen Summen ersetzt, deren Glieder aus den Produkten der Profildordinaten mit festen, ein für allemal berechneten Koeffizienten bestehen:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^{N-1} y b_m \sin \nu \varphi &= \sum_{m=1}^{N-1} A_{mn} (y_m - y_{2N-m}) = A_n \\ \sum_{m=1}^{N-1} y b_m \cos \nu \varphi &= \sum_{m=1}^{N-1} B_{mn} (y_m - y_{2N-m}) = B_n \\ \sum_{m=1}^{N-1} y a_m \cos \nu \varphi &= \sum_{m=1}^{N-1} C_{mn} (y_m + y_{2N-m}) = C_n \\ \sum_{m=1}^{N-1} y a_m \sin \nu \varphi &= \sum_{m=1}^{N-1} D_{mn} (y_m + y_{2N-m}) = D_n \end{aligned} \right\} (3)$$

In Ergänzung von [1] seien hier die Formeln für die Koeffizienten A_{mn} bis D_{mn} allgemein für jede beliebige Punktzahl $2N$ angegeben.

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} &= \frac{(-1)^{m+n} - 1}{4N} \left[\frac{1}{1 - \cos \frac{\pi(m-n)}{N}} - \frac{1}{1 - \cos \frac{\pi(m+n)}{N}} \right] && \text{für } m \neq n \\ &= \frac{N}{4} && \text{für } m = n \\ B_{mn} &= \frac{(-1)^{m+n+1}}{4} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(m-n)}{2N} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(m+n)}{2N} \right] && \text{für } m \neq n \\ &= -\frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi m}{N} && \text{für } m = n \\ C_{mn} &= \frac{(-1)^{m+n} - 1}{4N} \left[\frac{1}{1 - \cos \frac{\pi(m-n)}{N}} + \frac{1}{1 - \cos \frac{\pi(m+n)}{N}} \right] && \text{für } m \neq n \\ &= \frac{N}{4} && \text{für } m = n \\ D_{mn} &= \frac{(-1)^{m+n}}{4} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(m-n)}{2N} - \operatorname{ctg} \frac{\pi(m+n)}{2N} \right] && \text{für } m \neq n \\ &= -\frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi m}{N} && \text{für } m = n \end{aligned} \right\} (4)$$

Unter Benutzung der eingeführten Größen schreibt sich Gl. (2) in der Form

$$\frac{w}{V} = \frac{\cos z (a_n - A_n - C_n + C_0) + \sin z (b_n + B_n - B_0 - D_n)}{\sqrt{c_n + (B_n - D_n)^2}} \quad (5)$$

oder abgekürzt

$$\frac{w}{V} = S = A \cos z + B \sin z \quad (6)$$

bzw.

$$\frac{w}{V} = S = C \cos z + D \sin z$$

für symmetrische bzw. beliebig gewölbte Profilverfahren. Die Ausdrücke A, B, C, D werden mit den unten angegebenen Tabellen, die für $N = 6, N = 12$ aufgestellt wurden⁴⁾, auf einfache Weise berechnet.

Zur Bestimmung der Anstellwinkelempfindlichkeit dc_a/dz und des Nullauftriebswinkels z_0 dienen beim vorliegenden Verfahren die Formeln⁵⁾.

$$\frac{dc_a}{dz} = 2\pi (1 + 2B_0) \quad (7)$$

$$z_0 = \operatorname{arctg} \frac{C_0}{0,5 + B_0} \quad (8)$$

Wie die ganze Theorie, so stellen auch diese Formeln Näherungswerte dar, die von den exakten Werten nur ganz wenig abweichen. Vergleiche der Druckverteilung mit Messungen oder anderen Theorien haben daher zweckmäßig bei gleichen Auftriebsbeiwerten stattzufinden.

Bild 3 gibt einen Vergleich von Rechnungen mit verschiedener Punktzahl am Beispiel des Joukowski-Profiles J 215 (2% Wölbung, 15% Dicke), wobei die Punkte für $N = 6$ zuerst ausgezogen und nachträglich dann erst die Punkte für $N = 18$ und nach der exakten Theorie eingetragen wurden. In Bild 4 ist für das Profil NACA 23012 ein Vergleich mit Messungen für mehrere Auftriebsbeiwerte c_a durchgeführt, wobei der Anstellwinkel mit (7) und (8) jeweils so bestimmt ist, daß der gemessene c_a -Wert erreicht wurde. Die Übereinstimmung ist wohl für die meisten praktischen Fälle völlig ausreichend.

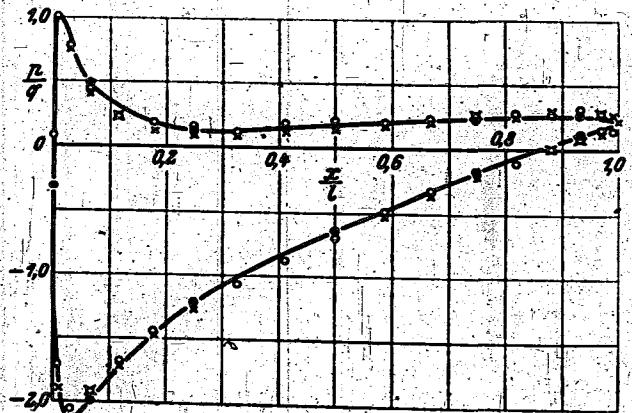


Bild 3. Vergleich der Rechnungen mit verschiedener Punktzahl mit den Werten der exakten Theorie für das Joukowski-Profil J 215.

○ — Koordinatenverfahren $N = 6$
 × — Koordinatenverfahren $N = 18$
 — — — exakte Rechnung } $c_a \sim 1.0$

4) Eine Tabelle für $N = 18$ findet sich in [1].

5) B_0 und C_0 sind die Werte von B_n und C_n bei $n = 0$ in Tabelle B und C.

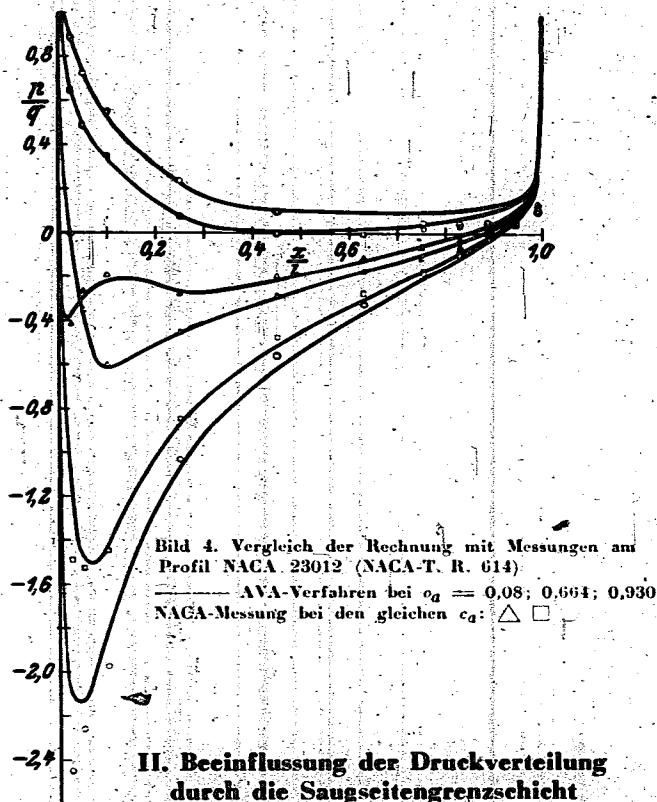


Bild 4. Vergleich der Rechnung mit Messungen am Profil NACA 23012 (NACA-T. R. 614).
 ———— AVA-Verfahren bei $\alpha = 0,08; 0,664; 0,930$
 NACA-Messung bei den gleichen α : \triangle \square

II. Beeinflussung der Druckverteilung durch die Saugseitengrenzschicht

Bei größeren α -Werten weisen die Messungen im allgemeinen an der Saugseite etwas größere Unterdruckspitzen und einen etwas steileren Druckanstieg auf als die Rechnung bei gleichem α ergibt. Dies ist dadurch bedingt, daß für ein bestimmtes α der praktisch gemessene Anstellwinkel erheblich größer ist als der theoretische, weil die Grenzschicht auf der Saugseite des Profils die Ausbildung der Zirkulation beeinflusst. Um diesem Verhalten Rechnung zu tragen, überlagert man nach Betz eine, dem gemessenen Auftrieb entsprechende, geringere Zirkulation, so daß der hintere Staupunkt etwas auf die Saugseite des Profils verlegt wird, wobei man die entstehende Umströmung der Hinterkante in Kauf nimmt.

Pinkerton [3] erfüllt auch die Abflußbedingung noch, indem er die gewünschte Auftriebsverminderung durch eine nachträgliche kleine Änderung des Profils — etwa in der in Bild 5a skizzierten Weise durch Hochbiegen der Hinterkante — erhält, so daß die neue Hinterkante etwa in der Mitte des bei dem betreffenden Anstellwinkel vorhandenen Totwassergebietes liegt.

Durch sinngemäße Anwendung der von R. M. Pinkerton und A. Walz [4] eingeführten Ansätze auf das neue Verfahren ergibt sich für die abgeänderte Druckverteilung die Gleichung

$$\frac{w}{V} = \frac{1 - \frac{\Delta z}{2} \sin \varphi}{\sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 \varphi + (-\sum v a_n \sin v \varphi + \sum v b_n \cos v \varphi)^2}} \times$$

$$\times \left[\cos(x - x') \left(-\frac{1}{2} \sin \varphi - \sum v a_n \cos v \varphi - \sum v b_n \sin v \varphi \right) + \sum v a_n \cos(x - \Delta z) \right]$$

$$+ \sin(x - x') \left(\frac{1}{2} \cos \varphi - \sum v a_n \sin v \varphi + \sum v b_n \cos v \varphi \right) - \left(\frac{1}{2} + \sum v b_n \right) \sin(x - \Delta z)$$

bzw. mit den oben eingeführten Abkürzungen

$$\frac{w}{V} = \left(1 - \frac{\Delta z}{2} \sin \varphi \right) \cdot \left(C - \frac{C_0}{\sqrt{F(n)}} \right) \cos(x - x') + \left(D + \frac{\frac{1}{2} + B_0}{\sqrt{F(n)}} \right) \sin(x - x')$$

$$+ \frac{C_0}{\sqrt{F(n)}} \cos(x - \Delta z) - \frac{\frac{1}{2} + B_0}{\sqrt{F(n)}} \sin(x - \Delta z)$$



Bild 5a. Die Änderung der Profilform mit α nach Pinkerton. (aus NACA-T. R. 563).

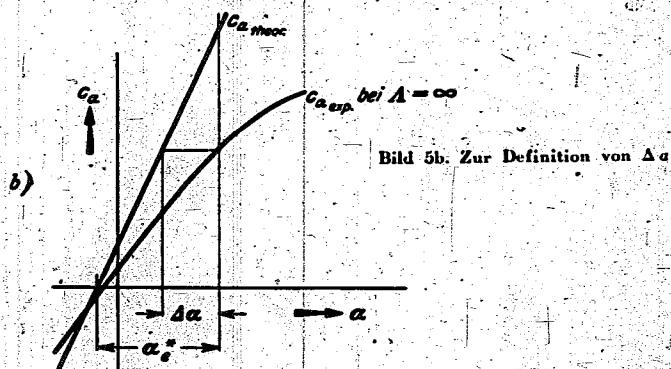


Bild 5b. Zur Definition von $\Delta \alpha$

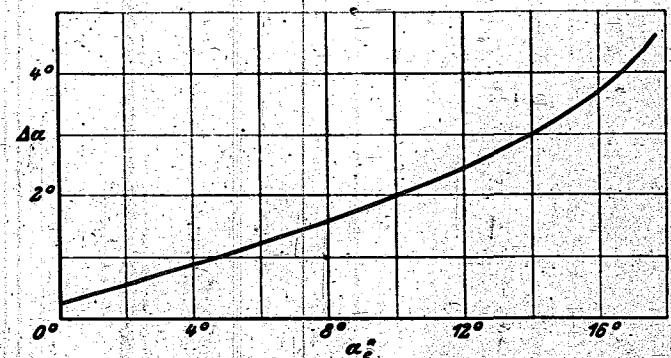


Bild 5c. $\Delta \alpha$ in Abhängigkeit vom Anstellwinkel, bezogen auf die theoretische Nullauftriebsrichtung, nach A. Walz [4].

Dabei ist φ der durch Gl. (1) definierte Kreiswinkel und

$$x' = \frac{\Delta z}{2} (1 + \cos \varphi)$$

zu setzen. Δz ist ein, vom Anstellwinkel abhängiger Korrekturwinkel (vgl. Bild 5b) der, wie A. Walz festgestellt hat, in erster Näherung nicht mit der Profilform variiert und in Abb. 5c dargestellt ist. Wenn man berücksichtigt, daß Δz ein kleiner Winkel ist, so kann man $\cos \Delta z = 1$ und $\sin \Delta z = \Delta z$ setzen und erhält für Gl. (10) die linearisierte Darstellung:

$$\frac{w}{V} = S + \Delta z \left[\frac{1 - x_n}{2\sqrt{F(n)}} + x_n (C \sin x - D) + a_n S \right] \quad (11)$$

bzw., wenn man noch auf den Druck übergeht:

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{p}{q} \right)_\alpha - \Delta z S \left(\frac{1 - x_n}{\sqrt{F(n)}} + 2 x_n (C \sin x - D) + 2 a_n S \right) \quad (12)$$

Dabei ist $(p/q)_\alpha$ die mit der üblichen Rechnung bestimmte Druckverteilung bei dem Anstellwinkel α der Messung;

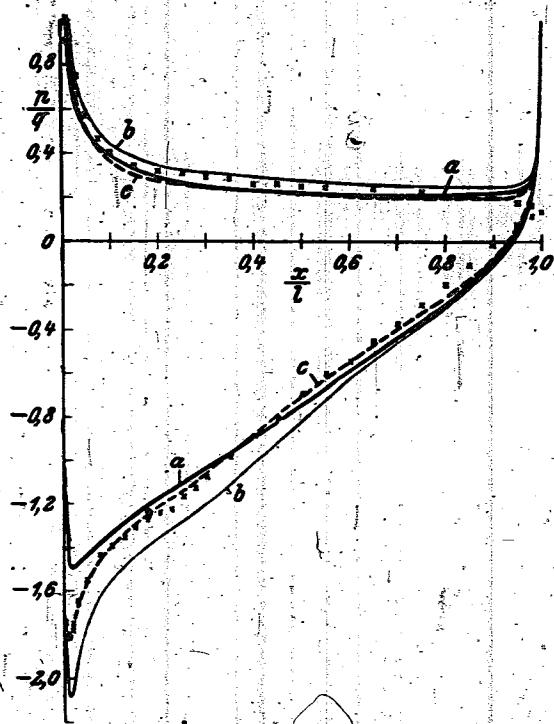


Bild 6. Vergleich der mit und ohne Berücksichtigung des Grenzschichtinflusses berechneten Druckverteilung mit Windkanalmessungen.

- a bei gleichem c_a ohne Grenzschichteinfluß
- b bei gleichem α ohne Grenzschichteinfluß
- c bei gleichem α mit Grenzschichteinfluß
- × × × NACA-Messung (NACA-T.R. 563)

in dem zweiten Glied, das den Grenzschichteinfluß additiv dazu liefert, bedeuten $S, F(n), C, D, a_n$ und x_n die bei der üblichen Druckverteilungsrechnung schon vorhandenen Werte. Aus dem Beispiel in Bild 6 sieht man die ausgezeichnete Übereinstimmung mit einer besonders guten Druckverteilungsmessung im Windkanal.

III. Umrechnung gemessener oder gerechneter Druckverteilungen auf andere Anstellwinkel

Zur Übertragung gemessener oder gerechneter Druckverteilungen auf andere Anstellwinkel kann man sich folgenden einfachen Verfahrens bedienen. Es seien zwei Druckverteilungen bei verschiedenen Anstellwinkeln bekannt. Durch Übergang auf die Geschwindigkeit findet man

$$\frac{w_1}{V} = \sqrt{1 - \frac{p_1}{q}} \quad \frac{w_2}{V} = \sqrt{1 - \frac{p_2}{q}}$$

Wegen (6) kann man daraus A und B bzw. C und D berechnen, die nur von der Lage der Meßstellen abhängen und erhält für den neuen Anstellwinkel:

$$\frac{w_3}{V} = C \cos \alpha_3 + D \sin \alpha_3$$

Linearisiert man, so ergibt sich

$$\frac{w_3}{V} = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \frac{w_1}{V} + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \frac{w_2}{V} \quad (13)$$

woraus wieder der Druck $p_3/q = 1 - (w_3/V)^2$ folgt. Diese Formel gilt eigentlich für die mit Vorzeichen behafteten Geschwindigkeiten; da aber w_1 und w_2 im allgemeinen an denselben Stellen dasselbe Vorzeichen haben, kann man auch mit den Absolutbeträgen der Geschwindigkeit rechnen. Die Formel gilt übrigens streng,

wenn man $\frac{w_1}{V \cos \alpha_1}$ statt $\frac{w_1}{V}$ bzw. $\tan \alpha_1$ statt α_1 (entspre-

chend für die Indizes 2 und 3) schreibt. Will man mit dem neuen Anstellwinkel ein bestimmtes c_a erreichen, so setze man $\alpha_3 - \alpha_2 = c_a/c_a'$ (mit α_2, c_a' aus (7, 8)). Beim Umrechnen von Messungen nimmt man nach Möglichkeit Ausgangsverteilungen bei kleinen c_a -Werten (wegen des Grenzschichtinflusses bei den höheren c_a).

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß das Verfahren auch auf sehr unregelmäßige Profilformen, wie z. B. Profile mit ausgeschlagener Klappe und abgeknickter Nase, anwendbar ist, worüber noch ein Bericht von W. Liess in Vorbereitung ist.

IV. Schrifttum

- [1] F. Riegels u. H. Wittich: Zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen. FB 1527.
- [2] H. Wittich: Bemerkungen zur Druckverteilungsrechnung nach Theodorsen-Garrick. Jb. 1941 der dtsh. Luftfahrtfg., S. 152.
- [3] R. M. Pflerton: Calculated and measured pressure distributions over the midspan section of the NACA 4412 airfoil. NACA-Rep. 563 (1936).
- [4] A. Walz: Übertragung gemessener Druckverteilungen auf beliebige Anstellwinkel. Lufo Bd. 16 (1939) S. 121.

V. Anhang. Erläuterungen zu den Tabellen A bis D

Nachdem eine bestimmte Punktzahl N für die Rechnung gewählt ist, werden die an den Stellen x_n gegebenen Summen bzw. Differenzen der Profilordinaten von Saug- und Druckseite (bezogen auf die den vordersten und hintersten Punkt verbindende Sehne) in den zugehörigen Tabellen A, B, C, D mit den darunterstehenden festen Koeffizienten multipliziert, wofür die entsprechenden Felder freigelassen sind, und die Produkte in waagerechter Richtung summiert. Diese Summen sind mit A_n, B_n, C_n, D_n bezeichnet. Man berechne sie mit dem Rechenschieber oder mit einer Rechenmaschine, welche letztere neben der größeren Genauigkeit den Vorteil bietet, daß man die Summen in der Maschine bilden kann, ohne erst die einzelnen Produkte hinzuschreiben. Hinter dem Doppelstrich werden diese Werte A_n usw., die zunächst nur für die Profileroberseite ($n = 0$ bis $n = N$) berechnet wurden, auch für die Unterseite ($n = N$ bis $n = 2N$) gemäß der angegebenen Beziehung hingeschrieben und die weiteren vorgeschriebenen Rechnungen ausgeführt. Mit den Endspalten A und B von Tabelle B (für symmetrische Profile), bzw. C und D von Tabelle D (für unsymmetrische Profile) werden dann im Rechenblatt für den Anstellwinkel α die Geschwindigkeit $w/V = |S|$ und der Druck $p/q = 1 - S^2$ für den gewünschten Anstellwinkel des Profils ermittelt.

Rechenblatt für den Anstellwinkel $\alpha =$

		Symmetrisches Profil		p/q		
	$n \ x_n$	$S_1 = A \cos \alpha$	$S_2 = B \sin \alpha$	$S = S_1 + S_2$	S^2	$1 - S^2$
		Gewölbtes Profil				
	$n \ x_n$	$S_1 = C \cos \alpha$	$S_2 = D \sin \alpha$	$S = S_1 + S_2$	S^2	$1 - S^2$
		A und B aus Tabelle B				
		C und D aus Tabelle D				

Man achte bei Durchführung der Rechnung — besonders bei dickeren gewölbten Profilen — darauf, daß die x-Achse die Richtung der größten Sehne des Profils hat.

F. Riegels: Berechnung der Druckverteilung von Profilen

Druckverteilungsrechnung. $N = 6$

Tabelle A

Profil: A_{mn} $d_m = y_m - y_{12-m}$

m	1	2	3	4	5	A_n	n	$A(n)$	a_n	$A(n)$
$y_m - y_{12-m}$	$\Sigma A_{mn} \cdot d_m$					$A_n = -A_{12-n}$				
$n = 0$	0	0	0	0	0		0		0	
1	+ 1,50000	- 0,53867	0	- 0,03868	0		1		- 0,25000	
2	- 0,53867	+ 1,50000	- 0,57735	0	- 0,03868		2		- 0,43302	
3	0	- 0,57735	+ 1,50000	- 0,57735	0		3		- 0,50000	
4	- 0,03868	0	- 0,57735	+ 1,50000	- 0,53867		4		- 0,43302	
5	0	- 0,03868	0	- 0,53867	+ 1,50000		5		- 0,25000	
6	0	0	0	0	0		6		0	
							7		+ 0,25000	
							8		0,43302	
							9		0,50000	
							10		0,43302	
							11		0,25000	
							12		0	

Druckverteilungsrechnung. $N = 6$

Tabelle B

Nur bei symmetrischen Profilen

Profil: B_{mn} $d_m = y_m - y_{12-m}$

m	1	2	3	4	5	B_n	n	B_n	b_n	$B(n)$	B_n	c_n	$E(n)$	A	B				
$y_m - y_{12-m}$	$\Sigma B_{mn} \cdot d_m$					$B_n = B_{12-n}$					$b_n + B_n - B_0$					$c_n + B_n$		$\frac{A(n)}{\sqrt{E(n)}}$	$\frac{B(n)}{\sqrt{E(n)}}$
$n = 0$	- 1,86602	- 0,86602	+ 0,50000	- 0,28868	+ 0,13398		0		0			0	0						
1	- 0,43301	+ 1,18301	- 0,57735	+ 0,31699	- 0,14434		1		- 0,06698			0,06250	0,18751						
2	- 0,68301	- 0,14434	+ 1,00000	- 0,43301	+ 0,18301		2		- 0,25000			0,25000	0,25000						
3	+ 0,28868	- 0,86602	0	+ 0,86602	- 0,28868		3		- 0,50000			0,75000	0,18751						
4	- 0,18301	+ 0,43301	- 1,00000	+ 0,14434	- 0,68301		4		- 0,93302			0,06250	0,06250						
5	+ 0,14434	- 0,31699	+ 0,57735	- 1,18301	0,43301		5		- 1,00000			0	0,06250						
6	- 0,13398	+ 0,28868	- 0,50000	+ 0,86602	- 1,86602		6		- 0,93302			0,18751	0,18751						
							7		- 0,75000			0,25000	0,25000						
							8		- 0,50000			0,75000	0,18751						
							9		- 0,25000			0,25000	0,18751						
							10		- 0,06698			0,06250	0,06250						
							11		0			0	0						
							12												

Druckverteilungsrechnung. $N = 6$

Tabelle C

Profil: C_{mn} $s_m = y_m + y_{12-m}$

m	1	2	3	4	5	C_n	n	C_n	$C(n)$		
$y_m + y_{12-m}$	$\Sigma C_{mn} \cdot s_m$					$C_n = C_{12-n}$					$A(n) - C_n + C_0$
$n = 0$	- 1,24400	0	- 0,16666	0	- 0,08932		0				
1	+ 1,50000	- 0,70533	0	- 0,12799	0		1				
2	- 0,70533	+ 1,50000	- 0,66666	0	- 0,12799		2				
3	0	- 0,66666	+ 1,50000	- 0,66666	0		3				
4	- 0,12799	0	- 0,66666	+ 1,50000	- 0,70533		4				
5	0	- 0,12799	0	- 0,70533	+ 1,50000		5				
6	- 0,08932	0	- 0,16666	0	- 1,24400		6				
							7				
							8				
							9				
							10				
							11				
							12				

Druckverteilungsrechnung. $N = 6$

Tabelle D

Profil: D_{mn} $s_m = y_m + y_{12-m}$

m	1	2	3	4	5	D_n	n	D_n	$D(n)$	$B_n - D_n(B_n - D_n)^2$	c_n	$F(n)$	C	D			
$y_m + y_{12-m}$	$\Sigma D_{mn} \cdot s_n$					$D_n = -D_{12-n}$					$c_n + (B_n - D_n)^2$					$\frac{C(n)}{\sqrt{F(n)}}$	$\frac{D(n)}{\sqrt{F(n)}}$
$n = 0$	0	0	0	0	0		0				0	0					
1	- 0,43301	- 0,68301	+ 0,28868	- 0,18301	+ 0,14434		1				0,06250	0,18751					
2	+ 1,18301	- 0,14434	- 0,86602	+ 0,43301	- 0,31699		2				0,25000	0,18751					
3	- 0,57735	+ 1,00000	0	- 1,00000	+ 0,57735		3				0,06250	0,06250					
4	+ 0,31699	- 0,43301	+ 0,86602	+ 0,14434	- 1,18301		4				0	0,06250					
5	- 0,14434	+ 0,18301	- 0,28868	+ 0,68301	+ 0,43301		5				0,18751	0,18751					
6	0	0	0	0	0		6				0,25000	0,18751					
							7				0,06250	0,06250					
							8				0,18751	0,18751					
							9				0,25000	0,18751					
							10				0,06250	0,06250					
							11				0,18751	0,18751					
							12				0	0					

Druckverteilungsrechnung, $N = 12$
 Profil:

Tabelle A

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	b_n	A_n	a_n	$A(n)$
$y_m - y_{06} - m$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\sum_{d_m} \Delta y_{06} \cdot d_m$ $d_m = y_m - y_{06} - m$	$A_n = -A_{06} - n$	0	$a_n - A(n)$
$n = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			0	0
1	-3,00000	1,08071	0	0,08601	0	-0,02312	0	0,00869	0	0,00322	0			0,12911	0,25000
2	1,08071	3,00000	1,16175	0	0,16916	0	0,03181	0	0,01191	0	0,00322			0,35356	0,70710
3	0	1,08071	3,00000	1,18987	0	0,17785	0	0,03503	0	0,01191	0			0,48206	0,95562
4	-0,08601	0	1,16175	3,00000	1,19856	0	0,12107	0	0,03503	0	0,01869			0,62500	1,25000
5	0	-0,08601	0	1,18987	3,00000	1,20178	0	0,12107	0	0,03181	0			0,77143	1,59286
6	-0,02312	0	0,16916	1,20178	1,20178	3,00000	1,20178	0	0,17785	0	0,02312			0,92143	1,93571
7	0	-0,03181	0	0,12107	0	1,20178	3,00000	1,19856	0	0,10916	0			1,07143	2,27856
8	0,00869	0	0,03503	0	0,12107	0	1,19856	3,00000	1,18987	0	0,08601			1,22143	2,62143
9	0	0,01191	0	-0,03503	0	0,11785	0	1,18987	3,00000	1,16975	0			1,37143	2,96429
10	0,00322	0	-0,01191	0	0,03181	0	0,10916	0	1,16975	3,00000	1,08071			1,52143	3,30714
11	0	-0,00322	0	0,00869	0	0,02312	0	0,08601	0	1,08071	3,00000			1,67143	3,65000
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			1,82143	3,99286

Druckverteilungsrechnung, $N = 12$
 Profil:

Tabelle B

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	b_n	e_n	$E(n)$	A	R
$y_m - y_{04} - m$												$\sum_{d_m} \Delta y_{04} \cdot d_m$ $d_m = y_m - y_{04} - m$	$b_n + b_{n-1} - b_0$	$e_n + b_n^2$	$A(n)$ $\sqrt{E(n)}$	$R(n)$ $\sqrt{E(n)}$
$n = 0$																
1	3,79788	1,80602	1,20710	0,80602	0,65161	0,50000	0,38366	0,28688	0,20710	0,13308	0,06582			0,01675	0,17011	0,18750
2	0,85301	2,50249	1,56602	0,92336	0,68301	0,51761	0,39161	0,29528	0,21822	0,13616	0,06939			0,08250	0,25000	0,25000
3	1,20338	0,43301	2,22171	1,18301	0,79538	0,57735	0,42936	0,31699	0,22171	0,14431	0,07661			0,16751	0,50000	0,33206
4	0,50000	1,57313	0,25000	2,09077	1,07735	0,70710	0,50000	0,35872	0,25000	0,15892	0,07735			0,25000	0,75000	0,41714
5	0,27774	0,68301	1,20710	0,14431	1,00000	0,63616	0,43301	0,30000	0,20289	0,13201	0,08228			0,32759	1,00000	0,48206
6	0,18301	0,11172	0,78868	-1,70338	1,93185	1,03185	0,68301	0,43301	0,27061	0,18602	0,10916			0,42911	1,25000	0,55562
7	-0,13338	0,28688	-0,50000	0,94902	1,80602	0	1,80602	0,80602	0,50000	0,28688	0,13308			0,57143	1,50000	0,62500
8	0,16566	-0,22226	0,36602	-0,57061	0,95301	1,93185	0,06639	1,70338	0,78868	0,41172	0,18301			0,62500	1,75000	0,68750
9	0,08828	0,18301	0,29289	0,53301	0,63616	1,00000	2,00249	0,14431	1,70710	0,68301	0,27774			0,68750	2,00000	0,75000
10	0,07735	-0,15892	0,25000	-0,35872	0,50000	0,70710	1,07735	-2,09077	0,25000	1,57313	0,50000			0,75000	2,25000	0,82062
11	0,06939	0,13616	0,21132	0,26538	0,39131	0,51761	0,68301	1,18301	2,22171	0,8301	1,29538			0,82062	2,50000	0,88206
12	0,06582	0,13308	-0,20710	0,28868	0,38366	0,50000	0,65161	1,06602	1,90710	1,86602	3,29788			0,88206	2,75000	0,93571

Nur bei symmetrischen Profilen

Tabelle C

Druckverteilungsrechnung. N = 12

Profil:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	C_n	n	C_n	$C(n)$
m															
$\sum C_{mn} \cdot m$															
$\sum C_{mn} \cdot m$															
n = 0	-2,41531	0	-0,28432	0	-0,11244	0	-0,06620	0	-0,01882	0	-0,01238		0		
1	3,00000	-1,36523	0	-0,19818	0	-0,08932	0	-0,05751	0	-0,04560	0		1		
2	-1,36523	3,00000	-1,27919	0	-0,17536	0	-0,08063	0	-0,05429	0			2		
3	0	-1,27919	3,00000	-1,25007	0	-0,16657	0	-0,07741	0				3		
4	-0,19818	0	-1,25007	3,00000	-1,24738	0	-0,16345	0	-0,07741	0			4		
5	0	-0,17536	0	-1,24738	3,00000	-1,24116	0	-0,16345	0	-0,08063	0		5		
6	-0,08932	0	-0,16657	0	-1,24116	3,00000	-1,24116	0	-0,17536	0			6		
7	0	-0,08063	0	-0,16345	0	-1,24116	3,00000	-1,24738	0	-0,17536	0		7		
8	-0,05751	0	-0,07741	0	-0,16345	0	-1,24738	3,00000	-1,25007	0			8		
9	0	-0,05429	0	-0,07741	0	-0,16657	0	-1,25007	3,00000	-1,27919	0		9		
10	-0,04560	0	-0,05429	0	-0,08063	0	-0,17536	0	-1,27919	3,00000	-1,36523		10		
11	0	-0,04560	0	-0,05751	0	-0,08932	0	-0,19818	0	-1,36523	3,00000		11		
12	-0,01238	0	-0,01882	0	-0,06620	0	-0,11244	0	-0,28432	0	-2,41531		12		

Tabelle D

Druckverteilungsrechnung. N = 12

Profil:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	D_n	n	D_n	$D(n)$	$F(n)$	$C(n)$	D
m																		
$\sum D_{mn} \cdot m$																		
$\sum D_{mn} \cdot m$																		
n = 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0					
1	-0,95301	-1,25338	0,30000	-0,27774	0,18301	-0,13398	0,16366	-0,08828	0,07735	-0,07081	0,06839		1					
2	2,50249	0,43301	-1,57343	0,08301	-0,41172	0,28868	-0,22226	0,18301	-0,18301	0,14131	-0,13616		2					
3	-1,36602	2,22174	-0,25000	-1,70710	0,78868	-0,50000	0,36602	-0,29280	0,25000	-0,22174	0,21132		3					
4	0,92836	-1,18301	2,09077	-0,14431	-1,79538	0,86602	-0,57061	0,45001	-0,35872	0,31699	-0,29538		4					
5	-0,68301	0,78538	-1,07735	2,00249	-0,06699	-1,86602	0,93301	-0,63616	0,51000	-0,42636	0,39433		5					
6	0,51701	-0,57735	0,70710	-1,00000	1,91185	0	-1,93185	1,00000	-0,70710	0,57735	-0,51701		6					
7	-0,30431	0,42636	-0,50000	0,63616	-0,93301	1,86602	0,06699	-2,00249	1,07735	-0,79538	0,68301		7					
8	0,29538	-0,31699	0,58872	-0,45301	0,77061	-0,80602	1,79538	0,14431	-2,00077	1,18301	-0,92836		8					
9	-0,21132	0,22174	-0,25000	0,29280	-0,36602	0,50000	-0,78868	1,70710	-2,50000	2,22174	-1,36602		9					
10	0,13646	-0,14431	0,15802	-0,18301	0,22226	-0,28868	0,41172	-0,48301	1,57343	-0,33001	-2,50249		10					
11	-0,06699	0,07064	-0,07735	0,08828	-0,10566	0,13398	-0,18301	0,27774	-0,50000	1,20338	-0,95301		11					
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		12					

Werte von x_n/l bei den verschiedenen Punktzahlen N .
(siehe Bild 2)

$N = 6$			$N = 18$		
Oberseite n	Unterseite n	x_n/l	Oberseite n	Unterseite n	x_n/l
0	12	1,00000	0	36	1,00000
1	11	0,93302	1	35	0,99241
2	10	0,75000	2	34	0,96985
3	9	0,50000	3	33	0,93302
4	8	0,25000	4	32	0,88302
5	7	0,06699	5	31	0,82140
6	6	0,00000	6	30	0,75000
$N = 12$			7	29	0,67101
0	24	1,00000	8	28	0,58683
1	23	0,98297	9	27	0,50000
2	22	0,93302	10	26	0,41318
3	21	0,85356	11	25	0,32899
4	20	0,75000	12	24	0,25000
5	19	0,62941	13	23	0,17861
6	18	0,50000	14	22	0,11698
7	17	0,37059	15	21	0,06699
8	16	0,25000	16	20	0,03016
9	15	0,14645	17	19	0,00760
10	14	0,06699	18	18	0,00000
11	13	0,01704			
12	12	0,00000			

Sollten gelegentlich kleine Schwankungen in den Druckverteilungen auftreten, so kann man mit guter Genauigkeit eine Kurve durch die berechneten Werte so hindurchziehen, daß die Streuung gleichmäßig nach beiden Seiten erfolgt.

Will man diese geringen Schwankungen ganz vermeiden, so berechne man die Werte B_n bzw. bei gewölbten Profilen ($B_n - D_n$) nicht mittels der Tabellen B und D , sondern benutze die Beziehung $B_n - D_n = dy/d\varphi$; man trage y über φ (durch Gl. (1) definiert, beachte Fußnote 3) auf und bestimme die Tangenten graphisch oder numerisch⁶⁾. Die Schwankungen treten dann nicht mehr auf und es ergeben sich vollkommen glatt liegende Kurven.

Die Koeffizienten sind in allen Tabellen auf 5 Stellen nach dem Komma berechnet. Diese Genauigkeit wird man meist nicht brauchen, weil man die Profilkordinaten gar nicht so genau hat. Verlangt man aber die Druckverteilungen auf weniger als 1% genau, so soll man sich darüber klar sein, daß dafür noch genauere Profilkordinaten erforderlich sind, da grundsätzlich bei jeder Rechnung etwas an Genauigkeit verloren geht.

6) Entsprechend kann man die Werte A_n bzw. $A_n + C_n$ durch das ctg -Integral $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{d\varphi} ctg \frac{\varphi}{2} d\varphi$ ersetzen, das mit einer ähnlichen Tabelle bequem berechnet werden kann [1, 2].

Wirkung von Zusatzstoffen auf die Verkokungsneigung von Schmierölen

G 31

Die Verkokungsneigung der Schmieröle im Motor, die zum Festsitzen der Kolbenringe und zu erhöhtem Verschleiß führt, wird schon seit vielen Jahren mit großer Aufmerksamkeit verfolgt. Trotzdem gibt es bis heute noch kein einheitliches Laboratoriumsverfahren, das die Ölkohlebildung bzw. den Rückstand im Motor voraussetzen läßt. Einer Untersuchung der Wirkung von Zusatzstoffen auf die Verkokungsneigung muß demnach die Festlegung eines Prüfverfahrens vorausgehen.

Die bekanntesten Prüfverfahren sind die von Conradson und von Ramsbottom. Wenn man diese Verfahren auf Grund der zahlreichen Veröffentlichungen sowie eigener Erfahrungen zusammenfassend beurteilt, so kommt man zu dem Schluß, daß der Conradson-Test vorzuziehen ist. Er wurde deshalb für die vorliegenden Vorversuche als Prüfverfahren herangezogen.

Die Verkokungsneigung der Schmieröle ist im wesentlichen durch die im Schmieröl vorhandenen Harzanteile bedingt. Eine Entfernung der Harzanteile auf chemischem Wege verspricht demnach, die Verkokungsneigung zu vermindern. Die Versuche wurden in der Weise vor-

genommen, daß den Schmierölen verschiedene, einer kennzeichnenden chemischen Gruppe angehörende Stoffe zugesetzt wurden.

Die bisherigen Versuche über den Einfluß von Zusatzmitteln auf die Schmierölverkockung haben zu folgenden Ergebnissen geführt:

1) Einige Zusatzmittel, wie Ameisensäure, Äthylenglykol und Dichlorhydrin, rufen eine geringe Abnahme der Schmierölverkockung hervor.

2) Oxydierend wirkende Verbindungen erhöhen wie zu erwarten war — die Verkokungsneigung.

3) Hochverbleite Kraftstoffe bewirken eine starke Erhöhung des Verkokungsrückstandes im Schmieröl und der Ölkohlebildung im Verbrennungsraum.

Diese Erhöhung der Verkokungsneigung verdient aus dem Grunde Beachtung, weil für den Kaltstart dem Schmieröl häufig Bleibenzin beigegeben wird. Damit ist also eine starke Rückstandsbildung verbunden.

Synthetische Schmieröle haben im allgemeinen nur geringe Verkokungsneigung.

Die Ergebnisse lassen motorische Schmierölversuche aussichtsreich erscheinen.

1) FB 1687; O. Widmaier und L. Nenninger (Forsch.-Inst. f. Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren T. II, Stuttgart): Wirkung von Zusatzstoffen auf die Verkokungsneigung von Schmierölen. 10 S. 2 Abb. 3 Zählent.

Anwendung der Kältetechnik in Flugzeugbau und Luftfahrt

G. A. Emmerling, Dessau

A 6

Übersicht: Die Kältetechnik hat in den letzten Jahren ein reiches Betätigungsfeld im Flugzeugbau und in der Luftfahrt gefunden. Der vorliegende Aufsatz soll eine kurze Darstellung dieser Anwendungsgebiete bringen.

Gliederung

I. Anlagen zur Herstellung der Höhenverhältnisse am Boden

1. Unterdruckkammern für medizinische Untersuchungen
2. Prüfstände für Höhenmotoren
3. Funktionserprobung für Flugzeug-Einzelteile
 - a) Kältewindkanäle
 - b) Kälteprüfung von Einzelteilen
 - c) Tiefkühlchränke zur Untersuchung von kleinen Geräten der Luftfahrt

II. Klimaanlagen für Flugzeuge

1. Bodenvorkühlung
2. Bördklimaanlagen
3. Messung der Klimaverhältnisse in Flugzeugkabinen

III. Nebengebiete der Kälteanwendung

IV. Schrifttum

Die sich ständig verstärkende Forderung nach Erhöhung der Geschwindigkeit der Flugzeuge und gleichzeitiger Vergrößerung der Reichweite macht es notwendig, die Flughöhe so zu wählen, daß der Luftwiderstand auf tragbare Werte absinkt. Daneben besteht der Wunsch, den atmosphärischen Einflüssen der unteren Luftschichten durch Fliegen in großen Höhen aus dem Wege zu gehen. Das Absinken des Luftdruckes mit zunehmender Flughöhe. Außer dieser Erscheinung tritt auch ein be-

trächtliches Absinken der Temperatur mit der Höhe ein. Diese beiden Varianten sind auf Grund zahlreicher Beobachtungen für unsere Breiten in der sogenannten Internationalen Norm Atmosphäre (INA) niedergelegt und in Deutschland auf DIN-Blatt 5450 enthalten (Bild 1). Als bemerkenswerte Tatsache ergibt sich, daß von 11 km an aufwärts die Temperatur auf dem Wert von $-56,5^{\circ}\text{C}$ konstant bleibt. Dieser Punkt wird als untere Grenze der Stratosphäre bezeichnet. In anderen Breiten, z. B. in den Tropen, liegt diese Grenze wesentlich höher. Dort bleibt die Temperatur von 16 km an aufwärts auf dem Wert von etwa -80°C konstant. Über den Polen der Erde ist die Grenze der Stratosphäre niedriger und die Temperatur entsprechend höher. Man nimmt an, daß die verschiedenartige untere Grenze der Stratosphäre mit der an den Polen abgeflachten Gestalt der Erde zusammenhängt.

I. Anlagen zur Herstellung der Höhenverhältnisse am Boden

1. Unterdruckkammern für medizinische Untersuchungen

Bevor man die Funktionserprobung der Flugzeuge für große Höhen vornimmt, muß man die Höhentauglichkeit des menschlichen Organismus bei geringen Drücken und niederen Temperaturen erforschen. Die Höhenflugmedizin beschäftigt sich seit längerer Zeit mit derartigen Fragen und verlangt, daß Räume für Versuchspersonen in kurzer Zeit die Zustandswerte der Atmosphäre in großen Höhen aufweisen. Von einer solchen Anlage wird gefordert, daß sie jederzeit startbereit und nicht an fremde Kältequellen (z. B. flüssige Luft oder Trockeneis) gebunden ist. Da die Anlagen meist nur verhältnismäßig kurze Zeiten in Betrieb sind, sollte die Forderung nach thermodynamischer Wirtschaftlichkeit gegenüber dem Anspruch nach einfacher Handhabung und schneller Betriebsbereitschaft zurückstehen. Es ist erwünscht, daß eine derartige Anlage etwa innerhalb 15 min den Druck der Versuchskammer von 1 auf 0,1 at abs. und die Temperatur von $+20^{\circ}$ auf -70°C vermindert, wobei eine weitgehende Regelung entsprechend der Temperatur-Druckbeziehung der Norm-Atmosphäre verlangt wird.

Eine Verdampfungskältemaschine kommt wegen des schwierigen Betriebsverhaltens sowie der umständlichen Regelung bei mehrstufiger Auslegung meist nicht in Frage. Auf der anderen Seite ist die Wärmekapazität der ganzen Anlage viel zu groß, so daß ein stundenlanges vorheriges Anfahren nötig ist, um einen bestimmten Betriebszustand einzustellen. Zur Vermeidung noch größerer Verluste müßte man mit Luftkühlung bei direkter Verdampfung arbeiten. Ein Entweichen des Kältemittels aus undichten Stellen des Luftkühlers kann dabei allerdings die Insassen der Versuchskammer gefährden.

Als weiteres Kühlverfahren kommt das der Luftexpansionsmaschine in Betracht. Diese Methode ist durchaus anwendbar, wenn auch der Leistungsgewinn der Ex-

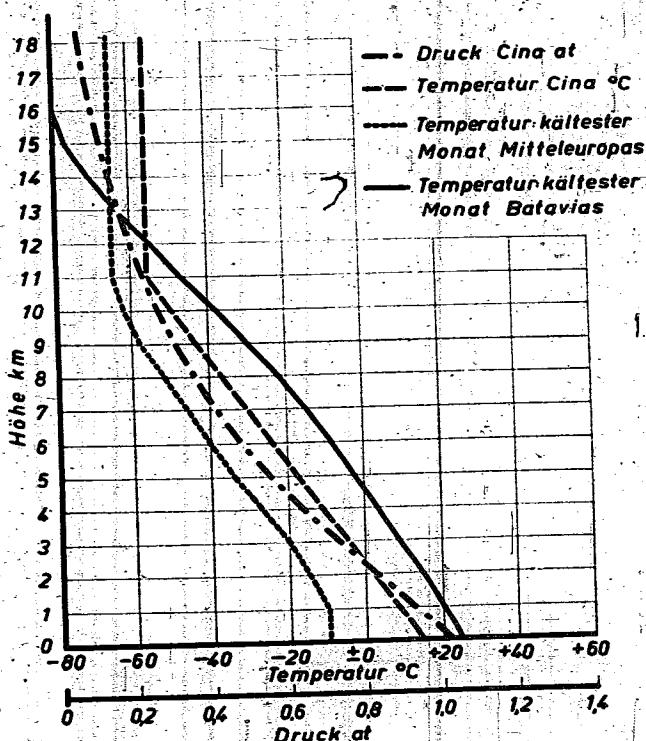


Bild 1. Druck- und Temperaturverhältnisse in Abhängigkeit der Flughöhe (Ina oder CIna-Kurve)

pansionsmaschine gegenüber dem großen Leistungsaufwand zur Kompression der Luft verhältnismäßig gering ist. Die prinzipielle Schaltung einer solchen Anlage wird später gezeigt.

In neuerer Zeit ist mehrfach das Luftdrosselverfahren benutzt worden, um die geforderten Bedingungen einer medizinischen Höhenprüfkammer zu erfüllen [1]¹⁾. Das Kältemittel Luft wird auf 200 at gebracht und über eine Drossel auf etwa 40 at entspannt. Neben dem Kühler für die Luft der Versuchskammer und dem Wärmeaustauscher zur Abführung der Kompressionswärme enthält die Anlage einen Gegenstromapparat, in welchem die auf 200 at hochgespannte Luft der Druckseite die vom Kompressor angesaugte Luft von 40 at vorkühlt (Bild 2). Betrachtet man im T-S-Diagramm den Drosselvorgang, so erkennt man, daß die Expansion zwischen 200 und 40 at gerade so gewählt ist, daß der Thompson Joule-Effekt eine größtmögliche Abkühlung erzielt.

Eine weitere Möglichkeit, eine derartige Anlage auszuführen, besteht in der Kombination des Verdampfungsprinzips mit dem Luftexpansionsverfahren. In diesem Falle kommt man mit einer zweistufigen Kälteanlage aus, und die Regelung auf verschiedene Zustände der Normalatmosphäre kann mit Hilfe der Expansionsturbinen erfolgen. Hierbei muß allerdings auf die kurze Anfahrzeit sowie auf die häufig verlangte Änderung des Luftzustandes mit sturzflugartiger Geschwindigkeit verzichtet werden.

Der Frischluftzusatz für medizinische Höhenprüfkammern muß dem noch zulässigen Kohlensäuregehalt in der Prüfkammer angepaßt werden. Die Kälteleistung der Anlage setzt sich zusammen aus der Wärmeabgabe der Versuchspersonen, gegebenenfalls einschließlich der geheizten Fliegerkombinationen, der Kondensations- und Erstarrungswärme des ausgeatmeten Wasserdampfes der Versuchspersonen (die Feuchtigkeit des Atems geht unmittelbar in Eis über), der Kälteleistung zur Abkühlung der Frischluft, dem Wärmedurchgang durch die Kammerwandung sowie der Speicherwärme der Isolierung. Letztere kann je nach der geforderten Anfahrzeit und Art der Isolierung recht große Werte für die Kälteleistung Q_0 (kcal/h) ergeben.

Ungeachtet des anzuwendenden Kühlverfahrens muß in jedem Falle darauf geachtet werden, daß die Isolierung eine außerordentlich geringe Wärmekapazität besitzt. Es dürfte daher nur eine mehrschichtige Alfol-Isolierung in Frage kommen, die etwa den hundertsten Teil des Speichervermögens einer gleichwertigen Isolierung aus expandiertem Kork aufweist.

Bei Flugzeugen mit druckdichter Höhenkabine, z. B. der Boeing Strato-Liner, wobei im Innern der Kabine der Luftzustand des Bodens bzw. erträglicher Höhen erhalten bleiben soll, kann es bei Feindeinwirkung in der Höhe zu Druckstürzen kommen. Dabei sinkt der Kabinendruck schlagartig auf den geringen Druck der Höhe ab, und die Temperatur gleicht sich ebenfalls in kurzer Zeit aus. Um den menschlichen Organismus auf derartige Beanspruchung zu untersuchen, werden geeignete Drucksturz-kammern zweckmäßigerweise an die Unterdruckkammer einer medizinischen Höhenprüfanlage angeflanscht. Durch Betätigung einer Klappe sinkt der Druck in der Drucksturz-kammer in kürzester Zeit auf den Druck der volumenmäßig größeren Hauptkammer ab.

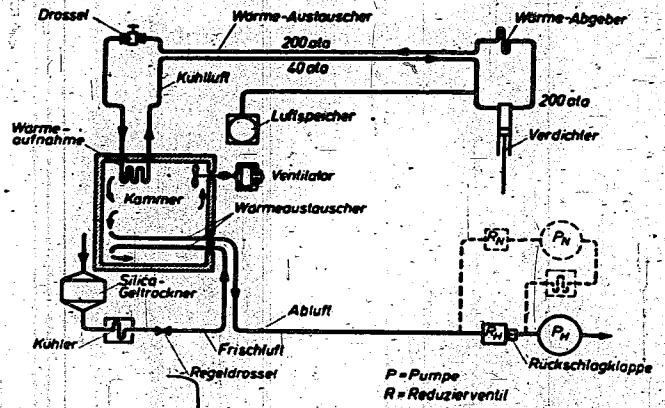


Bild 2. DVL-Anlage für medizinische Höhenuntersuchungen. Kälteerzeugung durch Luftdrosselung. Der Wärmeaufnahme besteht in Wirklichkeit aus 8 Kühlelementen mit je 1 Ventilator

2. Prüfstände für Höhenmotoren

Ein für Bodenverhältnisse und verhältnismäßig geringe Höhen gebauter Flugmotor ist nicht ohne weiteres zum Betrieb in der Stratosphäre tauglich. Außer anderen Erscheinungen tritt ein beträchtliches Nachlassen der Motorleistung in der Höhe ein, was durch den verminderten Luftdruck und das damit im Zusammenhang stehende verringerte angesaugte Luftgewicht zu erklären ist. Die Leistung eines normalen Flugmotors beträgt in 10 km Höhe nur etwa 25% der Bodenleistung. Man kann den Leistungsabfall durch geeignete Maßnahmen wie z. B. Ansaugluftverdichter weitgehend wieder ausgleichen. In sogenannten Höhenprüfständen werden die Flugmotoren auf ihr Betriebsverhalten untersucht. Das Primäre ist die „innere Klimahaltung“. Hierbei besitzt die Ansaugluft Druck und Temperatur der Höhe, während die Auspuffgase so stark abgesaugt werden, daß sich am Auspuffstutzen des Motors ebenfalls der Höhen- druck einstellt. Die aufzubereitenden Luftmengen sind außerordentlich groß; ein Flugmotor von 1000 PS Leistung saugt etwa 1 kg/s Luft an, und hierfür werden bei der im folgenden beschriebenen Kaltluftanlage etwa 1000 PS Prüfstandsleistung benötigt. An diesen Zahlen kann man die Größe einer derartigen Anlage ermessen.

Es ist naheliegend, für die Aufbereitung so großer Luftmengen eine Kaltluftanlage zu wählen. Von einer deutschen Firma werden hierfür Anlagen gebaut, die bereits eine gewisse Standardanordnung erlangt haben (Bild 3). Die Luft gelangt über einen Filter in den Turbokompressor und wird dort auf etwa 5 at bei Temperaturerhöhung bis +250° C komprimiert. Die Abführung der Kompressionswärme besorgt ein Brunnenwasserkühler. Anschließend wird die Luft in einem unerschaltbaren Silicageltrockner entfeuchtet. Diese Maßnahme dient zur Verhütung von Vereisungserscheinungen in der nachgeschalteten Expansionsturbinen, welche zur Einsparung von Leistung mit dem Turboverdichter und dem Antriebsmotor über ein Getriebe gekuppelt ist.

In der Expansionsturbinen kann die Luft bis auf 0,1 at abs und -80° C abgekühlt und in diesem Zustand dem Ansaugstutzen des Motors zugeführt werden. Die Auspuffgase von 0,1 at abs und über 600° C werden zunächst durch eine explosionsgesicherte Funkenstrecke geleitet, um etwa unverbrannte Reste zur Verbrennung zu bringen. Hiernach erfolgt eine zweistufige Verdichtung auf den Atmosphärendruck mit zwischengeschalteter zweistufiger Kühlung.

Wird außerdem „äußere Klimahaltung“ verlangt, so entsteht ein weiterer Kältebedarf, um bei -60° C

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumverzeichnis am Ende der Arbeit.

Bild 3 (rechts). Prüfstand für Höhenflugmotoren bei „innerer Klimahaltung“ (Kaltluftanlage der Firma BBC, Mannheim)

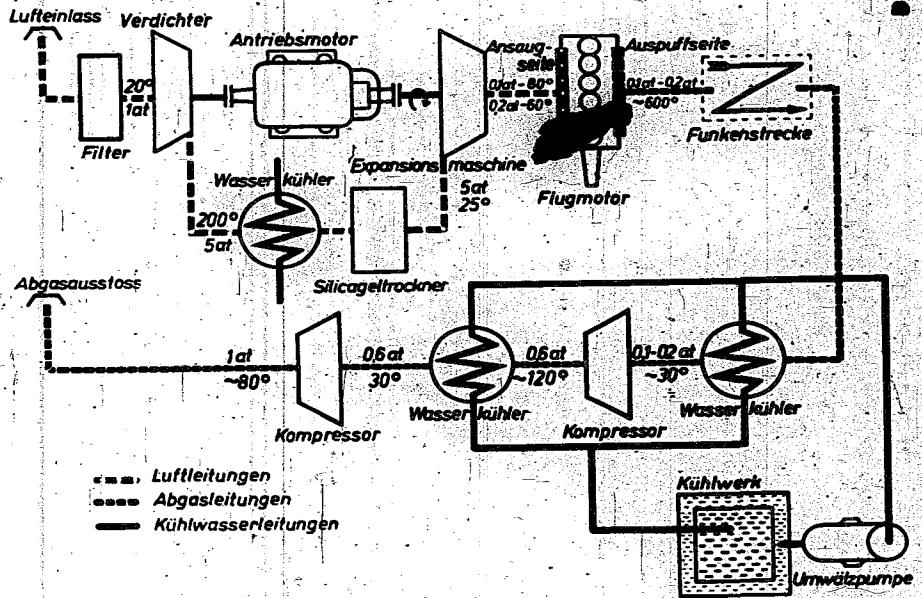
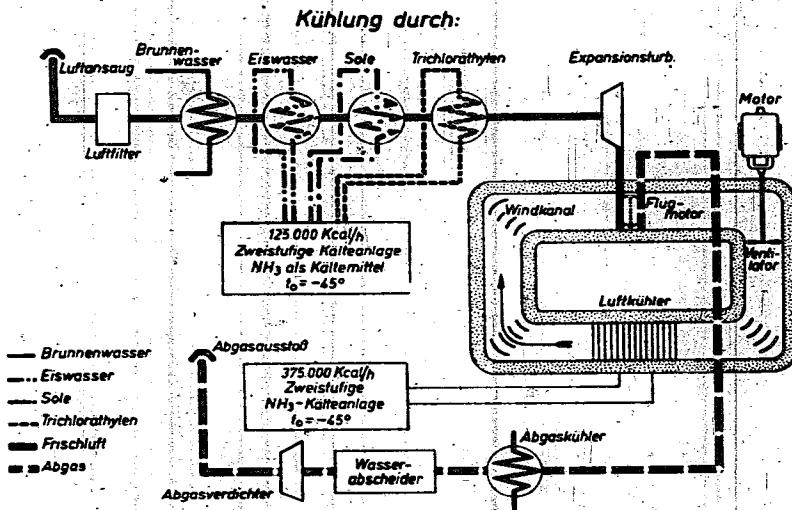


Bild 4 (unten). Französischer Prüfstand für Höhenflugmotoren bei „innerer und äußerer Klimahaltung“ (Kombinierte Kompressions- und Expansionsanlage)



zu groß ist. Man wird die Hilfsapparate des Flugmotors von diesem getrennt untersuchen und zusammen mit dem Motor die Flugerprobung vornehmen.

3. Funktionserprobung für Flugzeug-Einzelteile

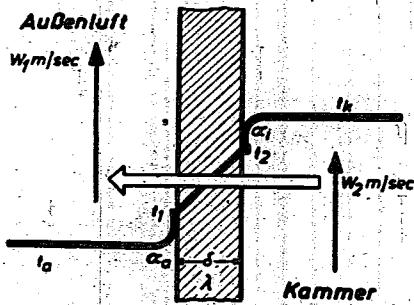
Fliegt ein für Höhenflug taugliches Flugzeug längere Zeit in großen Höhen, so wird sich zunächst die ganze Außenhaut auf Umgebungstemperatur abkühlen. Durch metallische Leitung wird weiterhin die Speicherwärme anderer im Innern des Flugzeuges liegender Teile und Apparate nach außen abgeleitet. Die bekannten Wärmeübergang-Gesetze gelten natürlich auch hier (Bild 5). Bemerkenswert sind die hohen Wärmeübergangs-Zahlen bei großer Luftgeschwindigkeit und deren Abhängigkeit

Außentemperatur die Flüssigkeitskühler des Motors, den Ladeluft- und Abgaskühler, sowie das Verhalten und den Einfluß des gesamten Motorgehäuses und der Hilfsaggregate zu prüfen.

In Frankreich fiel 1941 eine derartige sehr lehrreiche, aber nur halbfertige Anlage in unsere Hände (Bild 4). Die Anlage arbeitet mit zwei zweistufigen NH₃-Anlagen und mit verschiedenen Kältemittelkreisläufen. Die vom Motor angesaugte Luft wird in mehreren Stufen von Brunnenwasser, Eiswasser, Sole und Trichloräthylen abgekühlt. Die Entspannung von Atmosphärendruck auf den Höhendruck von z. B. 0,2 at abs geschieht in einer Expansionsmaschine. Die Leistung der beiden Kälteanlagen zusammen beträgt 500 000 kcal/h bei -45° C Verdampfungstemperatur des NH₃. Es ist zu erwarten, daß eine solche Anlage lange Zeit anfahren muß, ehe die gewünschten Temperaturen im Beharrungszustand hergestellt sind. Vielfach wird aber gerade im Versuchsbetrieb eine augenblickliche Bereitschaft gewünscht. Eine Kaltluftanlage kommt dieser Forderung weitgehend nach, und die bekannten Nachteile der Unwirtschaftlichkeit (Kaltluftanlage hat etwa 1/20 der spezifischen Kälteleistung in kcal/Psh der NH₃-Anlagen) müssen in Kauf genommen werden. Auch die Regelbarkeit und Automatisierung einer Kaltluftanlage ist einfacher als die einer mehrstufigen NH₃-Anlage. Die Anlagen mit äußerer Klimahaltung bei Höhenmotorenuntersuchungen sind indessen sehr selten, da der Aufwand

vom tropfenförmigen Wassergehalt der Luft. Die Luft kann überschläglich betrachtet neben dem unsichtbar in ihr gelösten Wasserdampf über die Sättigungsgrenze hinaus etwa noch einmal die gleiche Menge Wasserdampf in Form von feinsten Tröpfchen tragen.

Bei dem längeren Aufenthalt eines Flugzeuges in der Stratosphäre treten ganz neuartige Probleme auf, dergestalt, daß die kältegefährdeten Geräte entweder isoliert oder geheizt werden müssen. Jedenfalls dürfen sie in ihrer Arbeitsweise durch Kälte nicht beeinträchtigt werden. Heizung und Isolierung kommen hauptsächlich bei der Führerkabine und im Passagiererraum sowie in einigen wenigen anderen Ausnahmefällen in Frage. Die Isolierung der Kabine geschieht am besten durch Alfolien, welche entweder geknittert oder auf geeignete Platten eines anderen Werkstoffes aufgeklebt sind. Bei der Befensterung eines Höhenflugzeuges wählt man zweckmäßigerweise Doppelscheiben aus Plexiglas, wobei es gelingt, Temperatursprünge von 40 bis 50° C zwischen Innen- und Außenseite der Fenster zu überbrücken. Plexiglas hat bei geringem Gewicht ($\gamma = 1,2 \text{ g/cm}^3$) eine wesentlich geringere Wärmeleitfähigkeit ($\lambda = 0,16 \text{ kcal/mh}^\circ \text{C}$) gegenüber Silicatglas ($\gamma = 2,5 \text{ g/cm}^3$; $\lambda = 0,7 \text{ kcal/mh}^\circ \text{C}$). Da der Taupunkt innerhalb der Kabine infolge der geringen Feuchtigkeit der in die Kabine hineingepreßten Außenluft trotz der Wasserdampfabgabe durch die Insassen meist sehr niedrig liegt, ist mit einer Innenvereisung der Fenster nicht zu rechnen.



Wärmedurchgang:

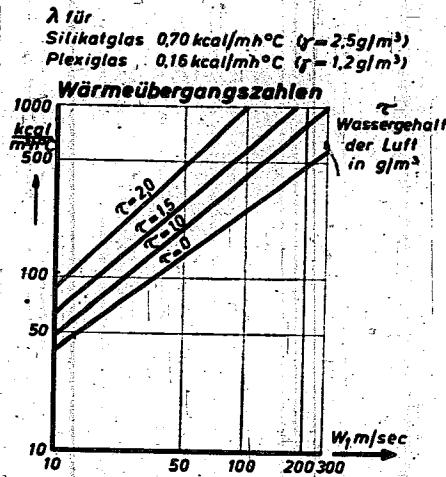
$$Q = \alpha_0 (t_1 - t_0) \quad [kcal/m^2hJ]$$

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} (t_2 - t_1)$$

$$Q = \alpha_j (t_k - t_2)$$

$$Q = \frac{t_k - t_0}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_j}}$$

- λ = Wärmeleitfähigkeit $[kcal/mh^\circ C]$
- δ = Wandstärke $[cm]$
- α = Wärmeübergangszahlen $[kcal/m^2h^\circ C]$ (abhängig von Luftgeschwindigkeit W und Luftfeuchte τ)



bei ruhender Luft (Kammer): $\alpha_j = 10$
 In großen Höhen ($\tau=0$) bei $W_1=200m/sec$ $\alpha_0=420$
 Für Fragen der Außenvereisung ist mit mindestens $\tau=2$ zu rechnen, also bei $W_1=200m/sec$: $\alpha_0 > 2000$

Bild 5. Wärmedurchgangs- und Wärmeübergangswerte für hohe Luftgeschwindigkeiten bei tropfenförmigen Wassergehalt der Luft in g/m^3

Wo dennoch diese Gefahr besteht oder wo aus optischen Gründen einfache Silicat-Glasscheiben verwendet werden, muß man zur elektrischen Beheizung greifen, wobei Heizleistungen bis zu $1 W/cm^2$ vorkommen können.

Alle anderen außerhalb der Kabine gelegenen und insbesondere die dem Luftstrom ausgesetzten Geräte müssen „kältefest“ sein, da eine Isolierung bzw. Beheizung im allgemeinen nicht möglich ist. Hierzu ist es notwendig, am Boden Prüfvorrichtungen zu schaffen, in denen die mannigfachen Apparate untersucht werden können. Die Aufgabe einer solchen Anlage besteht also auch hier darin, mit Hilfe einer Kältemaschine die atmosphärischen Verhältnisse der Höhen am Boden herzustellen. Oftmals kann allerdings auf die Einhaltung einer Variante, z. B. Druck oder Geschwindigkeit verzichtet werden. Die nach der Norm-Atmosphäre niedrigste Temperatur, die für unsere Breiten gefordert wird, liegt bei $-56,5^\circ C$. Um aber eine gewisse Sicherheit zu haben, erfolgt eine Abrundung auf $-60^\circ C$. Soll in tropischen Gegenden die Stratosphäre aufgesucht werden, so muß die Kälteprüfung bis $-80^\circ C$ ausgedehnt werden.

a) Kältewindkanäle

Sollen alle Bedingungen der Höhe erfüllt werden, so muß ein „Unterdruckkältewindkanal“ gebaut werden. Diese Anlagen sind bei größeren Abmessungen sehr teuer, insbesondere wegen der verlangten Druckhaltung. In großem Maßstab werden derartige Anlagen selten für Forschungsinstitute ausgeführt. In ihnen werden alle die Teile untersucht, bei denen der Wärmeaustausch z. B. mit Flüssigkeits- und Ölkühlern und z. T. auch Vereisungserscheinungen erfaßt werden sollen. Für Vereisungsuntersuchungen wird die Einstellung bestimmter Feuchtigkeitsgrade, vielfach über 100% (Nebel) verlangt.

Bild 6 zeigt einen amerikanischen Prüfstand ohne Druckhaltung, der für die Vereisungsuntersuchungen an elektrisch geheizten Staudüsen geeignet ist. Besondere Beachtung ist der günstigen Anordnung des Verdampfers zu schenken, welcher, ohne plötzl. zu sein, im vollen Windstrom an den Umkehrpunkten des Kanals liegt. Die pfeilförmig gebogenen Verdampferrohre werden etwa senkrecht vom Luftstrom beaufschlagt; man kann also hier von einer Art Kreuzstromluftkühler sprechen. Die auf Bild 6 sichtbare Staudüse muß zur

Freihaltung von Eisansatz mit $115 W$ geheizt werden. Beachtlich ist die hohe Heizleistung für die kleine Düse. Die Ursache liegt, wie bereits erwähnt, in den hohen Wärmeübergangszahlen.

Die Bauart des soeben gezeigten Windkanals kann als „geschlossen“, während die in Göttingen bei der Aerodynamischen Versuchsanstalt bestehende Anlage als „offen“ bezeichnet werden kann. Bild 7 zeigt einen schematischen Aufbau dieser Anlage [2].

b) Kälteprüfung von Einzelteilen

Wenn es sich um eine reine Kälteprüfung handelt, so fällt die Einhaltung eines bestimmten Druckes und einer bestimmten Geschwindigkeit fort. Die einfachste Methode, um eine Kälteprüfung schnell und zweckmäßig vorzunehmen, stellt die Trockeneiskühlung dar. Zur Erzielung einer gleichmäßigen Temperaturverteilung sowie zur Einstellung einer bestimmten Temperatur ist es zweckmäßig, das Trockeneis in ein Bad, welches aus einer nicht erstarrenden Flüssigkeit mit möglichst niedrigem Dampfdruck besteht, einzubringen. Als Flüssigkeiten kommen Spiritus, Methylalkohol, Tetrachlor-Kohlenstoff, Testbenzin, Trichloräthylen u. a. in Frage. Die Auswahl der Flüssigkeit sollte sehr sorgfältig erfolgen, wobei man zu prüfen hat, ob die zu untersuchenden Geräte unmittelbar mit dem Bad in Berührung kommen dürfen oder durch eine metallische Zwischenwand getrennt werden müssen. Trichloräthylen greift z. B. Plexiglas und Gummi sehr stark an, während Methanol, insbesondere wenn es geringe Beimengungen von Wasser enthält, Eisen angreift und einen flockigen Niederschlag eines rötlichen Schlammes entstehen läßt.

Mit Hilfe eines Trockeneisbades läßt sich jede gewünschte Temperatur bis etwa $-75^\circ C$ einstellen und halten. Es ist allerdings eine dauernde Beschickung des Trockeneisbades notwendig, wenn man nicht eine Vorrichtung baut, in der sich das Trockeneis in Metallbehältern befindet, welche zur Regelung der Temperatur verschieden tief in das Bad eine Kälteflüssigkeit eingetaucht werden. Dieser Kälteflüssigkeit wird dann mittels einer Pumpe zu dem zu prüfenden Teil gepumpt. Bei Verwendung von Trockeneis wirken sich Transport- und Beschaffungsschwierigkeiten, Aufbewahrung und die Einrichtung eines Kohlensäureabzuges zur Vermeidung einer unzulässigen Anreicherung der Raumluft mit Kohlensäure nachteilig aus. Die bei den Junkers Flugzeug- und

Motorenwerke, Dessau, zur Aufbewahrung von 500 kg Trockeneis verwendete Truhe ist mit einer Schicht von 300 mm Schlackenwolle isoliert und hat bei $+20^{\circ}\text{C}$ Außentemperatur nur einen Kohlensäureverlust von 8 bis 10 kg pro Tag, das sind 1,6 bis 2%.

Solche Stellen, die sich öfters mit Kälteversuchen an Flugzeugteilen zu befassen haben, werden zweckmäßigerweise die Anschaffung einer Tiefkühlanlage der Verwendung des Trockeneises vorziehen, da neben den genannten Nachteilen der Trockeneiskühlung dann auch die wirtschaftliche Seite eine Rolle spielt. (Um die im Flugzeugbau vorkommenden großen Wärmeübergangszahlen wenigstens größenordnungsmäßig nachzuführen, ist es zweckmäßig, statt Luft eine Flüssigkeit als Kälte Träger zu verwenden. Man erspart hierdurch die große Ventilatorarbeit, die notwendig wäre, um eine große Luftmenge (bei der geringen spezifischen Wärme der Luft von $0,24 \text{ kcal/kg}^{\circ}\text{C}$) mit der für den Wärmeübergang notwendigen hohen Geschwindigkeit umzuwälzen. In einer bei den Junkers Flugzeug- und -Motorenwerken in Dessau vorhandenen Tiefkühlanlage für Versuchszwecke wurde zuerst Methanol als Kälte Träger benutzt. Es zeigten sich jedoch nach einer Betriebszeit von 2 Monaten Korrosionen innerhalb des Leitungsnetzes, die es ratsam erscheinen ließen, auf einen anderen Kälte Träger überzugehen. Es wurde dann Testbenzin, das unter dem Namen „Kristallöl“ bekannte Terpentinersatzmittel mit einer begrenzten Siedefraktion von $+160$ bis $+200^{\circ}\text{C}$ verwendet. Dieser Stoff arbeitet seitdem zufriedenstellend. Diese Tiefkühlanlage, welche 5000 kcal/h bei -67°C Verdampfungstemperatur leistet, und deren Aufbau Bild 8 zeigt, ist dreistufig ausgeführt, und zwar sind Hochdruck- und Mitteldruckzylinder auf gemeinsamer Kurbelwelle angeordnet, während die Niederdruckverdichtung durch einen Rotationskompressor erfolgt. Die Absperrungen in dem Leitungsnetz des Kälte Trägers verdienen besondere Beachtung. Es sind hierfür Leichtmetallhähne eingebaut, wie sie im Flugzeugbau für Benzinleitungen gebraucht werden. Um eine Bereifung der Vierkante und der Betätigungshebel an den Hähnen zu vermeiden, wurden Spindelverlängerungen aus Vinidur hergestellt, die so hoch ausgeführt sind, daß der obere Bund gerade aus der Isolierung herausragt (Bild 9).

Mit dieser Anlage wurden bisher alle anfallenden Versuche bei denen eine Funktionserprobung bei tiefen Temperaturen verlangt wurde, vorgenommen und zur Zufriedenheit durchgeführt. Bild 10 zeigt die Verteilungstafel für den Kälte Träger im Laboratorium und eine mittels beweglichen Tombackschläuchen angeschlossene Versuchseinrichtung, in der Flugzeugfenster untersucht werden. Wo nicht fahrbare Kälteanlagen für die Versuche benötigt werden, kann diese Anlage als Musterbeispiel für eine Laboratoriumseinrichtung bei größerer Kälteleistung gelten. Der im Kältespeicher vorhandene Vorrat an kalter Kälte Träger Flüssigkeit dient zum Abfangen größerer Kälteleistungen und zur Konstanthaltung der Temperatur bei Versuchen, die eine geringere Kälteleistung als die der Anlage beanspruchen. Außerdem besitzt der Mitteldruckzylinder des NH_3 -Verdichter eine Leistungsverminderungseinrichtung, wobei das Saugventil durch eine Spindel mehr oder weniger abgehoben werden kann. Sollen die Untersuchungen für eine Flughöhe von 9 km (ungefähr -45°C) durchgeführt werden, so genügt es, wenn die Anlage im zweistufigen Betrieb gefahren wird.

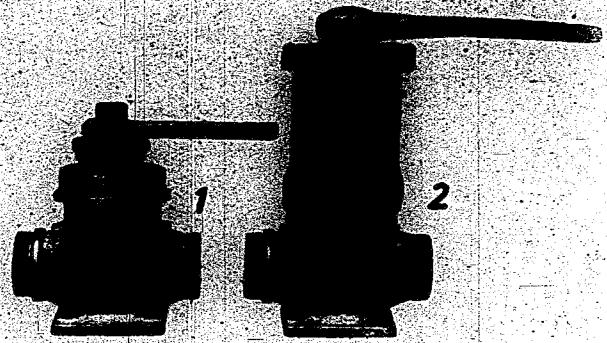


Bild 9. Leichtmetall-Absperrhähne aus dem Flugzeugbau als Schalter-gänge in der Testbenzinverteilung, versehen mit Spindelverlängerung.
1 = Normale Ausführung
2 = Ausführung mit Spindelverlängerung aus Vinidur



Bild 10. Verteilungstafel und Kälteanschlüsse im Kälte Laboratorium. Ange-schlossen ist eine Vorrichtung zur Prüfung von Flugzeugisolation auf Wasserdampfdiffusion

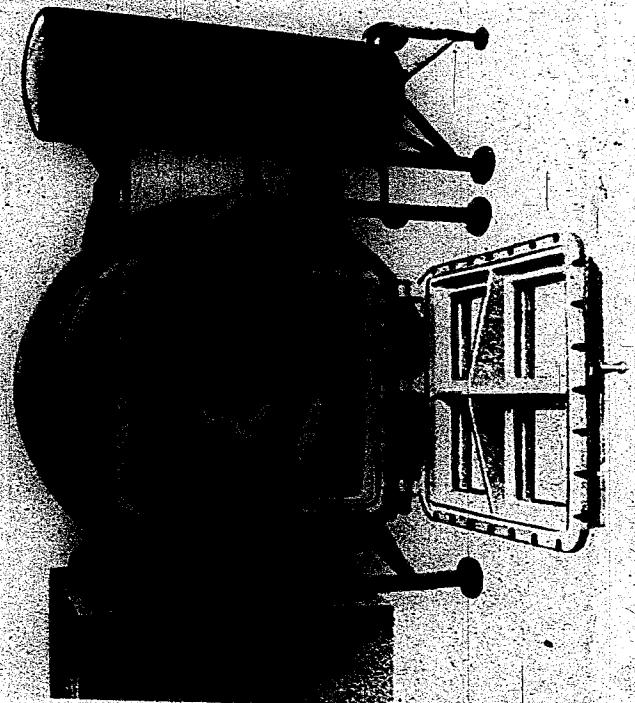


Bild 11. Vacuumtiefkühlschrank für Versuchszwecke (Vorderansicht)

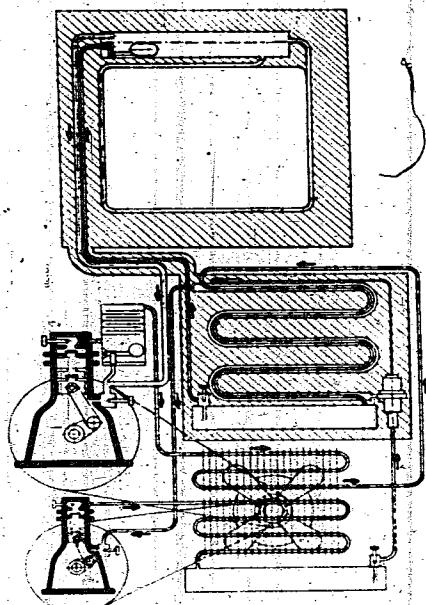


Bild 12. Schema eines zwei-stufigen Geräteprüfschranks bis -90°C . Hochdruckstufe: Methylenchlorid, Niederdruckstufe: Propan (Hersteller: A. Tesov, Frankfurt a/M)

c) Tiefkühlschränke zur Untersuchung von kleinen Geräten der Luftfahrt

Zur Untersuchung von kleinen Geräten, wie elektrischen Instrumenten usw., sowie für Korrosionsuntersuchungen, Anstrichprüfungen und dergl. kann als zweckmäßigste Einrichtung ein Tiefkühlschrank mit stiller Kühlung benutzt werden. Die Schränke werden bereits serienmäßig hergestellt und sind für den Temperaturbereich von $+50$ bis -60°C bei einer Toleranz von $\pm 1^{\circ}\text{C}$ regelbar. Die im Innern des Schrankes zur Verfügung stehende Nettokälteleistung ist meist sehr gering; sie genügt aber zur Abkühlung der eingebrachten Gegenstände in kurzer Zeit. Häufig sind die Schränke auch als kleine Vacuumkessel ausgebildet und können auf den geforderten Unterdruck abgesaugt werden, vgl. Bild 11. Die Tiefkühlschränke (Bild 12) besitzen meist mehrere Durchführungen durch die isolierten Wandungen, die für Preßluft, Absaugeluft, elektrische Leitungen, für Beleuchtungen, Betätigung und Thermoelemente benutzt werden können, sowie eine Wellendurchführung.

d) Schmiermittelprüfung

Bild 13 zeigt eine kleine fahrbare Kälteanlage für Laboratoriumszwecke, an welche Konsistometer, Kälteviskosimeter und andere Geräte zur Prüfung von Ölen und Fetten bei tiefen Temperaturen angeschlossen werden können. Kälteüberträger ist wieder Methylalkohol, Trichloräthylen, Testbenzin oder dergleichen.

II. Klimaanlagen für Flugzeuge

1. Bodenvorkühlung

Normalerweise genügt es, wenn für Flugzeuge, die in unseren Breiten fliegen, eine Beheizung der Kabine während der kalten Jahreszeit vorgesehen ist. Es ist jedoch wünschenswert, die Kabine, die bei Sonnenbestrahlung am Boden bei längerem Stillstand eine große Wärmemenge aufgenommen hat, zu kühlen, damit sie beim Betreten durch die Fahrgäste keine unerwünscht hohe Temperatur aufweist. (Es können in den Tropen Temperaturen in der Kabine bis zu $+90^{\circ}\text{C}$ (!) auftreten.)

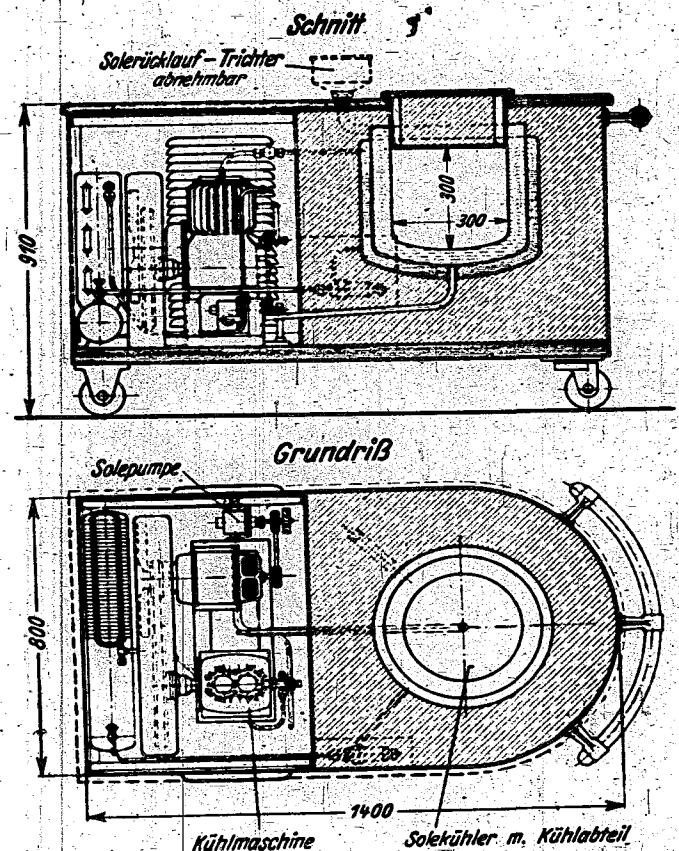


Bild 13. Fahrbare Laboratoriumstiefkühlanlage zur Fett- und Ölprüfung (Hersteller: Linde, Sürth)

Zur Klimatisierung der Flugzeugkabine am Boden, d. h. solange die Flugmotoren nicht in Betrieb sind, werden in USA fahrbare Klimawagen verwendet, die im Sommer zur Kühlung und im Winter zur Heizung der Kabinenluft herangezogen werden. Derartige Bodenklimaanlagen sind im Prinzip folgendermaßen aufgebaut.

Ein Frigenkompressor wird von einem Benzinmotor angetrieben. Ferner ist mit dem Benzinmotor ein elektrischer Generator festgekuppelt. Letzterer liefert die zum Antrieb der Hilfsmaschine (Ventilatoren) notwendige Leistung. Das Aggregat umfaßt weiterhin Kondensator und Verdampfer der Kälteanlage, Kühler für den Benzinmotor sowie die Heizeinrichtung. Beim Heizen wird sowohl das Motorkühlwasser als auch die elektrische Energie zur Lufterwärmung verwendet. Der Frigenkompressor läuft dann entlastet mit. Der im Benzin enthaltene Heizwert wird also bei Erwärmung der Luft weitgehend ausgenutzt. Das Aggregat ist fahrbar montiert und eine 150 mm im Durchmesser betragende biegsame Schlauchleitung wird an der Flugzeugkabine zur Einführung der behandelten Luft befestigt [3].

Eine andere Methode sieht einen fahrbaren Solebehälter vor, dessen Inhalt je nach Bedarf gekühlt oder erhitzt wird. Mit dieser aufgespeicherten Wärme- bzw. Kältemenge kann die Kabine erwärmt bzw. gekühlt werden. Zur Temperierung der Sole wird eine ortsfeste Anlage an das Schlangensystem des fahrbaren Solebehälters angeschlossen. Es handelt sich also hier um eine Speicheranlage [4].

2. Bordklimaanlagen

Eine Kühlung der Flugzeugkabine im Fluge ist in Mitteleuropa an heißen Sommertagen sowie in den Tropen und Subtropen erwünscht. Besonders bei großen

Fensteroberflächen, die zur Sichtverbesserung dienen, gelangen durch Sonnenbestrahlung große Wärmemengen ins Innere der Kabine und werden dort fast restlos absorbiert. Heizung und Kühlung einer Flugzeugkabine erfordern beträchtliche Leistungen, und eine Isolierung (Bild 14, S. 25) der gegen Wärme und Kälte zu schützenden Wandungen kann nicht umgangen werden. An eine im Flugzeug eingebaute Klimaanlage werden allerhöchste Forderungen bezüglich Gewichtsersparnis, Regulierung, kurzzeitige Umstellung von Kühlung auf Heizung und umgekehrt gestellt. Beim Vorhandensein einer druckdichten Höhenkabine, wo ohnehin Atemluftverdichter für die Aufladung der Kabine mit Luft sorgen, ist es denkbar, die Kompressionsenergie der Gebläse, die bis zu 3000 m Höhe nicht zur Kabinendruckhaltung gebraucht werden, zur Beschickung einer Expansions-turbine zu benutzen. Ein derartiges Gebläse, meist Bauart Roots, liefert beim Fliegen in Bodennähe etwa auf 1,8 at abs verdichtete Luft, welche nach Kühlung in einem Atemluftkühler auf etwa 5° C über Außentemperatur hinter der Expansions-turbine eine Kabineneintrittstemperatur von +15° C ergibt. Bei geeigneter Bemessung müßte es dann gelingen, bei einer Außentemperatur von +35° C eine Kabinentemperatur von etwa +23 bis +25° C im Mittel zu halten. Eine solche Anlage benötigt geringen zusätzlichen Gewichts-aufwand, da die Expansions-turbine, welche mit sehr hoher Drehzahl läuft, sehr klein wird. Auch eine Regulierung ist durch Beimischung von Warmluft einfach zu erreichen.

3. Messung der Klimaverhältnisse in Flugzeugkabinen

Hierfür wurden von der Erprobungsstelle der Luftwaffe geeignete Geräte entwickelt, die unter dem Namen „Frierkörper“ bekannt sind, vgl. Bild 15. Ein Frierkörper besteht aus einer Kugel von etwa 8 cm Dmr. die an ihrer Oberfläche mit einer Farbe gestrichen ist, die den Absorptionseigenschaften der menschlichen Haut entspricht. Im Innern wird die Kugel elektrisch so stark geheizt (0,185 cal/cm² min), daß die Wärmeabgabe der Kugeloberfläche gleich der ungeschützten menschlichen Haut ist. Unter der Farbschicht ist die Kugeloberfläche mit einem Widerstandsthermometer bewickelt. Der in Brückenschaltung zu messende Widerstandswert entspricht der Temperatur an der Oberfläche des Frierkörpers und ist somit ein Maßstab für die Klimaverhältnisse in einem Raum. Es werden dabei Lufttemperatur, Luftgeschwindigkeit, Luftdruck- und Sonnenbestrahlung (auch Abstrahlung gegen eine kalte Wand) berücksichtigt. Außer Acht bleibt bei diesem Meßverfahren die nicht zu unterschätzende Kühlwirkung, die sich die menschliche Haut durch Wasserabgabe verschaffen kann. In einer verbesserten Form des Frierkörpers ist auch dieser Erscheinung Rechnung getragen, so daß dann der Frierkörperwert (wirksame Temperatur nach Rechliner Angaben) ein tatsächlich genaues Maß für alle Komponenten des Behaglichkeitsempfindens darstellt. [6].

III. Nebengebiete der Kälteanwendung

Die Verbindung der Einzelteile der Flugzeugzelle untereinander wird heute fast ausschließlich mit Leichtmetallnieten bewältigt. Unter diesen ist es wiederum das Duralniet, das vorherrscht. Das Duralniet wird vor dem Schlagen einem besonderen Veredelungsprozeß unterworfen. Nach durchgeführter Veredelung erfolgt eine Aushärtung des Durals innerhalb einiger Tage. Aber schon nach 4 Stunden Lagern in Zimmertemperatur

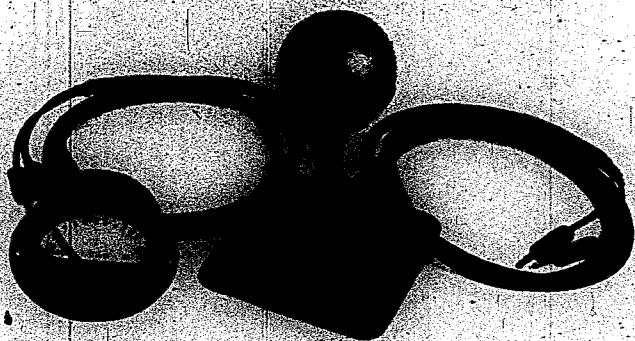


Bild 15. Frierkörper, von der E-Steile Rechlin entwickelt zur Klimamessung in Flugzeugkabinen.

lassen sich die Nieten nur noch schwer schlagen. Zur Erhöhung der Lagerdauer und damit zur Verlängerung der Verarbeitbarkeit hat man die Kaltlagerung erfolgreich eingeführt. Aus Bild 16 ist der Einfluß der Kaltlagerung bei 0° auf die Materialeigenschaften im Vergleich zur Lagerung bei 20° ersichtlich [5].

Nietkühlschränke werden zweckmäßigerweise mit Solekühlung bei beabsichtigter hoher Speicherwirkung ausgeführt. Zahlreiche Fächer enthalten Blechkästen, in denen die verschiedenen Nietformen und Nietgrößen enthalten sind. Es ist mit häufigem Öffnen der Türen zu rechnen. Da ununterbrochener Betrieb verlangt wird, ist die Gefahr vorhanden, daß die Kühlflächen allmählich eine dicke Eisschicht ansetzen. Weitere Konstruktionen der Nietkühlschränke sehen eine zweckmäßige Beschickung und Entleerung der Kühlflächen mit Nieten vor, bei welchen die geschilderten Nachteile nicht auftreten.

IV. Schrifttum

- [1] Nach einem unveröffentlichten Bericht von A. Hansen, DVL, Adlershof.
- [2] Ritz & Glaser, Luftwissen Bd. 5 (1938) S. 432.
- [3] Heating, Piping and Ventilating, Air conditioning 1936, S. 385.
- [4] Portable Units and Air conditioning, Heating, Ventilating and Air conditioning 1937.
- [5] K. Meissner, Metallwirtschaft 1930 S. 641.
- [6] K. Büttner: Wärmehaushalt und Kälteschutz im Flugzeug, Rechliner Sonderdruckschrift 1941.

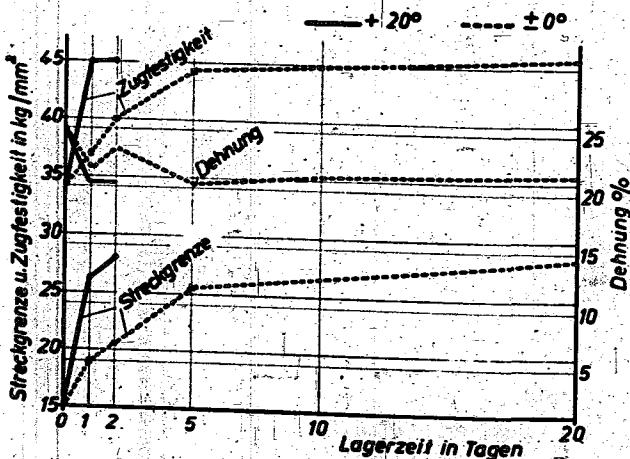


Bild 16. Aushärtungsverzögerung bei Duralnieten durch Kaltlagerung

Zur Ermittlung der Beanspruchung von Flugzeugfahrwerken beim Start

K. Schlaefke, RLM-Festigkeitsprüfstelle, Berlin-Adlershof

P 39 91

Um die Sicherheit eines Flugzeugfahrwerkes gegen Rollstöße beurteilen zu können, muß man die Kräfte kennen, mit denen es beim Rollen über Hindernisse beansprucht wird. Diese Kräfte werden zweckmäßig durch Rollversuche auf einer mit Nocken versehenen Trommel bestimmt, wobei in erster Linie die Höchstkräfte gemessen werden müssen, die bei verschiedenen Werten der ruhenden Last, der Rollgeschwindigkeit und der Hindernishöhe in Richtung senkrecht zum Boden auftreten. Da Rolltrommelprüfstände erst seit kurzem planmäßig betrieben werden, sollen im folgenden diejenigen Bedingungen ermittelt werden, die eine wirklichkeitsentsprechende Durchführung der Versuche gewährleisten.

Die Ergebnisse von Rolltrommelversuchen sind in Bild 1 und 2 dargestellt. Man erkennt, daß für gleichbleibende Hindernishöhe h zwischen der Höchstkraft P_r der ruhenden Last P_r , der Rollgeschwindigkeit v und der höchsten Rollgeschwindigkeit v_1 , bei der das Flugzeug sich vom Boden löst, eine Beziehung von der Form

$$\frac{P_r}{P_r} = 1 + (\sigma - 1) \left(\frac{v}{v_1} \right)^k \quad (1)$$

besteht. Dabei ist σ der Wert von P/P_r bei der Abhebegeschwindigkeit v_1 . Außer von der Hindernishöhe h bzw. von $\sigma = f(h)$ hängt der Verlauf der Kurve nach Gleichung (1) wesentlich vom Exponenten k ab. Da dieser sich aus den genannten Versuchen ziemlich genau zu $1/2$ ergibt, wird im folgenden mit diesem Wert gerechnet (Bild 3, obere Kurve).

Bei den vorliegenden Versuchen wächst für konstante Rollgeschwindigkeit die Stoßzahl P/P_r mit der Hindernishöhe h nach Bild 2. Da sich jedoch aus weiteren Versuchen ein anderer Verlauf ergeben hat (Bild 6), wird hierüber noch zu sprechen sein.

Beim Start hängt nun die jeweils in Rechnung zu stellende Kraft P_r vom Auftrieb P_a des Flugzeuges ab, den dieses bei der betreffenden Rollgeschwindigkeit erreicht hat. Beim Stillstand ist $P_a = 0$ und damit $P_r = P_a$, während beim Rollen mit höchstem Auftriebsbeiwert diese Kraft proportional mit dem Auftrieb, also proportional mit dem Quadrat der Rollgeschwindigkeit abnimmt. Bis zur Abhebegeschwindigkeit v_1 sinkt die ruhende Last P_r stetig bis auf Null.

Es gilt also

$$\frac{P_r}{P_a} = 1 - \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 \quad (2)$$

Den Verlauf dieser Kurve zeigt die untere Kurve des Bildes 3.

Durch Verbindung von Gl. (1) und (2) erhält man die Stoßzahl $S = P/P_a$, mit der das Fahrwerk beim Start tatsächlich beansprucht wird, zu

$$S = \left[1 + (\sigma - 1) \left(\frac{v}{v_1} \right)^k \right] \left[1 - \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 \right] \quad (3)$$

Durch Differenzieren dieser Gleichung und Nullsetzen des Differentialquotienten erhält man die Bestimmungsgleichung für den Wert φ von v/v_1 , für den S seinen Größtwert S_{max} erreicht, zu:

$$\varphi^k - 0,2 \varphi^{k-2} + \frac{0,8}{\sigma - 1} = 0 \quad (4)$$

Diese Gleichung ist numerisch nicht lösbar. Ihre durch Näherungsrechnung ermittelte Lösung zeigt Bild 4, aus dem man ersieht, daß für $\sigma = \infty$ das Geschwindigkeitsverhältnis $\varphi = \sqrt{0,2} = 0,447$ wird. Dies bedeutet, daß der Größtwert S_{max} in jedem Fall unterhalb einer Rollgeschwindigkeit $v = 0,447 v_1$ auftritt.

Eliminiert man σ aus Gl. (3) und (4), so erhält man die Gleichung derjenigen Kurve, auf der alle Größtwerte S_{max} in Abhängigkeit von v/v_1 liegen. Es ergibt sich

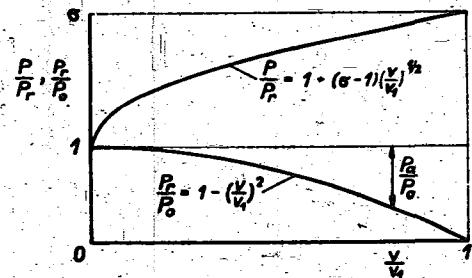


Bild 3. Darstellung von Gl. (1) und (2)

P_a = Auftrieb
 P_r = ruhende Last bei Stillstand des Flugzeuges
 v_1 = Abhebegeschwindigkeit
 Sonstige Bezeichnungen s. Bild 1 und 2

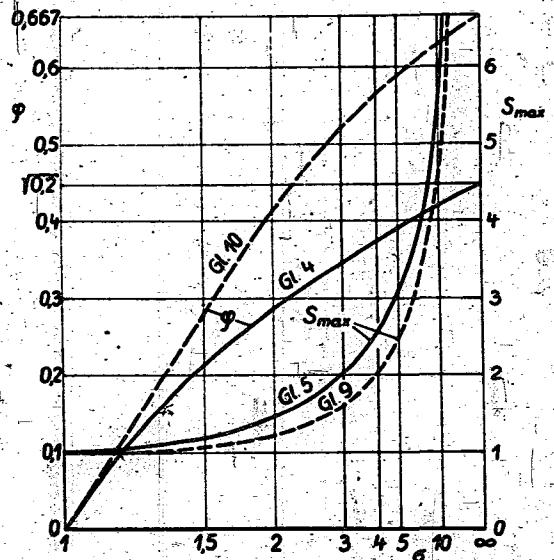


Bild 4. Darstellung von Gl. (4) und (5), (9) und (10)

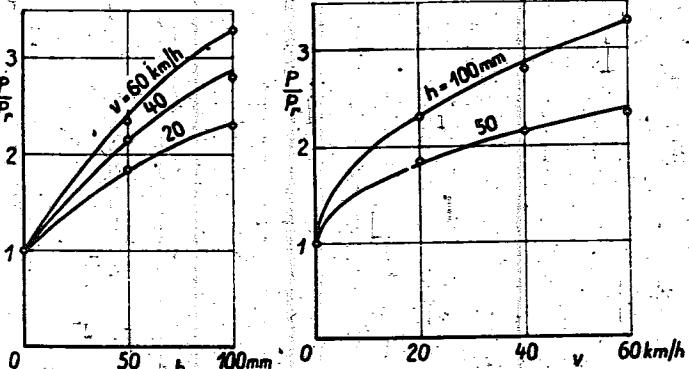


Bild 1 und Bild 2. Ergebnisse von Rolltrommelversuchen mit einem Fahrwerk Ar 232 (Flugtechnische Versuchsanstalt Prag)
 P = Höchstkraft senkrecht zum Boden
 P_r = ruhende Last = 1000 kg
 v = Rollgeschwindigkeit
 h = Hindernishöhe

$$S_{max} = \frac{[1 - (v/v_1)^2]^2}{1 - 5(v/v_1)^2} \quad (5)$$

Diese Kurve ist in Bild 5 dargestellt, in das außerdem Kurven für den Verlauf von S für drei verschiedene Hindernishöhen eingetragen sind, die sich aus einer weiteren Versuchsreihe ergeben haben. Da allerdings diese Versuche mit einem ganz anderen Ziel durchgeführt worden sind, sind ihre Ergebnisse für den vorliegenden Zweck nur bedingt brauchbar. Immerhin zeigen die eingetragenen Punkte, wie im Sinne dieser Betrachtungen Rolltrommelversuche durchzuführen und zu deuten sind.

Für die letztgenannten Versuche zeigt Bild 6 den Verlauf von P/P_r bei gleichbleibender Rollgeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Hindernishöhe h . Diese Kurven verlaufen anders als die der in Bild 2 dargestellten ersten Versuchsreihe. Offenbar spielt hier das Feder-Massensystem der einzelnen Fahrwerke eine Rolle, doch kann auf diese Frage hier nicht näher eingegangen werden. Die aus den beiden Versuchsreihen gewonnenen Werte von $\sigma = f(h)$ sind in Bild 7 miteinander verglichen.

Weil Versuche mit anderen Fahrwerken zu anderen Werten des Exponenten k führen können, soll die bisherige Betrachtung auch auf den Fall ausgedehnt werden, daß die Stoßzahl P/P_r geradlinig mit der Geschwindigkeit zunimmt, daß also k in Gl. (1) gleich Eins ist. Da außerdem ein Flugzeug mit einem geringeren Auftriebswert rollen und nach Erreichen der Startgeschwindigkeit durch Höhensteuergeben abgehoben werden kann, soll weiter angenommen werden, daß bei der höchsten Rollgeschwindigkeit der Auftrieb nur $3/4$ des Flugzeuggewichtes beträgt. Diese Voraussetzungen sind Grenzwerte, die die wirklich auftretenden Werte mit Sicherheit einschließen.

Mit $k = 1$ ergibt sich die der Gl. (1) entsprechende Gleichung zu

$$\frac{P}{P_r} = 1 + (\sigma - 1) \frac{v}{v_1} \quad (6)$$

Statt Gl. (2) ist

$$\frac{P_o}{P_o} = 1 - 0,75 \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 \quad (7)$$

und statt Gl. (3)

$$S = \left[1 + (\sigma - 1) \frac{v}{v_1} \right] \left[1 - 0,75 \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 \right] \quad (8)$$

zu setzen. Die Stoßzahl S erreicht ihren Größtwert

$$S_{max} = \frac{[1 - 0,75(v/v_1)^2]^2}{1 - 2,25(v/v_1)^2} \quad (9)$$

bei

$$v/v_1 = \frac{1}{3(\sigma - 1)} [\sqrt{1 + 4(\sigma - 1)^2} - 1] \quad (10)$$

Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Bild 4 mit den bisher gewonnenen verglichen. Nach Gl. (9) wird $S_{max} = \infty$ für $v/v_1 = \varphi = 2/3$, so daß für gleiche Hindernishöhen der Größtwert S_{max} bei einer etwas höheren Rollgeschwindigkeit auftritt. Dafür sind aber diese Größtwerte niedriger geworden.

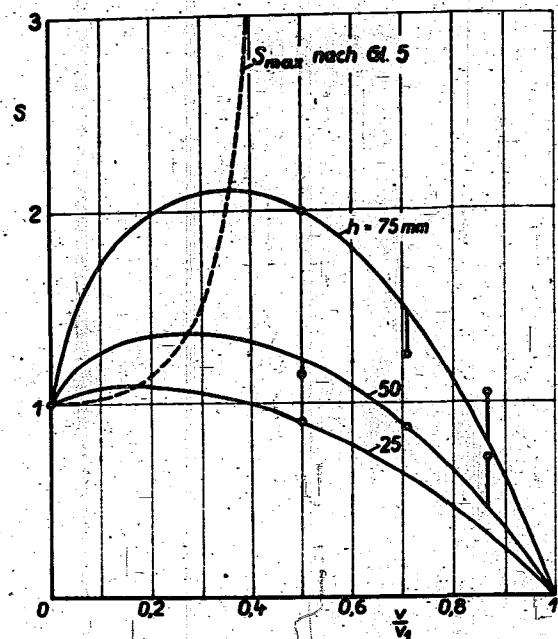


Bild 5. Auswertung von Rolltrommelversuchen mit einem Fahrwerk Fw 190 nach Gl. (3) bis (5) (Flugtechnische Versuchsanstalt Prag)

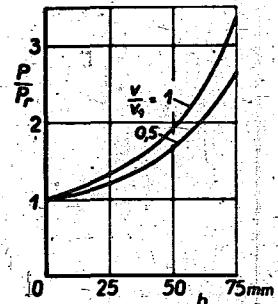


Bild 6. Weitere Darstellung der Versuchsergebnisse nach Bild 5

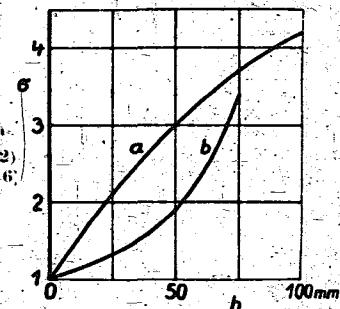


Bild 7. $\sigma = f(h)$ nach den Ergebnissen der beiden Versuchsreihen. a = Fahrwerk Ar 232 (Bild 1 und 2) b = Fahrwerk Fw 190 (Bild 5 und 6)

Im ganzen ergibt sich aus diesen Betrachtungen, daß die Höchstbeanspruchung von Flugzeugfahrwerken beim Start nicht etwa bei Höchstgeschwindigkeit, sondern bei mittleren Geschwindigkeiten auftritt. Es hat also keinen Sinn, für die Ermittlung der Startbeanspruchung die Rolltrommelprüfstände mit einer höheren Geschwindigkeit, als etwa der halben Abhebegeschwindigkeit laufen zu lassen. Dabei muß die Belastung dem Auftrieb entsprechend mit zunehmender Rollgeschwindigkeit vermindert werden.

Die Festigkeitsprüfstelle des Reichsluftfahrtministeriums läßt die von ihr veranlaßten und betreuten Versuche in dieser Richtung durchführen.

Aus deutschen Forschungsanstalten

A Grundwissenschaften

FB 1681; M. Eichler (Junkers Flugzeug- und Motorenwerke): **Auflösung der Integralgleichung von Possio für den harmonisch schwingenden Tragflügel im kompressiblen Medium durch Zurückführung auf ein lineares Gleichungssystem.**

Von Possio ist eine Integralgleichung für den harmonisch schwingenden Tragflügel im kompressiblen Medium angegeben worden. Als Methode zu ihrer Auflösung wird hier die Verwandlung in ein unendliches lineares Gleichungssystem vorgeschlagen, durchgeführt und an einem Zahlenbeispiel erprobt. Linke Seiten und Unbekannte des Gleichungssystems sind dabei die Koeffizienten gewisser Reihenentwicklungen für linke Seite und unbekannt Funktion der Integralgleichung.

32 S., 2 Abb., 3 Zahlent.

UM 701; W. Haack (DVL): **Geräuschwindrad für DFS 230.**

Anhand eines Geschwindigkeits- und Kräfteplanes wird gezeigt, weshalb die Herstellung von Geräuschwindrädern durch geringe Fluggeschwindigkeit erschwert wird. Nach der Beschreibung einiger Versuchsräder werden die Ergebnisse von Kanal- und Flugmessungen mitgeteilt und besprochen. Abschließend werden kurz die Möglichkeiten einer weiteren Verbesserung genannt.

11 S., 6 Abb.

C Meßtechnik

UM 695; W. Glaser (DVL): **Messung der Kolbentemperatur am laufenden Motor.**

Es wird über das seit einiger Zeit in den USA angewendete Verfahren berichtet, die Kolbentemperatur am laufenden Motor nach der Gegenstrommethode zu messen. Die Schwierigkeiten bei der Anwendung des Verfahrens in der DVL lagen weniger in der Meßmethode selbst als in der technischen Ausführung. Der Einbau der Thermolemente im Leichtmetallkolben erfordert im Gegensatz zu den in Amerika vorgenommenen Messungen am Graugußkolben wegen der verschiedenen Wärmeausdehnung des Kolben- und Thermomaterials besondere Maßnahmen; es wird auf die dabei auftretenden Schwierigkeiten hingewiesen und gezeigt, wie bestimmte Fehlmessungen festgestellt und ausgeschaltet werden können. Die hohen Kolbengeschwindigkeiten (bis zu 13 m/s) machten eine Verlegung der Drähte in das Kolbennere erforderlich. Der geringe Raum zwischen Kolben und Kurbelwanne gestattete keine robuste Ausführung der Gegenkontakte; durch günstige Formgebung und andere Maßnahmen gelang es jedoch, die Gegenkontaktefedern schwingungsgedämpft arbeiten zu lassen.

Der Gegenstrom wird in der DVL mit Hilfe eines weiteren Thermolementes erzeugt, das durch eine elektrische Heizung in sehr kurzer Zeit auf jede beliebige Temperatur gebracht werden kann. Aus diesem Grunde eignet sich das so entwickelte Gegenstromgerät auch sehr gut zur schnellen und zuverlässigen Eichung von Thermolementen und -anlagen.

Das Verfahren wurde bei zwei kleinen, schnelllaufenden Motoren (einem Viertakter und einem Zweitakter) und beim BMW-132-Ölprüfmotor angewendet. Auch bei hoher thermischer Belastung und hohen Drehzahlen konnte während sehr langer Betriebszeiten einwandfrei gemessen werden. Die Meßgenauigkeit beträgt etwa $\pm 1^\circ$ Celsius.

38 S., 20 Abb.

K Bauelemente, Maschinenelemente

UM 688; H. Denkmeier / A. Kerwien (DVL): **Einfluß des Bleigehaltes von Kraftstoffen auf Bauteile von Flugmotoren.**

Die an Flugmotoren-Bauteilen auftretenden Schäden werden teilweise auf den bei normalem B 4-Kraftstoff hohen Bleizusatz von 0,12% zurückgeführt. Die Untersuchungen zeigten, daß durch eine geringe Herabsetzung des Bleigehaltes auf 0,09% keine Besserung der Haltbarkeit von Auslaßventilen und Kolben erreicht wird.

26 S., 38 Abb.

UM 688/2; H. Denkmeier / A. Kerwien (DVL): **Einfluß des Bleigehaltes auf Flugmotoren-Bauteile. 2. Teilbericht.**

Ergänzend zu dem unter dem gleichen Titel erstatteten Bericht über Versuche am Jumo 211 H-Motor wird über die Versuchsdurchführung mit einem DB 605 A-Motor berichtet. Das mit dem Jumo 211 H-Motor erzielte Ergebnis wurde bestätigt; eine Besserung in der Haltbarkeit der Auslaßventile und Kolben durch Herabsetzung des Bleigehaltes von 0,12% auf 0,09% wurde auch an diesem Motormuster nicht festgestellt.

7 S., 5 Abb.

P Luftfahrt

FB 1621; H. Doetsch (DVL): **Profiluntersuchungen im 5x7 m Windkanal der DVL.**

Der vorliegende Bericht enthält Messungen des 5x7 m Windkanals der DVL an Profilen der erweiterten NACA-Systematik sowie an einer Reihe von Sonderprofilen. 14 S., 1 Abb., 1 Mappe mit Tabellen und Kurvenblättern.

FB 1651; D. Küchemann (AVA): **Auftrieb und Widerstand eines rotierenden Flügels.**

Es werden die Ergebnisse von Luftkraftmessungen an einem Flügel, welcher um seine Querachse in Rotation versetzt wurde, mitgeteilt, um die Vorgänge am rotierenden Flügel, dessen Anwendungsmöglichkeiten an anderer Stelle ¹⁾ näher besprochen sind, zu klären. Im allgemeinen ergibt sich eine, dem Magnus-Effekt bei rotierenden Kreiszyllindern ähnliche Wirkung, doch zeigen sich Autorotationserscheinungen bei bestimmten Verhältnissen von Umfangsgeschwindigkeit u zu Anströmgeschwindigkeit v . Es ergibt sich eine beträchtliche auf-

¹⁾ E. v. Holst: Der rotierende Flügel als Mittel zur Hochauftriebserzeugung. FB 1308 (1940) oder Jahrbuch 1941 d. dt. Luftfahrtforschung S. I, 372.

D. Küchemann: Dreikomponentenmessungen an einem Flügel mit rotierendem Hilfsflügel. FB 1513 (1941).

triebssteigernde und widerstandsvermindernde Wirkung von Endscheiben. Die gemessenen Höchstauftriebe liegen über $c_a = 8$ bzw. über 12 bei $u/v = 8$ bzw. 10, so daß man mit dem rotierenden Flügel Werte des Verhältnisses von $c_{a\max}$ (bei Drehung) zu $c_{a\min}$ (ohne Drehung im Schnellflug) erreichen kann wie mit keinem anderen Tragflügelssystem.

8 S., 4 Abb.

FB 1662; E. Würth (Eberspächer, Eßlingen a. N.): **Zusammenwirken von Flugzeug und Luftraum bei der Bildung von Kondensfahnen hinter Flugzeugen.**

Bei der Bildung von Kondensfahnen hinter Flugzeugen wirkt eine Reihe von Einflußgrößen zusammen. Die beiden großen Gruppen von Einflußgebieten lassen sich kurz kennzeichnen durch a) Triebwerk und Flugbedingungen, b) Luftraum und Wetterlage. Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist, das Zusammenwirken dieser Gruppen von Einflußgrößen bei der Bildung von Kondensfahnen aufzuzeigen und daraus die Maßnahmen zu ihrer Vermeidung zu umreißen.

22 S., 10 Abb.

FB 1665; F. Weinig (T. H. Stuttgart): **Auftrieb und Widerstand des Tragflügels kleiner Spannweite.**

Der Auftriebsbeiwert eines Tragflügels kleiner Spannweite nimmt zunächst linear mit der Anstellung zu, aber schwächer, als nach der Theorie der tragenden Linie zu erwarten ist, danach stärker als linear, im Gegensatz zu dieser Theorie. Andererseits ist der induzierte Widerstandsbeiwert bei gegebenem Auftriebsbeiwert offenbar wesentlich kleiner als sich nach dieser Theorie ergibt. Diese Abweichungen werden durch eine kleine Änderung gegenüber der Theorie der tragenden Linie erfaßbar.

25 S., 8 Abb.

UM 686; Eggersgluß (Luftfahrtforsch. Anst. Hermann Göring, Braunschweig): **Versuche über die Zerstörung von Hochspannungsseilen durch Sprengkörper.**

Um die zur Zerstörung der Leitungsseile von Hochspannungsseilen durch Sprengung notwendigen Sprengkörpermengen zu ermitteln, wurden Versuche mit Sprengkörpern aus Nitropenta an Hochspannungsseilen von verschiedenem Durchmesser aus Kupfer, Aluminium und Aluminium mit Stahlseele vorgenommen. Aus den Versuchen lassen sich Formeln für den Sprengstoffbedarf gewinnen, die an Hand von ergänzenden Versuchen nachgeprüft wurden. Die Art der Zerstörung wird an Lichtbildern der zerstörten Hochspannungsseile gezeigt.

25 S., 28 Abb. 6 Zahlent.

UM 691; W. Findeisen (Wolkenforschungsstelle d. Reichsamtes f. Wetterdienst, Prag): **Das thermometrische Vereisungswarngerät.**

Erfahrungen bei systematischen Temperaturmessungen von Flugzeugen aus, die zur exakten Feststellung des Unterschiedes von Vereisungsgrenze und 0°-Grenze unternommen wurden, brachten den Verfasser auf den Gedanken, die Vereisung thermometrisch zu messen. Durch Messung der Temperaturerhöhung eines der Vereisung ausgesetzten Thermometerkörpers gelingt es also, die Vereisungstendenz, das Differential der Vereisung zu bestimmen.

20 S., 5 Abb.

R Hochfrequenztechnik

FB 1631; W. Pauls (Institut f. Schwingungsforschung, Berlin): **Vertikaldiagramme von Tragflügelantennen.**

Es wird untersucht, ob mit Antennenstäben, die senkrecht auf die Tragflügel von Flugzeugen gesetzt werden, also mit vertikaler Polarisation arbeiten, im Dezimeterbereich ein Leitstrahl durch Umschaltung oder Phasenumtastung erzeugt werden kann. Die Messungen werden einmal an einer ebenen Platte, die als grobe Nachbildung eines Tragflügels dient, und dann an einem Tragflügelmodell durchgeführt.

22 S., 26 Abb.

FB 1645; Wegener/Zinke (Institut für Schwingungsforschung, Berlin): **Dämpfung von Hohlkabeln bei cm-Wellen.**

Für die Projektierung von Verbindungen mit Hohlkabeln ist es zweckmäßig, die Dämpfung von runden Hohlkabeln auf das optimal bemessene koaxiale Kabel gleicher lichter Weite zu beziehen. Es ergeben sich dabei Darstellungen, aus denen die Dämpfungsminderung gegenüber dem koaxialen Kabel für E- und H-Wellen in Abhängigkeit von Frequenz und Durchmesser unmittelbar ersichtlich ist. Aus weiteren Tafeln kann für bestimmte feste Dämpfungswerte der notwendige Durchmesser im Wellenbereich von 1 bis 15 cm abgelesen werden.

19 S., 11 Abb.

T Allgemeine Randgebiete

FB 1630; Nagel (DVL): **Ausgleich des Lichtabfalls in der Bildebene von Aufnahmekammern mittels durchlässig verspiegelter Ausgleichscheiben.**

In der Bildebene der Aufnahmekammern entsteht nach den Rändern zu ein Lichtabfall, der vor allem durch die lichttechnischen Gesetze sowie durch Vignettierung an der Objektivfassung bedingt ist und der sich insbesondere bei Weitwinkel-Luftbildaufnahmen außerordentlich störend auswirkt. Es werden Versuche beschrieben, den Lichtabfall durch Zwischenschaltung verlaufend durchlässig verspiegelter Ausgleichscheiben zu kompensieren. Es gelang, durch diese Maßnahme den verfügbaren Belichtungsspielraum bedeutend zu vergrößern, was neben praktischen Vergleichsaufnahmen auch durch entsprechende Messungen nachgewiesen wird.

23 S., 10 Abb.

FB 1648; H. Frieser (Wissensch. fotogr. Inst. T. H. Dresden): **Untersuchungen über die Verbesserung des Unterscheidungsvermögens von Farben durch Farbfilter.**

Bei den Versuchen zur Verbesserung des Unterscheidungsvermögens soll der Erfolg im allgemeinen durch die Absorption bestimmter Spektralbereiche durch Filter (Brille) erreicht werden.

In dem vorliegenden Bericht werden zunächst einige farbmetrische Vorbereitungen gemacht und hierauf die verschiedenen Möglichkeiten zur Vergrößerung des Farbunterschiedes kritisch besprochen. Anschließend werden einige Messungen der spektralen Remission verschiedener praktischer bedeutsamer Objekte mitgeteilt.

53 S., 19 Abb., 6 Kurvenbl.

Vorabdrucke
aus
Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung
7. Lieferung

Inhalt:

Über den Einfluß des Benzindampfes auf das Druckverhältnis eines Flugmotoren-Laders und die Temperatur in der Ladeleitung. Von W. Flössel	2
Beanspruchung von Schraubenverbindungen durch Steigungsunterschiede zwischen Bolzen- und Muttergewinde. Von H. Weber	9
Die Anfachung instabiler Störungen in einer laminaren Reibungsschicht. Von J. Pretsch	14
Der Triebflügel. Von E. v. Holst, D. Küchemann und K. Solf	32
Der Düsen einfluß auf die Windkanalkorrekturen bei ebener Strömung. Von F. Vandrey	41

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof

7555

Über den Einfluß des Benzindampfes auf das Druckverhältnis eines Flugmotoren-Laders und die Temperatur in der Ladeleitung*).

Von W. Flössel.

Bericht der Argus Motoren G. m. b. H., Berlin-Reinickendorf.

Flugmotoren-lader werden bei der Aufnahme der Drosselkurven im allgemeinen nur mit Luft betrieben, während im praktischen Betrieb bei vielen Flugmotoren der Lader mit einem Benzindampf-Luftgemisch gefahren wird. Gemischbildung vor dem Lader hat den Vorteil einer Steigerung des Druckverhältnisses und einer Kühlung des Laufrades. Es wird gezeigt, wie groß die Erhöhung des Druckverhältnisses im Grenzfall vollkommener Verdampfung vor dem Eintritt in den Lader sein kann und welche Temperaturenniedrigung der Ladeluft auftritt. Der Volumenanteil des Kraftstoffdampfes an der Ladung wird berechnet und dargestellt. Über die Möglichkeiten einer vollständigen Verdampfung werden einige theoretische und praktische Angaben gemacht. Der Einfluß der Luftüberschusszahl des Kraftstoff-Luftgemisches wurde in weiten Grenzen berücksichtigt. Ein praktisches Beispiel aus Messungen am Motor zeigt, wie veränderlich das Druckverhältnis eines Laders sein kann, selbst wenn die Drosselkurve des Laders fast waagrecht verläuft, d. h. die adiabatische Förderhöhe sich kaum ändert.

Gliederung.

- I. Einführung.
- II. Schrifttum.
- III. Rechnungsunterlagen und Ergebnisse.
- IV. Kritik an den Ergebnissen.
- V. Zusammenfassung.
- VI. Schrifttum.

I. Einführung.

Die auf dem Laderprüfstand mit Luft aufgenommenen Kennfelder von Flugmotoren-ladern gelten mit geringen Abweichungen auch für den Betrieb am Flugmotor selbst, vorausgesetzt, daß dieser mit Druckvergasern oder unmittelbarer Einspritzung des Kraftstoffes in die Zylinder arbeitet. Wenn auch in Deutschland die direkte Kraftstoffeinspritzung bei großen Kampfmotoren vorherrscht, so ist doch zu bedenken, daß alle ausländischen Stern- und Doppelsternmotoren und zahlreiche flüssigkeits- und luftgekühlte Reihentmotoren mit Saugvergasern arbeiten, sodaß also der Lader mit einem Gemisch von Luft und Brennstoff beaufschlagt wird.

Es sei am Rande vermerkt, daß sich bei günstiger Gestaltung des Ladeleitungssystemes mit Gemischbildung durch Vergaser entgegen der landläufigen Meinung zumindest dieselben günstigen spezifischen Kraftstoffverbräuche erzielen lassen, wie bei der unmittelbaren Einspritzung des Kraftstoffes in den Zylinder. Die Vereisungsgefahr wurde früher sehr überschätzt. Außerdem besitzen neuzeitliche Vergaser selbsttätig arbeitende Eiswarngeräte, die dem Vergaser bei Vereisung einer kleinen Bohrung sofort Warmluft zuführen oder Alkohol als Enteisungsflüssigkeit einspritzen.

II. Schrifttum.

Im deutschen Schrifttum fehlt fast jeder Hinweis auf die Veränderung, die das Druckverhältnis des Laders durch den Betrieb mit Kraftstoffdampf erfährt. In einer älteren englischen Untersuchung [1] an einem Vollmotor mit Saugvergaser wurde festgestellt, daß das Druckverhältnis bei konstanter Drehzahl mit sinkender Eintrittstemperatur wächst,

jedoch in weit geringerem Maße als nach theoretischen Erwägungen zu erwarten wäre.

G. V. Brooke [2] untersuchte einen Napier-Lion-Lader mit vorgeschaltetem Saugvergaser sowohl in reinem Luftbetrieb als auch bei Betrieb mit Benzin- und Spiritus-Luftgemisch. Es zeigte sich, daß Spiritus trotz seiner wesentlich höheren Verdampfungswärme und kleineren Luftbedarfes bei Anfangslufttemperaturen von 15 bis 20° nur eine geringere Abkühlung der Ladeluft erbrachte als Benzin; bei 60° Temperatur vor Vergaser war die Abkühlung durch Spiritus erst um etwa 2° größer als bei Benzin. Das bedeutet, daß bei dem höher siedenden Kraftstoff nur ein kleinerer Anteil verdampft, so daß auch die Zunahme des Druckverhältnisses hinter den theoretischen Erwartungen zurückbleibt. Bei einer Temperatur von 60° vor Vergaser trat nach den gemessenen Druckverhältnissen bereits die volle Verdampfung des Benzins ein, das einen Siedebeginn von 62° Siedeschluß von 155° und eine mittlere Siedetemperatur (Kennziffer) von 99,3° aufwies. Das Druckverhältnis des Laders war den damaligen Verhältnissen entsprechend bei den Versuchen nur 1,2 bis 1,55.

Brooke folgert aus den Ergebnissen:

„Es ist denkbar, daß die verminderte Verdampfung, die die Verminderung der Einlaßtemperatur begleitet, in gewissen Grenzen entweder teilweise oder vollständig der Tendenz des Kreisladens einer Zunahme des Druckverhältnisses mit sinkender Einlaßtemperatur entgegenwirkt und es ist nicht möglich, von diesen Versuchen zahlenmäßige Werte abzuleiten, die für weitere Anwendung geeignet sind.“

Brooke stellt seine Ergebnisse über einem spezifischen Ansaugvolumen des Laders dar und verwendet diese uns angewohnte Kennziffer auch in seinen theoretischen Ableitungen, so daß eine andere, einfachere Darlegung der Verhältnisse notwendig erscheint. Der von Brooke verwendete Kraftstoff mit 20 Vol.-% Benzol ist für die deutschen Verhältnisse ohne Interesse.

III. Rechnungsunterlagen und Ergebnisse.

Nachstehend werden die Grundlagen der Berechnung angegeben, wobei der Grenzfall vollständiger Verdampfung des Brennstoffes vor dem Eintritt in das Laderlaufrad zugrunde gelegt wird. Weiterhin wird angenommen, daß das Gemisch aus Luft und Brennstoffdampf sich wie ein vollkommenes Gas verhält.

Für den ungekühlten Lader wird adiabatische Verdichtung angenommen und der Arbeitsbedarf je kg verdichteter Luft bzw. die adiabatische Förderhöhe kann nach der bekannten Formel

$$H_{ad} = R \cdot T_1 \cdot \frac{k}{k-1} \left[\pi^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \quad (\text{m}) \quad \pi = p_2/p_1 \quad (1)$$

berechnet werden.

Dabei bedeutet:

R = Gaskonstante (mkg/kg°),

T_1 = Anfangstemperatur der Verdichtung (°K),

p_2 = Enddruck = verlangter Ladedruck + evtl. Verluste (at abs.),

* M 94.

p_1 = Anfangsdruck = Umgebungsdruck — evtl. Verluste (at abs.),
 k = Adiabatenexponent,
 π = Druckverhältnis.

Für die vorliegende Rechnung empfiehlt sich ein Ersatz des Adiabatenexponenten durch R und c_p :

$$\frac{k-1}{k} = \frac{A \cdot R}{c_p} \quad (2)$$

Hierbei ist

c_p = spezifische Wärme bei konstantem Druck (kcal/kg°)
 A = mechanisches Wärmeäquivalent = 1/427.

Die Kompressorgleichung lautet dann:

$$H_{ad} = \frac{c_p}{A} \cdot T_1 \cdot \left(\pi \frac{A \cdot R}{c_p} - 1 \right) \quad (3)$$

Für Luft mäßiger Temperatur wird:

$$\frac{c_p}{A} = 102,4 \quad \frac{A \cdot R}{c_p} = 0,286$$

Um die notwendige adiabatische Förderhöhe bei gegebenem Druckverhältnis π berechnen zu können, braucht man also die Werte von R und c_p für das vorliegende Kraftstoff-Luftgemisch. Der Index L möge für Luft, der Index B für das Benzin und G für das Gemisch gelten.

Das Mischungsverhältnis Luft zu Kraftstoff ist

$$m = \lambda \cdot L_{chem} \quad (4)$$

und das Gesamtgewicht des Gemisches $m + 1$ kg. Hierbei bedeutet λ die Luftüberschusszahl und L_{chem} das stöchiometrische Mischungsverhältnis für vollkommene Verbrennung. Die Gaskonstante des Gemisches R_G ergibt sich dann aus den Gewichtsanteilen g_i und den Mol-Gewichten M_i zu:

$$R_G = 848 \sum \left(\frac{g_i}{M_i} \right) \quad (\text{mkg/kg}^\circ) \quad (5)$$

Für den vorliegenden Fall ergibt sich beim Mischungsverhältnis m

$$R_G = \frac{848}{M_L} \cdot \frac{m}{m+1} + \frac{848}{M_B} \cdot \frac{1}{m+1} \quad (\text{mkg/kg}^\circ) \quad (6)$$

und das Verhältnis der Gaskonstanten wird

$$\frac{R_G}{R_L} = \frac{1}{m+1} \left(m + \frac{M_L}{M_B} \right) \quad (7)$$

Für die spezifische Wärme des Gemisches bei konstantem Druck gilt:

$$c_{pG} = \sum g_i \cdot c_{pi} = \frac{1}{m+1} (m c_{pL} + c_{pB}) \quad \text{kcal/kg} \quad (8)$$

und das Verhältnis der spezifischen Wärme ist

$$\frac{c_{pG}}{c_{pL}} = \frac{1}{m+1} \left(m + \frac{c_{pB}}{c_{pL}} \right) \quad (9)$$

Die Abkühlung des Gemisches von $(m + 1)$ kg durch die vollständige Verdampfung des Benzins mit der Verdampfungswärme r (kcal/kg) errechnet sich zu

$$\Delta t = \frac{r}{(m+1) \cdot c_{pG}} \quad (^\circ\text{C}) \quad (10)$$

Schwierigkeiten machte die richtige Bestimmung von R und c_p des Benzindampfes, da Benzin kein einheitlicher Stoff ist und das Schrifttum insbesondere über die spezifische Wärme des Benzindampfes nur sehr wenig Angaben enthält. Leider gilt das einfache Gesetz, daß die spezifischen Molwärmen bei konstantem Druck eine einfache Funktion der Gaskonstante sind, nicht mehr bei komplizierten Molekülen mit vielen Atomen. Die spezifische Wärme kann deshalb nicht theoretisch aus dem Spektrum errechnet werden, sondern muß durch Versuche bestimmt werden. Einem Vorschlag von H. Kühl [3] folgend, wurden die von Bahlke und Kay [4] gemessenen Werte verwendet:

$$c_p = \frac{4,0 - \gamma}{6450} (1,8 \cdot t + 702) \pm 1,33\% \quad (\text{Rcal/kg}^\circ) \quad (11)$$

Dabei ist γ in kg/l für 15,5° C einzusetzen. Ebenso wurde das Molekulargewicht des Benzins mit 100 und das spezifische Gewicht mit 0,74 kg/l verwendet.

Das Molekulargewicht von 100 entspricht nach Fritz, Simons und Bahlke [5] einem Destillatstoff, der bei 93 bis 94° C nach der Engle-ASTM-Kristalltemperatur bei 50% verdampft ist, Bild 1. Die so errechnete wahre spezifische Wärme des Benzindampfes c_p zeigt Bild 2.

Für die weitere Rechnung wurde als spezifische Wärme des Benzindampfes 0,410 kcal/kg° verwendet, entsprechend

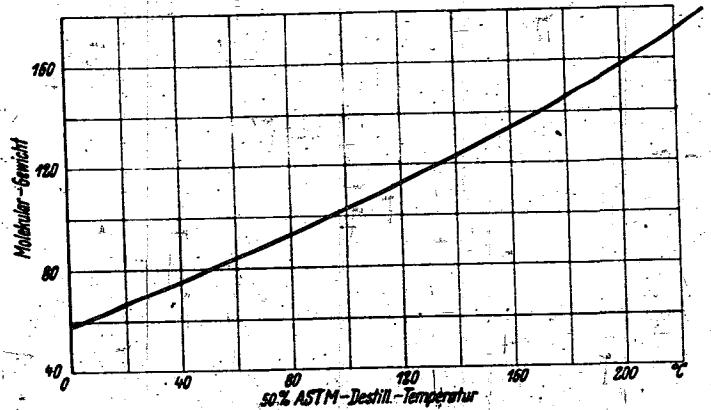


Bild 1. Mittleres Molekulargewicht nach Fritz, Simons und Bahlke.



Bild 2. Wahre spez. Wärme von Benzindampf nach Bahlke und Kay für $\gamma = 0,74$ kg/l.

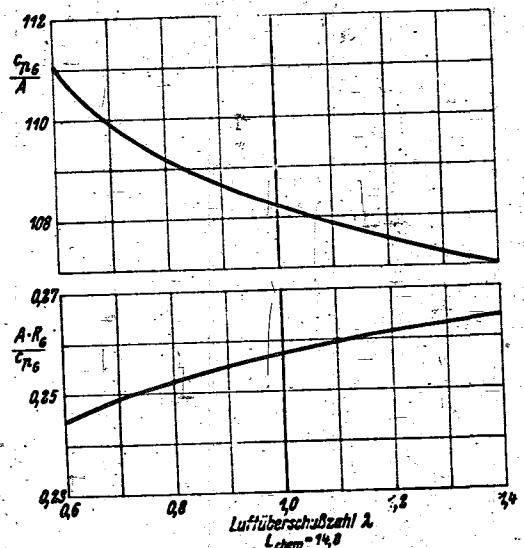


Bild 3. Konstante und Exponent der Verdichtergleichung bei Betrieb mit Benzindampf-Luftgemisch.

$M_B = 100$
 $c_{pB} = 0,410 \text{ kcal/kg}$
 $c_{pL} = 0,243$

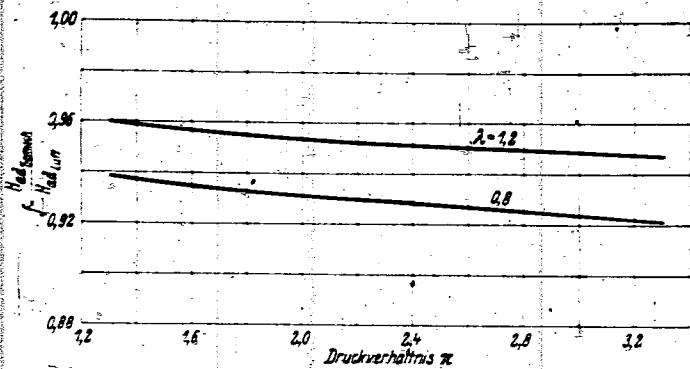


Bild 4. Das Verhältnis zwischen der notwendigen adiab. Förderhöhe bei Gemischverdichtung und der Förderhöhe bei Verdichtung von Luft.

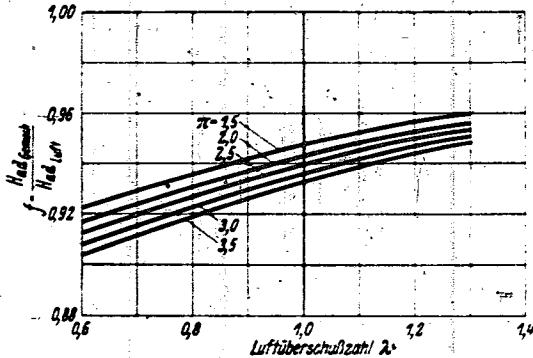


Bild 5. Das Verhältnis zwischen der notwendigen adiab. Förderhöhe bei Gemischverdichtung und der Förderhöhe bei Verdichtung von Luft.

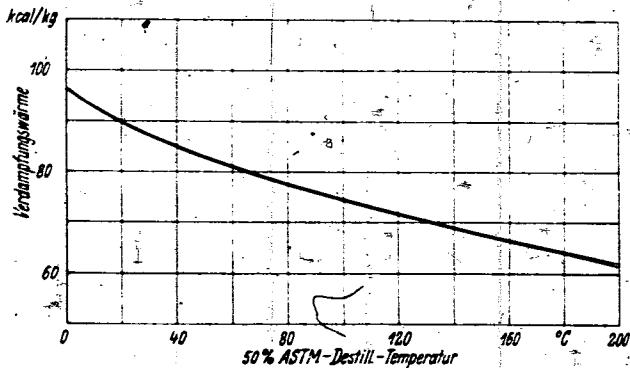


Bild 6. Verdampfungswärme eines reinen Kohlenwasserstoffes bei 760 mm Hg.

$$r_T = K' \cdot \frac{T_{50}}{M} \text{ kcal/kg}$$

K' = Troutonsche Konstante = 20,5
 M = $f(T_{50})$ siehe Bild 1

einer Temperatur von rd. 60°. Diese Temperatur wird etwa der mittleren Temperatur der Luft in einem recht leistungsfähigen Lader entsprechen.

Unter diesen verschiedenen Annahmen wurden sowohl die Konstante als auch der Exponent des Druckverhältnisses für die verschiedenen Mischungsverhältnisse errechnet und in Bild 3 aufgezeichnet. Als Abszissenmaßstab wurde die Luftüberschusszahl λ gewählt, wobei als chemischer Luftbedarf 14,8 kg/kg Kraftstoff angenommen wurde.

Da einige neuzeitliche Vergasermotoren serienmäßig bei größter Reiseleistung mit Luftüberschusszahlen um 1,2 betrieben werden und bei Versuchen mit noch ärmeren Gemischen gefahren werden können, wurde das Schaubild für Luftüberschusszahlen von 0,6 bis zu 1,4 gezeichnet, Bild 5.

Man erkennt, daß mit Gemisch die Konstante der Verdichtergleichung größer, der Exponent kleiner ist als bei Betrieb mit Luft, wo die entsprechenden Werte 102,4 bzw. 0,286 betragen. Mit zunehmendem Luftüberschuß wird die Abweichung von den Daten des reinen Luftbetriebes naturgemäß geringer.

Bild 4 zeigt für reiches und armes Kraftstoff-Luftgemisch die Ersparnis an notwendiger Förderhöhe in Abhängigkeit vom verlangten Druckverhältnis. Es zeigt sich, daß die Verminderung der notwendigen Förderhöhe mit wachsendem Druckverhältnis langsam zunimmt. Die Abhängigkeit ist nicht stark. Für neuzeitliche Lader würde man bei Betrieb mit reichem Kraftstoff-Luftgemisch ($\lambda \sim 0,8$) für $f = 92,5\%$ bis 93% der Förderhöhe bei Betrieb mit reiner Luft benötigen; bei armen Gemisch ($\lambda \sim 1,2$) f mit 95 bis 95,5% nehmen können.

Betrachtet man umgekehrt den Lader als gegeben, oder hat man das Kennfeld bei Betrieb mit reiner Luft vorliegen, so kann man von einer scheinbaren Zunahme der Förderhöhe sprechen. Nimmt man für praktische Zwecke an, daß die Förderhöhe des Laders bei Betrieb mit oder ohne Kraftstoffzusatz unverändert bleibt, so kann man das neue Druckverhältnis errechnen.

$$H_{ad} = 102,4 \cdot T_1 \cdot (\pi^{0,286} - 1)$$

für Luft ist gleich

$$H_{ad} = \frac{c_{pG}}{A} \cdot T_1 \cdot \left(\frac{A \cdot R_G}{c_{pG}} - 1 \right)$$

für Gemisch

$$\pi_G \frac{A \cdot R_G}{c_{pG}} - 1 = \frac{c_{pL}}{c_{pG}} \cdot (\pi^{0,286} - 1) \quad (12)$$

Dieses größere Druckverhältnis bei Gemischbetrieb π_G mit der Konstanten und dem Exponenten für reine Luft ergibt die scheinbare Förderhöhe H_{ad}' bei Gemischbetrieb

$$H_{ad}' = 102,4 \cdot T_1 \cdot (\pi_G^{0,286} - 1) \quad (13)$$

Das Verhältnis von scheinbarer Förderhöhe zu tatsächlicher Förderhöhe (f) läßt sich mit Hilfe des Faktors f von Bild 4 leicht errechnen, denn es ist nur der reziproke Wert von f und wie dieser vom Druckverhältnis abhängig

$$f' = \frac{H_{ad}'}{H_{ad}} = \frac{1}{f} = \frac{H_{ad}}{H_{ad}'} \quad (14)$$

Das heißt, daß bei reichem Gemisch die scheinbare Zunahme der Förderhöhe etwa 8%, bei armen Gemisch etwa 5% beträgt.

Bild 4 zeigte auch, daß die Abhängigkeit des Faktors f vom Druckverhältnis geringer ist als von der Luftüberschusszahl λ . In Bild 5 ist deshalb als unabhängige Variable die Luftüberschusszahl aufgetragen und der Faktor f für konstante Druckverhältnisse π dargestellt. Während bei überreichem Gemisch, wie es bei Flugmotoren nur für sehr hohe Startleistungen vorkommen könnte, der Faktor f etwa 0,91 beträgt, steigt dieser Wert auf 0,96 bei sehr armen Gemischen entsprechend der langsamen Annäherung an reinen Luftbetrieb des Laders.

Die Abkühlung des Kraftstoffluftgemisches infolge der Kraftstoffverdampfung ist in Bild 7 aufgezeichnet worden. Bild 6 zeigt die nach der Troutonschen Regel errechnete Verdampfungswärme bei der zu 760 mm Hg gehörenden Siedetemperatur. Die Konstante wurde zu 20,5 angenommen [6] und als Siedetemperatur die Temperatur eingesetzt, bei der der Kraftstoff bei der ASTM-Destillation zu 50% verdampft ist. Der Zusammenhang zwischen dieser Temperatur und dem Molekulargewicht wurde nach Bild 1 eingesetzt. Bild 6 zeigt, daß zu $M = 100$ etwa 75 kcal/kg Verdampfungswärme gehören.

Die Abkühlung beträgt bei voller Verdampfung bei Gemischen für Start- und Kampfleistungen etwa 20 bis 23° bei Luftüberschußbetrieb mit rd. 16° bedeutend weniger. In das Schaubild wurden auch Kurven für $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{2}$ Verdampfung aufgenommen, da letzterer Wert z. B. bei Einzylindermotoren auftritt, die meist mit fremd angetriebenem Gebläse und auf etwa 30° rückgekühlter Ladeluft gefahren werden.

Tritt diese Kühlung durch Verdampfung vor den Eintritt des Gemisches in den Lader ein, so ergibt sich aus der

temperaturabsenkung eine weitere Verringerung der notwendigen adiabatischen Förderhöhe proportional der absoluten Temperatur T_1 (s. Gl. (1) und (3)). Der Faktor f'' in Bild 8 zeigt diese Ersparnis an Förderhöhe über der Luftüberschußzahl für verschiedene Flughöhen.

$$f'' = \frac{T_1 - \Delta t}{T_1} \dots (15)$$

Die nach CINA in 2 bis 6 km Höhe vorhandenen Normaltemperaturen wurden ohne Berücksichtigung einer beim Fluge vorhandenen Stauaufwärmung

$$\Delta t_{\text{stau}} = \frac{v^2}{2020} \text{ (}^\circ\text{C)} \quad v \text{ (m/s)} \dots (16)$$

als Anfangstemperaturen vor dem Vergaser eingesetzt.

Ein Vergleich mit Bild 5 zeigt, daß der reine Temperatureinfluß im ganzen untersuchten Bereich noch etwas größer ist, als der der Veränderung von R und c_p bei Gemischbetrieb. Je größer die Flughöhe, desto eindrucksvoller der Einfluß ein und derselben Abkühlung, d. h. desto kleiner der Faktor f'' .

Diese letzte Steigerung des Druckverhältnisses infolge Sinkens der Anfangstemperatur kann auch als scheinbare Förderhöhen-Erhöhung gerechnet werden. Der Klammerwert der Verdichtergleichung (3) wird dann mit dem Temperaturverhältnis multipliziert und ein scheinbares Druckverhältnis π'_G errechnet.

$$\left(\pi'_G \frac{A \cdot R_G}{c_{pG}} - 1 \right) = \frac{T_1}{T_1 - \Delta t} \left(\pi_G \frac{A \cdot R_G}{c_{pG}} - 1 \right) \dots (17)$$

$$H_{ad}'' = 102,4 \cdot T_1 (\pi'_G \cdot 0,286 - 1) \text{ (m)} \dots (18)$$

An einem Beispiel soll die Zunahme des Druckverhältnisses bzw. der scheinbare Gewinn an adiabatischer Förderhöhe durchgerechnet werden. Der Lader möge für reinen Luftbetrieb und einen Ladedruck von 1,35 ata in 4 km Höhe entworfen sein. Das Druckverhältnis π ist dann ohne Flugstauausnutzung oder Leitungsverluste zu berücksichtigenden

$$\pi = \frac{1,35}{0,628} = 2,15.$$

Bei einer Anfangstemperatur von 262° K nach CINA wird die adiabatische Förderhöhe

$$H_{ad} = 102,4 \cdot 262 \cdot (2,15^{0,286} - 1) = 26810 \cdot 0,2446 = 6560 \text{ m} \dots (19)$$

Bei Gemischbetrieb mit einer Luftüberschußzahl 0,8 ergibt sich nach Gl. (12) ein neuer Klammerwert der Verdichtergleichung (3) von

$$0,2446 \cdot \frac{1}{1,0662} = 0,2292$$

dem bei einem Exponenten des Druckverhältnisses von 0,2523 ein neues Druckverhältnis von 2,267 entspricht. Die scheinbare adiabatische Förderhöhe H_{ad}' wird dann nach Gl. (13)

$$H_{ad}' = 102,4 \cdot 262 \cdot (\pi_G \cdot 0,286 - 1) = 26810 \cdot 0,26345 = 7060 \text{ m} \dots (20)$$

Die scheinbare Förderhöhe H_{ad}' nach (20) ist 7060/6560 = 1,076fach so groß als tatsächlich nach (19). Dieses Verhältnis kann in Abhängigkeit von dem Druckverhältnis 2,15 aus Bild 4 oder auch Bild 5 errechnet werden. Es ergibt sich dort $f = 0,930$ oder nach (14)

$$f = \frac{1}{0,930} = 1,075,$$

d. h. derselbe Wert.

Die Senkung der Anfangstemperatur T_1 vor der Verdichtung beträgt für $\lambda = 0,8$ nach Bild 7 bei voller Verdampfung 22,9°. Das Temperaturverhältnis beträgt dann in Übereinstimmung mit Bild 8

$$\frac{T_1 - \Delta t}{T_1} = \frac{239,1}{262,0} = 0,914 = f''.$$

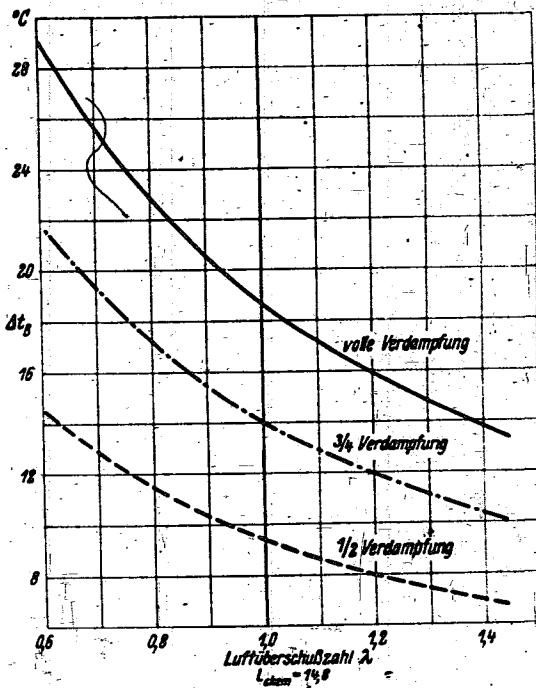


Bild 7. Abkühlung des Kraftstoff-Luftgemisches durch die Kraftstoffverdampfung.

$$r = 75 \text{ kcal/kg}$$

$$c_{pR} = 0,410 \text{ kcal/kg}$$

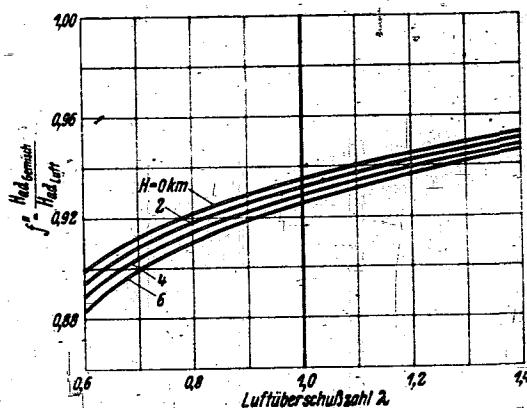


Bild 8. Theoretisches Verhältnis der adiab. Förderhöhen bei Betrieb mit Gemisch statt Luft infolge der Temperaturenkung gegenüber CINA durch volle Verdampfung des Kraftstoffes vor dem Lader.

Der Klammerwert der Verdichtergleichung (20) wird dann nach (17)

$$\frac{0,26345}{f''} = \frac{0,26345}{0,914} = 0,2882$$

dem mit dem Exponenten 0,286 für Luft ein scheinbares Druckverhältnis von 2,425 entspricht. Die scheinbare — in doppeltem Sinne — Förderhöhe H_{ad}'' beträgt mit den Konstanten für Luft nach Gl. (18)

$$H_{ad}'' = 26810 \cdot 0,2882 = 7725 \text{ m} \dots (21)$$

Das Verhältnis der Förderhöhen (21) zu (20) beträgt 1,095. Denselben Wert ergibt nach Bild 8 $1/f'' = 1/0,914 = 1,095$.

Die gesamte scheinbare Vergrößerung der Förderhöhe (21) gegen (19) ergibt $\frac{7725}{6560} = 1,177$. Aus Bild 4 und Bild 8 ergibt sich als scheinbarer Gewinn

$$\frac{1}{f \cdot f''} = \frac{1}{0,930 \cdot 0,914} = \frac{1}{0,850} = 1,176,$$

d. h. derselbe Wert wie nach der eingehenden Rechnung. Die scheinbare Vergrößerung der Förderhöhe gestattet entweder in 4 km Höhe einen höheren Ladedruck zu fahren

$p_I = 0,628 \cdot 2,425 = 1,52 \text{ ata}$ statt $1,35 \text{ ata}$
 oder aber bei gleichem Ladedruck eine größere Volldruckhöhe zu erreichen. Die zugehörige Flughöhe ergibt sich angenähert aus dem neuen Druckverhältnis zu

$$p_{II} = \frac{1,35}{2,425} = 0,557 \text{ ata} \text{ entsprechend } H = 4,91 \text{ km}$$

nach CINA. Genauer ergibt sich in dieser größeren Höhe wiederum eine Senkung der Ansaugtemperatur T_1 nach CINA um rd. 5° , so daß das Druckverhältnis nochmals wächst und die Volldruckhöhe schätzungsweise auf reichlich 5 km steigen wird. Solche Probeerrechnungen mit schrittweiser Verbesserung ergeben sich fast bei allen Vorausberechnungen der Leistungen von Höhenmotoren, wenn bestimmte Leistungen, Ladedrucke oder Verbrennungsluftgewichte vorgegeben sind.

Die Steigerung der Volldruckhöhe durch die Gemischverdichtung um etwa 1000 m ist jedenfalls bemerkenswert.

Nachdem die Zunahme des Druckverhältnisses untersucht wurde, erhebt sich die Frage, welche Veränderung der Leistungsbedarf des Laders durch den Betrieb mit Gemisch statt reiner Luft erleidet.

Der Leistungsbedarf ist allgemein für Luftbetrieb

$$N_L = \frac{G_L \cdot H_{adL}}{\eta_{ad} \cdot 75} \text{ (PS)} \quad (22)$$

wobei η_{ad} = adiabatischer Laderwirkungsgrad [7].

Setzt man für das gleiche verlangte Druckverhältnis α bei Gemischbetrieb die auf $H_{adL} = f' H_{adL}$ verringerte Förderhöhe ein, so muß man statt des Luftgewichtes das Gemischgewicht einführen

$$N_G = \frac{(G_L + G_B) \cdot H_{adG}}{\eta_{ad} \cdot 75} \text{ (PS)} \quad (23)$$

oder bei Verwendung der Luftüberschuszah $\lambda = \frac{G_L}{L_{chem}}$

$$N_G = \frac{G_L \left(1 + \frac{1}{\lambda \cdot L_{chem}}\right) \cdot H_{adG}}{\eta_{ad} \cdot 75} \quad (24)$$

Bei der Berechnung des Luftgewichtes ist die Gewichtszunahme der Ladung durch die Abkühlung zu berücksichtigen. Diese Zunahme erfolgt wegen der Vermischung mit Restgasen und der Wärmezufuhr beim Ansaugen nicht mit dem Kehrwert der absoluten Temperatur, sondern in geringerem Maße, etwa mit $T^{0,7}$ je nach Bauart des Zylinders. Es soll an dieser Stelle jedoch nicht auf die verwickelten Vorgänge beim Ladungswechsel eines Höhenmotors eingegangen werden.

Auf einen weiteren Einfluß des Kraftstoffdampfes soll noch kurz hingewiesen werden. Bei der Berechnung des Liefergrades aus Versuchswerten, bei denen das Luftgewicht außerhalb des Motors gemessen wurde, wird wohl die Temperaturänderung durch den Lader einerseits, die Kraftstoffverdampfung andererseits berechnet, aber der Volumenanteil des Kraftstoffdampfes im Gemisch vernachlässigt oder nicht genau ermittelt.

Betrachtet man den Brennstoff als vollständig verdampft und als ideales Gas, so ist unabhängig vom Ladedruck

$$\frac{v_B}{v_L} = \frac{G_B}{G_L} \cdot \frac{R_B}{R_L} = \frac{1}{\lambda \cdot L_{chem}} \cdot \frac{R_B}{R_L} \quad (25)$$

Für einen bestimmten Kraftstoff ist R_B und L_{chem} mit R_L zu einer Konstanten zusammenfaßbar, wie folgt

$$\frac{v_B}{v_L} = \frac{C}{\lambda} \text{ (‰)}, \text{ wobei } C = \frac{R_B}{R_L} \cdot \frac{100}{L_{chem}} \quad (26)$$

Für einige Kohlenwasserstoffe der Paraffinreihe und für Benzol seien die Konstanten C angegeben

Stoff	L_{chem}	C
C_6H_{14}	14,98	2,250
C_7H_{16}	14,90	1,945
C_8H_{18}	14,86	1,710
C_9H_{20}	12,91	2,878

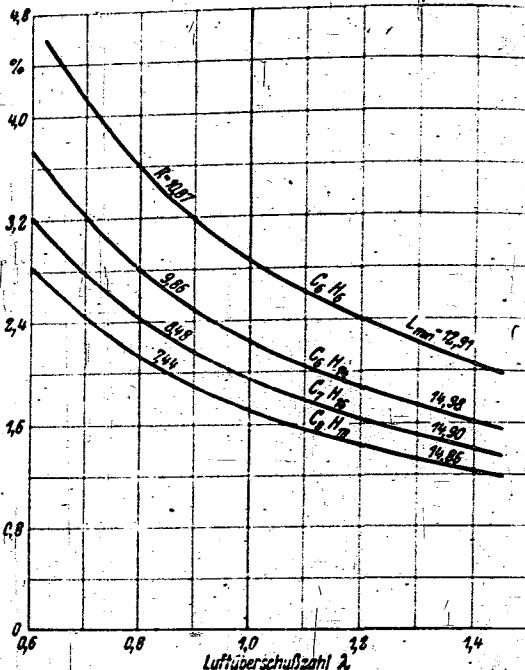


Bild 9. Zunahme des Liefergrades bei Berücksichtigung des Kraftstoffvolumens bei vollständiger Verdampfung.

Bild 9 zeigt das Verhältnis der Volumina nach der Gl. (26) für die vier verschiedenen Kraftstoffe. Man erkennt, daß der Volumenanteil $1,5$ bis 3% beträgt, wobei die niedrigeren Werte zu den großen Luftüberschuszahlen gehören. Das Brennstoffdampfvolumen ist also nicht vernachlässigbar klein.

IV. Kritik an den Ergebnissen.

Alle in Bild 3 bis 9 dargestellten Werte sind unter der Annahme vollständiger Verdampfung des Kraftstoffes gerechnet. Schon in dem einleitenden Abschnitt »Schrifttum« wurde die Ansicht von Brooke [2] wiedergegeben, daß bei sinkender Ansaugtemperatur die Verdampfung insbesondere des höher siedenden Kraftstoffes zunehmend unvollständig wird.

E. Alt hat bei reinen Verdunstungsversuchen festgestellt, daß im Gleichgewichtsverdampfungszustand bei einer Gemischtemperatur von 0° etwa 65 bis 72% des Kraftstoffes verdampft sind, während 100% Verdampfung 13 bis 19° Gemischtemperatur erfordern. Die günstigen Werte gehören zu einem Mischungsverhältnis 16 , die ungünstigen zu einem Startleistungsgemisch von 12 , Bild 10.

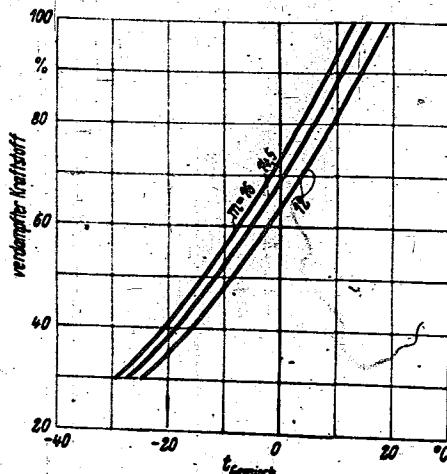


Bild 10. Gleichgewichts-Verdampfungskurven, abhängig vom Mischungsverhältnis bei 760 mm Hg .
 Flieger-Benzin: Siedebeginn 45°
 Siedende 163°
 KZ $95,3$

Das verwendete Fliegerbenzin hatte eine normale Siedekurve mit Siedebeginn 45°, Siedende bei 163° und eine mittlere Siedetemperatur (Kennziffer) von 95,3.

Bei den angegebenen Temperaturen handelt es sich nicht um Luft-, sondern um Gemischtemperatur, d. h. 0° Gemischtemperatur entsprechen nach Bild 7 bei $\lambda = 0,8$ und 65% Verdampfung etwa $0,65 \cdot 22,9 = 15^\circ$ Lufttemperatur, also gerade der CINA-Temperatur für 0 km Höhe.

Betreffs des Einflusses des Druckes stellte E. Alt die in Bild 11 aufgezeichnete Abhängigkeit fest. Niedrige Drücke fördern bei gegebener Temperatur die Verdampfung. Das ist eine angenehme Eigenschaft, die das Anspringen und den Leerlauf ebenso wie den Betrieb in großen Höhen weit oberhalb der Volldruckhöhe erleichtert.

Der in Bild 10 und 11 gezeigte Gleichgewichtszustand wird vom wirklichen Gemisch am laufenden Motor nicht erreicht. Die Abweichungen ergeben sich aus der Kürze der für die Verdampfung zur Verfügung stehenden Zeit, von der auch nur der Zeitanteil, während dessen die Relativgeschwindigkeit zwischen Brennstofftröpfchen und Luft genügend groß ist, besonders wirksam ist. Der Unterschied zwischen Gleichgewichtskurve und tatsächlicher Verdampfung beträgt nach den Versuchen von Alt etwa 10 bis 15% des zugeführten Kraftstoffes.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, daß bei einem Vergaserflugmotor, der außer bei Vereisungsgefahr immer ohne Luftvorwärmung arbeitet, nach dem Vergaser bzw. vor dem Eintritt in den Lader keine volle Verdampfung des Kraftstoffes eintreten kann. Bestenfalls kann in Bodennähe beim Ladermotor infolge des günstig wirkenden Unterdruckes vor dem Lader vielleicht eine 80- bis 90proz. Verdampfung als oberster Grenzwert erwartet werden. Beim Zylinder-Prüfmotor mit fremd angetriebenem Lader, der wegen der Rückkühlung der Luft mit Wasser etwa eine Ladelufttemperatur von 30 bis 35° bei allerdings höheren Drücken aufweist, kann dieser Verdampfungsgrad nach den Kurven von Alt vielleicht auch vor dem Zylinder erreichbar erscheinen.

Der Gewinn nach Bild 8 wird also bei einem Flugmotor ohne Luftvorwärmung kaum in voller Höhe eintreten; f'' wird also größer als nach Bild 8. Dagegen ist theoretisch bei einem Lader normaler Leistungsfähigkeit, d. h. mit Förderhöhen bei Kampfleistungsdrehzahl von 3 bis 4000 m aufwärts eine vollständige Verdampfung möglich, also die Ersparnis entsprechend Faktor f , Bild 4 oder 5, könnte in voller Höhe auftreten.

Die Bestimmung des Verdampfungsgrades am laufenden Motor aus der Temperatursenkung ergibt im allgemeinen keine einwandfreien Werte wegen der Schwierigkeit, die Gemischtemperatur mit einem von ausgefallenem Kraftstoff feucht gewordenen Thermometer genau zu ermitteln. Die im Versuchsbetrieb gemessenen Ladungstemperaturen sind im allgemeinen zu niedrig. Ferner ist zu bedenken, daß je nach der Bauart des Motors dem Vergaser Wärme vom Motor zugeführt wird, so daß die Luft vor Vergaser bis zu 10° wärmer ist als die Umgebung und daß insbesondere bei in das Hilfsantriebsgehäuse eingebautem Lader ein Wärmeaustausch zwischen dem Lader und den heißen Gehäuseteilen stattfindet und daß außerdem bei luftgekühlten Motoren die fraglichen Bauteile starken Luftströmungen ausgesetzt sind.

Bei Einzylinderprüfmotoren mit einer etwa 250 mm langen Leitung zwischen Vergaser und Einlaßventil kann man etwa mit Verdampfung der halben Kraftstoffmenge rechnen. Dabei ist eine Ladelufttemperatur von 30 bis 35° und ein Ladedruck von 1,2 bis 1,4 at abs. vorausgesetzt. Bei Vollmotoren mit Lader wurde früher vom Verfasser eine volle Verdampfung bis zum Einlaßventil des Zylinders bei Anordnung eines Saugvergasers angenommen.

Versuche mit anderen Gemischbildungsverfahren, die sich durch die Art und den Ort der Brennstoffzugabe zur Luft vom Saugvergaserbetrieb unterscheiden, zeigten jedoch mehrere Prozent größeren Luftdurchsatz. Da bei gleichem Ladedruck ein größerer Luftdurchsatz nur durch Tempera-

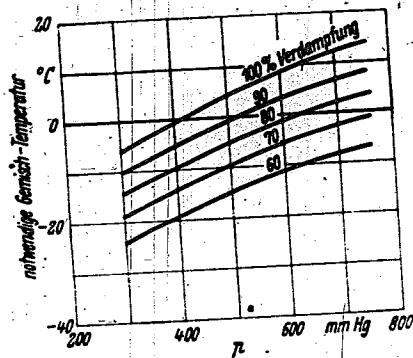


Bild 11. Gleichgewichts-Verdampfungskurven, abhängig vom Druck
 $m = 16$
 Flieger-Benzin: Siedebeginn 45°
 Siedende 163°
 KZ 95,3

tursenkung möglich erscheint, muß man bei diesem Verfahren eine weitgehendere Verdampfung des Kraftstoffes als bei Vergaserbetrieb annehmen. Die Nachrechnung ergab, daß der Temperaturunterschied zur Begründung des größeren Verbrennungsluftdurchsatzes etwa der Abkühlung durch halbe Verdampfung entsprach. Der Gewinn an Luftdurchsatz und damit auch etwa an indizierter Leistung war demzufolge bei reichem Gemisch wesentlich größer als bei armen Gemisch für Reiselast. Es sei betont, daß es sich nicht um Hochdruckeinspritzung direkt in den Zylinder, sondern um Einspritzung bei Drücken von wenigen Atmosphären vor, in oder nach dem Lader handelt.

Nach dem Schrifttum könnte man der Ansicht sein, daß bis Einlaßventilschluß durch die Wärmezufuhr vom Restgas und den Wänden während des Saughubes aller Kraftstoff verdampft ist. Nach den geschilderten Versuchsergebnissen ist das fraglich und es scheint bei Vergaserbetrieb mit Lader keine volle, sondern etwa halbe Verdampfung aufzutreten.

Vorteilhaft für die volle Verdampfung vor dem Einlaßventil des Zylinders ist die Bildung möglichst kleiner Kraftstofftröpfchen, die besser durch Düsen erfolgt, die unter einigen Atmosphären Druck stehen, als durch Saugwirkung des Luftstromes im Venturirohr eines Vergasers auf eine Kraftstoffsäule, selbst wenn diese durch Luftbeigabe als Kraftstoff-Luftschaum abgesaugt wird. Wird die Umgebungsluft dieser kleinen Kraftstofftröpfchen durch den Lader stark erwärmt und durch heftige Luftbewegung für Verdämpfungsmöglichkeit gesorgt, so läßt sich dieses »Gas« gut auf eine Zylinderreihe verteilen und man hat die in diesem Aufsatz geschilderten Vorteile der vollen Verdampfung erreicht.

Der Nachweis voller Verdampfung ist außerordentlich schwer mit voller Schärfe zu führen, insbesondere wenn es sich um Vollmotoren mit luftgekühlten Zylindern handelt. Denn bei dieser Zylinderbauart tritt je nach der thermischen Belastung bzw. der Güte der Kühlung eine Änderung der Verhältnisse beim Gaswechsel auf. Dieser Einfluß überlagert sich der verschiedenen starken Benzinverdampfung derart, daß eine genaue Trennung der Einflüsse auf den Luftdurchsatz kaum möglich ist.

Bild 12 zeigt an einem Beispiel, wie vieldeutig allein schon das Druckverhältnis des Laders ist, wenn mit sehr verschiedenen Luftüberschußzahlen gefahren wird. Die Versuche wurden mit einem Saugvergaserbetrieb gemacht. Entsprechend Bild 5 bzw. dem Kehrwert des dort aufgetragenen Wertes f nimmt das Druckverhältnis bei der Drehzahl 3000 U/min von 1,95 auf 1,88 ab. Die Streuungen durch die von 600 bis auf 1267 mm Hg veränderten Ladedrücke sind wesentlich kleiner als der Einfluß der Luftüberschußzahl. Während die Einhüllenden der Versuchswerte bei 3000 U/min des Motors stark gekrümmte Kurven beschreiben, ist dies ohne ersichtlichen Grund bei 2800 U/min nicht mehr der Fall. Das Absinken des Druckverhältnisses mit der Luftüberschußzahl erfolgt hier geradlinig. Es sei noch vermerkt,

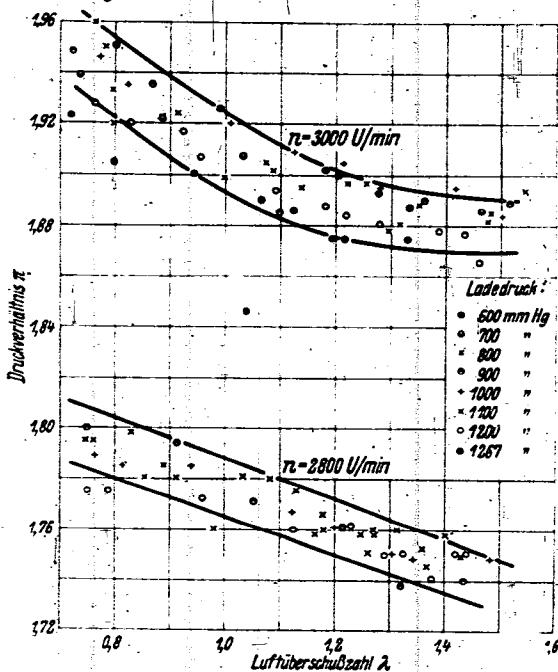


Bild 12. As 410 mit Lader 10,05/175.

daß entgegen dem Kurvenverlauf die Förderhöhe des Laders infolge veränderten Ansaugvolumens bei armem Gemisch nach der Drosselkurve des Laders sogar um etwa 100 m größer ist als bei reichem Gemisch.

V. Zusammenfassung.

Nach einer Wiedergabe der Ergebnisse alter englischer Versuche über den Einfluß der Ansaugtemperatur und der Kraftstoffverdampfung auf das Druckverhältnis eines Flugmotorenladers mäßiger Förderhöhe werden die Unterlagen zur Berechnung der verschiedenen Einflüsse der Benzinverdampfung angegeben.

Es ergibt sich, daß im Grenzfall voller Verdampfung die notwendige adiabatische Förderhöhe bei reichem Gemisch nur 93, bei armem Gemisch 95% der Förderhöhe bei reinem Luftbetrieb beträgt (Faktor f). Die Abhängigkeit dieses Faktors vom Druckverhältnis ist viel geringer als von der Luftüberschußzahl, die bei neuzeitlichen Motoren in weiten Grenzen schwanken kann.

Berücksichtigt man außer der Veränderung der Konstanten und des Exponenten der Verdichtergleichung auch noch die durch Gemischbildung vor dem Ladereintritt mögliche Temperatursenkung, die bei voller Verdampfung und reichem Gemisch 20 bis 23°, bei armem Gemisch etwa 16° beträgt, so ergibt sich eine weitere Ersparnis an Förderhöhe, die durch den Faktor f'' gekennzeichnet wurde. Die Senkung der

nötigen Förderhöhe ist bei üblichen Anfangstemperaturen noch etwas größer als die durch Veränderung der Gaskonstanten und der spezifischen Wärme des Gemisches nach f'' . Der Faktor f'' beträgt bei reichem Gemisch etwa 89%, bei armem Gemisch 94%.

An einem Beispiel wird die scheinbare Zunahme der adiabatischen Förderhöhe durchgerechnet, die sich ergibt, wenn man in die Verdichtergleichung für Luft das Druckverhältnis für Gemisch einsetzt. Die Volldruckhöhe von 4 km für reine Luft steigt in dem Beispiel auf 5 km für Gemisch, wenn man beide Faktoren f und f'' berücksichtigt.

Rechnet man den Liefergrad nur für die gemessene Luftmenge, so ergibt sich eine Zunahme des Liefergrades unter Berücksichtigung des Kraftstoffvolumens, die bei warmem Gemisch etwa 1,5%, bei reichem bis 3% betragen kann.

Anschließend wird eine Kritik an diesen unter der Bedingung vollständiger Verdampfung gewonnenen Erkenntnissen geübt. Nach den Versuchen von Alt kann ohne Vorwärmung vor dem Lader kaum eine vollständige Verdampfung erzielt werden, so daß der Faktor f'' wohl nicht erreicht wird. Dagegen erscheint volle Verdampfung bis zum Einlaßventil unter der Bedingung besonders kleiner Tröpfchenbildung und längeren Mischwegen möglich. Erhebliche Leistungsunterschiede ein und desselben Motors bei verschiedenen Gemischbildungsverfahren außerhalb des Zylinders können bei gleichem thermischen Wirkungsgrad des Motors nur durch mehr oder weniger vollständige Verdampfung erklärt werden.

Die Gemischbildung vor dem Lader hat unzweifelhaft den Vorteil einer Erhöhung des Druckverhältnisses und einer Kühlung des Laders. Demgegenüber steht nur eine Erschwerung der Vorausberechnung der Leistungen unter den verschiedenen Betriebsbedingungen durch den dreifachen Einfluß der teilweisen Kraftstoffverdampfung auf Druckverhältnis, Ladungstemperatur und Ladungsvolumen. An einem praktischen Beispiel über gemessene Druckverhältnisse bei verschiedenen Luftüberschußzahlen wird diese Unsicherheit gezeigt.

VI. Schrifttum.

- [1] Rep. und Mem. Nr. 1336.
- [2] G. V. Brooke, Versuche über den Einfluß der Brennstoffverdampfung auf die Leistung eines Kreiselüberladers. Rep. und Mem. Nr. 1574.
- [3] H. Kühl, Dissoziation von Verbrennungsgasen und ihr Einfluß auf den Wirkungsgrad von Vergasermaschinen. VDI-Forschungsheft 373, S. 3.
- [4] W. H. Bahlke u. W. B. Kay, Specific heats of petroleum vapors. Ind. Engng. Chem., Bd. 21 (1929), S. 942.
- [5] Fritz, Simons u. Bahlke, Tenth annual meeting. A.P. 1. 1922. Section III.
- [6] P. Meyer, J. Inst. Petr. Techn. (1931), S. 42.
- [7] Bauvorschriften für Flugmotoren, Begriffsbestimmungen Nr. 1153.

Beanspruchung von Schraubenverbindungen durch Steigungsunterschiede zwischen Bolzen- und Muttergewinde*).

Von Helmut Weber.

Bericht der BMW-Flugmotorenbau G. m. b. H. München.

Ein Unterschied in der Steigung von Mutter- und Bolzen-gewinde, wie er infolge verschiedener Wärmedehnung bei Temperaturunterschieden oder ungleichen Ausdehnungsbeiwerten oder auch als Folge ungenauer Bearbeitung auftreten kann, bewirkt eine Verspannung der Verbindung, die Zug- und Druckspannungen im Bolzen- und Mutterquerschnitt und Biege- und Schubspannungen in den Gewindegängen hervorruft. Es wird gezeigt, welche Größe diese Spannungen annehmen können und welcher Art der Verlauf der Gangbelastung ist.

Gliederung.

- I. Einleitung.
- II. Flachgängiges Gewinde.
 1. Die Kräfteverteilung.
 2. Eine Näherungslösung bei großen Gangzahlen.
 3. Die genauen Konstanten.
 4. Anschauliche Darstellung des Verspannungszustandes.
- III. Spitzgewinde.
- IV. Formeln für die größten Beanspruchungen.
- V. Zahlenbeispiel.
- VI. Zusammenfassung.
- VII. Schrifttum.

I. Einleitung.

Die Rechnung stützt sich auf das Verfahren, das von Jaquet [1] und Maduschka [2] bei der Ermittlung der Gangbelastung einer normalen, durch Längskräfte belasteten Schraubenverbindung angewandt wurde. Unter Vernachlässigung der Steigung können die Gewindegänge als Kreisringplatten aufgefaßt werden. Jaquet hat gezeigt, daß diese Kreisringplatten in erster Näherung auch als eingespannte Balken berechnet werden können, wodurch der Rechnungsgang erheblich vereinfacht wird.

* A 22 34.

II. Flachgängiges Gewinde.

1. Die Kräfteverteilung.

Es sind mehrere Fälle zu unterscheiden — vgl. Bild 1:

- | | |
|---|--------------------|
| 1. Anzahl der verspannt. Bolzengänge gerade | } Bolzensteigung > |
| 2. „ „ „ „ ungerade | |
| 3. „ „ „ „ ungerade | } Muttersteigung > |
| 4. „ „ „ „ gerade | |

Nun spielen aber, wie noch gezeigt werden wird und wie auch aus Anschauungsgründen zu erwarten ist, die Unterschiede zwischen diesen 4 Fällen bei größeren Gangzahlen keine Rolle mehr. Zur Aufstellung der Gleichungen kann deshalb das Schema Bild 2 zugrunde gelegt werden: zwei idealisierte »Kämme«, deren Dehnsteife

$$d_B = 1 : c_B' = \frac{h}{E_B F_B} \quad \text{bzw.} \quad d_M = 1 : c_M' = \frac{h}{E_M F_M}$$

sein soll, und deren Zinken die Biegesteife (unter Berücksichtigung des Schubeinflusses)

$$b_B = 1 : c_B'' = \frac{4}{\pi D_m E_B} \cdot \frac{l}{h_g} \left[\left(\frac{l}{h_g} \right)^2 + 0,75 \right]$$

$$\text{bzw.} \quad b_M = 1 : c_M'' = \frac{4}{\pi D_m E_M} \cdot \frac{l}{h_g} \left[\left(\frac{l}{h_g} \right)^2 + 0,75 \right]$$

besitzen sollen¹⁾.

¹⁾ Die Bezeichnungen wurden gegenüber Maduschka geändert, da es üblich geworden ist, unter c Größen mit der Dimension kg/cm zu verstehen.

Bolzensteigung größer als Muttersteigung

Muttersteigung größer als Bolzensteigung

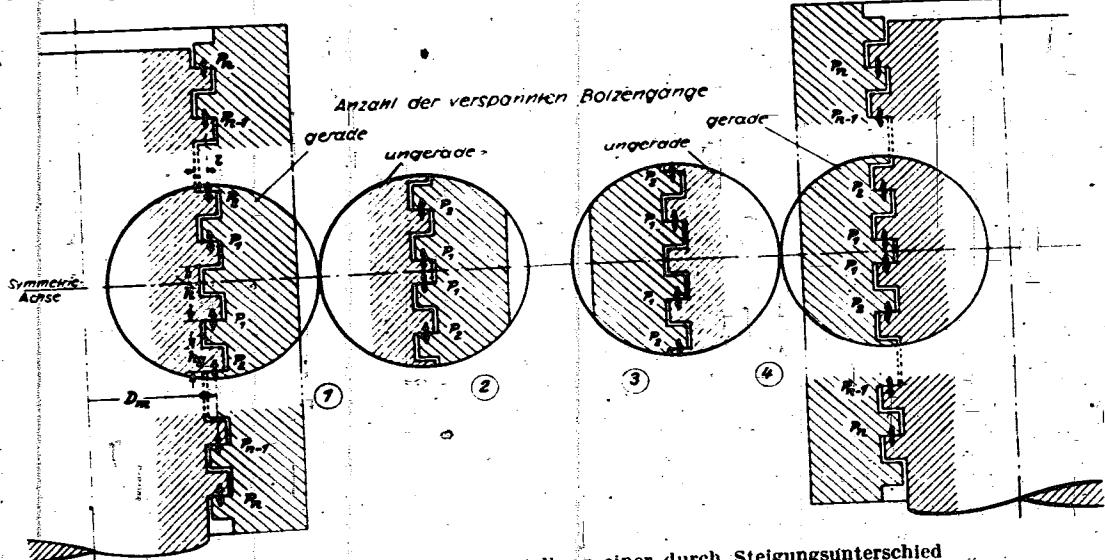


Bild 1. Schematische Darstellung einer durch Steigungsunterschied verspannten Schraubenverbindung.

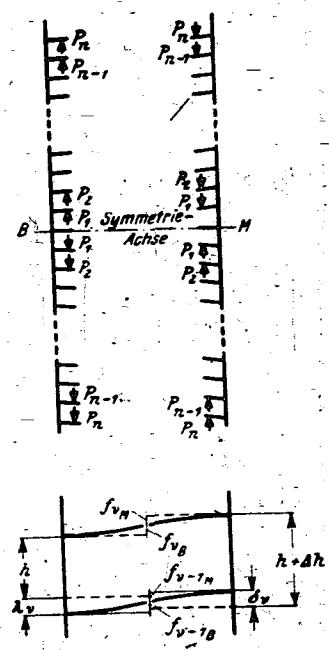


Bild 2. Kräfte und Formänderungen.

Aus Bild 2 lassen sich damit die Gl. (1) bis (3) ablesen:

$$\Delta h = (f_{vB} + f_{vM}) + \lambda_v + \delta_v - (f_{v-1B} + f_{v-1M}), \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_v + \delta_v &= (d_B + d_M) (P_n + P_{n-1} + \dots + P_v), \\ f_{vB} + f_{vM} &= (b_B + b_M) P_v, \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\Delta h = (b_B + b_M) (P_v - P_{v-1}) + (d_B + d_M) (P_n + P_{n-1} + \dots + P_v). (3)$$

Mit $\alpha = \frac{d_M + d_B}{b_M + b_B}$ und $h^* = \frac{\Delta h}{b_B + b_M}$ folgt:

$$h^* = P_v - P_{v-1} + \alpha (P_n + P_{n-1} + \dots + P_v). \dots (4)$$

Bei Annahme verschiedener Werte für v von $v = 2$ bis $v = n$ ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} S &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n, \\ P_2 &= P_1 - \alpha [S - P_1] + h^*, \\ P_3 &= P_2 - \alpha [S - (P_1 + P_2)] + h^*, \\ &\vdots \\ P_n &= P_{n-1} - \alpha [S - (P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1})] + h^*. \end{aligned} \right\} (5)$$

Ist R_v die Summe aller Gewindebelastungen bis zum v . Gang einschließlich, so ist:

$$\left. \begin{aligned} P_v &= R_v - R_{v-1}, \\ P_{v-1} &= R_{v-1} - R_{v-2}, \\ P_v - P_{v-1} &= R_v - 2R_{v-1} + R_{v-2} = h^* - \alpha [S - R_{v-1}], \\ R_v - (2 + \alpha) R_{v-1} + R_{v-2} &= h^* - \alpha S. \end{aligned} \right\} (6)$$

Angenommen es sei

$$R_v = C_1 (r_1^v - 1) + C_2 (r_2^v - 1), \dots (7)$$

worin r_1 und r_2 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $r^2 - (2 + \alpha)r + 1 = 0$ sind, also

$$r_{1,2} = 1 + \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\alpha + \alpha^2}. \dots (8)$$

Zur Ermittlung der Konstanten C_1 und C_2 setzt man die Ausdrücke für R_v, R_{v-1}, R_{v-2} in die Gl. (6) ein:

$$\left. \begin{aligned} C_1 (r_1^v - 1) + C_2 (r_2^v - 1) - (2 + \alpha) [C_1 (r_1^{v-1} - 1) + C_2 (r_2^{v-1} - 1)] \\ + C_1 (r_1^{v-2} - 1) + C_2 (r_2^{v-2} - 1) = h^* - \alpha S, \\ C_1 [r_1^2 - (2 + \alpha)r_1 + 1] r_1^{v-2} + C_2 [r_2^2 - (2 + \alpha)r_2 + 1] r_2^{v-2} \\ + \alpha (C_1 + C_2) = h^* - \alpha S. \end{aligned} \right\}$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (8) folgt:

$$\alpha (C_1 + C_2) = h^* - \alpha S; \dots (9)$$

außerdem muß sein

$$R_n = C_1 (r_1^n - 1) + C_2 (r_2^n - 1) = S. \dots (10)$$

Bei bekanntem S lassen sich aus den beiden letzten Gleichungen C_1 und C_2 ermitteln, so daß die Gl. (6) tatsächlich durch den Ansatz (7) befriedigt werden kann. Zur Bestimmung von S dient die Formänderungsbedingung für den 1. Gang an der Symmetrielinie, Bild 2:

$$\Delta h = (d_B + d_M) (P_1 + P_2 + \dots + P_n) + (b_B + b_M) P_1, \\ P_1 = h^* - \alpha S = C_1 (r_1 - 1) + C_2 (r_2 - 1). \dots (11)$$

Damit ergeben sich die Konstanten zu:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \frac{r_1 - 1 - \alpha}{r_2 - 1 - \alpha}} \cdot \frac{h^*}{\alpha r_1^n}, \\ C_2 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \frac{r_2 - 1 - \alpha}{r_1 - 1 - \alpha}} \cdot \frac{h^*}{\alpha r_2^n}, \\ C_1 : C_2 &= \frac{r_2 - 1 - \alpha}{r_1 - 1 - \alpha} = \frac{r_2 - 1 - \frac{r_2}{r_1}}{r_1 - 1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} = r_1, \\ C_1 &= \frac{h^*}{\alpha} \cdot \frac{1}{r_1^n + r_2^{n+1}}, \\ C_2 &= \frac{h^*}{\alpha} \cdot \frac{1}{r_2^n + r_1^{n+1}} \end{aligned} \right\} (12)$$

Die einzelnen Gangbelastungen lassen sich nun nach Gl. (7) wie folgt berechnen:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= R_1 = C_1 (r_1 - 1) + C_2 (r_2 - 1), \\ P_2 &= R_2 - R_1 = C_1 r_1 (r_1 - 1) + C_2 r_2 (r_2 - 1), \\ &\vdots \\ P_n &= R_n - R_{n-1} = C_1 r_1^{n-1} (r_1 - 1) + C_2 r_2^{n-1} (r_2 - 1), \\ \Sigma P &= R_n = S = C_1 (r_1^n - 1) + C_2 (r_2^n - 1). \end{aligned} \right\} (13)$$

Da $r_1 > 1$ und $r_2 < 1$ ($r_1 \cdot r_2 = 1$), nehmen die Gangbelastungen von P_1 bis P_n zu.

2. Eine Näherungslösung bei großen Gangzahlen.

Die Gleichung für $P_{\max} = P_n$ läßt sich bei größeren Gangzahlen n und bei den üblichen Gewindeformen ($\alpha > 0,05$) vereinfachen in folgender Weise:

$$\left. \begin{aligned} P_n &= C_1 \left[r_1^{n-1} (r_1 - 1) + r_2^{n-1} (r_2 - 1) \right] \frac{1}{r_1}, \\ &= \frac{h^*}{\alpha} (r_1 - 1) \frac{r_1^{n-1} - r_2^{n+1}}{r_1^n + r_2^{n+1}}, \\ P_n &= \frac{h^*}{\alpha} (r_1 - 1) \frac{r_2 - r_2^{2n+1}}{1 + r_2^{2n+1}} \end{aligned} \right\} (14)$$

Da für $n \rightarrow \infty$ ($r_2 < 1$) der Ausdruck

$$\frac{r_2 - r_2^{2n+1}}{1 + r_2^{2n+1}} = r_2 - (1 + r_2) (r_2^{2n+1} - r_2^{4n+2} + r_2^{6n+3} - \dots)$$

gegen r_2 konvergiert (und zwar um so schneller, je kleiner r_2 oder je größer α ist), kann für größere Gangzahlen angenähert gesetzt werden:

$$P_n \approx \frac{h^*}{\alpha} \left(\frac{1}{r_2} - 1 \right) r_2 = \frac{\Delta h}{d_B + d_M} (1 - r_2). \dots (15)$$

Die Summe S aller Gangbelastungen, also die maximale Verspannkraft in der Mitte von Bolzen und Mutter, ergibt sich zu

$$S \approx \frac{h^*}{\alpha} \left[1 - r_2^n \frac{1 + r_2}{1 + r_2^{2n+1}} \right] \dots (16)$$

und für größere Gangzahlen n bei $\alpha > 0,05$ zu

$$S \approx \frac{h^*}{\alpha} = \frac{\Delta h}{d_B + d_M}. \dots (17)$$

3. Die genauen Konstanten.

Es bleibt noch nachzuweisen, daß bei großem n der Ersatz der verschiedenen Fälle Bild 1 durch das Schema Bild 2 zulässig ist.

Bei Berücksichtigung der Unterschiede in der Belastung des mittleren Ganges ergeben sich die Konstanten C_1 und C_2 — Gl. (12) — genauer zu:

Fall (1) und (3)

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \frac{r_1 - 1 - 1,33\alpha}{r_2 - 1 - 1,33\alpha}} \cdot \frac{h^*}{\alpha r_1^n}, \\ C_2 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \frac{r_2 - 1 - 1,33\alpha}{r_1 - 1 - 1,33\alpha}} \cdot \frac{h^*}{\alpha r_2^n}. \end{aligned} \right\}$$

Fall (2)

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \frac{r_1 - 1 - \frac{d_B + d_M + 4b_{M,B}}{d_B + d_M + 5b_{M,B}} \alpha}{r_2 - 1 - \frac{d_B + d_M + 4b_{M,B}}{d_B + d_M + 5b_{M,B}} \alpha}} \cdot \frac{h^*}{\alpha r_1^n}, \\ C_2 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \frac{r_2 - 1 - \frac{d_B + d_M + 4b_{M,B}}{d_B + d_M + 5b_{M,B}} \alpha}{r_1 - 1 - \frac{d_B + d_M + 4b_{M,B}}{d_B + d_M + 5b_{M,B}} \alpha}} \cdot \frac{h^*}{\alpha r_2^n}. \end{aligned} \right\}$$

Fall (4) ... wie im Fall (2), wenn b_B an Stelle von b_M gesetzt wird.

Die Konstanten unterscheiden sich also lediglich durch die verschiedenen Koeffizienten von α , die statt 1 hier 1,33 bzw.

$$\frac{d_B + d_M + 4b_{M,B}}{d_B + d_M + 5b_{M,B}} = \frac{\alpha + 4b_{M,B}/(b_M + b_B)}{\alpha + 5b_{M,B}/(b_M + b_B)}$$

lauten: In technisch vorkommenden Fällen liegt α zwischen 0 und 0,5, damit r_1 zwischen 1 und 2, während die Biegesteifen b_M und b_B sich entsprechend den E -Moduln von $\max 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (Stahl) und $\min 0,43 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (Elektron) wie 1:5 bis 5:1 verhalten können. Damit nimmt der Beiwert von α Werte zwischen 0,8 und 0,88 an; da er aber in der Formel für C_1 mit

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \ll 1$$

multipliziert ist, spielt bei größeren n sein genauer Wert keine Rolle, so daß C_1 praktisch unverändert bleibt. Dann kann aber auch C_2 sich höchstens um 100% ändern, denn das Verhältnis $C_2:C_1$ schwankt für $0 < \alpha < 0,5$ zwischen den Grenzen 0,5 und 1. Nun tritt aber C_2 in der Gleichung für P_n (13) nur in Verbindung mit $r_2^{n-1} \ll 1$ auf, so daß eine derartige Änderung von C_2 keine Rolle spielt. Für die Ermittlung von P_1 und P_2 ist sie jedoch von ausschlaggebender Bedeutung.

4. Anschauliche Darstellung des Spannungszustandes.

Zur Berechnung der größten Gangbelastung P_n bei Werten von $n > 6$ (n = halbe Gangzahl) und $\alpha > 0,05$ kann also mit genügender Näherung $C_2 = 0$ gesetzt werden. Es ergibt sich somit folgendes Bild der Gangbelastungen:

Bei längeren Schraubenverbindungen (über 12 Gänge) stellt sich in hinreichender Entfernung von den Enden ein normaler Verspannungszustand ein; die Gewindegänge erfahren keine Biegung. Die Verbindung ist mit R_n verspannt. Tatsächlich ergibt sich aus der Formänderungsbedingung für einen Gang

$$\Delta l_B + \Delta l_M = \Delta h$$

die Verspannkraft zu:

$$R_n \left(\frac{h}{E_B F_B} + \frac{h}{E_M F_M} \right) = \Delta h,$$

$$R_n = \Delta h / (d_B + d_M)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (17). Die ganze Verbindung kann man sich in drei Teile gemäß Bild 3 zerlegt denken, wobei die beiden äußeren Teile nichts anderes darstellen als zwei Mütter, die zur Verspannung des mittleren Teils dienen. Die Gangbelastung in den »Müttern« könnte in entsprechender Weise wie bei Maduschka ermittelt werden. Während dort infolge des elastischen Verformungszustandes des Bolzen- und Mutterquerschnitts die größten Gangunterschiede und damit die höchsten Gangbelastungen an der Auflagefläche der Mutter auftreten und die Gangbelastungen nach außen schnell abklingen, liegt hier lediglich der umgekehrte Fall vor: die elastischen Verformungen infolge R_n überbrücken an der Trennfläche gerade den vorhandenen Steigungsunterschied, der nach außen infolge des Abklügens der elastischen Verformungen immer stärker in Erscheinung tritt, so daß die größeren Gangbelastungen außen auftreten und nach innen abnehmen.

Diese Verwandtschaft der Erscheinungen kommt auch in der Ähnlichkeit der Gleichungen zum Ausdruck: Während bei der normalen Schraubenverbindung bei größeren Gangzahlen

$$C_1 = 0 \text{ und } C_2 = -\Sigma P$$

gesetzt werden kann, wobei die C_2 -Glieder eine abfallende Reihe bilden, kann hier in grober Annäherung $C_2 = 0$ gesetzt werden, so daß nur die ansteigende Reihe der C_1 -Glieder bleibt; dabei ist in erster Näherung

$$C_1 = \frac{\Delta h}{d_B + d_M} \cdot \frac{1}{r_1^n - r_2^n} \cdot \frac{r_1 - 1 - \alpha}{r_2 - 1 - \alpha} \approx \frac{\Delta h}{d_B + d_M} = \sum_1^n P.$$

III. Spitzgewinde.

Für das Spitzgewinde gelten dieselben Gleichungen wie sie für das Flachgewinde abgeleitet wurden, wenn man für α setzt (vgl. Bild 4)

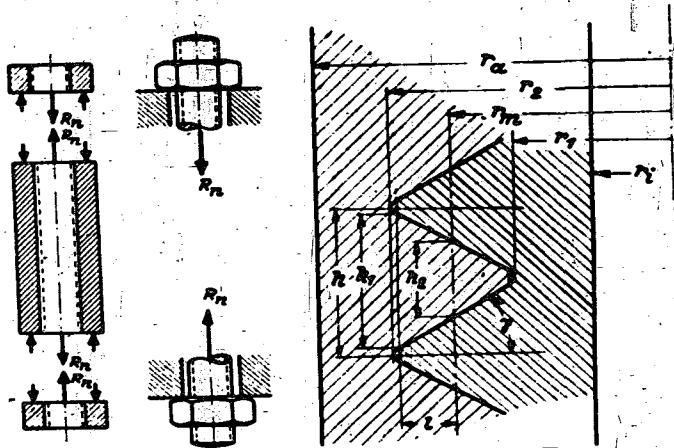


Bild 3. Anschauliches Ersatzbild für eine durch Steigungsunterschied verspannte Schraubenverbindung.

Bild 4. Spitzgewinde (Bezeichnungen).

$$\alpha' = \frac{d_B + d_M}{b_B + b_M + (k_B + k_M) \text{tg}^2 \gamma}$$

mit $k_B = \frac{0,048 r_m^2}{h E_B (r_m^2 - r_t^2)} \left[2,33 + 4,33 \left(\frac{r_t}{r_m} \right)^2 \right]$

$$k_M = \frac{0,048 r_m^2}{h E_M (r_a^2 - r_m^2)} \left[2,33 + 4,33 \left(\frac{r_a}{r_m} \right)^2 \right]$$

Die Konstanten k_M und k_B berücksichtigen den Einfluß der Aufweitung der Mutter bzw. der Zusammendrückung des Bolzens durch die Horizontalkomponente der Gangbelastung. Die Biegesteifen lauten in diesem Fall unter Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes, der Schubverformung und des Einflusses der Horizontalkomponente H :

$$b_M = \frac{1,5}{\pi D_m E_M} \left[\left(-1,5 + 2 \frac{h_2}{h_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 \right) + (1 + \text{tg}^2 \gamma) \ln \frac{h_1}{h_2} \right] \text{ctg}^3 \gamma - 2 \left(\frac{l}{h_1} \right)^2 \text{tg} \gamma$$

und b_B entsprechend mit E_B an Stelle von E_M .

Durch das Hinzutreten von k_B und k_M wird $\alpha' < \alpha$ und r_1 und r_2 nähern sich dem Werte 1. Das bedeutet nach Gl. (15) eine erhebliche Entlastung des am höchsten belasteten äußeren Ganges und ein langsames Abklingen der Gewindebelastungen²⁾. Da gleichzeitig das Widerstandsmoment der Gewindegangwurzel größer ist als beim Flachgewinde, verhält sich auch bei einem Steigungsunterschied das Spitzgewinde bedeutend günstiger.

IV. Formeln für die größten Beanspruchungen.

Als Endformeln für die Spannungen, die in einer Schraubenverbindung infolge eines Steigungsunterschiedes entstehen, ergeben sich:

Größte Biegebeanspruchung im äußersten Gang:

$$\sigma_{b \max} \leq 3 \frac{\Delta h}{h} \cdot \frac{l \sqrt{4\alpha + \alpha^2 - \alpha}}{\left(\frac{1}{E_B F_B} + \frac{1}{E_M F_M} \right) \pi D_m \cdot h_g^2} \quad (18)$$

Schubbeanspruchung:

$$\tau_{\max} \leq 0,75 \frac{\Delta h}{h} \cdot \frac{\sqrt{4\alpha + \alpha^2 - \alpha}}{\left(\frac{1}{E_B F_B} + \frac{1}{E_M F_M} \right) \pi D_m h_g} \quad (19)$$

Zug- bzw. Druckbeanspruchung in der Mitte:

$$\sigma_B \leq \frac{\Delta h}{h} \cdot \frac{1}{\frac{1}{E_B} + \frac{1}{E_M} \cdot \frac{F_B}{F_M}} \text{ und } \sigma_M \leq \frac{\Delta h}{h} \cdot \frac{1}{\frac{1}{E_M} + \frac{1}{E_B} \cdot \frac{F_M}{F_B}} \quad (20)$$

²⁾ Die Gültigkeit der entwickelten Näherungsformeln muß bei sehr kleinem α' von Fall zu Fall geprüft werden.

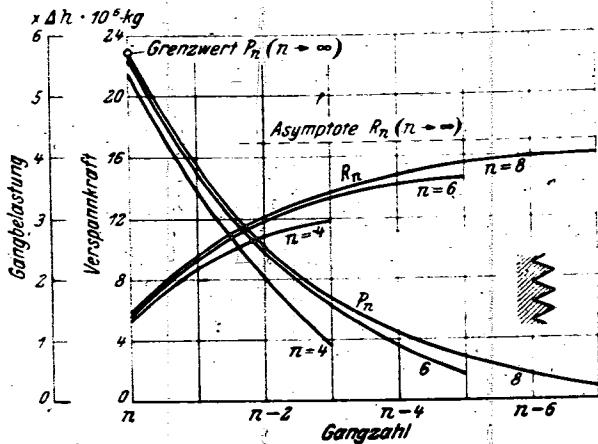


Bild 5. 1" Whitworthgewinde DIN 11.

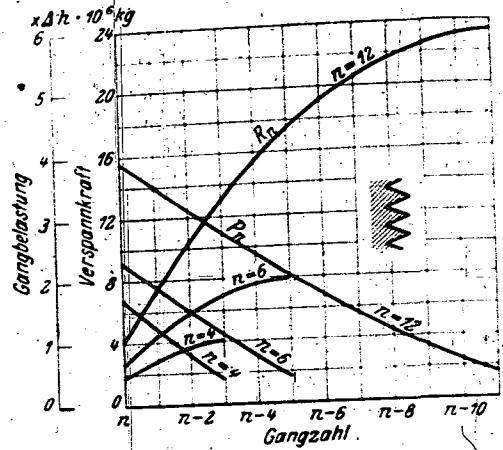


Bild 6. Spitzgewinde (Abmessungen des Schrumpfgewindes eines Flugmotorenzylinders).

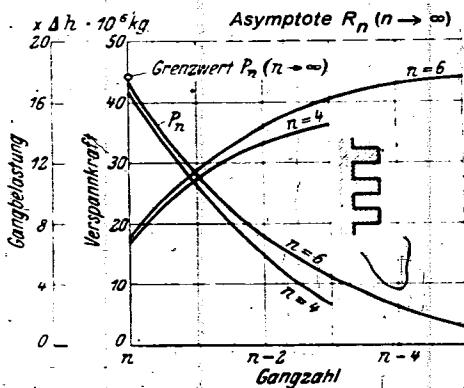


Bild 7. Sägewinde, durch Flachgewinde angenähert (Abmessungen wie Bild 6).

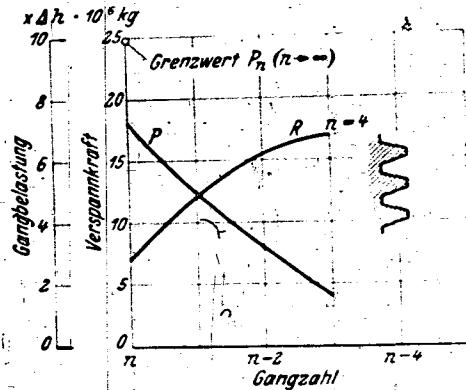


Bild 8. Sägewinde, durch Trapezgewinde angenähert (Abmessungen wie Bild 7).

Bild 5 bis 8. Gangbelastung P Verspannkraft R .

Zur Abschätzung der Spannungen sind diese Formeln auch bei kleineren Gangzahlen brauchbar, denn sie liefern ja Höchstwerte, die bei nur wenigen verspannten Gängen nicht erreicht werden.

V. Zahlenbeispiel.

In Bild 5 bis 8 sind Gangbelastung P und Verspannkraft R für verschiedene Gewindeformen und Abmessungen in Abhängigkeit von der Gangzahl dargestellt.

Aus Vergleichsgründen wurde Bild 5 dasselbe Gewinde mit den gleichen Zahlenangaben zugrunde gelegt, wie es Maduschka berechnet hat. Als Beispiel für solche Fälle, in denen die Näherungsformeln nicht mehr brauchbar sind, dienen Bild 6 bis 8. Bei luftgekühlten Flugmotoren wird der Zylinderkopf aus Leichtmetall mittels eines Schrumpfgewindes unlösbar und vollkommen dicht mit der Laufbuchse aus Stahl verbunden. Infolge der Verschiedenheit der Wärmeausdehnungskoeffizienten von Stahl und Leichtmetall tritt im Betrieb ein Steigungsunterschied auf, der durch den verhältnismäßig geringen Temperaturunterschied zwischen Kopf und Laufbuchse im allgemeinen nicht überbrückt werden kann, und der den Kopf auf Druck beansprucht. Aber auch beim Aufschrumpfen des Kopfes auf die Laufbuchse wird durch den großen Temperaturunterschied ein erheblicher Steigungsunterschied zwischen Kopf- und Buchsen-gewinde bedingt, der das Schrumpfen erschwert. Zur Erleichterung des Schrumpfvorganges kann man Kopf- und Laufbuchse von vornherein mit dem aus den Schrumpftemperaturen zu erwartenden Steigungsunterschied fertigen. In diesem Falle wird aber der von vornherein vorhandene Steigungsunterschied im Betrieb bei normalen Zylinder-temperaturen noch nicht ausgeglichen, so daß der Rest den an sich gefährdeten Kopf auf Zug beansprucht.

Solche Schrumpfgewinde weisen bei meist nur wenigen Gängen abnormale Steifigkeiten auf (feine Steigung bei

großen Durchmessern). Aus diesem Grunde sind die oben entwickelten Näherungsformeln nicht mehr anwendbar. Die mittels der genauen Formeln berechneten Kurven, Bild 6 bis 8, lassen erkennen, daß auch bei 24 Gängen noch keine »Konvergenz« (gegen $n = \infty$) festzustellen ist.

Einige Flugmotorenzylinder besitzen als Schrumpfgewinde eine dem Sägewinde ähnliche Form. Bei den hier vorliegenden Steifigkeitsverhältnissen ist es aber nicht statthaft, nach dem Vorgang von Maduschka das Sägen- bzw. Trapezgewinde als idealisiertes Flachgewinde aufzufassen. Zwar wird hierdurch das Berechnungsverfahren konvergent, liefert aber viel zu hohe Werte, wie aus dem Vergleich von Bild 7 und 8, denen das gleiche Gewinde zugrunde gelegt wurde, hervorgeht.

Auf eine zahlenmäßige Angabe von Spannungen bei den hier behandelten Beispielen wird verzichtet, da das benutzte Berechnungsverfahren infolge seiner vielen gewaltsamen Vereinfachungen nur ein angenähertes qualitatives Bild der Spannungsverhältnisse liefert und lediglich den Vergleich verschiedener Gewindeformen untereinander ermöglichen soll.

VI. Zusammenfassung.

Die größte Gewindebelastung und höchste Beanspruchung bei Steigungsunterschieden zwischen Bolzen- und Muttergewinde tritt in den beiden äußeren Gängen auf. Sie kann theoretisch beträchtliche Werte annehmen, die weit über der Elastizitätsgrenze liegen. Nach innen nehmen die Gangbelastungen schnell ab, so daß bei Flachgewinden und bei üblichen Spitzgewinden praktisch nach dem 6. Gang die Spannungen im Bolzen- und Mutterquerschnitt σ_B bzw. σ_M konstant sind, Bild 1, und die aus einer elementaren Rechnung folgenden Werte

$$\sigma_B = \frac{\Delta h/h}{\frac{1}{E_B} + \frac{F_B}{F_M} \cdot \frac{1}{E_M}}$$

$$\sigma_M = \frac{\Delta h / h}{\frac{1}{E_B} \frac{F_M}{F_B} + \frac{1}{E_M}}$$

annehmen, also unabhängig von der Gewindeform bleiben (h = Steigung, Δh = Steigungsunterschied, $E_{B, M}$ = E -Modul und $F_{B, M}$ = Querschnitt von Bolzen bzw. Mutter). Dagegen hängt die Beanspruchung der äußeren Gänge stark

von der Form des Gewindepfils ab (Flach- oder Spitzgewinde). Dabei ergibt sich, daß das Spitzgewinde beanspruchungsmäßig bedeutend günstiger ist. Auch eine kleine Gangzahl setzt die Beanspruchung der äußeren Gänge bei vorhandenen Steigungsunterschieden herab.

VII. Schrifttum.

- [1] Maduschka, Forsch. Ing. Wes. Bd. 7 (1936), S. 299.
- [2] Jaquet, Ing. Arch. Bd. 2 (1931), S. 569.

Die Anfachung instabiler Störungen in einer laminaren Reibungsschicht*).

Von J. Pretsch.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V., Institut für Forschungsflugbetrieb und Flugwesen.

Mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen, die erfolgreich bei der Untersuchung der Stabilität von laminaren Geschwindigkeitsverteilungen gegenüber zweidimensionalen Störungen angewendet wurde, wird in Ergänzung einer früheren Arbeit die Anfachung der instabilen Störungen für die Hartreeschen Geschwindigkeitsverteilungen berechnet, die in ebener Grenzschichtströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg auftreten. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sollen einen Beitrag zur Berechnung des Umschlagpunktes an zylindrischen Körpern liefern.

Gliederung.

- I. Aufgabenstellung.
- II. Die allgemeine Störungsdifferentialgleichung.
- III. Die Lösungen η_1^* , η_2^* der reibungslosen Störungsdifferentialgleichung bei endlicher Anfachung.
 - a) Für binomische Geschwindigkeitsverteilung (Druckgefälle).
 - b) für sinusförmige Geschwindigkeitsverteilung (Druckanstieg).
- IV. Die Reibungslösung η_3^* bei endlicher Anfachung.
- V. Die Aufstellung und Lösung des Eigenwertproblems.
- VI. Ergebnisse der Rechnung.
- VII. Besprechung der Ergebnisse.
- VIII. Zusammenfassung.
- IX. Schrifttum.

I. Aufgabenstellung.

Wenn man den Profilwiderstand von umströmten Körpern bei einer bestimmten Anblasrichtung theoretisch berechnen will, muß man neben der Druckverteilung die Lage der Umschlagzone kennen, in der die laminare Grenzschicht turbulent wird. Eine hintere Schranke für den Umschlagpunkt an einem umströmten Schnitt dieses Körpers bildet der Ablösungspunkt der Laminarschicht. Er liegt im Gebiet des Druckanstiegs dort, wo die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht die Wandschubspannung Null besitzt. Dieser Ablösungspunkt ist ein fester Punkt des umströmten Profils, dessen Lage sich mit einer Änderung

der Reynoldszahl $Re = \frac{U_\infty \cdot t}{\nu}$ ($U_\infty =$ Anblasgeschwindigkeit, $t =$ Körpertiefe) nicht verschiebt. Man kann ihn nach dem bekannten Näherungsverfahren von Pohlhausen berechnen, durch welches zu vorgegebener Druckverteilung jedem Profilpunkt eine Geschwindigkeitsverteilung der Grenzschicht mit einem bestimmten Formparameter λ zugeordnet wird ($\lambda = -12$ Ablösung). Als vordere Schranke für die Umschlagstelle kann man die Stabilitätsgrenze der Laminarschicht gegenüber kleinen zweidimensionalen Störungen ansprechen, die nach der von W. Tollmien [1] entwickelten Methode berechnet wurde [2], [3]. Für jede Geschwindigkeitsverteilungsform in der Grenzschicht gibt es hiernach eine sog. kritische Reynoldszahl $Re^*_{krit} = \left(\frac{U_a \cdot \delta^*}{\nu}\right)_{krit}$ ($U_a =$ örtliche Potentialgeschwindigkeit, $\delta^* =$ örtliche Verdrängungsdicke), unterhalb deren alle Störungen gedämpft werden; ihr Wert wächst mit völliger wer-

dender Form des Geschwindigkeitsprofils (mit wachsendem λ). Wo die mit der natürlich gegebenen Potentialgeschwindigkeit U_a und der natürlichen Verdrängungsdicke δ^* gebildete Reynoldszahl $Re^* = \frac{U_a \cdot \delta^*}{\nu}$ diese kritische Reynoldszahl überschreitet, beginnt die Instabilität der Grenzschicht. Diese Stabilitätsgrenze ist also im Gegensatz zum laminaren Ablösungspunkt nicht profilfest, sondern wandert bei den normalen Druckverteilungen an umströmten Körpern mit wachsender Reynoldszahl Re nach vorn zum Staupunkt hin (Bild 1).

Man weiß nun, daß der tatsächliche Umschlagpunkt, der zwischen diesen beiden Schranken, Stabilitätsgrenze und Ablösungspunkt, liegt, ebenfalls mit Vergrößerung der Reynoldszahl Re nach vorn rückt. Daß er, wie ein Vergleich von experimentellen Umschlagpunkten mit den theoretischen Stabilitätsgrenzen zeigt, erst ein gewisses Stück hinter der Stabilitätsgrenze liegt, ist erklärlich; denn die Anfachung der instabilen Störungen beginnt ja erst in diesem Grenzpunkt der Stabilität und muß offenbar ein bestimmtes Maß erreicht haben, ehe die Instabilität weiter stromab zum Zusammenbrechen der laminaren Strömungsform führt.

Aus diesem Grunde schien es notwendig, für die Geschwindigkeitsverteilungen in der laminaren Grenzschicht in deren ganzem Instabilitätsbereich auch die Anfachung der instabilen Störungen zu berechnen oder zumindest abzuschätzen mit dem Ziel, eine verfeinerte Berechnung des Umschlagpunktes zu ermöglichen.

Für die Geschwindigkeitsverteilung an der längsangeströmten ebenen Platte (Blasius-Profil) hat H. Schlichting [4] bereits in einem Teil des Instabilitätsbereiches die Größe der Anfachung in Abhängigkeit von Störungsfrequenz und Reynoldsscher Zahl ermittelt, und für die Geschwindigkeits-

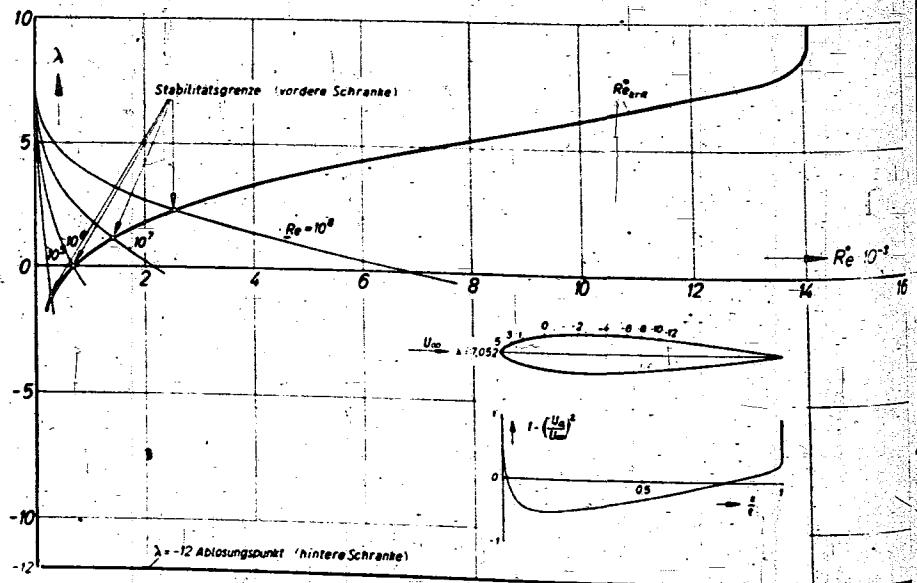


Bild 1. Vordere Schranke (Stabilitätsgrenze) und hintere Schranke (Ablösungspunkt) für den Umschlagpunkt an einem zylindrischen Körper.

* A 35 27.

verteilungen im Druckanstieggebiet, hat W. Tollmien [5] in erster asymptotischer Näherung für sehr große Reynoldszahlen das Verhalten der Anfachung in sehr allgemeiner Weise erklärt, indem er die Wirkungen der inneren Reibung vernachlässigte.

II. Die allgemeine Störungsdifferentialgleichung.

Da die Grundlagen der Methode der Stabilitätsuntersuchung in einer früheren Arbeit [3] eingehend auseinandergesetzt wurden, können wir auf die dort gewonnenen Ergebnisse zurückgreifen.

Es seien $U(x, y)$ und $V(x, y)$ die Tangential- und Normalkomponente einer ebenen stationären Grenzschichtströmung; x bezeichne die Bogenlänge und y die Normale zur umströmten Kontur. Die Stromfunktion der zweidimensionalen Störungsbewegung, die wir dieser Grundströmung überlagern, sei

$$\psi(x, y, t) = \varphi(x, y) \cdot e^{i\alpha(x - ct)} = \varphi(x, y) \cdot e^{i\alpha x} \cdot e^{-i(\alpha c - \beta_r)t} \quad (1)$$

$c = c_r + i c_i; \beta_i = c_i \alpha; \beta_r = c_r \alpha;$

wobei t die Zeit, α die räumliche Kreisfrequenz der Störung, der Realteil c_r von c ihre Phasengeschwindigkeit und der Imaginärteil c_i ein Maß für ihre Anfachung ($c_i > 0$) oder Dämpfung ($c_i < 0$); außerdem ist β_i das logarithmische Inkrement der Anfachung der Störungsamplitude und β_r die zeitliche Kreisfrequenz der Störung.

Setzen wir die durch Überlagerung der Grenzschichtströmung U, V und der Störungsbewegung

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varphi' e^{i\alpha(x - ct)} \\ \bar{v} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(i\alpha\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) e^{i\alpha(x - ct)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

entstehende Bewegung in die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen ein, so erhalten wir, wie in [3] im einzelnen nachgewiesen wurde, die Störungsdifferentialgleichung in der Form:

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = \frac{1}{\alpha Re^*} (\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi); \quad Re^* = \frac{U_a \cdot \delta^*}{\nu} \quad (3)$$

Hier bezeichnet $'$ Differentiation nach dem Wandabstand y ; die Geschwindigkeiten sind auf die örtliche Geschwindigkeit U_a an der Grenzschichtgrenze und der Wandabstand sowie die Wellenlänge $\Lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ auf die örtliche Verdrängungsdicke δ^* bezogen.

Um Mißverständnissen zu begegnen, soll wiederum betont werden, daß trotz der Voraussetzung, daß U, V und φ von der Bogenlänge x abhängig sind, für die Stabilitätsuntersuchung nur die Form der örtlichen Geschwindigkeitsverteilung maßgebend ist, wie man aus Gl. (3) erkennt; die unmittelbare Wirkung des Druckgradienten jedoch ist ebenso wie der Einfluß der x -Abhängigkeit der Störungsamplitude φ vernachlässigbar gering.

Die Randbedingungen der Differentialgleichung (3) ergeben sich aus der Bedingung, daß die Störungsgeschwindigkeiten \bar{u}, \bar{v} an der Wand verschwinden und die Reibungswirkung an der äußeren Grenzschichtgrenze ($U'' = 0$) abgeklungen ist. Mit ihrer Hilfe läßt sich die Berechnung der Anfachung der instabilen Störungen auf ein Eigenwertproblem zurückführen, dessen Lösung in Kapitel V auseinandergesetzt wird.

Wir befassen uns zunächst mit der Aufstellung der Partikularlösungen der Differentialgleichung (3). Dabei beschränken wir uns auf kleine Werte der Anfachungsgröße c_i , so daß die allgemeine Lösung der Störungsdifferentialgleichung (3) in der Form darstellbar ist:

$$\varphi^* = \sum_{r=1}^4 C_r^* \varphi_r^* = \sum_{r=1}^4 C_r^* \left(\varphi_r - \frac{i c_i}{U_0'} \omega_r \right); \quad U_0' = U'_{r=c} \quad (4)$$

wo mit φ_r die Partikularlösungen für $c_i = 0$ bezeichnet sind, die man bei der Berechnung der Grenzkurve des Instabilitätsbereiches (Indifferenzkurve) in der α, Re^* -Ebene erhält [3], und die ω_r Zusatzfunktionen für $c_i > 0$ bedeuten.

Wir wenden uns zunächst der Berechnung der Integrale φ_1^*, φ_2^* bzw. der Zusatzfunktionen ω_1, ω_2 zu.

III. Die Lösungen φ_1^*, φ_2^* der reibungslosen Störungsdifferentialgleichung bei endlicher Anfachung.

Nehmen wir αRe^* als sehr groß an, so vereinfacht sich die Differentialgleichung (3) zu der sog. reibungslosen Störungsgleichung:

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = 0 \quad (5)$$

Diese Differentialgleichung hat einen Pol erster Ordnung an der Stelle $U = c = c_r + i c_i$, der wir den Punkt y_c^* der komplexen y -Ebene zuordnen. In der Umgebung dieser Singularität kann man leicht ein Fundamentalsystem durch Reihenentwicklung angeben. Um den Zusammenhang mit dem früher [3] behandelten Fall des rein reellen c herzustellen, geben wir zunächst die Beziehung zwischen dem komplexen y_c^* und dem Wandabstand y_c der »kritischen« Schicht $U = c_r$ an.

$$U(y_c) = c_r \quad (6)$$

$$U(y_c^*) = c_r + i c_i \quad (7)$$

$$\text{folgt: } U(y_c^*) - U(y_c) = i c_i = (y_c^* - y_c) U_0' + \dots \quad (8)$$

und unter Beschränkung auf die in c_i linearen Glieder somit:

$$y_c^* = y_c + \frac{i c_i}{U_0'} \quad (9)$$

Wir wollen nun die Konstruktion der Lösungen φ_1^*, φ_2^* von (5) für diejenigen speziellen Geschwindigkeitsverteilungen $U(y)$ angeben, durch die wir die laminaren Grenzschichtprofile von Hartree [6] für die Berechnung der Anfachung der instabilen Störungen ebenso annähern werden, wie wir es früher [3] bei der Berechnung ihrer kritischen Reynoldszahlen taten.

a) Binomische Geschwindigkeitsverteilung (Druckgefälle).

Im Gebiet des Druckgefälles verwendeten wir die Näherungsfunktion:

$$U = 1 - (a - y)^n; \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (10)$$

wo a die Koordinate des Anschlußpunktes an die Potentialgeschwindigkeit bezeichnet.

Mit der neuen Veränderlichen:

$$y_1 = \frac{y - y_c}{a - y_c} \quad (11)$$

und mit

$$\alpha_1 = \alpha (a - y_c) \quad (12)$$

lautete die Störungsgleichung (5) für indifferente Störungen dann:

$$[1 - (1 - y_1)^n] \left(\frac{d^2 \varphi}{d y_1^2} - \alpha_1^2 \varphi \right) + n(n-1)(1 - y_1)^{n-2} \varphi = 0 \quad (13)$$

Wir führen nunmehr unter Benutzung der Beziehungen (9) und (11) die komplexe Veränderliche ein:

$$y_1^* = \frac{y - y_c^*}{a - y_c} = y_1 + \frac{y_c - y_c^*}{a - y_c} = y_1 - \frac{i c_i}{U_0' (a - y_c)} \quad (14)$$

Mit der Abkürzung:

$$f_1 = -\frac{c_i}{U_0' (a - y_c)} = -\frac{c_i}{n(c_r - 1)} \quad (15)$$

geht die reibungslose Störungsdifferentialgleichung für nicht verschwindende Anfachung dann über in die Form:

$$\left[1 - (1 - y_1^*)^n + n i f_1 [1 - (1 - y_1^*)^{n-1}] \right] \left(\frac{d^2 \varphi^*}{d y_1^{*2}} - \alpha_1^2 \varphi^* \right) + n(n-1) [(1 - y_1^*)^{n-2} + (n-2) i f_1 (1 - y_1^*)^{n-3}] \varphi^* = 0 \quad (16)$$

in der unserer Voraussetzung entsprechend nur die in f_1 linearen Glieder Berücksichtigung gefunden haben.

Schreibt man (16) nach Multiplikation mit

$$\frac{y_1^{*2}}{1 - (1 - y_1^*)^n + n i f_1 [1 - (1 - y_1^*)^{n-1}]}$$

und Ausdividieren in der Gestalt:

$$y_1^{*2} \frac{d^2 \varphi_1^*}{d y_1^{*2}} + \varphi_1^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^* y_1^{*i} \right) = 0, \quad (17)$$

so ist die erste Lösung φ_1^* gegeben durch:

$$\frac{\varphi_1^*}{a - y_c} = y_1^* \sum_{r=0}^{\infty} e_r^* y_1^{*r} = \frac{1}{a - y_c} \left(\varphi_1 - \frac{i c_i}{U_0'} \omega_1 \right) \quad (18)$$

mit

$$\omega_1 = \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_1^r \quad (19)$$

Die Reihenkoeffizienten e_r^* werden aus den β_r^* nach der Rekursionsformel gewonnen:

$$r(r+1) e_r^* + \sum_{n=0}^{r-1} \beta_n^* e_{r-n}^* = 0; \quad e_0^* = 1 \quad (20)$$

Die Lösung φ_2^* erhält man für alle y_1^* zu:

$$\varphi_2^* = \varphi_1^* \int \frac{1}{\varphi_1^{*2}} dy = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} b_r^* y_1^{*r} + 2 e_1^* \frac{\varphi_1^*}{a - y_c} \ln y_1^* \quad (21)$$

In dieser Gleichung ist der Logarithmus aber vieldeutig, man hat die komplexe y_1^* -Ebene so aufzuschneiden, daß $-\frac{3}{2} \pi < \arg y_1^* < \frac{\pi}{2}$ ist.

Setzen wir

$$\sum_{r=2}^{\infty} b_r^* y_1^{*r} = \sum_{r=2}^{\infty} b_r y_1^r + i f_1 \sum_{r=1}^{\infty} h_r y_1^r \quad (22)$$

so läßt sich φ_2^* für $y_1 = \text{Realteil von } y_1^* > 0$ zunächst in der Form darstellen:

$$\begin{aligned} \varphi_2^* &= 1 + \sum_{r=2}^{\infty} b_r y_1^r + i f_1 \sum_{r=1}^{\infty} h_r y_1^r \\ &+ 2 e_1 (1 - i f_1) \left(\frac{\varphi_1}{a - y_c} + i f_1 \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_1^r \right) \times \\ &\times \left(\ln y_1 + \frac{i f_1}{y_1} \right) = \varphi_2 - \frac{i c_i}{U_0'} \omega_2 \quad (23) \end{aligned}$$

mit

$$\omega_2 = \frac{1}{a - y_c} \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r y_1^r + \frac{2 e_1 \varphi_1}{a - y_c} \left(\frac{1}{y_1} - \ln y_1 \right) + 2 e_1 \ln y_1 \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_1^r \right] \quad (24)$$

Bei der Umformung von (24) in (23) wird von der Beziehung:

$$e_1^* = e_1 (1 - i f_1) \quad (25)$$

Gebrauch gemacht, die man aus der Störungsgleichung (5) leicht erhält, wenn man $U(y)$ und φ_1^* für $c_i = 0$ und für $\dot{c}_i = 0$ in der Nähe der Singularität $U = c$ in eine Taylorreihe entwickelt. Es ist nämlich:

$$2 e_1 = (a - y_c) \frac{U_0'''}{U_0''} \quad (26)$$

und

$$\begin{aligned} 2 e_1^* &= (a - y_c) \frac{U_0'' + i c_i \frac{U_0'''}{U_0''}}{U_0' + i c_i \frac{U_0'''}{U_0''}} \\ &\sim (a - y_c) \frac{U_0'''}{U_0''} \left[1 - \frac{i c_i}{U_0'} \left(\frac{U_0''}{U_0'} - \frac{U_0'''}{U_0''} \right) \right] \\ &= (a - y_c) \frac{U_0'''}{U_0''} (1 - i f_1) \quad (27) \end{aligned}$$

Wenn wir in (27) den exakten Wert $\left(\frac{U_0''}{U_0'} - \frac{U_0'''}{U_0''} \right)$ wieder durch den Näherungswert f_1 ausdrücken, so ist diese Annahme damit begründet, daß es sich hier wegen des kleinen c_i nur um ein Korrekturglied für den Wert von $\frac{U_0'''}{U_0''}$ handelt.

Für $y_1 < 0$ wird φ_2^* dargestellt durch den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \varphi_2^* &= 1 + \sum_{r=2}^{\infty} b_r^* y_1^{*r} + 2 e_1^* \frac{\varphi_1^*}{a - y_c} (\ln |y_1^*| + i \arg y_1^*) \\ &= \varphi_2 - \frac{i c_i}{U_0'} \omega_2; \quad \left(\frac{3}{2} \pi < \arg y_1^* < \frac{\pi}{2} \right) \quad (28) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{1}{a - y_c} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} h_r y_1^r + \frac{2 e_1 \varphi_1}{a - y_c} \left(\frac{1}{y_1} - \ln y_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 e_1 \ln |y_1| \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_1^r \right\} \\ &\quad + 2 i \pi e_1 \left(\frac{\varphi_1}{a - y_c} - \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_1^r \right) \quad (29) \end{aligned}$$

Das Glied mit $i \arg y_1^*$ in (28) erhielten H. Schlichting [4] und W. Tollmien [5] durch eine Diskussion der allgemeinen Störungsgleichung (3) in der Nähe der Singularität $U = c_r + i c_i$ in ganz ähnlicher Weise wie die „Übergangssubstitution“ in der kritischen Schicht bei rein reellem c , indem dort wieder die Reibungswirkung berücksichtigt wird.

Da es bei der Berechnung der Übergangssubstitution auf eine möglichst genaue Darstellung von e_1 ankommt, werden wir hierbei c_1 durch den Ausdruck (26) der Taylorentwicklung des exakten Hartree-Profiles ersetzen.

Für die lineare und die parabolische Näherungsverteilung [$n = 1, n = 2$ in Gl. (10) und (16)] hat H. Schlichting [4] die Lösungen φ_1^*, φ_2^* bereits angegeben. Diese Berechnung wurde für $n = 3$ und $n = 4$ fortgeführt. Die Koeffizienten $\beta_r^*, e_r^*, b_r^*, g_r, h_r$ sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt. Für die Konvergenz der Potenzreihen gelten die in [3] angestellten Überlegungen.

b) Sinusförmige Geschwindigkeitsverteilung (Druckanstieg)

Im Gebiet des Druckanstiegs wurden die Hartreeschen Geschwindigkeitsverteilungen in der Grenzschicht [3] durch den von W. Tollmien [5] eingeführten Sinusansatz angenähert:

$$U = U_s + (1 - U_s) \sin \left(\frac{y - s}{a - s} \frac{\pi}{2} \right) \quad (30)$$

wo s den Wandabstand des Wendepunktes bedeutet.

Mit der neuen reellen Veränderlichen:

$$y_2 = \frac{\pi}{2} \frac{y - y_c}{a - s} \quad (31)$$

und mit

$$\alpha_2 = \frac{2}{\pi} (a - s) \alpha \quad (32)$$

lautete die Störungsgleichung (5) für die indifferenten Störungen dann:

$$[\sin(y_2 - y_{2s}) + \sin y_{2s}] \left(\frac{d^2 \varphi}{d y_2^2} - \alpha_2^2 \varphi \right) + \sin(y_2 - y_{2s}) \varphi = 0 \quad (33)$$

wo

$$y_{2s} = \frac{\pi}{2} \frac{s - y_c}{a - s} \quad (34)$$

gesetzt wurde.

Wir führen nunmehr die komplexe Veränderliche ein:

$$y_2^* = \frac{\pi}{2} \frac{y - y_c^*}{a - s} = y_2 + \frac{\pi}{2} \frac{y_c - y_c^*}{a - s} = y_2 - \frac{i c_i}{U_0'} \frac{\pi}{2(a - s)} \quad (35)$$

Mit der Abkürzung:

$$f_2 = \frac{c_i}{U_0'} \frac{\pi}{2(a - s)} = \frac{c_i}{(1 - U_s) \cos y_{2s}} \quad (36)$$

geht die reibungslose Störungsdifferentialgleichung für nicht verschwindende Anfachung dann über in die Form:

$$\sin(y_2^* - y_{2s}) + \sin y_{2s} - i f_2 \{ \cos(y_2^* - y_{2s}) - \cos y_{2s} \} \times \left(\frac{d^2 \varphi^*}{d y_2^{*2}} - \alpha_2^2 \varphi^* \right) + [\sin(y_2^* - y_{2s}) - i f_2 \cos(y_2^* - y_{2s})] \varphi^* = 0 \quad (37)$$

Schreibt man (37) wie oben Gl. (16) in der Gestalt:

$$y_2^{*2} \frac{d^2 \varphi^*}{d y_2^{*2}} + \varphi^* \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^* y_2^{*i} = 0, \quad (38)$$

so werden die Lösungen φ_1^* , φ_2^* in Analogie zu den Gl. (18), (23) und (28) bestimmt. Es ist

$$\frac{\pi}{2(a-s)} \varphi_1^* = y_2^* \sum_{r=0}^{\infty} e_r^* y_2^{*r} = \frac{\pi}{2(a-s)} \left(\varphi_1 - \frac{i c_1}{U_0'} \omega_1 \right) \quad (39)$$

mit

$$\omega_1 = \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_2^r \quad (40)$$

Die Lösung φ_2 erhält man für $y_2 > 0$ zu:

$$\varphi_2^* = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} b_r^* y_2^{*r} + 2 e_1^* \frac{\pi \varphi_1^*}{2(a-s)} \ln y_2^*; \quad - \frac{3}{2} \pi < \arg y_2^* < \frac{\pi}{2} \quad (41)$$

Setzen wir:

$$\sum_{r=2}^{\infty} b_r^* y_2^{*r} = \sum_{r=2}^{\infty} b_r y_2^r + i f_2 \sum_{r=1}^{\infty} h_r y_2^r \quad (42)$$

so läßt sich φ_2^* für $y_2 > 0$ in der Form darstellen:

$$\varphi_2^* = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} b_r y_2^r + i f_2 \sum_{r=1}^{\infty} h_r y_2^r + 2 e_1 \left(1 + \frac{i f_2}{\sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) \times \left(\frac{\pi \varphi_1}{2(a-s)} + i f_2 \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_2^r \right) \left(\ln y_2 + \frac{i f_2}{y_2} \right) = \varphi_2 - \frac{i c_1}{U_0'} \omega_2 \quad (43)$$

mit

$$\omega_2 = \frac{\pi}{2(a-s)} \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r y_2^r + \frac{2 \pi e_1 \varphi_1}{2(a-s)} \left(\frac{1}{y_2} + \frac{\ln y_2}{\sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) + 2 e_1 \ln y_2 \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_2^r \right] \quad (44)$$

Bei der Umformung von (41) in (43) wird die Beziehung benutzt:

$$e_1^* = e_1 \left(1 + \frac{i f_2}{\sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) \quad (45)$$

die aus den beiden Gleichungen folgt:

$$e_1 = \frac{a-s}{\pi} \frac{U_0''}{U_0'} \quad (46)$$

und

$$e_1^* = \frac{(a-s)}{\pi} \frac{U_0'' + i c_1 \frac{U_0'''}{U_0'}}{U_0' + i c_1 \frac{U_0''}{U_0'}} \sim \frac{(a-s)}{\pi} \frac{U_0''}{U_0'} \left[1 - \frac{i c_1}{U_0'} \left(\frac{U_0''}{U_0'} - \frac{U_0'''}{U_0''} \right) \right] = \frac{(a-s)}{\pi} \frac{U_0''}{U_0'} \left(1 + \frac{i f_2}{\sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) \quad (47)$$

Für $y_2 < 0$ wird φ_2^* dargestellt durch den Ausdruck:

$$\varphi_2^* = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} b_r^* y_2^{*r} + e_1^* \frac{\pi}{(a-s)} \varphi_1^* (\ln |y_2^*| + i \arg y_2^*); \quad - \frac{3}{2} \pi < \arg y_2^* < \frac{\pi}{2} \quad (48)$$

mit

$$\omega_2 = \frac{\pi}{2(a-s)} \left\{ \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r y_2^r + \frac{\pi e_1 \varphi_1}{a-s} \left(\frac{1}{y_2} + \frac{\ln y_2}{\sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) + 2 e_1 \ln |y_2| \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_2^r \right] + 2 i \pi e_1 \left(\frac{-\pi \varphi_1}{2(a-s) \sin y_{2s} \cos y_{2s}} - \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_2^r \right) \right\} \quad (49)$$

Für die Berechnung der Übergangssubstitution werden wir wie in Abschnitt IIIa die Zahl e_1 durch den genauen Wert (46) der Taylorentwicklung des exakten Hartree-Profiles ersetzen.

Bei einem Vergleich der Beziehungen (24) und (44) oder (27) und (47) oder (29) und (49) fällt auf, daß in den Ausdrücken für e_1^* und ω_2 bei den sinusförmigen Grenzsichtprofilen im Druckanstieg im Nenner einiger Glieder das Produkt $\sin y_{2s} \cos y_{2s}$ auftritt. Das Vorzeichen dieses Produktes ist negativ, wenn der Wendepunkt der Geschwindigkeitsverteilung näher an der Wand liegt als die kritische Schicht ($y_{2s} < 0$), die kritische Schicht also in dem konkav gekrümmten Teil des Geschwindigkeitsprofils liegt. Das Vorzeichen der durch $\sin y_{2s} \cos y_{2s}$ dividierten Ausdrücke ist dann dasselbe wie das Vorzeichen der entsprechenden Glieder in den Lösungen für die Geschwindigkeitsverteilungen im Druckgefälle, die bekanntlich in jedem Wandabstand konkave Krümmung besitzen. Liegt hingegen die kritische Schicht zwischen Wendepunkt und Wand ($y_{2s} > 0$), also im konvex gekrümmten Teil des Geschwindigkeitsprofils, so kehren sich die besprochenen Vorzeichen um. Dabei ist das Verhalten von e_1^* und ω_2 , wenn die kritische Schicht in den Wendepunkt selbst ($y_{2s} = 0$) rückt, regulär; denn es ist dann

$$e_1^* = - \frac{i c_1}{2(1-U_s)} = \frac{i f_2}{2} \quad (50)$$

und

$$\omega_2(y_2 = s) = \frac{\pi}{2(a-s)} \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r y_2^r + \frac{\pi \varphi_1}{2(a-s)} \ln y_2 \right] \text{ für } y_2 > 0, \quad (51)$$

$$\omega_2(y_2 = s) = \frac{\pi}{2(a-s)} \left\{ \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r y_2^r + \frac{\pi \varphi_1}{2(a-s)} \ln |y_2| \right] - \frac{i \pi^2 \varphi_1}{2(a-s)} \text{ für } y_2 < 0 \right\} \quad (52)$$

Die Reihenkoeffizienten β_r^* , e_r^* , b_r^* , g_r , h_r sind für die sinusförmige Grundgeschwindigkeit in Zahlentafel 2 angegeben. Für die Konvergenz der Reihenentwicklungen gelten wiederum die Ausführungen der früheren Mitteilung [3].

IV. Die Reibungslösung φ_2^* bei endlicher Anfachung.

Außer in der kritischen Schicht $U = c$ spielt die Reibung der Flüssigkeit auch in Wandnähe eine Rolle, indem sie dort zu zwei weiteren Lösungen φ_3^* , φ_4^* der allgemeinen Störungsdifferentialgleichung (3) Anlaß gibt.

Führen wir die Veränderliche ein:

$$\eta^* = \frac{y - y_2^*}{\epsilon^*} \quad (53)$$

mit

$$\epsilon^* = \left[\alpha \operatorname{Re}^* \left(U_0' + i c_1 \frac{U_0''}{U_0'} \right) \right]^{-1/2} \quad (54)$$

so erhalten wir aus (3) im Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ für große Reynoldszahlen die Differentialgleichung:

$$i \frac{d^4 \varphi_{3,4}^*}{d \eta^{*4}} + \eta^* \frac{d^2 \varphi_{3,4}^*}{d \eta^{*2}} = 0 \quad (55)$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind von der Form der Geschwindigkeitsverteilung $U(y)$ genau so unabhängig, wie das bei den Lösungen φ_3, φ_4 für die Anfachung Null der Fall war [1]; sie lauten entsprechend [2]:

$$\varphi_{3,4}^* = \int_{-\infty}^{\eta^*} d\eta^* \int_{-\infty}^{\eta^*} \eta^{*1/2} H_{1,2}^{(1), (2)} \left[\frac{2}{3} (i\eta^*)^{3/2} \right] d\eta^* \quad (56)$$

wo $H^{(1), (2)}$ die Hankelsche Funktion erster bzw. zweiter Art bedeutet.

Da die Hankelsche Funktion erster Art für großen Wandabstand über alle Grenzen wächst, kann sie im allgemeinen Integral (4) nicht enthalten sein, so daß wir dort $C_4 = 0$ setzen können.

V. Die Aufstellung und Lösung des Eigenwertproblems.

Nachdem wir die Partikularlösungen der Störungsdifferentialgleichung (3) gefunden haben, stellen wir nun für die Untersuchung der Anfachung der instabilen Störungen das Eigenwertproblem auf, das sich aus den Randbedingungen der Störungsgleichung ergibt.

An der Wand verschwinden sowohl die Tangential- wie die Normalkomponente der Störungsgeschwindigkeit, es ist also:

$$C_1^* \varphi_{1w}^* + C_2^* \varphi_{2w}^* + C_3^* \varphi_{3w}^* = 0, \quad (57)$$

$$C_1^* \varphi_{1w}' + C_2^* \varphi_{2w}' + C_3^* \varphi_{3w}' = 0, \quad (58)$$

Im Anschlußpunkt $y = a$ an das Gebiet konstanter Geschwindigkeit ist $U'' = 0$ und damit $\varphi^{*''} - \alpha^2 \varphi^* = 0$, d. h. $\varphi^* = e^{-\alpha y}$, so daß die dritte Randbedingung lautet:

$$C_1^* \Phi_{1a}^* + C_2^* \Phi_{2a}^* = 0 \quad (59)$$

mit

$$\Phi_{\nu a}^* = \varphi_{\nu a}' + \alpha \varphi_{\nu a}^*, \quad \nu = 1, 2 \quad (60)$$

Ein Glied Φ_{3a}^* tritt nicht auf, weil die reibungsbedingte Partikularlösung φ_{3a}^* im Anschlußpunkt bereits abgeklungen ist.

Damit die drei homogenen Gl. (57), (58), (59) eine von Null verschiedene Lösung besitzen, muß die Determinante verschwinden:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{1w}^* & \varphi_{2w}^* & \varphi_{3w}^* \\ \varphi_{1w}' & \varphi_{2w}' & \varphi_{3w}' \\ \Phi_{1a}^* & \Phi_{2a}^* & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (61)$$

Die Auflösung dieser Determinante liefert die Gleichung:

$$\frac{\varphi_{3w}^*}{\varphi_{3w}'} = \frac{\varphi_{2w}^* \Phi_{1a}^* - \varphi_{1w}^* \Phi_{2a}^*}{\varphi_{2w}' \Phi_{1a}^* - \varphi_{1w}' \Phi_{2a}^*} \quad (62)$$

oder mit den Schlichtingschen Abkürzungen:

$$\frac{1}{\varepsilon^* \eta_0^*} \frac{\varphi_{3w}^*}{\varphi_{3w}'} = \frac{D(\eta_0^*)}{\eta_0^*} = F(\eta_0^*) = F^* \quad (63)$$

$$\frac{1}{y_c^*} \frac{\varphi_{2w}^* \Phi_{1a}^* - \varphi_{1w}^* \Phi_{2a}^*}{\varphi_{2w}' \Phi_{1a}^* - \varphi_{1w}' \Phi_{2a}^*} = E^*(\alpha, c_r, c_i) \quad (64)$$

schließlich:

$$F^* = E^*(\alpha, c_r, c_i) \quad (65)$$

Hierbei ist:

$$\eta_0^* = -\frac{y_c^*}{\varepsilon^*} \quad (66)$$

Die komplexe Gl. (65) ist mit zwei reellen Gleichungen äquivalent, in denen die Parameter α, Re^*, \hat{c}_r und c_i enthalten sind. Beschränkt man sich auf den Fall indifferenten Störungen ($c_i = 0$), so erhält man aus ihnen nach Elimination von c_r eine Beziehung zwischen der Reynoldsschen Zahl Re^* und der Wellenlänge $\frac{2\pi}{\alpha}$ der Störung. Das ist die Gleichung der Indifferenzkurve oder der Kurve der konstanten Anfachung Null, durch die die stabilen und instabilen Störungszustände getrennt werden, und deren niedrigste Rey-

noldszahl die sog. kritische Reynoldszahl Re_{kr}^* ist, bei deren Überschreiten die Anfachung der instabilen Störungen beginnt.

Diese Indifferenzkurven wurden in einer früheren Mitteilung [3] für die von Hartree berechneten Geschwindigkeitsprofile bei Druckgefälle und Druckanstieg bestimmt.

In der vorliegenden Untersuchung wollen wir zumehr die Anfachungsgröße c_i von Null verschieden annehmen und nach den Kurven konstanter Anfachung fragen, die von dieser Indifferenzkurve umschlossen werden.

Wir werden dazu die komplexe Gl. (65) auf etwas einfachere Weise auflösen als Schlichting [4], indem wir nicht die Differentialquotienten $\frac{\partial c_i}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial c_i}{\partial Re^*}$ am Ort der Indifferenzkurve, sondern die Kurven konstanter Anfachung $c_i > 0$ direkt auf ähnlichem Wege wie die Indifferenzkurve $c_i = 0$ bestimmen, ohne jedoch die Kenntnis dieser selbst zu benutzen. Wir betrachten zunächst die linke Seite von Gl. (65).

Da wir uns auf kleine Werte der Anfachung beschränken wollen, entwickeln wir F^* in der Form:

$$F^* = F(\eta_0^*) = F(\eta_0) + (\eta_0^* - \eta_0) \left(\frac{dF}{d\eta_0^*} \right)_{\eta_0 = \eta_0} + \dots \quad (67)$$

wo η_0 wie früher [1] durch die Beziehung definiert ist:

$$\eta_0 = -y_c (\alpha Re^* U_0')^{1/2} \quad (68)$$

Nach Gl. (9), (54), (66) und (68) ist nun:

$$\begin{aligned} \eta_0^* &= -y_c \left(1 + \frac{ic_i}{U_0' y_c} \right) \left[\alpha Re^* U_0' \left(1 + \frac{ic_i U_0''}{U_0'^2} \right) \right]^{1/2} \\ &\sim -y_c (\alpha Re^* U_0')^{1/2} \left[1 + \frac{ic_i}{U_0' y_c} \left(1 + \frac{y_c U_0''}{3 U_0'} \right) \right] \\ &= \eta_0 \left[1 + \frac{ic_i}{U_0' y_c} \left(1 + \frac{y_c U_0''}{3 U_0'} \right) \right] \end{aligned} \quad (69)$$

Somit wird aus (67):

$$\begin{aligned} F^* &= F(\eta_0^*) \sim F(\eta_0) + \frac{ic_i}{U_0' y_c} \eta_0 \left(1 + \frac{y_c U_0''}{3 U_0'} \right) \frac{dF}{d\eta_0} \\ &= G(\eta_0, c_r, c_i) \end{aligned} \quad (70)$$

Man sieht also, daß die Form der Geschwindigkeitsverteilung, die in die exakte Lösung $F(\eta_0^*)$ nach (63) und (56) nicht eingeht, bei der Entwicklung von $F(\eta_0^*)$ nach c_i explizit auftritt.

Den Differentialquotienten $\frac{dF}{d\eta_0} = \frac{dF_r}{d\eta_0} + i \frac{dF_i}{d\eta_0}$ bestimmen wir durch graphische Differentiation der Funktion $F(\eta_0)$. Die Zahlenwerte seines Real- und Imaginärteiles sind in Zahlentafel 3 angegeben. Da Real- und Imaginärteil nirgends gleichzeitig verschwinden, wird die Funktion $F(\eta_0^*)$ in einiger Umgebung von der Funktion $F(\eta_0)$ singularitätenfrei und damit die Entwicklung (67) gestattet sein.

Wir betrachten nun die rechte Seite der Gl. (65), die durch die Beziehung (64) definiert ist.

Indem wir uns an die Aufspaltung der reibungslosen Lösungen φ_{ν}^* ($\nu = 1, 2$) in der Form der Gl. (4) erinnern, setzen wir zunächst:

$$\begin{aligned} \varphi_{\nu a}^* &= \Phi_{\nu a} - \frac{ic_i}{U_0'} \Omega_{\nu a} \\ \text{mit} \quad \Omega_{\nu a} &= \omega'_{\nu a} + \alpha \omega_{\nu a}, \\ \text{ferner} \quad \varphi_{\nu w}^* &= \varphi_{\nu w} - \frac{ic_i}{U_0'} \omega_{\nu w}, \\ \varphi_{\nu w}' &= \varphi_{\nu w}' - \frac{ic_i}{U_0'} \omega'_{\nu w}. \end{aligned} \quad (71)$$

Für die binomische Geschwindigkeitsverteilung $U = 1 - (a - iy)^n$ sind die Werte der Zusatzfunktionen $\omega_{\nu a}, \omega_{\nu w}$ und ihrer Ableitungen $\omega'_{\nu a}, \omega'_{\nu w}$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \omega_{1a} &= \sum_{r=0}^{\infty} g_r, \\
 \omega_{2a} &= \frac{1}{a-y_c} \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r + \frac{2e_1 \varphi_{1a}}{a-y_c} \right], \\
 \omega_{1a'} &= \frac{1}{a-y_c} \sum_{r=1}^{\infty} r g_r, \\
 \omega_{2a'} &= \frac{1}{(a-y_c)^2} \sum_{r=1}^{\infty} r h_r + \frac{2e_1}{(a-y_c)^2} \left(\frac{2\varphi_{1a}}{a-y_c} + \varphi_{1a'} + \omega_{1a} \right), \\
 \omega_{1w} &= \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_{1w}^r, \\
 \omega_{2w} &= \frac{1}{a-y_c} \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r y_{1w}^r + \frac{2e_1 \varphi_{1w}}{a-y_c} \left(\frac{1}{y_{1w}} - \ln |y_{1w}| \omega_{1w} \right) + 2e_1 \ln |y_{1w}| \omega_{1w} \right] \\
 &\quad + i\pi \frac{U_0''}{U_0'} \left(\frac{\varphi_{1w}}{a-y_c} - \omega_{1w} \right), \\
 \omega_{1w'} &= \frac{1}{a-y_c} \sum_{r=1}^{\infty} r g_r y_{1w}^{r-1}, \\
 \omega_{2w'} &= \frac{1}{(a-y_c)^2} \sum_{r=1}^{\infty} r h_r y_{1w}^{r-1} + \frac{2e_1}{(a-y_c)^2} \left[\frac{\varphi_{1w}}{a-y_c} \left(-\frac{1}{y_{1w}^2} - \frac{1}{y_{1w}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varphi_{1w}' \left(\frac{1}{y_{1w}} - \ln |y_{1w}| \right) + \frac{\omega_{1w}}{y_{1w}} + \ln |y_{1w}| \omega_{1w}' (a-y_c) \right] + i\pi \frac{U_0''}{U_0'} \left(\frac{\varphi_{1w}'}{a-y_c} - \omega_{1w}' \right)
 \end{aligned} \tag{72}$$

Für die sinusförmige Geschwindigkeitsverteilung $U = U_s + (1 - U_s) \sin \left(\frac{y-s}{a-s} \frac{\pi}{2} \right)$ dagegen lauten die entsprechenden Formeln:

$$\begin{aligned}
 \omega_{1a} &= \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_{2a}^r, \\
 \omega_{2a} &= \frac{\pi}{2(a-s)} \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r y_{2a}^r + \frac{\pi e_1 \varphi_{1a}}{a-s} \left(\frac{1}{y_{2a}} + \frac{\ln y_{2a}}{\sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) + 2e_1 \ln y_{2a} \omega_{1a} \right], \\
 \omega_{1a'} &= \frac{\pi}{2(a-s)} \sum_{r=1}^{\infty} r g_r y_{2a}^{r-1}, \\
 \omega_{2a'} &= \frac{\pi^2}{4(a-s)^2} \sum_{r=1}^{\infty} r h_r y_{2a}^{r-1} + \frac{\pi^2 e_1}{2(a-s)^2} \left[\frac{\pi \varphi_{1a}}{2(a-s)} \left(-\frac{1}{y_{2a}^2} + \frac{1}{y_{2a} \sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varphi_{1a}' \left(\frac{1}{y_{2a}} + \frac{\ln y_{2a}}{\sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) + \frac{\omega_{1a}}{y_{2a}} \frac{2(a-s)}{\pi} + \ln y_{2a} \omega_{1a}' \right], \\
 \omega_{1w} &= \sum_{r=0}^{\infty} g_r y_{2w}^r, \\
 \omega_{2w} &= \frac{\pi}{2(a-s)} \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r y_{2w}^r + \frac{\pi e_1 \varphi_{1w}}{a-s} \left(\frac{1}{y_{2w}} + \frac{\ln |y_{2w}|}{\sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) + 2e_1 \ln |y_{2w}| \omega_{1w} \right] \\
 &\quad + i\pi \frac{U_0''}{U_0'} \left(\frac{-\pi \varphi_{1w}}{2(a-s) \sin y_{2s} \cos y_{2s}} - \omega_{1w} \right), \\
 \omega_{1w'} &= \frac{\pi}{2(a-s)} \sum_{r=1}^{\infty} r g_r y_{2w}^{r-1}, \\
 \omega_{2w'} &= \frac{\pi^2}{4(a-s)^2} \sum_{r=1}^{\infty} r h_r y_{2w}^{r-1} + \frac{\pi^2 e_1}{2(a-s)^2} \left[\frac{\pi \varphi_{1w}}{2(a-s)} \left(-\frac{1}{y_{2w}^2} + \frac{1}{y_{2w} \sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varphi_{1w}' \left(\frac{1}{y_{2w}} + \frac{\ln |y_{2w}|}{\sin y_{2s} \cos y_{2s}} \right) + \frac{\omega_{1w}}{y_{2w}} \frac{2(a-s)}{\pi} \ln |y_{2w}| \omega_{1w}' \right] + i\pi \frac{U_0''}{U_0'} \left(\frac{-\pi \varphi_{1w}'}{2(a-s) \sin y_{2s} \cos y_{2s}} - \omega_{1w}' \right)
 \end{aligned} \tag{73}$$

Rückt die kritische Stelle in den Wendepunkt der Geschwindigkeitsverteilung ($y_c = s, y_{2s} = 0$), so vereinfachen sich die Gleichungen für $\omega_{2a}, \omega_{2a'}, \omega_{2w}, \omega_{2w}'$ aus (74) zu:

$$\omega_{2w'} = \frac{\pi^2}{4(a-s)^2} \left[\sum_{r=1}^{\infty} r h_r y_{2w}^{r-1} + \frac{\pi \varphi_{1w}}{2(a-s) y_{2w}} + \varphi_{1w}' \ln |y_{2w}| \right] - \frac{i\pi^2 \varphi_{1w}'}{4(a-s)^2} \tag{74}$$

Wir spalten nun $\varphi_{2w}, \varphi_{2w}', \omega_{2w}, \omega_{2w}'$ in Real- und Imaginärteil auf nach den Formeln:

$$\begin{aligned}
 \omega_{2a} &= \frac{\pi}{2(a-s)} \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r y_{2a}^r + \frac{\pi \varphi_{1a}}{2(a-s)} \ln y_{2a} \right], \\
 \omega_{2a'} &= \frac{\pi^2}{4(a-s)^2} \left[\sum_{r=1}^{\infty} r h_r y_{2a}^{r-1} + \frac{\pi \varphi_{1a}}{2(a-s) y_{2a}} + \varphi_{1a}' \ln y_{2a} \right], \\
 \omega_{2w} &= \frac{\pi}{2(a-s)} \left[\sum_{r=1}^{\infty} h_r y_{2w}^r + \frac{\pi \varphi_{1w}}{2(a-s)} \ln |y_{2w}| \right] - \frac{i\pi^2 \varphi_{1w}}{4(a-s)^2} \\
 \omega_{2w'} &= \frac{\pi^2}{4(a-s)^2} \left[\sum_{r=1}^{\infty} r h_r y_{2w}^{r-1} + \frac{\pi \varphi_{1w}}{2(a-s) y_{2w}} + \varphi_{1w}' \ln |y_{2w}| \right] - \frac{i\pi^2 \varphi_{1w}'}{4(a-s)^2}
 \end{aligned} \tag{75}$$

dann wird

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{2w}^* &= A_1 + \frac{c_i}{U_0'} N_1 + i \left(B_1 - \frac{c_i}{U_0'} M_1 \right) \\ \varphi_{2w'}^* &= A_2 + \frac{c_i}{U_0'} N_2 + i \left(B_2 - \frac{c_i}{U_0'} M_2 \right) \end{aligned} \right\} \dots (76)$$

Sodann bringen wir den Ausdruck (64) auf die Form:

$$E^*(\alpha, c_r, c_i) = E(\alpha, c_r) [1 + c_i z_1 + i z_2] \dots (77)$$

wo E wie früher [1] definiert ist durch:

$$E = - \frac{1}{y_c} \frac{\varphi_{2w} \Phi_{1a} - \varphi_{1w} \Phi_{2a}}{\varphi_{2w'} \Phi_{1a} - \varphi_{1w'} \Phi_{2a}} \dots (78)$$

Zunächst ist unter Beschränkung auf die in c_i linearen Glieder:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{2w}^* \Phi_{1a}^* &\sim A_1 \Phi_{1a} + \frac{c_i}{U_0'} (N_1 \Phi_{1a} + B_1 \Omega_{1a}) \\ &\quad + i \left[B_1 \Phi_{1a} - \frac{c_i}{U_0'} (A_1 \Omega_{1a} + M_1 \Phi_{1a}) \right] \\ \varphi_{1w}^* \Phi_{2a}^* &\sim \varphi_{1w} \Phi_{2a} - \frac{i c_i}{U_0'} (\omega_{1w} \Phi_{2a} + \varphi_{1w} \Omega_{2a}) \\ \varphi_{2w'}^* \Phi_{1a}^* &\sim A_2 \Phi_{1a} + \frac{c_i}{U_0'} (N_2 \Phi_{1a} + B_2 \Omega_{1a}) \\ &\quad + i \left[B_2 \Phi_{1a} - \frac{c_i}{U_0'} (A_2 \Omega_{1a} + M_2 \Phi_{1a}) \right] \\ \varphi_{1w'}^* \Phi_{2a}^* &\sim \varphi_{1w'} \Phi_{2a} - \frac{i c_i}{U_0'} (\omega_{1w'} \Phi_{2a} + \varphi_{1w'} \Omega_{2a}) \end{aligned} \right\} (79)$$

Daraus ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung:

$$E^* \sim E \left[1 - \frac{i c_i}{U_0' y_c} + \frac{c_i}{U_0'} \left\{ \frac{N_1 \Phi_{1a} + B_1 \Omega_{1a} + i (\omega_{1w} \Phi_{2a} + \varphi_{1w} \Omega_{2a} - A_1 \Omega_{1a} - M_1 \Phi_{1a})}{A_1 \Phi_{1a} - \varphi_{1w} \Phi_{2a} + i B_1 \Phi_{1a}} - \frac{(N_2 \Phi_{1a} + B_2 \Omega_{1a}) + i (\omega_{1w'} \Phi_{2a} + \varphi_{1w'} \Omega_{2a} - A_2 \Omega_{1a} - M_2 \Phi_{1a})}{A_2 \Phi_{1a} - \varphi_{1w'} \Phi_{2a} + i B_2 \Phi_{1a}} \right\} \right] \dots (80)$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} N_1 \Phi_{1a} + B_1 \Omega_{1a} &= m_1 \\ \omega_{1w} \Phi_{2a} + \varphi_{1w} \Omega_{2a} - A_1 \Omega_{1a} - M_1 \Phi_{1a} &= n_1 \\ N_2 \Phi_{1a} + B_2 \Omega_{1a} &= m_2 \\ \omega_{1w'} \Phi_{2a} + \varphi_{1w'} \Omega_{2a} - A_2 \Omega_{1a} - M_2 \Phi_{1a} &= n_2 \\ A_1 \Phi_{1a} - \varphi_{1w} \Phi_{2a} &= K_1 \\ A_2 \Phi_{1a} - \varphi_{1w'} \Phi_{2a} &= K_2 \end{aligned} \right\} (81)$$

Dann folgt aus (80):

$$E^* \sim E \left[1 - \frac{i c_i}{U_0' y_c} + \frac{c_i}{U_0'} \left\{ \frac{m_1 + i n_1}{K_1 + i B_1 \Phi_{1a}} - \frac{m_2 + i n_2}{K_2 + i B_2 \Phi_{1a}} \right\} \right] \\ = E \left[1 - \frac{i c_i}{U_0' y_c} + \frac{c_i}{U_0'} \left\{ \frac{m_1 K_1 + n_1 B_1 \Phi_{1a}}{K_1^2 + B_1^2 \Phi_{1a}^2} - \frac{m_2 K_2 + n_2 B_2 \Phi_{1a}}{K_2^2 + B_2^2 \Phi_{1a}^2} \right\} + \frac{i c_i}{U_0'} \left\{ \frac{n_1 K_1 - m_1 B_1 \Phi_{1a}}{K_1^2 + B_1^2 \Phi_{1a}^2} - \frac{n_2 K_2 - m_2 B_2 \Phi_{1a}}{K_2^2 + B_2^2 \Phi_{1a}^2} \right\} \right] \dots (82)$$

Führen wir schließlich noch die Bezeichnungen ein:

$$z_1 = \frac{1}{U_0'} \left[\frac{m_1 K_1 + n_1 B_1 \Phi_{1a}}{K_1^2 + B_1^2 \Phi_{1a}^2} - \frac{m_2 K_2 + n_2 B_2 \Phi_{1a}}{K_2^2 + B_2^2 \Phi_{1a}^2} \right] \\ z_2 = - \frac{1}{U_0' y_c} + \frac{1}{U_0'} \left[\frac{n_1 K_1 - m_1 B_1 \Phi_{1a}}{K_1^2 + B_1^2 \Phi_{1a}^2} - \frac{n_2 K_2 - m_2 B_2 \Phi_{1a}}{K_2^2 + B_2^2 \Phi_{1a}^2} \right] \dots (83)$$

so ist die Darstellung (77) erreicht.

Durch die Gl. (70), (77) und (83) haben wir somit die beiden in Gl. (65) auftretenden Funktionen F^* und $E^*(\alpha, c_r, c_i)$ in Real- und Imaginärteil zerlegt und können diese Gleichung jetzt graphisch lösen. Zu diesem Zwecke tragen wir bei konstantem c_i für mehrere Werte y_c den Imaginärteil der Funktion F^* :

$$\Im(F^*) = \Im[F(\eta_0)] + \eta_0 \frac{c_i}{U_0' y_c} \left(1 + \frac{y_c}{3} \frac{U_0''}{U_0'} \right) \frac{dF_r}{d\eta_0} \dots (84)$$

über ihrem Realteil

$$\Re(F^*) = \Re[F(\eta_0)] - \eta_0 \frac{c_i}{U_0' y_c} \left(1 + \frac{y_c}{3} \frac{U_0''}{U_0'} \right) \frac{dF_i}{d\eta_0} \dots (85)$$

auf und zeichnen in dieses Polardiagramm zu denselben Werten c_i und y_c den Imaginärteil der Funktion $E^*(\alpha, c_r, c_i)$:

$$\Im(E^*) = \Im(E) (1 + c_i z_1) + c_i z_2 \Re(E) \dots (86)$$

über deren Realteil:

$$\Re(E^*) = \Re(E) (1 + c_i z_1) - c_i z_2 \Im(E) \dots (87)$$

ein. Die Schnittpunkte der durch dieselben Wertepaare c_r, c_i einander zugeordneten Funktionen F^* und E^* geben zunächst die zu den entsprechenden α -Werten gehörenden Werte η_0 und dann mit (68) die Kurve $\alpha(Re^*)$ der konstanten Anfachung c_i . Diese Auftragung und Rechnung wird dann für andere Werte c_i wiederholt.

VI. Ergebnisse der Rechnung.

Als unmittelbares Ergebnis der recht umfangreichen Rechnungen sind in Bild 2 bis 21 die Polardiagramme mit den Kurven $E^*(\alpha, c_i, c_r)$ und $F^* = F(\eta_0^*)$ für einige Hartree'sche Geschwindigkeitsverteilungen $U(y)$ in der laminaren Grenzschicht wiedergegeben. Diese Grenzschichtprofile gehören zu der speziellen Klasse von Druckverteilungen:

$$U_a = \text{const. } x^m \dots (88)$$

und sind strenge Lösungen der Prandtl'schen Grenzschichtgleichung, die mit Hilfe eines Bush-Apparates gewonnen wurden [6]. Wir benutzen zur Kennzeichnung dieser Grenzschichtprofile mit Hartree den Parameter

$$\beta = \frac{2m}{1+m} \dots (89)$$

Die Profile mit $m > 0, \beta > 0$ treten bei Druckgefälle, die Profile mit $m < 0, \beta < 0$ bei Druckanstieg auf. Das Profil $\beta = 1$ ist das exakte Hiemenz-Profil im Staupunkt eines zylindrischen Körpers, das Profil $\beta = 0$ ist das exakte Blasius-Profil an der längsangeströmten ebenen Platte, und das Profil $\beta = -0,198$ ist ein Ablösungsprofil (Wandschubspannung Null).

Wir haben die Anfachung für die Hartree-Profile $\beta = 1, 0,6, 0,2, 0, -0,10, -0,198$ untersucht — das letzte jedoch wegen der Unsicherheit bei kleinen Re^* nur bei größeren Werten der Reynoldszahl — und diese dabei wie in einer früheren Mitteilung [3] im Druckgefälle durch binomische Näherungsverteilungen und im Druckanstieg durch sinusförmige Näherungsverteilungen ersetzt mit Hilfe der Formeln:

$\beta = 1$	$U = 1 - \left(1 - \frac{y}{a}\right)^4$	$\frac{y}{a} = 0,3082\zeta$	$\zeta_a = 3,245$
$\beta = 0,6$	$U = 1 - \left(1 - \frac{y}{a}\right)^3$	$\frac{y}{a} = 0,332\zeta$	$\zeta_a = 3,01$
$\beta = 0,2$	$U = 1 - \left(1 - \frac{y}{a}\right)^2$	$\frac{y}{a} = 0,343\zeta$	$\zeta_a = 2,916$
$\beta = 0$	$U = \sin \frac{\pi}{2} \frac{y}{a}$	$\frac{y}{a} = 0,299\zeta$	$\zeta_a = 3,345$
$\beta = -0,10$	$U = 0,41 + 0,59 \sin \frac{\pi}{2 \cdot 0,6715} \left(\frac{y}{a} - 0,3285\right)$	$\frac{y}{a} = 0,274\zeta$	$\zeta_a = 3,65$
$\beta = -0,198$	$U = 0,5 + 0,5 \sin \pi \left(\frac{y}{a} - 0,5\right)$	$\frac{y}{a} = 0,2135\zeta$	$\zeta_a = 4,68$

wo

$$\zeta = y \sqrt{\frac{1}{2-\beta} \cdot \frac{U_a}{v x}} \dots (91)$$

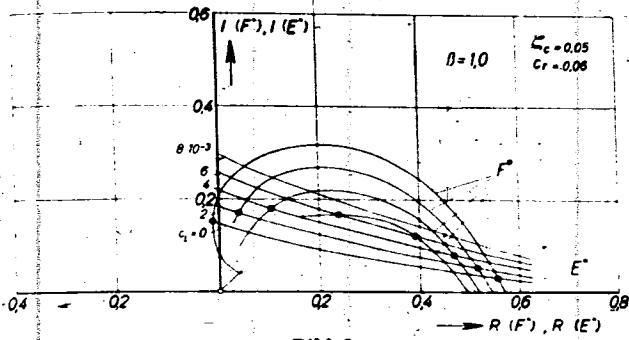


Bild 2.

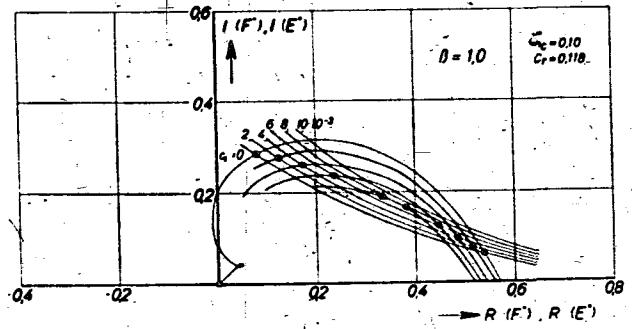


Bild 3.

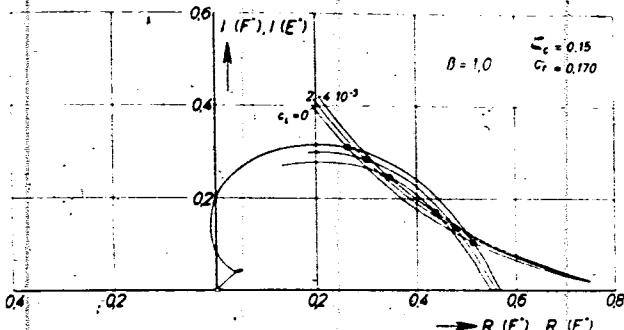


Bild 4.

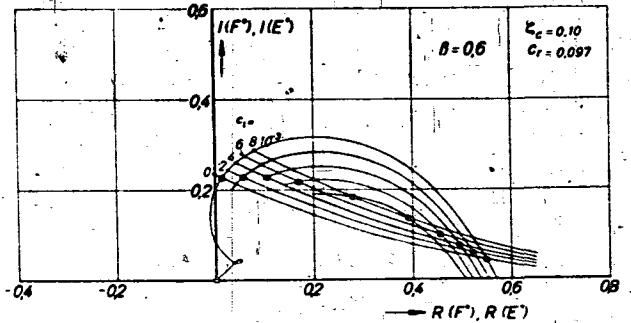


Bild 5.

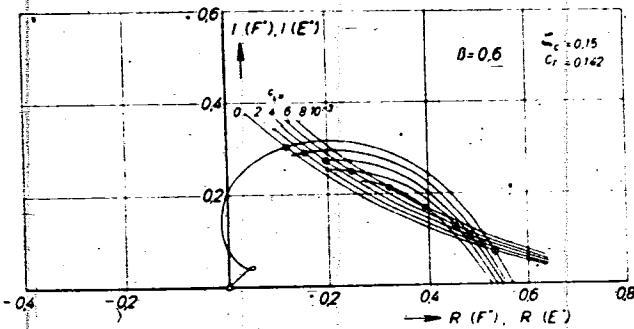


Bild 6.

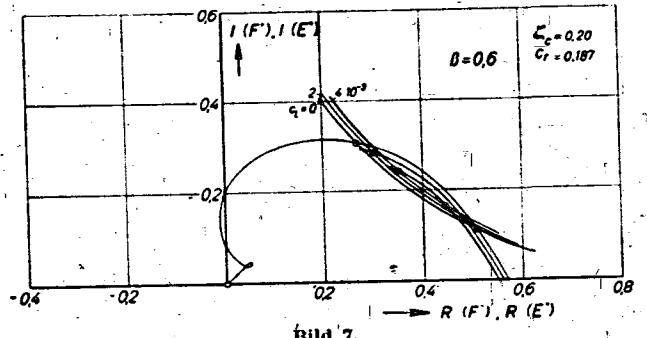


Bild 7.

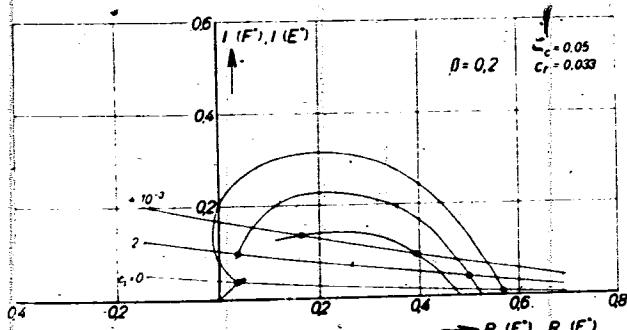


Bild 8.

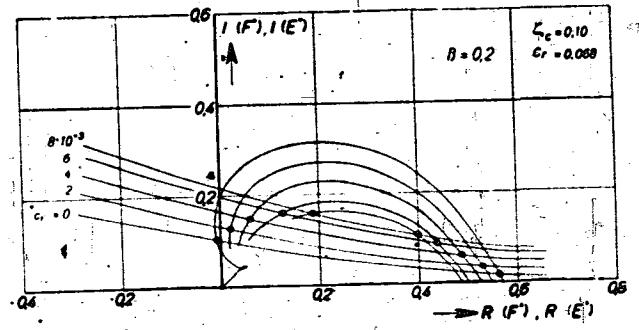


Bild 9.

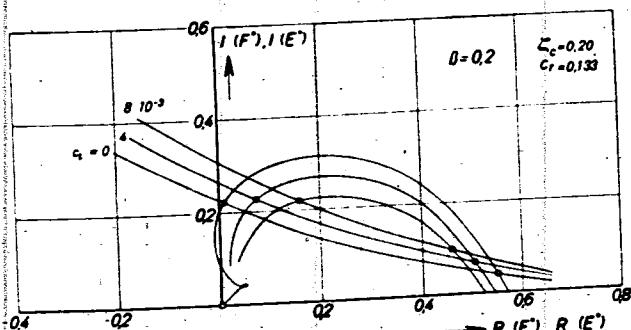


Bild 10.

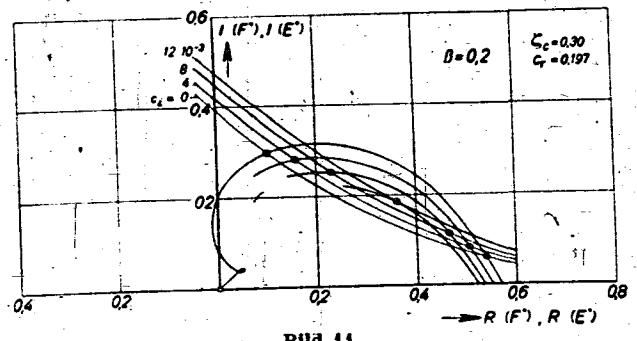


Bild 11.

Bild 2 bis 11. Polardiagramme zur Ermittlung der Kurven konstanter Anfachung.

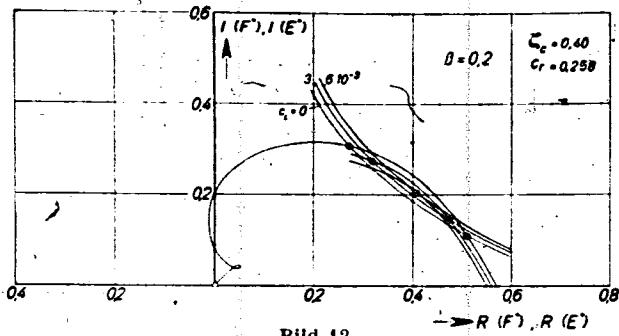


Bild 12.

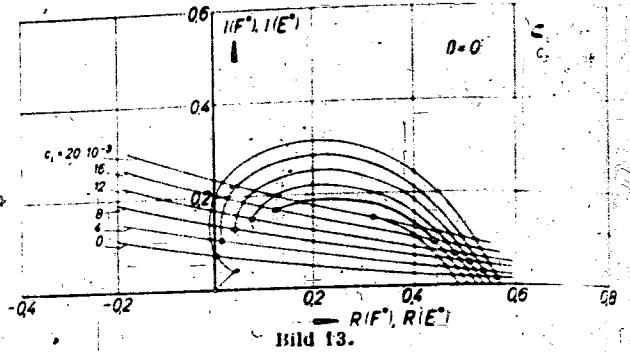


Bild 13.

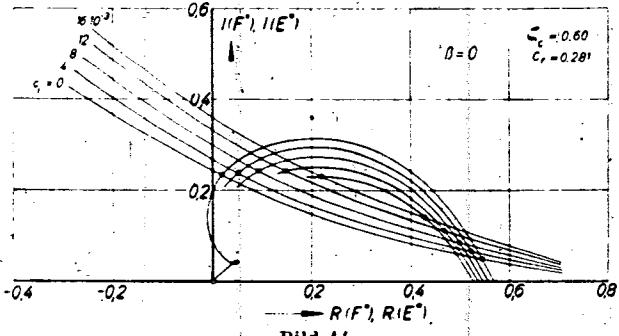


Bild 14.

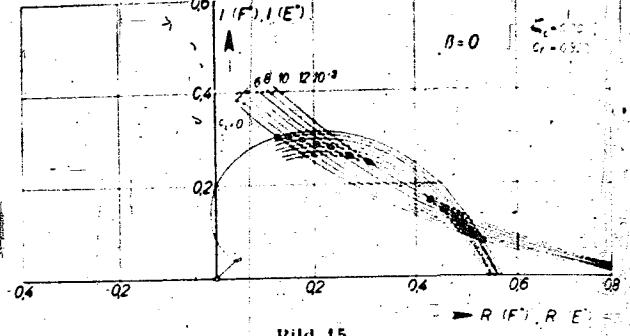


Bild 15.

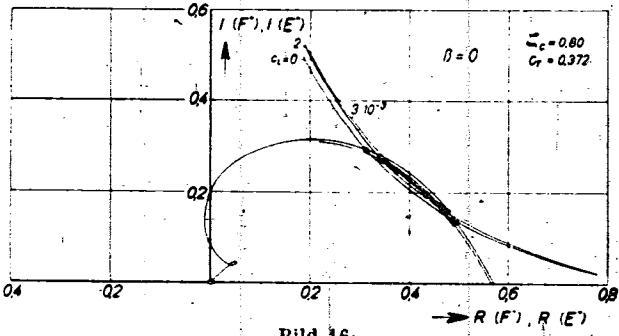


Bild 16.

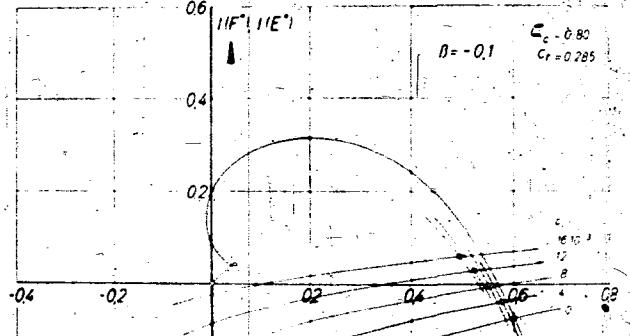


Bild 17.

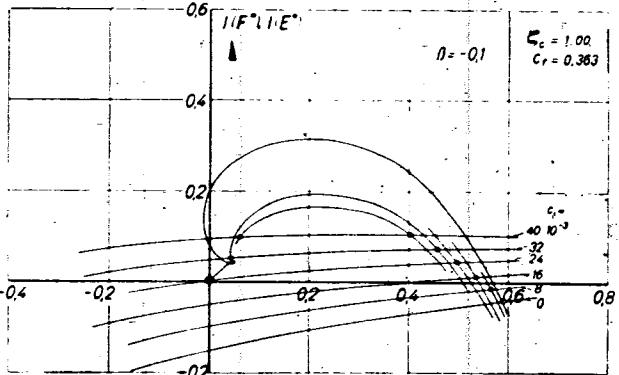


Bild 18.

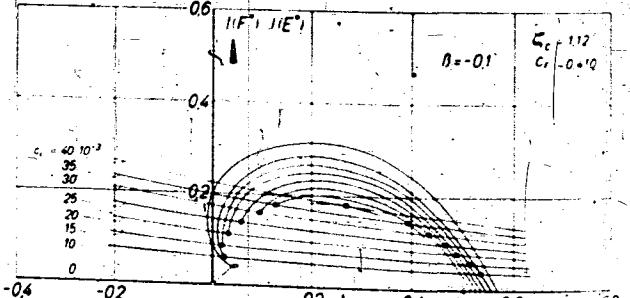


Bild 19.

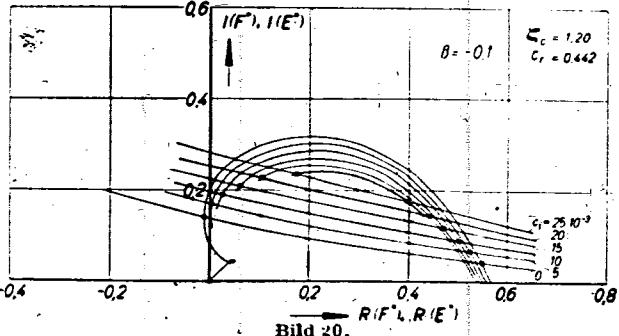


Bild 20.

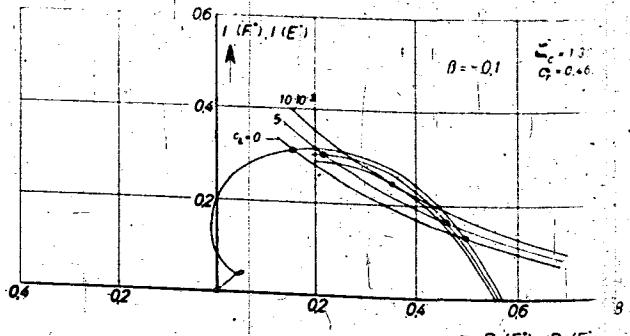


Bild 21.

Bild 12 bis 21. Polardiagramme zur Ermittlung der Kurven konstanter Anfachung.

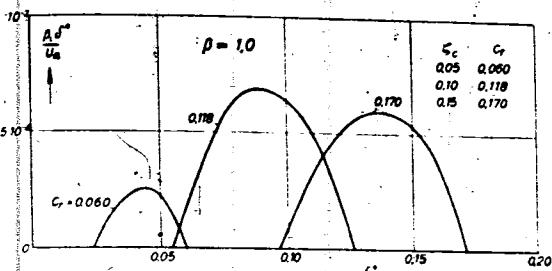


Bild 22.

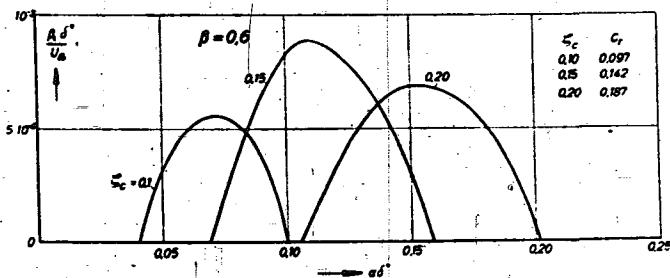


Bild 23.

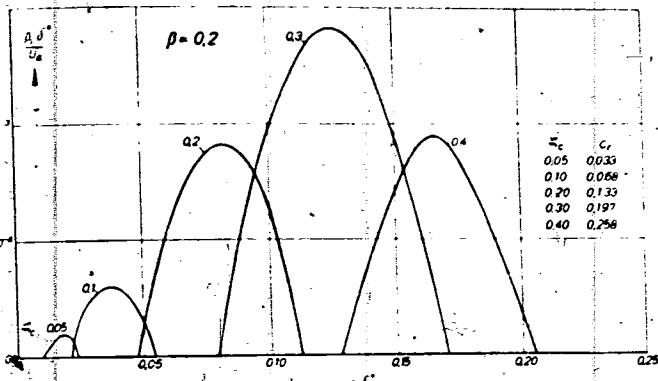


Bild 24.

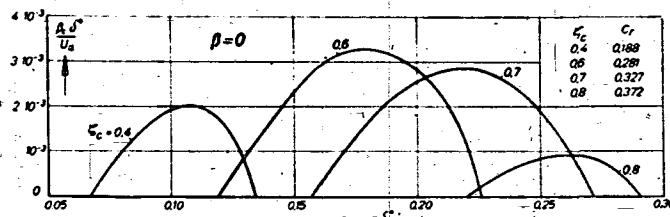


Bild 25.

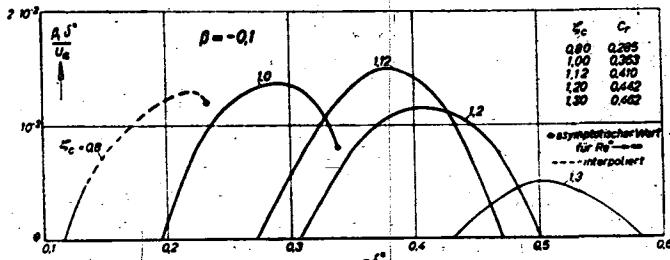


Bild 26.

Bild 22 bis 26. Die Anfängung $\frac{\beta_i \delta^*}{U_a}$ als Funktion der reziproken Störungswellenlänge $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ für konstante kritische Geschwindigkeit c_r .

der von Hartree verwendete dimensionslose Wandabstand ist und die Koordinate a des Anschlußpunktes an die Potentialgeschwindigkeit U_a mit der Verdrängungsdicke zusammenhängt durch die Beziehung:

$$\frac{a}{\delta^*} = \frac{\zeta_c}{k\lambda} (2 - \beta) \quad (92)$$

die Größe $k\lambda$ (β) findet man in Bild 2 der Mitteilung [3] graphisch aufgetragen.

Den in Bild 2 bis 21 angegebenen Wandabstand ζ_c der kritischen Schicht erhält man, wenn man in (91) y_c statt y setzt.

Zu der graphischen Lösung des Eigenwertproblems in Bild 2 bis 21 ist grundsätzlich folgendes zu bemerken:

Da wir c_i so klein vorausgesetzt haben, daß wir nur die in c_i linearen Änderungen der Partikularlösungen φ_i^* gegenüber den Lösungen φ_i für $c_i = 0$ zu berücksichtigen brauchen, erscheinen die Kurven E^* und F^* bei gleichem c_i -Intervall als »äquidistante« Kurvenscharen im Sinne der Gl. (77) und (70). In Wirklichkeit wird diese »Äquidistanz« bei höheren Werten von c_i verlorengehen. Der Rechenaufwand würde indessen unerträglich steigen, wollte man etwa auch nur die in c_i quadratischen Glieder berücksichtigen. In diesem Sinn sind auch die in Bild 22 bis 26 dargestellten Kurven $\frac{\beta_i \delta^*}{U_a} = \frac{c_i \alpha \delta^*}{U_a}$ über $\alpha \delta^*$ — wir verwenden von nun ab wieder dimensionsbehaftete Größen —, die aus der Auswertung der Polardiagramme hervorgehen, als Näherungen aufzufassen [in diesem und den folgenden Bildern ist der nach Gl. (1) physikalisch wichtigere Wert β_i , der das logarithmische Inkrement der angefachten Störungsmplitude kennzeichnet, statt c_i aufgetragen]. Streng richtig ist auch hier wie in der bereits erwähnten Arbeit von H. Schlichting [4] nur die Ableitung $\frac{d}{d(\alpha \delta^*)} \left(\frac{\beta_i \delta^*}{U_a} \right)$ an der Stelle $\frac{\beta_i \delta^*}{U_a} = 0$, d. h. die Steigung der $\frac{\beta_i \delta^*}{U_a}$ -Kurve an der $\alpha \delta^*$ -Achse. H. Schlichting interpolierte zwischen

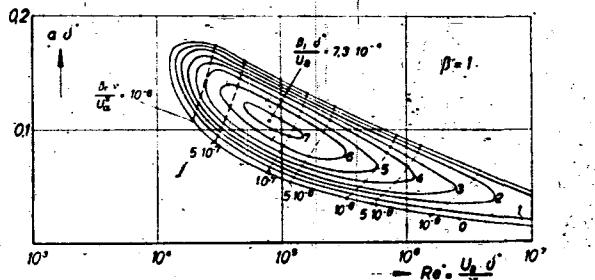


Bild 27.

den Fußpunkten, an denen er die Steigung unmittelbar, wenn auch unter weit größerem Rechenaufwand bestimmt hatte, mit einer Kurve dritten Grades $\frac{\beta_i \delta^*}{U_a} = a_0 + a_1 (\alpha \delta^*) + a_2 (\alpha \delta^*)^2 + a_3 (\alpha \delta^*)^3$, wo die vier Konstanten durch die Koordinaten der Fußpunkte und die Werte der Kurvensteigung in ihnen festgelegt sind. Dadurch erhielt Schlichting für das Blasius-Profil höhere Werte $\frac{\beta_i \delta^*}{U_a}$, als sie in unserem Bild 25 auftreten, wogegen die Werte der Steigung übereinstimmen. In Wirklichkeit werden die Kurven $\frac{\beta_i \delta^*}{U_a} (\alpha \delta^*)$ im mittleren Teil des jeweils umfaßten ($\alpha \delta^*$)-Bereichs etwas höher oder niedriger verlaufen, als es die Bilder 22 bis 26 angeben. Auf jeden Fall dürfen sie aber als eine erste Näherung im üblichen Sinne aufgefaßt werden.

Diese Kurven $\frac{\beta_i \delta^*}{U_a}$ über $\alpha \delta^*$ stellen Schnitte durch das von der Indifferenzkurve als Fußkurve umschlossene »Anfängungsgebirge« längs der Linien $y_c = \text{konst.}$ oder $c_r = \text{konst.}$ dar. Durch Interpolation erhält man aus ihnen die in Bild 27 bis 32 dargestellten Karten der Anfängung, in der die Linien gleicher Anfängung $\frac{\beta_i \delta^*}{U_a} = \text{konst.}$ als

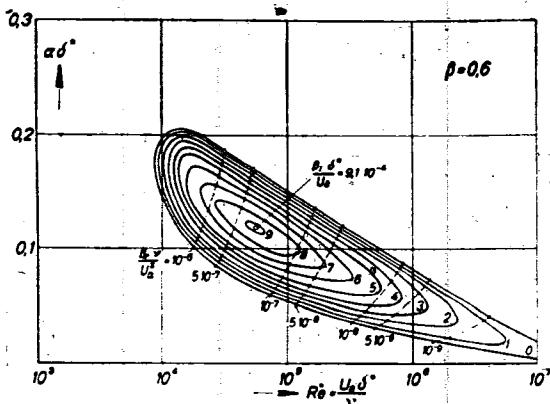


Bild 28.

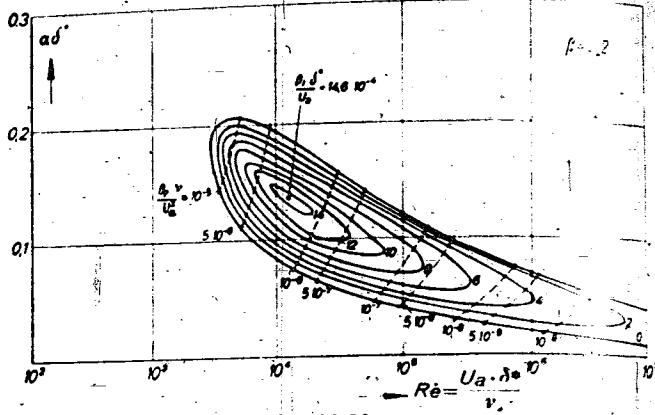


Bild 29.

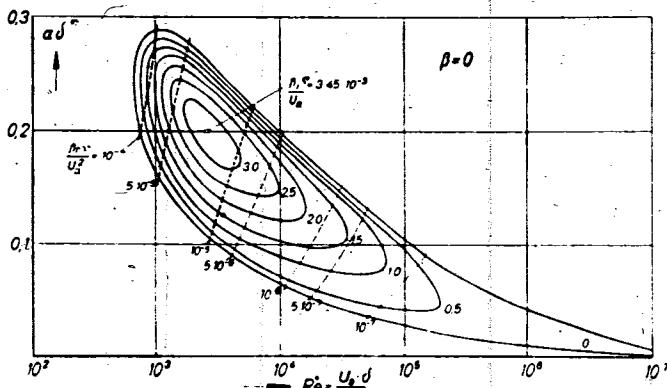


Bild 30.

Bild 27 bis 32. Die Kurven konstanter Anfachung in den Instabilitätsbereichen einiger laminarer Grenzschichtprofile.

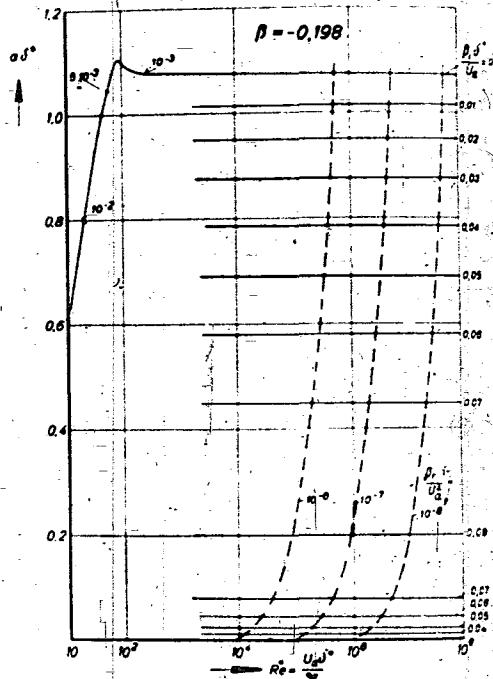


Bild 32.

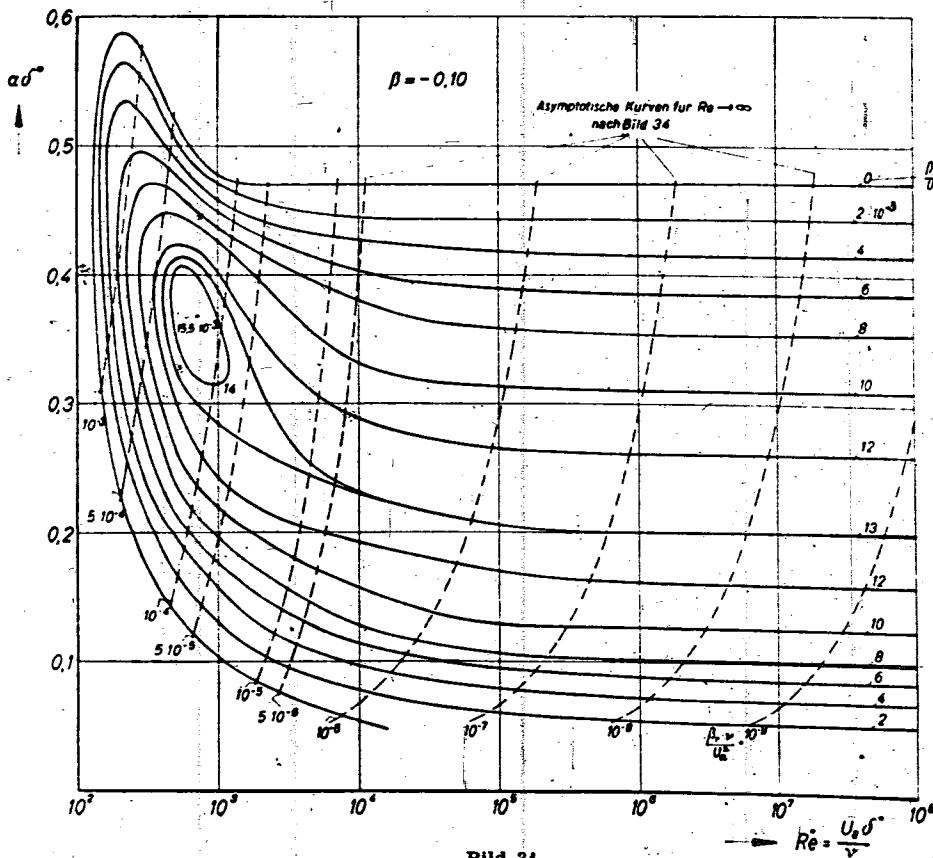


Bild 31.

•Höhenlinien des •Anfachungsgebirges gedeutet werden können. Statt der Schnittlinien $c_r = \text{konst.}$ sind in Bild 27 bis 32 die Linien $\frac{\beta r \cdot v}{U_a^2} = c_r \alpha \delta^*$ = konst. eingetragen, auf deren Bedeutung wir in Kapitel VII zurückkommen werden. Bei der ersten Betrachtung dieser Anfachungskarten fällt bereits ein grundlegender Unterschied in der Form der Anfachungsgebirge auf, je nachdem ob die zugeordneten Geschwindigkeitsprofile der laminaren Reibungsschicht im Druckgefälle ($\beta > 0$) oder im Druckanstieg ($\beta < 0$) liegen.

Im Druckgefälle hat das •Anfachungsgebirge• die Form eines bei kleiner Reynoldszahl Re^* steil ansteigenden Berges, der einen ausgeprägten Gipfelpunkt hat, sich nach größeren Re^* langsam wieder verflacht und für $Re^* \rightarrow \infty$ an Breite und Höhe zu Null schrumpft. Die absolute Höhe des Gipfelpunktes, d. h. die maximale Anfachung wächst mit kleiner werdendem β .

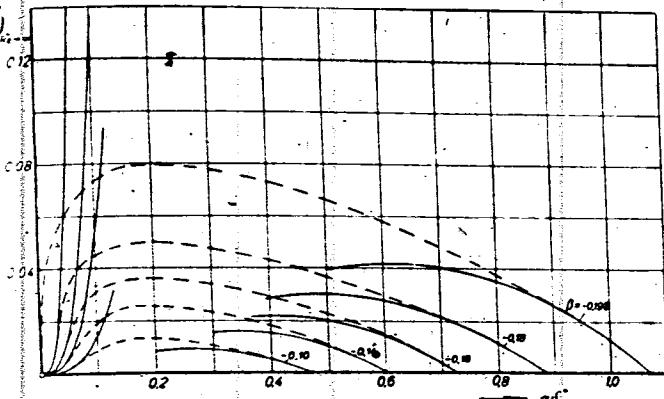


Bild 33. Die Anfachung $\frac{\beta_i \cdot \delta^*}{U_a}$ für Grenzschichtprofile im Druckanstieg bei $Re^* \rightarrow \infty$.

Im Druckanstieg dagegen läuft das Anfachungsgebirge hinter dem Gipfel mit wachsendem Re^* in einen »Gebirgsrücken« mit konstanter Breite und konstantem Höhenprofil aus.

Die Eigenschaften dieses »Rückens« sind von W. Tollmien [5] eingehend untersucht worden. Da wir die Tollmiansche Theorie benutzt haben, müssen wir ihre Ergebnisse hier kurz darstellen.

Auf der Suche nach einem allgemeinen Instabilitätskriterium stellte W. Tollmien fest, daß die reibungslose Störungsgleichung (5) für die laminaren Geschwindigkeitsprofile im Druckanstieg, die im Gegensatz zu denen des Druckgefälles einen Wendepunkt besitzen, für $Re^* \rightarrow \infty$ neben der für alle Profile vorhandenen neutralen Lösung mit den Parametern:

$$\alpha = 0; \quad c_r = 0; \quad \varphi_{nI} = U \quad \dots \quad (93)$$

noch die neutrale Lösung mit den Parametern:

$$\alpha = \alpha_s; \quad c_r = U_s; \quad \varphi_{nII} = \varphi_s \quad \dots \quad (94)$$

hat; der Index s bezeichnet dabei den Wendepunkt.

Den Eigenwert α_s und die Eigenfunktion φ_s hat W. Tollmien für die auch von uns benutzte sinusförmige Geschwindigkeitsverteilung (30) aus der reibungslosen Störungsgleichung (5) berechnet zu:

$$(\alpha a)_s = -p \cotg p; \quad \frac{p}{\sin p} = \frac{\pi}{2(1 - \frac{s}{a})} \quad \dots \quad (95)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s &= \frac{\sin p \frac{y}{a}}{\sin \frac{p s}{a}} \text{ für } 0 \leq y \leq a \\ \varphi_s &= \frac{\sin p}{\sin \frac{p s}{a}} e^{\alpha a (i - \frac{y}{a})} \text{ für } y \geq a \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (96)$$

Für diese zweite neutrale Eigenlösung ist also die Phasengeschwindigkeit c_r gleich der Geschwindigkeit der Grundströmung im Wendepunkt U_s .

Für die Anfachung β_i und die Kreisfrequenz β_r in der Nähe der neutralen Frequenzen $\alpha \delta^* = 0$ und $\alpha \delta^* = (\alpha \delta^*)_s$ hat W. Tollmien die folgenden Formeln abgeleitet:

$$\alpha = 0: \quad \frac{\beta_i \cdot \delta^*}{U_a} = \pi \frac{U_w''}{U_w'''} \frac{U_a^2}{\delta^{*2}} (\alpha \delta^*)^2, \quad \frac{\beta_r \cdot \nu}{U_a^2} Re^* = \frac{U_a}{U_w' \delta^*} (\alpha \delta^*)^2, \quad \dots \quad (97)$$

wo der Index w bedeutet, daß die Werte an der Wand $y = 0$ zu nehmen sind, und

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha_s: \quad \frac{\beta_i \cdot \delta^*}{U_a} &= B [(\alpha \delta^*)^3 - (\alpha_s \delta^*)^2 \alpha \delta^*], \quad \frac{\beta_r \cdot \nu}{U_a^2} Re^* = \\ &= \frac{U_s}{U_a} \alpha \delta^* - \frac{B E}{\pi} \frac{U_s'^2}{U_s'''} [(\alpha \delta^*)^3 - (\alpha_s \delta^*)^2 \alpha \delta^*] \quad (98) \end{aligned}$$

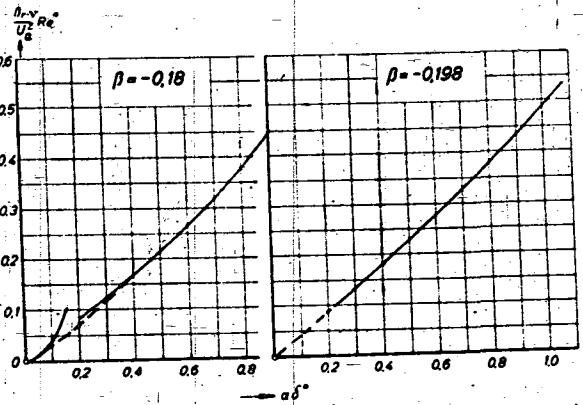
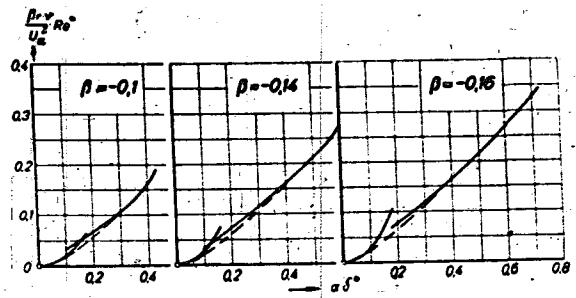


Bild 34. Die zeitliche Kreisfrequenz $\frac{\beta_r \cdot \nu}{U_a^2} Re^*$ für Grenzschichtprofile im Druckanstieg bei $Re^* \rightarrow \infty$.

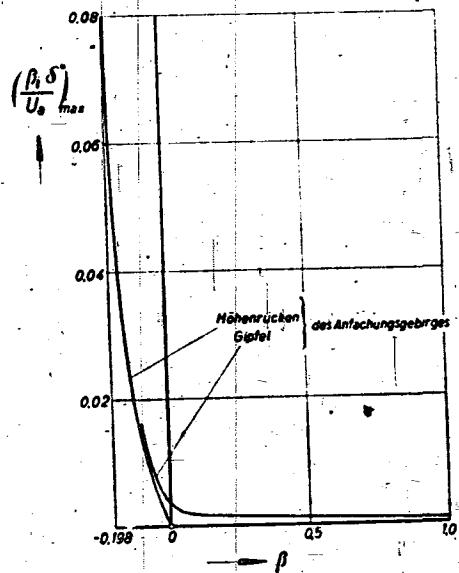


Bild 35. Die maximale Anfachung $(\frac{\beta_i \cdot \delta^*}{U_a})_{max}$ als Funktion des Formparameters β der laminaren Grenzschichtprofile.

mit

$$B = \pi \frac{U_s'''}{U_s''^2} \frac{\int_0^{\infty} \varphi_s dy}{U_a \cdot \delta^{*2} \left[E^2 + \frac{\pi^2 U_s'''^2}{U_s''^4} \right]} \quad \dots \quad (99)$$

wo

$$E = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{s-\epsilon} \frac{U''}{(U-U_s)^2} \varphi_s^2 dy + \int_{s+\epsilon}^{\infty} \frac{U''}{(U-U_s)^2} \varphi_s^2 dy \right] \quad (100)$$

gesetzt ist.

Wir haben die »Höhentrückenprofile« der Anfachung und die Kreisfrequenz nach den Formeln (97) und (98) für die Hartreeschen Geschwindigkeitsverteilungen $\beta = -0,10, -0,14, -0,16, -0,18, -0,198$ berechnet, wobei die Werte

für die Ableitungen der Geschwindigkeit nicht aus der sinusförmigen Näherungsverteilung, sondern aus der exakten Geschwindigkeitsverteilung genommen wurden. In Bild 33, 34 sind diese »Höhenrückenprofile« der Anfachung und die Kreisfrequenz aufgetragen, dabei sind die den eben genannten Formeln entsprechenden Kurven ausgezogen und die mit einiger Willkür interpolierten Übergänge zwischen beiden Kurvenbögen gestrichelt gezeichnet. Im Bereich sehr großer Re^* wurden die Linien konstanter Anfachung und konstanter Kreisfrequenz aus den Bildern 33, 34 in die Bilder 31 und 32 übertragen.

In Bild 35 ist der Verlauf der maximalen Anfachung $\left(\frac{\beta_r \cdot \delta^*}{U_a}\right)_{\max}$ über dem Formparameter β dargestellt, und zwar getrennt für die Anfachung bei endlichem Re^* (Gipfel des Anfachungsgebirges) und bei $Re^* \rightarrow \infty$ (Rücken des Anfachungsgebirges). Für $\beta < -0,10$ scheinen sich diese beiden Werte immer mehr zu nähern, so daß mit kleiner werdendem β der Gipfel sich immer weniger ausprägt und die Anfachung von kleinen Re^* her monoton auf die Werte des »Höhenrückenprofils« wächst.

Aus diesem und den vorangehenden Bildern ist deutlich erkennbar, daß die maximale Anfachung und dementsprechend die Anfachung überhaupt im Druckanstieg auch bei kleineren Re^* wesentlich größer ist als im Druckgefälle.

Nachdem wir so die Größe der Anfachung im ganzen Instabilitätsbereich aller in der laminaren Reibungsschicht auftretenden Geschwindigkeitsverteilungen abgeschätzt haben, wollen wir die physikalischen Schlußfolgerungen besprechen, die sich für die Lage des Umschlagpunktes aus unseren Rechnungen ergeben.

VII. Besprechung der Ergebnisse.

Es sei die Druckverteilung $\dot{U}_a(x)$ über der Bogenlänge des umströmten Querschnitts und die Störung der zeitlichen Kreisfrequenz β_r vorgegeben. Dann wandert diese der Grenzschichtströmung überlagerte Störung auf einer Kurve $\frac{\beta_r \cdot \nu}{U_a^2} = f(x)$ stromab. Zu jedem Punkt x des umströmten Profils gehört nun, wie wir eingangs erwähnten, ein fester Wert des Pohlhausen-Parameters λ , der die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an diesem Punkt näherungsweise kennzeichnet. Nach Bild 34 in [3] kann man diesem Parameter λ den Hartree-Parameter β zuordnen und damit eine der in der vorliegenden Mitteilung berechneten Anfachungskarten (Bild 27 bis 32). Man hat, um die Anfachung der Störung β_r in einem bestimmten Profilpunkt x zu erhalten, also auf der entsprechenden Anfachungskarte in demjenigen Kartenpunkt, der durch das Wertepaar der Reynoldszahl $Re^* = \frac{U_a \cdot \delta^*}{\nu} = g(x)$ und der dimensionslosen Kreisfrequenz $\frac{\beta_r \cdot \nu}{U_a^2} = f(x)$ bestimmt wird, die Anfachung $\frac{\beta_r \cdot \delta^*}{U_a}$ (Nummer der »Höhenlinie«) abzulesen.

Bei der Erörterung der Ergebnisse unserer vorstehenden Anfachungsrechnungen wollen wir mit dem Grenzfall einer kleinen Reynoldszahl $Re = \frac{U_\infty \cdot t}{\nu}$ beginnen. Nach den Ausführungen in Kapitel I (vgl. Bild 1) liegt bei kleinen Reynoldszahlen Re die Stabilitätsgrenze erst in dem Punkt, in dem sich die laminare Grenzschicht bereits ablöst. Ist die Störung so langwellig, daß die Kurve $\frac{\beta_r \cdot \nu}{U_a^2} = f(x)$ den Instabilitätsbereich für das Ablösungsprofil ($\beta = -0,198$) schneidet, so wird sie beim Eintritt in diese Zone sehr heftig angefacht und führt in Kürze zum Umschlag in die turbulente Strömungsform. Der Umschlagpunkt liegt dann praktisch im Ablösungspunkt, den wir als seine hintere Schranke bezeichnet hatten. Ist die Störung hingegen sehr kurzweilig,

so daß die Kurve $\frac{\beta_r \cdot \nu}{U_a^2} = f(x)$ den Instabilitätsbereich nicht schneidet, so löst sich die Laminarschicht ab, ohne daß es zum Umschlag kommt.

Wächst die Reynoldszahl $Re = \frac{U_\infty \cdot t}{\nu}$, so wandert die Stabilitätsgrenze nach vorn in Richtung auf das Druckminimum zu (Bild 1), die Störung tritt schon weiter stromauf bei einem größeren Wert des Parameters β oder des Pohlhausen-Parameters λ in einen Instabilitätsbereich ein, wird dort anfänglich in einem Maße angefacht, das zwar so gering ist, je weiter die Stabilitätsgrenze sich nach vorn verschiebt, das aber dadurch erhöht wird, daß die Störung stromab (mit abnehmendem β oder λ) in Instabilitätszonen mit rasch wachsender Anfachung gelangt. Der Umschlagpunkt rückt entsprechend der früher einsetzenden immer noch starken Anfachung nach vorn.

Vergrößern wir die Reynoldszahl $Re = \frac{U_\infty \cdot t}{\nu}$ schließlich noch mehr, so daß die Stabilitätsgrenze vor das Druckminimum wandert, so setzt auch die Anfachung wiederum entsprechend früher ein, sie ist jedoch — und das muß zunächst als das wesentlichste Ergebnis unserer Rechnungen angesehen werden — im Gebiet des Druckgefälles so gering, daß sie im allgemeinen erst nach Überschreiten des Druckminimums Beträge erreicht, die den in den eben behandelten Fällen erzeugten Anfachungen gleichkommen.

Auf diese Weise läßt sich in zwangloser Weise die durch viele Experimente erwiesene Tatsache theoretisch erklären, daß der Umschlagpunkt auch bei sehr hohen Reynoldszahlen fast nie vor das Druckminimum rückt. Nur bei sehr langen Beschleunigungsstrecken und sehr langwelligen Störungen, bei denen die Störung nicht zu bald wieder aus dem Instabilitätsbereich auswandert, wird die begrenzte Anfachung des Druckgefälles ausreichen, um den Umschlag noch im Gebiet des Druckgefälles herbeizuführen. Diese Fälle sind jedoch in der Technik selten.

Eine ins einzelne gehende Berechnung des Maßes der Anfachung, das den Umschlag auslöst, hat nur Sinn im Zusammenhang mit entsprechenden Experimenten. Sie soll darum zurückgestellt werden, bis diese Experimente, die sich in Vorbereitung befinden, durchgeführt sind. Als wesentlichste Versuchsbedingung dürfte dabei die Form der Druckverteilung im Druckanstieggebiet anzusehen sein, da die Beiträge zur Störungsanfachung im Druckgefälle nach unseren theoretischen Überlegungen gering sind. Das Ziel dieser experimentellen Untersuchung und der gleichzeitig auf Grund der vorliegenden Arbeit durchzuführenden Anfachungsrechnung wird sein, einen Zusammenhang zwischen der Druckverteilungsform und dem Maß der Anfachung zu finden, das im gemessenen Umschlagpunkt erreicht wird, so daß man umgekehrt den Umschlagpunkt zu einer vorgegebenen Druckverteilung aus dieser Beziehung berechnen kann.

VIII. Zusammenfassung.

Um zur Lösung des wichtigen Problems der Berechnung des Umschlagpunktes einer ebenen Laminarströmung beizusteuern, war nach der Methode der kleinen Schwingungen (Verfahren von Tollmien) in einer früheren Arbeit für die bei Druckgefälle und Druckanstieg in der Grenzschicht auftretenden Hartreeschen Geschwindigkeitsverteilungen zunächst nur die kritische Reynoldssche Zahl ermittelt worden, nach deren Überschreiten die der Laminarströmung überlagerten Störungen angefacht werden. Im Anschluß an jene Rechnungen wurde nunmehr die Anfachung selbst im ganzen Instabilitätsbereich der Störungen berechnet. Dabei ergibt sich die Anfachung in dem schmalen Instabilitätsbereich des Druckgefälles sehr viel kleiner als die Anfachung in dem ausgedehnteren Instabilitätsbereich des Druckanstiegs, so daß die bekannte Tatsache, daß der Umschlagpunkt auch bei größeren Reynoldszahlen im allgemeinen nicht vor das Druckminimum rückt, von der Theorie her ihre Erklärung finden kann.

Zahlentafel 1. Reihenoeffizienten der Lösungen φ_1^* , φ_2^* für die Grundströmung $U = 1 - (a - y)^n$; $n = 1, 2, 3, 4$.

n = 1

$$\bar{y} = \frac{y - y_c}{y_c}; \bar{y}^* = \frac{y - y_c^*}{y_c}; \bar{\alpha} = \alpha y_c.$$

$$\frac{1}{\alpha} \text{Sin}(\bar{\alpha} \bar{y}^*) \approx \frac{1}{\alpha} \text{Sin} \left[\bar{\alpha} \left(\bar{y} - \frac{i c_i}{u_0' y_c} \right) \right] \approx \varphi_1 - \frac{i c_i}{u_0'} \text{Cos}(\bar{\alpha} \bar{y}) = \varphi_1 - \frac{i c_i}{u_0'} \varphi_2;$$

$$\varphi_2^* = \text{Cos}(\bar{\alpha} \bar{y}^*) \approx \text{Cos} \left[\bar{\alpha} \left(\bar{y} - \frac{i c_i}{u_0' y_c} \right) \right] \approx \varphi_2 - \frac{i c_i \alpha}{u_0'} \text{Sin}(\bar{\alpha} \bar{y}) = \varphi_2 - \frac{i c_i \alpha^2}{u_0'} \varphi_1;$$

n = 2

$$\beta_0^* = 0; \beta_1^* = 1 - i f_1; \beta_2^* = -\frac{1}{2} (1 - i f_1) - \alpha_1^2; \beta_r^* = \frac{1}{2^{r-1}} (1 - i v f_1) \text{ für } r > 3.$$

$$e_0^* = 1; e_1^* = -\frac{1}{2} (1 - i f_1);$$

$$e_2^* = +\frac{\alpha_1^2}{6}; e_3^* = -\frac{\alpha_1^2}{18} (1 - i f_1);$$

$$e_4^* = -\frac{\alpha_1^2}{720} (1 - 2 i f_1) + \frac{\alpha_1^4}{120}; e_5^* = -\frac{\alpha_1^2}{2400} (1 - 3 i f_1) - \frac{23 \alpha_1^4}{10800} (1 - i f_1);$$

$$e_6^* = -\frac{\alpha_1^2}{7200} (1 - 4 i f_1) - \frac{37 \alpha_1^4}{453600} (1 - 2 i f_1) + \frac{\alpha_1^6}{5040}; e_7^* = -\frac{\alpha_1^2}{20160} (1 - 5 i f_1) - \frac{59 \alpha_1^4}{6350400} (1 - 3 i f_1) - \frac{11 \alpha_1^6}{264600} (1 - i f_1); \dots$$

$$b_2^* = -(1 - 2 i f_1) + \frac{\alpha_1^2}{2}; b_3^* = \frac{1}{8} (1 - 3 i f_1) + \frac{\alpha_1^2}{18} (1 - i f_1);$$

$$b_4^* = \frac{1}{48} (1 - 4 i f_1) - \frac{61 \alpha_1^2}{432} (1 - 2 i f_1) + \frac{\alpha_1^4}{24}; b_5^* = \frac{1}{192} (1 - 5 i f_1) + \frac{109 \alpha_1^2}{21600} (1 - 3 i f_1) + \frac{\alpha_1^4}{225} (1 - i f_1);$$

$$b_6^* = \frac{1}{640} (1 - 6 i f_1) + \frac{13 \alpha_1^2}{72000} (1 - 4 i f_1) - \frac{2051 \alpha_1^4}{324000} (1 - 2 i f_1) + \frac{\alpha_1^6}{720};$$

$$b_7^* = \frac{1}{1920} (1 - 7 i f_1) - \frac{79 \alpha_1^2}{1512000} (1 - 5 i f_1) - \frac{439 \alpha_1^4}{7938000} (1 - 3 i f_1) + \frac{71 \alpha_1^6}{529200} (1 - i f_1); \dots$$

$$g_0 = 1; g_1 = -1;$$

$$g_2 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_1^2}{2}; g_3 = -\frac{2}{9} \alpha_1^2;$$

$$g_4 = \frac{7}{144} \alpha_1^2 + \frac{1}{24} \alpha_1^4; g_5 = \frac{1}{3600} \alpha_1^2 - \frac{23 \alpha_1^4}{1800};$$

$$g_6 = \frac{1}{3600} \alpha_1^2 + \frac{101}{64800} \alpha_1^4 + \frac{\alpha_1^6}{720}; g_7 = \frac{1}{6300} \alpha_1^2 + \frac{141}{1587600} \alpha_1^4 - \frac{11 \alpha_1^6}{33075}; \dots$$

$$h_0 = 0; h_1 = -2 + \alpha_1^2;$$

$$h_2 = \frac{19}{8} + \frac{\alpha_1^2}{6}; h_3 = -\frac{7}{24} - \frac{67}{108} \alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^4}{6};$$

$$h_4 = -\frac{11}{192} + \frac{443}{1440} \alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^4}{45}; h_5 = -\frac{1}{60} - \frac{5411}{360000} \alpha_1^2 - \frac{2291}{54000} \alpha_1^4 + \frac{\alpha_1^6}{120};$$

$$h_6 = -\frac{11}{1920} - \frac{47}{43200} \alpha_1^2 + \frac{6959}{567000} \alpha_1^4 + \frac{71}{75600} \alpha_1^6; \dots$$

n = 3

$$\beta_0^* = 0; \beta_1^* = 2 (1 - i f_1);$$

$$\beta_2^* = -\alpha_1^2; \beta_{3+6r}^* = (-1)^{r+1} \frac{2}{3^{1+3r}} [1 - (3+6r) i f_1];$$

$$\beta_{4+6r}^* = (-1)^{r+1} \frac{2}{3^{1+3r}} [1 - (4+6r) i f_1]; \beta_{5+6r}^* = (-1)^{r+1} \frac{4}{3^{2+3r}} [1 - (5+6r) i f_1];$$

$$\beta_{6+6r}^* = (-1)^{r+1} \frac{2}{3^{2+3r}} [1 - (6+6r) i f_1]; \beta_{7+6r}^* = (-1)^{r+1} \frac{2}{3^{3+3r}} [1 - (7+6r) i f_1];$$

$$\beta_{8+6r}^* = 0; \nu = 0, 1, 2, \dots$$

$$e_0^* = 1; e_1^* = -(1 - i f_1);$$

$$e_2^* = \frac{1}{3} (1 - 2 i f_1) + \frac{\alpha_1^2}{6}; e_3^* = -\frac{\alpha_1^2}{9} (1 - i f_1);$$

$$e_4^* = \frac{\alpha_1^2}{36} (1 - 2 i f_1) + \frac{\alpha_1^4}{120}; e_5^* = \frac{\alpha_1^2}{540} (1 - 3 i f_1) - \frac{23 \alpha_1^4}{5400} (1 - i f_1);$$

$$e_6^* = \frac{\alpha_1^2}{1260} (1 - 4 i f_1) + \frac{7 \alpha_1^4}{8100} (1 - 2 i f_1) + \frac{\alpha_1^6}{5040};$$

$$e_7^* = \frac{2 \alpha_1^2}{6615} (1 - 5 i f_1) + \frac{23 \alpha_1^4}{226800} (1 - 3 i f_1) - \frac{11 \alpha_1^6}{132300} (1 - i f_1);$$

$$e_8^* = \frac{\alpha_1^2}{10584} (1 - 6 i f_1) + \frac{5 \alpha_1^4}{108864} (1 - 4 i f_1) + \frac{409 \alpha_1^6}{28576800} (1 - 2 i f_1) + \frac{\alpha_1^8}{362880}; \dots$$

$$\begin{aligned}
b_2^* &= -3(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^2}{2}; & b_3^* &= \frac{5}{3}(1-3if_1) + \frac{\alpha_1^2}{9}(1-if_1); \\
b_4^* &= -\frac{2}{9}(1-4if_1) - \frac{43}{108}\alpha_1^2(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^4}{24}; & b_5^* &= -\frac{1}{18}(1-5if_1) + \frac{89}{540}\alpha_1^2(1-3if_1) + \frac{2}{225}\alpha_1^4(1-if_1); \\
b_6^* &= -\frac{1}{54}(1-6if_1) - \frac{1549}{14175}\alpha_1^2(1-4if_1) - \frac{172}{10125}\alpha_1^4(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^6}{720}; \\
b_7^* &= -\frac{1}{162}(1-7if_1) - \frac{27973}{396900}\alpha_1^2(1-5if_1) + \frac{179\alpha_1^4}{31500}(1-3if_1) + \frac{71}{264600}\alpha_1^6(1-if_1); \\
b_8^* &= -\frac{1}{567}(1-8if_1) - \frac{21829}{617400}\alpha_1^2(1-6if_1) + \frac{93779}{13608000}(1-4if_1) - \frac{39727\alpha_1^6}{111132000}(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^8}{40320}; \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0 &= 1; & g_1 &= -2; \\
g_2 &= 2 + \frac{\alpha_1^2}{2}; & g_3 &= -\frac{2}{3} - \frac{4}{9}\alpha_1^2; \\
g_4 &= \frac{\alpha_1^2}{4} + \frac{\alpha_1^4}{24}; & g_5 &= -\frac{2}{45}\alpha_1^2 - \frac{23}{900}\alpha_1^4; \\
g_6 &= \frac{167}{16200}\alpha_1^4 + \frac{\alpha_1^6}{720}; & g_7 &= -\frac{\alpha_1^2}{1323} - \frac{13}{14175}\alpha_1^4 - \frac{22\alpha_1^6}{33075}; \\
g_8 &= -\frac{\alpha_1^2}{1512} + \frac{11}{100800}\alpha_1^4 + \frac{673\alpha_1^6}{3175200} + \frac{\alpha_1^8}{40320}; \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_0 &= 0; & h_1 &= -6 + \alpha_1^2; \\
h_2 &= 11 + \frac{\alpha_1^2}{3}; & h_3 &= -\frac{53}{9} - \frac{46}{27}\alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^4}{6}; \\
h_4 &= \frac{11}{18} + \frac{175}{108}\alpha_1^2 + \frac{2}{45}\alpha_1^4; & h_5 &= \frac{1}{6} - \frac{21737\alpha_1^2}{18900} - \frac{374}{3375}\alpha_1^4 + \frac{\alpha_1^6}{120}; \\
h_6 &= \frac{11}{162} - \frac{1063}{18900}\alpha_1^2 + \frac{2987}{40500}\alpha_1^4 + \frac{71}{37800}\alpha_1^6; & h_7 &= \frac{11}{378} - \frac{193211\alpha_1^2}{2778300} + \frac{64781}{1701000}\alpha_1^4 - \frac{86909\alpha_1^6}{27783000} + \frac{\alpha_1^8}{5040}; \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0^* &= 0; & \beta_1^* &= 3(1-if_1); \\
\beta_2^* &= -\frac{3}{2}(1-2if_1) - \alpha_1^2; & \beta_3^* &= -\frac{9}{4}(1-3if_1); \\
\beta_4^* &= -\frac{9}{8}(1-4if_1); & \beta_5^* &= \frac{3}{16}(1-5if_1); \\
\beta_6^* &= \frac{27}{32}(1-6if_1); & \beta_7^* &= \frac{51}{64}(1-7if_1); \\
\beta_8^* &= \frac{51}{128}(1-8if_1); & \beta_9^* &= \frac{3}{256}(1-9if_1); \\
\beta_{10}^* &= -\frac{93}{512}(1-10if_1); \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_0^* &= 1; & e_1^* &= -\frac{3}{2}(1-if_1); \\
e_2^* &= (1-2if_1) + \frac{\alpha_1^2}{6}; & e_3^* &= -\frac{1}{4}(1-3if_1) - \frac{\alpha_1^2}{6}(1-if_1); \\
e_4^* &= \frac{7}{80}\alpha_1^2(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^4}{120}; & e_5^* &= -\frac{31}{2400}\alpha_1^2(1-3if_1) - \frac{23}{3600}\alpha_1^4(1-if_1); \\
e_6^* &= -\frac{\alpha_1^2}{2400}(1-4if_1) + \frac{143\alpha_1^4}{50400}(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^6}{5040}; \\
e_7^* &= -\frac{\alpha_1^2}{1400}(1-5if_1) - \frac{103\alpha_1^4}{470400}(1-3if_1) - \frac{11\alpha_1^6}{88200}(1-if_1); \\
e_8^* &= -\frac{431\alpha_1^2}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}(1-6if_1) - \frac{79\alpha_1^4}{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}(1-4if_1) + \frac{619\alpha_1^6}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2}(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^8}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}; \\
e_9^* &= -\frac{253\alpha_1^2}{2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7}(1-7if_1) - \frac{12749\alpha_1^4}{2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2}(1-5if_1) - \frac{\alpha_1^6}{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7}(1-3if_1) - \frac{563\alpha_1^8}{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2}(1-if_1); \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2^* &= -6(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^2}{2}; & b_3^* &= \frac{47}{8}(1-3if_1) + \frac{\alpha_1^2}{6}(1-if_1); \\
b_4^* &= -\frac{41}{16}(1-4if_1) - \frac{37\alpha_1^2}{48}(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^4}{24}; & b_5^* &= \frac{9}{64}(1-5if_1) + \frac{477\alpha_1^2}{800}(1-3if_1) + \frac{\alpha_1^4}{75}(1-if_1); \\
b_6^* &= \frac{29}{640}(1-6if_1) - \frac{3997\alpha_1^2}{24000}(1-4if_1) - \frac{1151\alpha_1^4}{36000}(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^6}{720}; \\
b_7^* &= \frac{19}{640}(1-7if_1) - \frac{163\alpha_1^2}{56000}(1-5if_1) + \frac{401\alpha_1^4}{18375}(1-3if_1) + \frac{71\alpha_1^6}{176400}(1-if_1); \\
b_8^* &= \frac{39}{2240}(1-8if_1) - \frac{11573\alpha_1^2}{3136000}(1-6if_1) - \frac{1503559}{395136000}(1-4if_1) - \frac{32377\alpha_1^6}{49392000}(1-2if_1) + \frac{\alpha_1^8}{40320}; \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0 &= 1; & \varepsilon_1 &= -3; \\
 \varepsilon_2 &= \frac{9}{2} + \frac{\alpha_1^2}{2}; & \varepsilon_3 &= -3 - \frac{2}{3} \alpha_1^2; \\
 \varepsilon_4 &= \frac{3}{4} + \frac{29}{48} \alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^4}{24}; & \varepsilon_5 &= -\frac{101}{400} \alpha_1^2 - \frac{23}{600} \alpha_1^4; \\
 \varepsilon_6 &= \frac{43}{1200} \alpha_1^2 + \frac{21}{800} \alpha_1^4 + \frac{\alpha_1^6}{720}; & \varepsilon_7 &= -\frac{17}{4200} \alpha_1^2 - \frac{131 \alpha_1^4}{17640} - \frac{11 \alpha_1^6}{11025}; \\
 \varepsilon_8 &= -\frac{111}{89600} \alpha_1^2 + \frac{149 \alpha_1^4}{250880} + \frac{159 \alpha_1^6}{282240} + \frac{\alpha_1^8}{40320}; & & \\
 h_0 &= 0; & h_1 &= -12 + \alpha_1^2; \\
 h_2 &= \frac{237}{8} + \frac{\alpha_1^2}{2}; & h_3 &= -\frac{223}{8} - \frac{13}{4} \alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^4}{6}; \\
 h_4 &= \frac{701}{64} + \frac{2171}{480} \alpha_1^2 + \frac{\alpha_1^4}{15}; & h_5 &= -\frac{69}{160} - \frac{697}{250} \alpha_1^2 - \frac{1231}{6000} \alpha_1^4 + \frac{\alpha_1^6}{120}; \\
 h_6 &= -\frac{41}{640} + \frac{15499}{24000} \alpha_1^2 + \frac{5461}{25200} \alpha_1^4 + \frac{71}{25200} \alpha_1^6; & h_7 &= -\frac{307}{4480} - \frac{1467}{98000} \alpha_1^2 - \frac{4737223}{49392000} \alpha_1^4 - \frac{17431}{3087000} \alpha_1^6 + \frac{\alpha_1^8}{5040}.
 \end{aligned}$$

Zahlentafel 2. Reihenkoeffizienten der Lösungen φ_1^* , φ_2^* für die Grundströmung $U = U_s + (1 - U_s) \sin \left(\frac{y-s}{a-s} \cdot \frac{\pi}{2} \right)$.

Abkürzung: $p = \frac{f_2}{\sin y_{2s} \cos y_{2s}}$;

$$\beta_0^* = 0; \quad \beta_1^* = -\operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip); \quad \beta_2^* = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) - \alpha_2^2;$$

$$\beta_3^* = -\frac{1}{6} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1 + 3ip);$$

$$\beta_4^* = \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1 + 4ip);$$

$$\beta_5^* = -\frac{7}{360} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) - \frac{1}{12} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1 + 3ip) - \frac{1}{16} \operatorname{tg}^5 y_{2s} (1 + 5ip);$$

$$\beta_6^* = \frac{1}{48} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) + \frac{5}{96} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1 + 4ip) + \frac{1}{32} \operatorname{tg}^6 y_{2s} (1 + 6ip);$$

$$\beta_7^* = -\frac{31}{15120} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) - \frac{17}{960} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1 + 3ip) - \frac{1}{32} \operatorname{tg}^5 y_{2s} (1 + 5ip) - \frac{1}{64} \operatorname{tg}^7 y_{2s} (1 + 7ip);$$

$$\beta_8^* = \frac{17}{5760} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) + \frac{77}{5760} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1 + 4ip) + \frac{7}{384} \operatorname{tg}^6 y_{2s} (1 + 6ip) + \frac{1}{128} \operatorname{tg}^8 y_{2s} (1 + 8ip).$$

$$e_0^* = 1; \quad e_1^* = \frac{1}{2} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip); \quad e_2^* = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \alpha_2^2;$$

$$e_3^* = -\frac{1}{24} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) + \frac{\alpha_2^2}{18} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip);$$

$$e_4^* = \frac{1}{120} - \frac{\alpha_2^2}{60} \left[1 + \frac{1}{12} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) \right] + \frac{\alpha_2^4}{120};$$

$$e_5^* = \frac{1}{720} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) - \frac{\alpha_2^2}{1200} \left[\frac{31}{9} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1 + 3ip) \right] + \frac{23}{10800} \alpha_2^4 \operatorname{tg} y_{2s} (1 - ip);$$

$$e_6^* = -\frac{1}{5040} + \frac{\alpha_2^2}{1680} \left[1 - \frac{17}{90} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) - \frac{7}{30} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1 + 4ip) \right] - \frac{\alpha_2^4}{1680} \left[1 + \frac{37}{270} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) \right] + \frac{\alpha_2^6}{5040};$$

$$e_7^* = -\frac{1}{40320} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) + \frac{\alpha_2^2}{6720} \left[\frac{67}{105} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) + \frac{29}{70} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1 + 3ip) + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^5 y_{2s} (1 + 5ip) \right] - \frac{\alpha_2^4}{50400} \left[\frac{53}{14} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) - \frac{307}{243} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1 + 3ip) \right] + \frac{11 \alpha_2^6}{264600} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip);$$

$$e_8^* = \frac{1}{362880} - \frac{\alpha_2^2}{10080} \left[\frac{1}{9} + \frac{619}{5040} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) + \frac{257}{840} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1 + 4ip) + \frac{3}{16} \operatorname{tg}^6 y_{2s} (1 + 6ip) \right] + \frac{\alpha_2^4}{60480} \left[1 - \frac{131}{315} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) - \frac{14263}{29160} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1 + 4ip) \right] - \frac{\alpha_2^6}{90720} \left[1 + \frac{221}{1260} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) \right] + \frac{\alpha_2^8}{362880};$$

$$i_2^* = -\left[\frac{1}{2} + \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) \right] + \frac{1}{2} \alpha_2^2;$$

$$i_3^* = \left[\frac{1}{12} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1 + 3ip) \right] - \frac{\alpha_2^2}{18} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip);$$

$$i_4^* = \left[\frac{1}{24} + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) + \frac{1}{48} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1 + 4ip) \right] - \alpha_2^2 \left[\frac{1}{12} + \frac{61}{432} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1 + 2ip) \right] + \frac{\alpha_2^4}{24};$$

$$i_5^* = -\left[\frac{13}{1440} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) + \frac{1}{192} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1 + 3ip) \right] + \alpha_2^2 \left[\frac{13}{900} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip) - \frac{109}{21600} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1 + 3ip) \right] - \frac{\alpha_2^4}{225} \operatorname{tg} y_{2s} (1 + ip);$$

$$b_0^* = \left[-\frac{1}{720} - \frac{11}{2880} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1+2ip) + \frac{1}{576} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1+4ip) + \frac{1}{640} \operatorname{tg}^6 y_{2s} (1+6ip) \right] + \alpha_2^2 \left[\frac{1}{240} + \frac{2051}{324000} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1+2ip) \right] + \frac{\alpha_2^6}{720}$$

$$b_1^* = \frac{41}{181440} \operatorname{tg} y_{2s} (1+ip) - \frac{1}{1920} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1+3ip) - \frac{1}{1152} \operatorname{tg}^5 y_{2s} (1+5ip) - \frac{1}{1920} \operatorname{tg}^7 y_{2s} (1+7ip) + \alpha_2^2 \left[-\frac{1573}{2116800} \operatorname{tg} y_{2s} (1+ip) + \frac{4889}{15876000} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1+3ip) + \frac{79}{1512000} \operatorname{tg}^5 y_{2s} (1+5ip) \right] + \alpha_2^4 \left[\frac{247}{352800} \operatorname{tg} y_{2s} (1+ip) + \frac{10379}{183708000} \operatorname{tg}^3 y_{2s} (1+3ip) \right] - \frac{71 \alpha_2^6}{529200} \operatorname{tg} y_{2s} (1+ip)$$

$$b_2^* = \frac{1}{40320} + \frac{97}{725760} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1+2ip) + \frac{1}{3840} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1+4ip) + \frac{1}{2560} \operatorname{tg}^6 y_{2s} (1+6ip) + \frac{1}{5376} \operatorname{tg}^8 y_{2s} (1+8ip) + \alpha_2^2 \left[-\frac{1}{10080} - \frac{42311}{1778112000} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1+2ip) - \frac{3173}{49392000} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1+4ip) - \frac{583}{16934400} \operatorname{tg}^6 y_{2s} (1+6ip) \right] + \alpha_2^4 \left[\frac{1}{6720} + \frac{13589}{55566000} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1+2ip) - \frac{174173}{2939328000} \operatorname{tg}^4 y_{2s} (1+4ip) \right] + \alpha_2^6 \left[-\frac{1}{10080} - \frac{61777}{444528000} \operatorname{tg}^2 y_{2s} (1+2ip) \right] + \frac{\alpha_2^8}{40320}$$

$$g_0 = 1; \quad g_1 = \operatorname{tg} y_{2s}; \quad g_2 = +\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 y_{2s} + \frac{\alpha_2^2}{2}; \quad g_3 = -\frac{1}{6} \operatorname{tg} y_{2s} + \frac{2}{9} \alpha_2^2 \operatorname{tg} y_{2s};$$

$$g_4 = -\frac{1}{24} \operatorname{tg}^2 y_{2s} + \frac{\alpha_2^2}{36} \left(-1 + \frac{7}{4} \operatorname{tg}^2 y_{2s} \right) + \frac{\alpha_2^4}{24};$$

$$g_5 = \frac{1}{120} \operatorname{tg} y_{2s} + \frac{\alpha_2^2}{50} \left(-\operatorname{tg} y_{2s} - \frac{1}{72} \operatorname{tg}^3 y_{2s} \right) + \frac{23 \alpha_2^4}{1800} \operatorname{tg} y_{2s};$$

$$g_6 = +\frac{1}{720} \operatorname{tg}^2 y_{2s} + \frac{\alpha_2^2}{1800} \left(\frac{7}{3} - \frac{13}{3} \operatorname{tg}^2 y_{2s} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 y_{2s} \right) + \frac{\alpha_2^4}{5400} \left(-11 + \frac{101}{12} \operatorname{tg}^2 y_{2s} \right) + \frac{\alpha_2^6}{720};$$

$$g_7 = -\frac{1}{5040} \operatorname{tg} y_{2s} + \frac{\alpha_2^2}{3150} \left(\frac{283}{168} \operatorname{tg} y_{2s} - \frac{19}{24} \operatorname{tg}^3 y_{2s} - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^5 y_{2s} \right) + \frac{\alpha_2^4}{226800} \left(-\frac{1213}{7} \operatorname{tg} y_{2s} + \frac{229}{27} \operatorname{tg}^3 y_{2s} \right) + \frac{11}{33075} \alpha_2^6 \operatorname{tg} y_{2s};$$

$$g_8 = -\frac{1}{40320} \operatorname{tg}^2 y_{2s} + \frac{\alpha_2^2}{6720} \left[-\frac{1}{35} + \frac{961}{840} \operatorname{tg}^2 y_{2s} + \frac{451}{420} \operatorname{tg}^4 y_{2s} + \frac{13}{24} \operatorname{tg}^6 y_{2s} \right] + \frac{\alpha_2^4}{25200} \left[\frac{13}{7} - \frac{883}{567} \operatorname{tg}^2 y_{2s} + \frac{473}{7776} \operatorname{tg}^4 y_{2s} \right] + \frac{\alpha_2^6}{1058400} \left[-61 + \frac{307}{12} \operatorname{tg}^2 y_{2s} \right] + \frac{\alpha_2^8}{40320}$$

$$h_0 = 0; \quad h_1 = -1 - 2 \operatorname{tg}^2 y_{2s} + \alpha_2^2; \quad h_2 = -\frac{7}{4} \operatorname{tg} y_{2s} - \frac{19}{8} \operatorname{tg}^3 y_{2s} - \frac{1}{6} \alpha_2^2 \operatorname{tg} y_{2s};$$

$$h_3 = \frac{1}{4} + \frac{5}{25} \operatorname{tg}^2 y_{2s} - \frac{7}{24} \operatorname{tg}^4 y_{2s} - \frac{1}{18} \alpha_2^2 \left(7 + \frac{67}{6} \operatorname{tg}^2 y_{2s} \right) + \frac{1}{6} \alpha_2^4;$$

$$h_4 = \frac{59}{288} \operatorname{tg} y_{2s} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 y_{2s} + \frac{7}{64} \operatorname{tg}^5 y_{2s} + \frac{1}{1080} \alpha_2^2 \left(-227 \operatorname{tg} y_{2s} + \frac{1329}{4} \operatorname{tg}^3 y_{2s} \right) - \frac{1}{45} \alpha_2^4 \operatorname{tg} y_{2s};$$

$$h_5 = -\frac{5}{288} - \frac{23}{720} \operatorname{tg}^2 y_{2s} - \frac{1}{64} \operatorname{tg}^4 y_{2s} - \frac{1}{60} \operatorname{tg}^6 y_{2s} + \frac{1}{1800} \alpha_2^2 \left[71 + \frac{6019}{60} \operatorname{tg}^2 y_{2s} - \frac{253}{60} \operatorname{tg}^4 y_{2s} \right] + \frac{1}{1800} \alpha_2^4 \left(53 + \frac{2291}{30} \operatorname{tg}^2 y_{2s} \right) + \frac{1}{120} \alpha_2^6;$$

$$h_6 = -\frac{157}{25920} \operatorname{tg} y_{2s} - \frac{5}{1152} \operatorname{tg}^3 y_{2s} + \frac{59}{5760} \operatorname{tg}^5 y_{2s} + \frac{11}{1920} \operatorname{tg}^7 y_{2s} + \frac{1}{7200} \alpha_2^2 \left[\frac{61721}{630} \operatorname{tg} y_{2s} + \frac{1093}{7} \operatorname{tg}^3 y_{2s} + \frac{47}{42} \operatorname{tg}^5 y_{2s} \right] - \frac{1}{324000} \alpha_2^4 \left[\frac{17599}{7} \operatorname{tg} y_{2s} + \frac{321883}{81} \operatorname{tg}^3 y_{2s} \right] - \frac{71}{75600} \alpha_2^6 \operatorname{tg} y_{2s};$$

$$h_7 = \frac{11}{25920} - \frac{97}{362880} \operatorname{tg}^2 y_{2s} - \frac{11}{2880} \operatorname{tg}^4 y_{2s} - \frac{7}{1440} \operatorname{tg}^6 y_{2s} - \frac{29}{13440} \operatorname{tg}^8 y_{2s} + \frac{1}{23520} \alpha_2^2 \left[-\frac{3253}{90} - \frac{1069}{4725} \operatorname{tg}^2 y_{2s} + \frac{221}{14} \operatorname{tg}^4 y_{2s} - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^6 y_{2s} \right] + \frac{1}{25200} \alpha_2^4 \left[\frac{667}{14} + \frac{4239877}{59535} \operatorname{tg}^2 y_{2s} - \frac{111899}{14580} \operatorname{tg}^4 y_{2s} \right] + \frac{1}{33075} \alpha_2^6 \left[-\frac{491}{16} - \frac{4327}{105} \operatorname{tg}^2 y_{2s} \right] + \frac{\alpha_2^8}{40}$$

Zahlentafel 3. Werte der Differentialquotienten des Real- und Imaginärteiles der Funktion $F(\eta_0)$ nach η_0 .

	$\frac{\partial F_r}{\partial \eta_0}$	$\frac{\partial F_i}{\partial \eta_0}$	η_0	$\frac{\partial F_r}{\partial \eta_0}$	$\frac{\partial F_i}{\partial \eta_0}$
2	0,135	-0,226	3,6	0,396	-0,066
2.1	0,121	-0,230	3,7	0,399	-0,030
2.2	0,117	-0,235	3,8	0,395	+0,010
2.3	0,118	-0,239	3,9	0,379	0,055
2.4	0,121	-0,242	4,0	0,360	0,100
2.5	0,128	-0,245	4,1	0,330	0,155
2.6	0,135	-0,246	4,2	0,297	0,205
2.7	0,145	-0,246	4,3	0,250	0,270
2.8	0,157	-0,243	4,4	0,180	0,338
2.9	0,172	-0,237	4,5	0,080	0,341
3,0	0,191	-0,226	4,6	0,020	0,282
3,1	0,219	-0,210	4,7	-0,026	0,226
3,2	0,256	-0,188	4,8	-0,045	0,182
3,3	0,296	-0,162	4,9	-0,057	0,150
3,4	0,340	-0,133	5,0	-0,062	0,118
3,5	0,380	-0,102			

Systematische experimentelle Messungen des Umschlagpunktes sollen zusammen mit Rechnungen, die auf Grund der hier mitgeteilten Ergebnisse durchzuführen sind, den Zusammenhang zwischen dem Verlauf des Druckgradienten und dem Maß der Anfachung herstellen, das den Umschlag herbeiführt, und damit eine Grundlage zur rechnerischen

Ermittlung des Umschlagpunktes bei vorgegebenem Druckverlauf schaffen.

IX. Schrifttum.

- [1] W. Tollmien, Über die Entstehung der Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Klasse 1929, S. 21.
- [2] H. Schlichting u. K. Bussmann, Zur Berechnung des Umschlages laminar = turbulent (Preis Ausschreiben 1940 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung), dieses Jahrbuch.
- [3] J. Pretsch, Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg (Preis Ausschreiben 1940 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung). Jahrbuch 1941 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. 58.
- [4] H. Schlichting, Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Klasse 1933, S. 181.
- [5] W. Tollmien, Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse 1935, S. 79.
- [6] D. R. Hartree, On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equation of the boundary layer Proc. Phil. Soc. Cambridge Bd. 33 (1937), S. 223.

Abgeschlossen August 1942.

Der Triebflügel*).

Eine Vereinigung von Vortriebs- und Auftriebsorgan.

Von E. v. Holst, D. Küchemann u. K. Solf.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V., Institut für theoretische Aerodynamik.

Der Bericht untersucht die Frage, ob ein Fluggerät denkbar ist, bei dem zur Arbeitsleistung ausschließlich die »Tragflügelkräfte« von zirkulatorisch umströmten Quertriebskörpern herangezogen werden, und das im Hinblick auf eine große Geschwindigkeitsspanne und die Möglichkeit, große Triebwerksleistungen bei gutem aerodynamischen Wirkungsgrad unterzubringen, dem heutigen Flugzeugtyp überlegen ist. Ausgehend vom Vorbild der fliegenden Tierwelt, dessen sinngemäße Übertragung in die Flugtechnik ausführlich besprochen wird, wird ein Flügelsystem vorgeschlagen, das gleichzeitig den Vortrieb und den Auftrieb aufbringt. Ein solcher »Triebflügel« vereinigt die Entwicklungstendenzen des Hubschraubers mit denen der heutigen Luftschrauben und kann gleichzeitig als Technisierung des Tierfluges angesehen werden.

Gliederung.

- I. Allgemeine Überlegungen über die Möglichkeit, Auftrieb und Vortrieb mit demselben Flächensystem zu erzeugen.
- II. Der rollende Flügel (Luftschraube großer Steigung bei sehr großem Fortschrittsgrad und Schräganblasung).
- III. Diskussion der Ergebnisse der Rechnung.
- IV. Die Flugeigenschaften des Triebflügels.
- V. Zusammenfassung.

Bezeichnungen.

s	Flügelhalbspannweite,
l	Flügeltiefe,
F	Flügelfläche,
λ	Seitenverhältnis des Flügels,
x_a, y_a, z_a	strömungsfeste rechtwinklige Koordinaten; x_a positiv in Flugrichtung,
x, y, z	flügelfeste rechtwinklige Koordinaten. y in Spannweitenrichtung, positiv nach Steuerbord,
ξ, η, ζ	flügelfeste rechtwinklige Koordinaten, mit s dimensionslos gemacht: $\xi = x/s$;
φ	Rollwinkel; $\varphi = 0$ bei horizontaler Lage des Flügels;
α_0	Winkel zwischen Drehachse (Nullauftriebsrichtung) und Anströmrichtung,
ω	Winkelgeschwindigkeit,
v	Anströmgeschwindigkeit,
u	Umfangsgeschwindigkeit,
$\lambda = v/u = \frac{1}{\omega s/v}$	Fortschrittsgrad,
$\sigma = \frac{1}{2\pi} (dc_a/d\alpha)_{\lambda=\infty}$	Profilkonstante,
A	Auftrieb,
$c_a = (dA/dy) : \frac{\rho}{2} v^2 l$	örtlicher Auftriebsbeiwert,
$\gamma = c_a l/4 s$	dimensionsloser Beiwert für die Zirkulation,
c_n	örtlicher Normalkraftbeiwert, senkrecht zur Nullauftriebsrichtung,
c_t	örtlicher Tangentialkraftbeiwert, in Nullauftriebsrichtung,
K_{z_a}	Vertikalkraft an der Drehachse in z_a -Richtung,
K_{x_a}	Horizontalkraft an der Achse in x_a -Richtung,

*) P 31 19.

$\bar{c}_{z_a} = K_{z_a} \left/ \frac{\rho}{2} v^2 F \right.$	} Luftkraftbeiwerte,
$\bar{c}_{x_a} = K_{x_a} \left/ \frac{\rho}{2} v^2 F \right.$	
$\bar{c}_{z_a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{c}_{z_a} d\varphi$	
$\bar{c}_{x_a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{c}_{x_a} d\varphi$	
M	Luftkraftmoment an der Drehachse,
$C_d = M \left/ \frac{\rho}{2} v^2 F s \right.$	Drehmomentenbeiwert,
S	Schub in Flugrichtung,
$C_s = S \left/ \frac{\rho}{2} v^2 F \right.$	Schubbeiwert.

I. Allgemeine Überlegungen über die Möglichkeit, Auftrieb und Vortrieb mit demselben Flächensystem zu erzeugen.

Wir stehen heute an einem Zeitpunkt, wo sich ein neuer grundsätzlicher Einschnitt in der Entwicklung der Flugtechnik bemerkbar macht; er ist in seiner Bedeutung dem Entwicklungsabschnitt vergleichbar, wo sich die Flugtechnik auf ihrem Entwicklungswege von dem Verfahren, den Auftrieb durch die statischen Kräfte mitgeführter Gasmassen zu erzeugen, abzuwenden und beim Luftfahrzeug »schwerer als Luft« die dynamischen Luftkräfte von zirkulatorisch umströmten Quertriebskörpern auszunutzen begann. Diese Entwicklung hat heute einen hohen Stand erreicht; zugleich beginnen sich jedoch schon die physikalischen Grenzen des Vortriebsorgans, der Luftschraube, abzuzeichnen, und der Flugtechniker sieht sich bereits nach neuen, nicht rein zirkulatorischen Kräften zur Vortriebszeugung um. Es ist daher wohl der Versuch gerechtfertigt, die Anwendung von »Tragflügelkräften« einmal bis zu ihrer äußersten Konsequenz zu durchdenken. Da der bisherige Flugzeugtyp weithin durch die grundsätzliche Trennung von Auftriebs- und Vortriebsorganen gekennzeichnet ist, wollen wir, die Entwicklung in anderer Richtung fortführend, insbesondere die Frage untersuchen, ob es technisch durchführbar ist, Auftrieb und Vortrieb mit demselben Flächensystem zu erzeugen.

Unsere Fragestellung ist nicht neu; seit den Hubschrauberentwürfen Leonardo da Vincis sind, ausgehend von dem Vorbild der lebenden Natur, mannigfache Vorschläge in dieser Richtung gemacht worden. Soll die ganze Erörterung dieses Problems für uns heute noch technischen Sinn und Nutzen haben, so müssen wir uns darüber klar sein, daß dabei grundsätzlich mindestens die folgenden beiden Bedingungen zu erfüllen sind: erstens muß das zu entwickelnde Fluggerät mehr leisten als der heutige Flugzeugtyp, und zweitens muß die konstruktive Durchführbarkeit beim jetzigen Stand der Technik zum mindesten diskutabel sein. Die Wichtigkeit dieser beiden Forderungen ist leider bei vielen, auch neueren Projekten, übersehen, und gerade bei Schwingenflugzeugentwürfen findet man neben technischen Unmöglichkeiten oft übertriebene Hoffnungen einerseits

Steigerung gerade der Funktionen, auf die das heutige Flugzeug ohnehin hochgezüchtet ist, und andererseits an der erreichbaren Minderung der benötigten Triebwerksleistung (Muskelkraftflieger!).

In welcher Hinsicht könnte und sollte nun ein Flugzeug, bei dem Auftrieb und Vortrieb von demselben Organ bewirkt werden, mehr leisten als das Normalflugzeug? Zunächst einmal wird ein widerstandserzeugendes Organ und damit ein »Wirkungsgrad« eingespart. Weiterhin wäre es erwünscht, wenn wir auf ein solches Flächensystem Triebwerke größerer Leistung als heute üblich arbeiten lassen könnten bei brauchbarem aerodynamischen Wirkungsgrad. Daß dies in der Tat möglich ist, werden wir später zeigen. Eine weitere grundsätzliche Überlegenheit dieses Verfahrens erkennen wir schließlich, wenn wir die fliegende Tierwelt betrachten, die zum überwiegenden Teil nach diesem Prinzip unter Ausnutzung dynamischer Tragflügelkräfte fliegt: die Möglichkeit, die Fluggeschwindigkeit bis auf Null herabzumindern; denn die als Ganzes eine Bewegung ausführende Fläche kann sich die erforderliche Anströmung selbst verschaffen, welche beim Normalflugzeug erst durch die Fortbewegung des ganzen Apparates entsteht. Ein Flugzeug mit großer Geschwindigkeitsspanne und der Möglichkeit, große Triebwerksleistungen unterzubringen, ist also das anzustrebende Ziel; hinsichtlich dieser Eigenschaften müßte das neue Flugprinzip dem alten überlegen sein.

Die technische Ausführung dieses Flugprinzips könnte zunächst direkt den Schwingenflug der Tiere nachahmen und z. B. mit einer oder mehreren Flächen, welche eine Schlag- und zugleich Drehschwingung ausführen, Auftrieb und Vortrieb erzeugen. Eine solche Bewegung ist z. B. an anderer Stelle¹⁾ näher beschrieben; dort sind auch die technischen Schwierigkeiten angedeutet, um derentwillen diese Ausführungsform hier nicht in Betracht gezogen werden soll. Es wird daher darauf ankommen, die Bewegung des tierischen Flügels weitergehend zu »technisieren«. Der wichtigste Schritt in dieser Richtung ist der, daß an die Stelle einer Hin- und Herbewegung der Fläche annähernd in einer Ebene eine Rotation tritt.

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, daß der Flügel um eine Achse umläuft, die annähernd parallel zu seiner Längserstreckung und annähernd senkrecht zur Anströmrichtung liegt. Die Flügel bewegen sich also entweder auf dem Mantel eines Zylinders oder aber eines Kegels, dessen Spitze der Ansatzpunkt der Flügel am Rumpf ist. Diese letzte Möglichkeit, über die jedoch bisher wenig Erfahrungen vorliegen, steht dem tierischen Vorbild noch am nächsten. Ihre Hauptschwierigkeit besteht in der Notwendigkeit, bei Ausnutzung des Flügels in seiner ganzen Länge, diesen periodisch (und zwar nach den Flügelenden zunehmend) zu verwinden; eine weitere Erschwerung bietet das mit der Umlaufgeschwindigkeit und jeweiligen Flügelstellung sich ändernde Drehmoment um die Rumpferachse. — Bei der anderen Möglichkeit: Umlaufen der Fläche auf der Bahn eines liegenden Zylinders kommen wir zu dem Prinzip des Voith-Schneider-Propellers, welches z. B. bei dem bekannten »Radflugzeug-Projekt Rohrbachs« angewandt ist. Wenn man von vorneherein darauf verzichtet, bei irgendeinem Flugzustand mit dem Widerstand²⁾ zu fliegen und außerdem fordert, daß das Flugzeug langsam und schnell fliegen soll, so ergibt sich bei diesem Flugprinzip wie auch bei dem vorher genannten vor allem ein kinematisches Problem: da die Spur eines Einzelflügels eine Zykloide ist, so beschreibt er bei kleinen Fortschrittsgraden eine noch kreisähnliche, bei großen jedoch eine flach wellen-

förmige Bahn. Für kleine Fortschrittsgrade könnte die Kinematik des Voith-Schneider-Propellers verwandt werden, bei großen jedoch eine davon wesentlich verschiedene, was bei der technischen Ausführung erhebliche Schwierigkeiten machen dürfte. Als ungünstiger Faktor kann die gegenseitige Beeinflussung der im gleichen Drehsinn umlaufenden Flächen hinzukommen; sie läßt sich zwar durch Vergrößern des Raddurchmessers vermindern, doch dann vermehren sich die ohnehin beträchtlichen Widerstände des ganzen Radsystems.

Schließlich ist auch hier das unerwünschte in seiner Stärke wechselnde Drehmoment um die Rumpferachse zu nennen, das zu tiefer Schwerpunktlage und anderen Ausgleichsmaßnahmen zwingt. Ein weiterer Nachteil, der grundsätzlich allen bewegten Flügelsystemen eignet, tritt bei diesem Flugprinzip besonders deutlich in Erscheinung: die zeitlich periodischen Luftkräfte, die in diesem Falle bewirken, daß vom Flügel während eines Umlaufes abwechselnd Vortriebs- oder Hubarbeit geleistet wird, so daß z. B. für den Vortrieb nur etwa die Hälfte des Arbeitsweges ausgenutzt wird³⁾.

Angesichts dieser Sachlage wollen wir uns die Frage vorlegen, wie die fliegende Tierwelt das Problem der großen Geschwindigkeitsspanne — von Null bis zu immerhin erheblichen Werten — gelöst hat. Auf Grund der Untersuchungen des einen von uns (v. Holst) an verschiedenen Flügeltieren und an Flugmodellen, welche die verschiedenen Formen des tierischen Fluges nachahmen (vgl. Fußnote 1) läßt sich auf diese Frage eine eindeutige und sehr einfache Antwort geben: Die Flügeltiere — gleichgültig, um welche spezielle Flugweise es sich handelt — bewegen die Flügel, im Gegensatz zu den erwähnten technischen Projekten, stets in einer Ebene, die zum Fahrtwind möglichst senkrecht steht, also um eine in Richtung der Fortbewegung gelegene Achse, die beim Horizontalflug waagrecht, beim Rüttel- oder Schwirrflug (ohne Horizontalgeschwindigkeit) möglichst senkrecht gestellt wird. Diese Schwenkung der Schlagenebene wird meist durch Neigung des ganzen Rumpfes erzielt; in anderen Fällen kann die Schwingenebene der Flügel bei gleichbleibender Körperlage durch Betätigung eines komplizierten Flügelgelenkes geneigt werden.

Beim Fliegen ohne Horizontalgeschwindigkeit machen die Flügel (wenn wir von verschiedenen anatomisch bedingten Besonderheiten absehen) eine der Hubschraube völlig entsprechende Bewegung, wobei an die Stelle der Rotation ein Hin- und Zurückschwingen und an die Stelle einer gleichbleibenden ziemlich geringen Steigung des Propellerblattes ein sehr weites Hin- und Zurückschwenken des Flügels um seine Längsachse an den Umkehrpunkten tritt. Der Hubschrauber ist daher in unserem Sinne eine ideale Übertragung des auf-der-Stelle-Fliegens der Tierwelt in die Flugtechnik.

Die sinngemäße Übertragung des Horizontalflugprinzips der Tiere in die Technik soll am Beispiel der Libelle erläutert werden, die der Ausgangspunkt diesbezüglicher Versuche des erstgenannten Verfassers ist (vgl. Bild 1). Die Libelle bewegt bekanntlich zwei hintereinander gelegene Flächenpaare gegensinnig. Dieses Verfahren hat vor dem Schwingenflug mit einem Flügelpaar zwei Vorteile voraus: Stabilität in jeder Flügelstellung (die Fluglage des Vogels z. B. ist bei herabbewegten Flügeln vorübergehend instabil) und geradlinige gleichmäßige Fortbewegung des Massenschwerpunktes (beim Vogelflugprinzip sind Schwankungen des Schwerpunktes in Richtung der Flugbahn oder senkrecht dazu unvermeidlich). Die Nachahmung des Libellenprinzips an größeren Flugmodellen ergab aber ein bei langsamer Fre-

¹⁾ E. v. Holst u. D. Küchemann, Biologische und aerodynamische Probleme des Tierfluges, Naturwiss. Bd. 29 (1941), S. 384, oder: Zur Aerodynamik des Tierfluges, Luftwissen Bd. 8 (1941), S. 277.

²⁾ Vgl. E. Everling, Zur Frage des Flügelrades, Luftwissen Bd. 1 (1934), S. 221. Ausführlichere Rechnungen und Messungen findet man bei J. B. Wheatley, Simplified aerodynamic analysis of the cyclo-giro rotating-wing system, NACA Techn. Note 467 (1933) u. J. B. Wheatley a. R. Windler, Wind-tunnel tests of a cyclogiro rotor, NACA Techn. Note 528 (1935).

³⁾ Wir verstehen darunter die Ausnutzung von Luftkräften in der Bewegungsrichtung, nicht senkrecht dazu: Prinzip des Rad-dampfers.

⁴⁾ Von der besonderen Kunst der Flügeltiere, diesen »toten Arbeitsweg« möglichst klein zu machen, haben eigene Überzeitlupenfilme verschiedener Flügeltiere uns überzeugt: Der Flügel schwingt mit fast konstanter Geschwindigkeit bis dicht vor den Wendepunkt, schwenkt dann schnell und hat sofort wieder seine volle Geschwindigkeit. Dies ist ein Beispiel dafür, wie die Natur, der die rotatorische Bewegung verwehrt ist, sich auf glänzende Weise zu helfen versteht, ohne daß jedoch in der Flugtechnik dieses Verfahren nun sklavisch nachgeahmt werden müßte, da hier gänzlich andere Voraussetzungen gegeben sind.

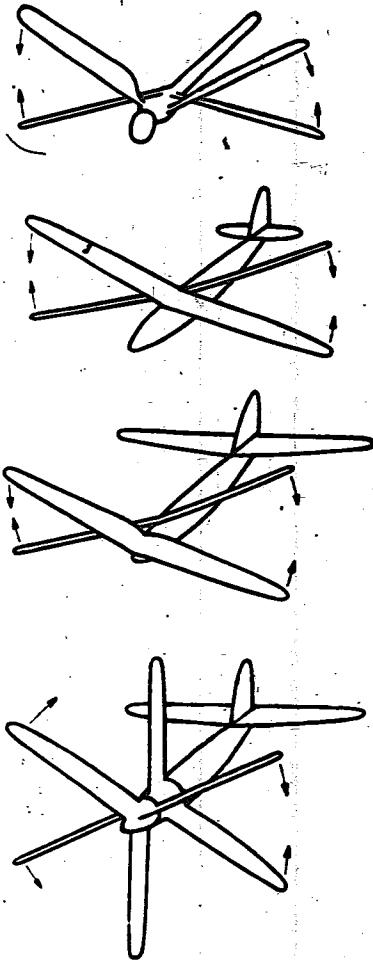


Bild 1. Die Entwicklungsgeschichte des Triebflügels, von der Libelle ausgehend.

quenz sehr störendes mit der Schlagrichtung wechselndes Drehmoment um die Rumpfquerachse. Daher wurden, als erster Schritt der Technisierung, beide Vorder- und beide Hinterflügel unter Einsparung des Mittelgelenkes derart miteinander fest verbunden, daß ein Vorderflügel mit dem nach vorn gebrachten Hinterflügel der Gegenseite zusammenhing und umgekehrt, womit jenes Moment beseitigt war. Die guten Flugeigenschaften derartiger Modelle (bei denen der günstige gegenseitige Einfluß der gegensinnig schwingenden Flächen eine Rolle spielt) veranlaßten eine Weiterentwicklung. Als nächstes wurden, um einen sicheren Flug auf der Stelle zu erreichen, die Flügel nach vorne gerückt und das kleine Leitwerk durch eine tragende Schwanzfläche ersetzt. Dadurch war erreicht, daß bei geringer Fluggeschwindigkeit (Start, Landung) die Schwanzfläche durchsackte, das Flugzeug sich von selbst aufrichtete und die Flügel, in waagerechter Ebene schwingend, als »Hubschrauben« wirkten. Der letzte Schritt der

technischen Fortbildung bestand darin, an die Stelle der Schlagschwingung eine Rotation zu setzen. Wir kommen damit, von der Libelle ausgehend, für den Horizontalflug zu zwei gegenläufigen Luftschrauben, welche außer dem Vortrieb auch den Auftrieb erzeugen, d. h. eine geringe Schräganblasung von unten her haben müssen, und die bei Start und Landung durch Aufrichten der Drehachse als Hubschrauben wirken. Dieser Flugzeugtyp, der im folgenden näher besprochen werden soll, erscheint uns als eine folgerichtige und einfache Technisierung des Tierfluges. Da bei ihm die Eigenschaften des Tragflügels mit denen des Vortriebsorganes vereinigt sind, wollen wir vom Triebflügel-Prinzip sprechen.

Es ist in diesem Zusammenhang nicht ohne Interesse, zu bemerken, daß die eine Anwendungsform des Prinzips, die beliebig langsames Fliegen ermöglicht, durch den Hubschrauber bereits mit Erfolg verwirklicht ist⁵⁾, während die andere, der Schnellflug mittels Triebflügeln, nicht nur als Technisierung des Schwingenflugprinzips, sondern auch als konsequente Fortführung bestimmter Entwicklungstendenzen im heutigen Flugzeugbau (gegenläufige Luftschrauben, wachsender Schraubendurchmesser bei abnehmender Drehzahl) aufgefaßt werden kann.

Es sei im folgenden untersucht, ob und unter welchen Bedingungen mit einem solchen Fluggerät die nötigen Luftkräfte erzeugt werden können; weiterhin soll die konstruktive Durchführbarkeit überlegt werden. Dabei brauchen wir auf diejenigen Flugzustände, in denen der Triebflügel

⁵⁾ Der Hubschrauber verkörpert jedoch nur diese eine Richtung, was in seiner Geschwindigkeitsbeschränkung nach oben zum Ausdruck kommt. Vgl. dazu: G. Sisingh, Die Berechnung der Rotoren von Drehflügelflugzeugen bei höheren Fortschrittsgraden mit besonderer Berücksichtigung der Probleme des Schnellfluges. Jahrb. 1941 d. dt. Luftf.-Forschg., S. 1 351.

als Hubschrauber arbeitet, nicht näher einzugehen. Wir werden vor allem den Schnellflugfall betrachten und dazu als einfachstes Beispiel die Luftkräfte an einer zweiblättrigen Luftschraube bei sehr großem Fortschrittsgrad behandeln. Da wir eine solche Luftschraube auch als rollenden Tragflügel ansehen können, so steht uns zu diesem Zweck bei geeigneten Voraussetzungen die Prandtl'sche Tragflügeltheorie zur Verfügung. Wir wollen zunächst die auftretenden Kräfte und Momente berechnen und anschließend die Bedeutung dieser Ergebnisse für den Triebflügel diskutieren. In einem weiteren Abschnitt sollen dann die zu erwartenden Flugeigenschaften besprochen werden.

II. Der rollende Flügel (Luftschraube großer Steigung bei sehr großem Fortschrittsgrad und Schräganblasung).

Wir betrachten einen geraden unverwundenen Flügel vom Seitenverhältnis Λ und der Spannweite $2s$, der eine stationäre Rollbewegung um seine Symmetrieachse ausführt. Die Drehachse liege in der Flügelsehne (= Nullauftriebsrichtung). Bei horizontaler Lage des Flügels (Rollwinkel $\varphi = 0$) bildet die Drehachse mit der Anströmung den Winkel α_0 . Denken wir an eine Luftschraube, so haben wir eine solche mit zwei Blättern und der über den ganzen Radius konstanten Steigung 90° , die unter dem Winkel α_0 schräg angeblasen ist. Wir benutzen zwei Koordinatensysteme: das eine in der üblichen Weise strömungsfest x_a, y_a, z_a , das andere flügel fest (rotierend) x, y, z (ξ, η, ζ mit s dimensionslos gemacht). Der von der Nullauftriebsrichtung des Flügels gemessene Anstellwinkel α besteht einmal aus dem Anteil $\alpha_1 = \alpha_0 \cos \varphi$, welcher von der Schrägstellung der Drehachse herrührt, und weiter aus dem Anteil $\alpha_2 = \frac{\omega s}{v} \eta$, wobei $\omega = d\varphi/dt$ die Winkelgeschwindigkeit ist; dieser Anteil rührt vom Rollen her. Die Größe $s \omega/v$, welche den maximalen, an der Flügelspitze auftretenden Rollanteil des Anstellwinkels darstellt, ist der Kehrwert des üblichen Fortschrittsgrades λ :

$$\lambda = \frac{v}{u} = \frac{1}{\omega s/v} \quad (1)$$

Alle Anstellwinkel werden dabei als kleine Größen angesehen. Der Fortschrittsgrad ist dann nach unten beschränkt (λ etwa > 3), damit α_2 nicht den maximalen Anstellwinkel überschreitet. Dieses großen Fortschrittsgrades wegen wollen wir bei der Berechnung der Luftkräfte voraussetzen, daß das abgehende Wirbelband unverformt in einer ebenen Fläche von der Anströmung mitgenommen wird. Wie weit diese Voraussetzung in unserem Falle gerechtfertigt ist, geht aus einer Arbeit von H. Schubert⁶⁾ hervor; dort hat sich gezeigt, daß der Einfluß der schraubenförmigen Gestalt des Wirbelbandes für $\lambda = 1$ verhältnismäßig gering ist. Außerdem sollen instationäre Vorgänge sowie der Einfluß des periodischen Schiebens (bei $\alpha_0 \neq 0$) unberücksichtigt bleiben. Zur Berechnung der Luftkräfte kann demnach die Prandtl'sche Tragflügelgleichung in der üblichen Form dienen. Nehmen wir noch eine elliptische Tiefenverteilung $l(\eta) = l_0 \sqrt{1-\eta^2}$ des Flügels an, so erhalten wir für den Anstellwinkelanteil α_1 der Schräganblasung die Auftriebsverteilung (im rotierenden System):

$$\gamma_1(\eta, \varphi, \alpha_0) = \frac{c_{a_1}(\eta, \varphi, \alpha_0) \cdot l(\eta)}{4s} = \frac{4\sigma}{2\sigma + \Lambda} \sqrt{1-\eta^2} \cdot \alpha_0 \cos \varphi \quad (2)$$

und für den Rollanteil α_2 des Anstellwinkels:

$$\gamma_2(\eta, \lambda) = \frac{c_{a_2}(\eta, \lambda) \cdot l(\eta)}{4s} = \frac{4\sigma}{4\sigma + \Lambda} \sqrt{1-\eta^2} \cdot \frac{\eta}{\lambda} \quad (3)$$

Dabei ist $\sigma = \frac{1}{2\pi} (dc_a/d\alpha)_{\Lambda=\infty}$ (ebene Platte: $\sigma = 1$); c_{a_1} und c_{a_2} sind Beiwerte der örtlichen Auftriebskräfte pro Längeneinheit:

⁶⁾ H. Schubert, Die Berechnung der aerodynamischen Eigenschaften von Luftschrauben beliebiger Form bei schwacher Belastung. Jahrb. 1940 d. dt. Luftfahrt., S. 1 690.

$$c_a(\eta) = \frac{dA(\eta)/d\eta}{\frac{\rho}{2} v^2 \cdot l(\eta)}$$

In (2) haben wir die bekannte elliptische Auftriebsverteilung vor uns in einer für unsere Zwecke bequemen Schreibweise. Der Ausdruck γ_2 nach (3) ist eine weitere exakte Lösung der Prandtl'schen Tragflügelgleichung⁷⁾. Dies ist der Grund dafür, daß wir nur den unverwundenen und nicht den luftschraubenähnlich verwundenen Flügel behandeln, da sich jetzt alle Größen in geschlossener Form angeben lassen; und es uns hier nur auf die grundsätzlichen Erscheinungen ankommt.

Aus den Auftriebskräften je Längeneinheit $\gamma_1 + \gamma_2$ im rotierenden System erhalten wir die Vertikalkräfte $\gamma_{1a} + \gamma_{2a}$ im strömungsfesten System unter der üblichen Beschränkung auf kleine α_0 und Glieder erster Ordnung durch Multiplikation mit $\cos \varphi$:

$$\gamma_a = \frac{c_{za} l}{4s} = \gamma_{1a} + \gamma_{2a} = (\gamma_1 + \gamma_2) \cos \varphi \quad (4)$$

Diese Kräfte werden positiv gerechnet in negativer z_a -Richtung. Die während des Umlaufs wechselnden strömungsfesten Vertikalkräfte an der Achse K_{za} ergeben sich durch Integration von (4) über η :

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_{za} &= \frac{K_{za}}{\frac{\rho}{2} v^2 F} = \Lambda \int_{-1}^{+1} \frac{c_{za} \cdot l}{4s} d\eta \\ \bar{c}_{za}(\alpha_0, \varphi) &= \frac{2\pi\sigma\Lambda}{2\sigma + \Lambda} \alpha_0 \cos^2 \varphi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diese durch die Schräganblasung hervorgerufenen Kräfte sind also vom Fortschrittsgrad unabhängig und verschwinden mit α_0 . Eine weitere Mittelbildung über φ bringt uns den mittleren Auftriebsbeiwert des rollenden Flügels:

$$\bar{c}_{za}(\alpha_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi\sigma\Lambda}{2\sigma + \Lambda} \cdot \alpha_0 \quad (6)$$

Darin ist die Komponente der Kraft in Flugrichtung (Propellerschub) nicht mit enthalten.

Zur Berechnung der Luftkräfte in Flugrichtung müssen wir zunächst den induzierten Widerstand bestimmen. Die zu den beiden Auftriebsverteilungen (2) und (3) gehörigen induzierten Anstellwinkel ergeben sich zu

$$\alpha_{i_1}(\varphi, \alpha_0) = \frac{2\sigma}{2\sigma + \Lambda} \alpha_0 \cos \varphi \quad (7)$$

$$\alpha_{i_2}(\eta, \lambda) = \frac{4\sigma}{4\sigma + \Lambda} \cdot \frac{\eta}{\lambda} \quad (8)$$

Daraus erhalten wir mit

$$c_{wi} = c_a \cdot \alpha_i \quad (9)$$

die Tangentialkraft c_t (in Nullauftriebsrichtung gelegen) im rotierenden System aus

$$\begin{aligned} c_t &= -c_a \alpha + c_{wi} + c_{wp} \\ &= -\frac{4s}{l} (\gamma_1 + \gamma_2) \left(\alpha_0 \cos \varphi + \frac{\eta}{\lambda} - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} \right) + c_{wp} \\ &= -\frac{4s}{l} (\gamma_1 + \gamma_2) \left(\alpha_0 \cos \varphi \frac{\Lambda}{2\sigma + \Lambda} + \frac{\eta}{\lambda} \cdot \frac{\Lambda}{4\sigma + \Lambda} \right) + c_{wp} \end{aligned} \quad (10)$$

Darin ist c_{wp} der als konstant angenommene Profilwiderstand des Flügels. Durch Einsetzen der Beziehungen (2) und (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{c_t(\eta, \varphi, \lambda, \alpha_0) l(\eta)}{4s} &= -\frac{4\sigma\Lambda}{(2\sigma + \Lambda)^2} \alpha_0^2 \cos^2 \varphi \sqrt{1 - \eta^2} \\ &\quad - \frac{8\sigma\Lambda}{(2\sigma + \Lambda)(4\sigma + \Lambda)} \alpha_0 \cos \varphi \frac{\eta}{\lambda} \sqrt{1 - \eta^2} \\ &\quad - \frac{4\sigma\Lambda}{(4\sigma + \Lambda)^2} \frac{\eta^2}{\lambda^2} \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{c_{wp} l}{4s} \end{aligned} \quad (11)$$

Darin sind nach hinten gerichtete Kräfte (Widerstände) positiv gezählt. Die Komponente c_{za} der Luftkräfte in negativer Flugrichtung ergibt sich aus:

$$c_{za} = c_t + c_n \alpha_0 \cos \varphi = -c_a \cdot \frac{\eta}{\lambda} + c_{wi} + c_{wp} \quad (12)$$

Dabei ist $c_n = c_{a1} + c_{a2}$ zu setzen. Aus den Gl. (2), (3) und (11) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{c_{za}(\eta, \varphi, \lambda, \alpha_0) l(\eta)}{4s} &= \frac{8\sigma^2}{(2\sigma + \Lambda)^2} \alpha_0^2 \cos^2 \varphi \sqrt{1 - \eta^2} \\ &\quad + \frac{4\sigma(2\sigma - \Lambda)}{(2\sigma + \Lambda)(4\sigma + \Lambda)} \alpha_0 \cos \varphi \frac{\eta}{\lambda} \sqrt{1 - \eta^2} \\ &\quad - \frac{4\sigma}{(4\sigma + \Lambda)^2} \frac{\eta^2}{\lambda^2} \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{c_{wp} l}{4s} \end{aligned} \quad (13)$$

Die während des Umlaufs periodisch wechselnden Kräfte \bar{c}_{za} an der Achse in negativer Flugrichtung bekommen wir durch Integration von (13) über η :

$$\bar{c}_{za} = \frac{4\pi\sigma^2\Lambda}{(2\sigma + \Lambda)^2} \alpha_0^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \frac{\pi\sigma\Lambda^2}{(4\sigma + \Lambda)^2} \frac{1}{\lambda^2} + \bar{c}_{wp} \quad (14)$$

Die entsprechende Kraft \bar{c}_x in Drehachsenrichtung entnimmt man aus (14), indem man $\alpha_0 = 0$ setzt. Der mittlere Vortriebsbeiwert $-\bar{c}_{xa}$ (in Flugrichtung) ist dann

$$\begin{aligned} \bar{c}_{xa} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{c}_{za} d\varphi = -\frac{2\pi\sigma^2\Lambda}{(2\sigma + \Lambda)^2} \alpha_0^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\pi\sigma\Lambda^2}{(4\sigma + \Lambda)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2} - \bar{c}_{wp} \end{aligned} \quad (15)$$

Damit wird die Gesamtkraft $\bar{c}_x(\lambda, \alpha_0)$ in Richtung der Drehachse:

$$\bar{c}_x(\lambda, \alpha_0) = \frac{1}{2} \frac{\pi\sigma\Lambda^2}{(4\sigma + \Lambda)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \quad (16)$$

Die Komponente $\bar{c}_x \cdot \alpha_0$ dieser Kraft liefert einen zusätzlichen Beitrag zur Vertikalkraft \bar{c}_{za} nach (6), der jedoch im allgemeinen vernachlässigbar klein ist.

Auf analoge Weise berechnen wir den Beiwert \bar{C}_d des an der Drehachse wirksamen Luftkraftmomentes M :

$$\bar{C}_d = \frac{M}{\frac{\rho}{2} v^2 F s} \quad (17)$$

aus den Auftriebsverteilungen (2) und (3):

$$\bar{C}_d = \frac{\Lambda}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} (\gamma_1 + \gamma_2) \eta d\eta d\varphi$$

Bei der hier benutzten Näherung werden die bei Schräganblasung auftretenden Schieberollmomente nicht berücksichtigt, so daß das Drehmoment von φ und α_0 unabhängig wird:

$$\bar{C}_d = \frac{1}{2} \frac{\pi\sigma\Lambda}{4\sigma + \Lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \quad (18)$$

Damit sind die auftretenden Kräfte und Momente bestimmt.

III. Diskussion der Ergebnisse der Rechnung

(Vergleich mit dem stationären Fall und Überblick über die konstruktiven Schwierigkeiten.)

Wenn auch der von uns behandelte Extremfall einer zweiblättrigen Luftschraube sich weitgehend von dem vorgeschlagenen Flugzeug unterscheidet, so erhalten wir doch einen Überblick über die mindestens zu erwartenden Luftkräfte und die schlimmstenfalls auftretenden Beanspruchungen. Während sich manche Ergebnisse ohne Schwierigkeit näherungsweise auf die mehrblättrige gegenläufige Luftschraube übertragen lassen werden, müssen wir bei anderen sehr vorsichtig in den Folgerungen sein.

Wir betrachten zunächst die Auftriebskraft, die durch (6) gegeben ist. Diese ist genau halb so groß wie der Auftrieb

$c_a = \frac{2\pi\sigma\Lambda}{2\sigma + \Lambda} \alpha_0$ des unter dem Winkel α_0 angeströmten nichtrotierenden Flügels, ein Ergebnis, das zu erwarten ist,

⁷⁾ Diese Verteilungsfunktion ist identisch mit der bekannten dritten Birnbaumschen Wirbelverteilung über die Tiefe eines ebenen dünnen Profils, welches eine Skelettlinie mit S-Schlag liefert.

wenn man bedenkt, daß der Flügel in den Stellungen $\varphi = \pi/2$ und $\varphi = 3\pi/2$ ohne Auftrieb ist. Unter sonst gleichen Verhältnissen müßte also der rollende Flügel z. B. mit doppeltem Anstellwinkel fliegen, um wieder denselben Auftrieb zu erhalten. Daß dies im Schnellflug möglich ist, werden wir später zeigen. Die Kräfte in Flugrichtung teilen wir auf in einen Widerstand

$$c_{wstat.} = c_{wistat.} + c_{wp} = \frac{1}{\pi A} \bar{c}_{\alpha_0}^2 + c_{wp} = \frac{\pi \sigma^2 A}{(2\sigma + A)^2} \alpha_0^2 + c_{wp} \dots (19)$$

der auch im stationären Falle (nichtrotierender Flügel) bei demselben c_{α} -Wert vorhanden ist⁹⁾, und in den Restanteil, welcher den durch die Rotation hervorgerufenen Vortrieb oder Schub darstellt⁹⁾:

$$C_s = \frac{1}{2} \frac{\pi \sigma A^2}{(4\sigma + A)^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\pi \sigma^2 A}{(2\sigma + A)^2} \alpha_0^2 \dots (20)$$

In Anlehnung an die bei Luftschrauben üblichen Bezeichnungen sei C_s positiv in Flugrichtung. Es läßt sich also in unserem Falle der Schub aus den Daten der Luftschraube: Auftriebsgradient und Seitenverhältnis der Blätter, Fortschrittsgrad und Schräganstellungswinkel in geschlossener Form berechnen. Die Schräganblasung verursacht einen zusätzlichen Widerstand, der genau so groß ist wie der zu dem entstehenden Auftrieb gehörige induzierte Widerstand $c_{wistat.}$, so daß also der rollende Flügel bei gleichem Anstellwinkel α_0 den halben Auftrieb und den doppelten induzierten Widerstand wie der nichtrotierende Flügel besitzt. Da wir jedoch nur den Schnellflug, also ohnehin kleine c_{α} -Werte betrachten, so fällt der induzierte Widerstand noch nicht sehr ins Gewicht; trotzdem wird man auf ein hinreichend großes Seitenverhältnis der Blätter Wert legen müssen. Wir können nun einen Vortriebswirkungsgrad η_i definieren, indem wir in üblicher Weise die nutzbare Schubleistung zu der gesamten aufzuwendenden Leistung ins Verhältnis setzen; wir erhalten so den induzierten Wirkungsgrad¹⁰⁾:

$$\eta_i = \frac{C_s}{C_d} \lambda = \frac{C_s}{C_L} \dots (21)$$

mit
$$C_L = \frac{L}{\frac{\rho}{2} v^3 F} = \frac{C_d}{\lambda}$$

Es ergibt sich aus (18) und (20)

$$\eta_i = \frac{A}{4\sigma + A} - 2\sigma \frac{4\sigma + A}{(2\sigma + A)^2} \alpha_0^2 \lambda^2 \dots (22)$$

In diesem Ausdruck ist die zur Überwindung des Profilwiderstandes benötigte Leistung nicht enthalten, da diese beim Triebflügel in seiner Eigenschaft als Vortriebsorgan nicht neu hinzukommt, sondern bereits bei seiner Eigenschaft als Tragwerk zu berücksichtigen ist. Man spart eben einen Wirkungsgrad. In Bild 2 ist der Wirkungsgrad des Flügels ohne Schräganblasung, welcher dann nur von der Profilkonstanten und vom Seitenverhältnis abhängt, über dem Schub für verschiedene Fortschrittsgrade aufgetragen. Es zeigt sich wieder die Wichtigkeit eines großen Seitenverhältnisses¹¹⁾. Es ist jedoch zu bedenken, daß der von uns betrachtete Fall des geraden, unverwundenen Flügels nicht den optimalen Wirkungsgrad liefert. Bild 3 zeigt für ein bestimmtes Seitenverhältnis den Einfluß der Schräganblasung auf den Wirkungsgrad, der erfreulicherweise selbst in unserem Falle in dem interessierenden \bar{c}_{α_0} - und C_s -Bereich sehr gering ist, da α_0 in (22) nur quadratisch eingeht. Einen

⁹⁾ Wir schreiben wieder c_{wp} statt \bar{c}_{wp} , was wegen der angenommenen Konstanz dieser Größe erlaubt ist.
¹⁰⁾ Bei den hier benutzten Beiwerten ist darauf zu achten, daß F die Flügelfläche und nicht die Propellerkreisfläche ist. Es gilt:

$$c_i = S \sqrt{\frac{\rho}{2}} v^3 F_p = 4 C_s / \pi A$$

¹¹⁾ Da Verwechslungen ausgeschlossen sind, schreiben wir wieder C_d statt \bar{C}_d .

¹²⁾ Es sei darauf hingewiesen, daß bei uns das Seitenverhältnis des ganzen Flügels und nicht dasjenige einer Flügelhälfte (eines Blattes) gemeint ist. Bei den heutigen Luftschrauben ist A erheblich größer als die in den Beispielen benutzten Werte (bis zu $A = 100$).

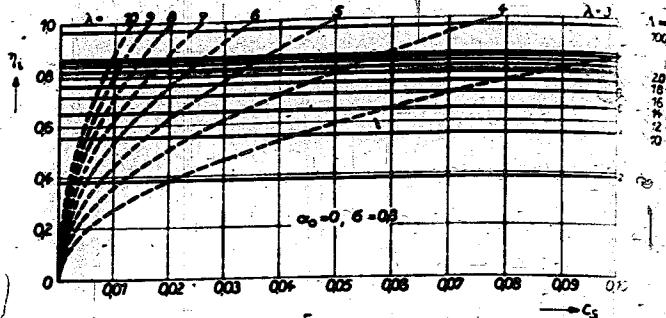


Bild 2. Zusammenhang zwischen Schub, Fortschrittsgrad, Seitenverhältnis und induziertem Wirkungsgrad bei $\alpha_0 = 0$.

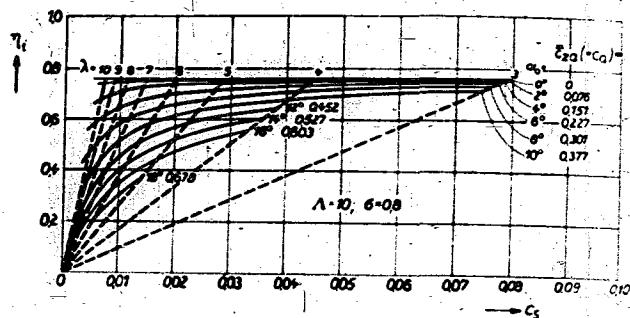


Bild 3. Einfluß der Schräganblasung auf den Wirkungsgrad des Triebflügels.

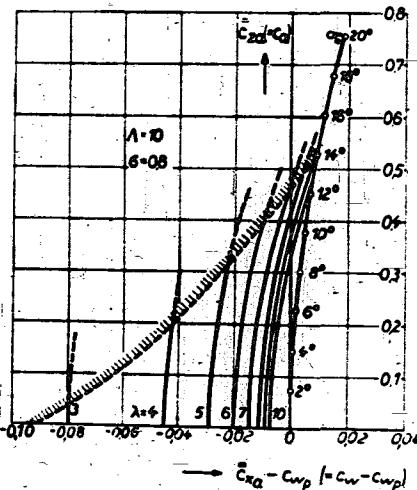


Bild 4. Polare eines Triebflügels (ohne Profilwiderstand). Der Bereich der möglichen Flugzustände (nichtabgerissene Strömung) ist durch Schraffur begrenzt.

weiteren Überblick gibt für ein Beispiel die Polare in Bild 4, welche erkennen läßt, daß selbst der extreme Fall des Triebflügels mit zwei Blättern bereits die bei den heute üblichen Widerständen erforderlichen Auftriebs- und Schubkräfte liefert.

Wir kommen nun zu dem auftretenden Luftkraftmoment und wollen zunächst einige bereits bekannte Tatsachen besprechen, die sich besonders einfach aus unseren Ergebnissen herleiten lassen und die für unseren Zweck von Wichtigkeit sind. Zunächst ergibt sich für den Fall $\alpha_0 = 0$ zwischen dem Drehmomentenbeiwert C_d nach (18) und dem Schubbelastungsgrad nach (20) die Beziehung:

$$C_s = \frac{2}{\pi \sigma} C_d^2 \dots (23)$$

oder

$$K_s = \frac{2}{\pi \sigma} \frac{K_d^2}{\lambda^2} \dots (23a)$$

mit $K_s = C_s \cdot \lambda^2$ und $K_d = C_d \cdot \lambda^2$. Außerdem gilt für den induzierten Wirkungsgrad (für $\alpha_0 = 0$):

$$\eta = \frac{A}{\sigma + A} = \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma} \lambda} \cdot \sqrt{C_s} = \sqrt{\frac{2}{\pi \sigma} K_s}$$

$$= \frac{2}{\pi \sigma} \lambda C_d = \frac{2}{\pi \sigma} \frac{1}{\lambda} K_d = \frac{2}{\pi \sigma} \lambda^2 C_l \quad (24)$$

Aus diesen Beziehungen geht u. a. hervor, daß der induzierte Wirkungsgrad (im Gegensatz zum theoretischen Wirkungsgrad der Strahltheorie, welcher die Verluste an kinetischer Energie im Strahl berücksichtigt) mit wachsender Belastung C_s zunimmt. Wir wollen nun weiterhin die Leistungsbilanz des betrachteten Flugzeugs mit der eines normalen vergleichen. Wir untersuchen der Einfachheit halber nur den Fall $\alpha_0 = 0$ und setzen vorübergehend statt s das Zeichen R (Radius der Schraubenkreisfläche). Wir wollen nur Luftschrauben miteinander vergleichen, bei denen die Blattzahl der Auftriebsgradient (und damit σ) sowie das Seitenverhältnis (Blattbreitenverhältnis) einander gleich sind. Dann bleibt auch der induzierte Wirkungsgrad wegen (24) unverändert. Der benötigte Schub S_b muß im Horizontalflug gleich dem Widerstand W sein, d. h. $S_b = W \sim s^2 a^2$. Weiter ist die benötigte Schubleistung L_b :

$$L_b = W v \sim s^2 v^3$$

(\sim bedeutet proportional). Andererseits gilt nach (24) für die von der Luftschraube zur Verfügung gestellten Schübe und Leistungen:

$$S \sim u^2 R^2$$

$$M \sim v u R^3$$

$$L = M \omega \sim v u^2 R^2$$

In diesen Beziehungen ist die Umfangsgeschwindigkeit $u = R\omega$ eingeführt, von der wir annehmen wollen, daß sie nach oben beschränkt, also in unserer Betrachtung nicht variabel ist. Da nun die benötigte Schubleistung L_b bei größeren Fluggeschwindigkeiten mit v^3 ansteigt, die von der Luftschraube aufzunehmende jedoch nur mit v , kann man unter den angeführten Bedingungen die Leistungsaufnahme der Luftschraube wegen (28) nur durch Vergrößern von R steigern, ohne daß der induzierte Wirkungsgrad verschlechtert wird. Dabei wird der theoretische Strahlwirkungsgrad besser. Wir sehen also schon an diesem speziellen Falle, daß aus aerodynamischen Gründen eine Vergrößerung des Luftschraubendurchmessers angezeigt ist. Setzt man daher $R = s$, um die Entwicklung extrem durchzuführen, so kann man diese »Luftschraube« dann auch gleich benutzen, um, wie wir gezeigt haben, den nötigen Auftrieb damit zu erzeugen. Der Triebflügel erfüllt also eine der im ersten Abschnitt gestellten Bedingungen: er kann die bei hohen Fluggeschwindigkeiten erforderlichen großen Triebwerksleistungen bei einem besseren (induzierten und theoretischen) Wirkungsgrad aufnehmen als die heute üblichen Luftschrauben. Daß damit gleichzeitig eine erhebliche Herabminderung des Fluggeräusches zu erwarten ist, sei nur nebenbei erwähnt.

Wir kommen nun an einen Punkt, der für die Durchführbarkeit des Projektes entscheidend wichtig ist: Werden die bei den großen Fortschrittsgraden und verhältnismäßig kleinen Drehzahlen zu erwartenden Drehmomente konstruktiv zu beherrschen sein? Zu dieser Frage werden wir zahlenmäßig feststellen, wie groß die Momente in einigen praktischen Fällen werden und dabei gleichzeitig auch die übrigen interessierenden Größen abschätzen. Bei dem ersten Zahlenbeispiel wollen wir den Flugzustand des Hubschraubers bei Start und Landung insoweit berücksichtigen, als wir das Fluggewicht und die übrigen Baugrößen in Anlehnung an den Hubschrauber Fw 61 so wählen, daß sie den Hubflug ermöglichen. Es sei daher

das Fluggewicht G	1000 kg,
die Gesamtfläche F	5,0 m ² ,
verteilt auf zwei dreiblättrige Schrauben vom Radius R	3,75 m,
und einer mittleren Tiefe l_m	0,22 m,
damit ist die Flächenbelastung G/F	200 kg/m ² ,
die Drehzahl n	300 U/min.

Wir betrachten nun den Schnellflugfall und nehmen an, um überhaupt zu einer Abschätzung zu kommen, daß wir statt der beiden dreiblättrigen Schrauben eine zweiblättrige berechnen können, die nur ein Drittel der Gesamtfläche hat und nur ein Drittel des Auftriebes und des Schubes aufzubringen hat. Diese »Linearisierung« dürfte in unserem Fall in erster Näherung gerechtfertigt sein. Der untersuchte Triebflügel hat dann folgende Abmessungen:

Fläche F	1,67 m ² ,
Halbspannweite s	3,75 m,
Seitenverhältnis λ	30
ferner sei der Auftriebsgradient $dc_a/d\alpha$	0,8 · 2π, also
$\sigma = 0,8$,	
die Flächenbelastung ist wie oben G/F	200 kg/m ² .

Aus diesen Größen können wir nun die Leistungsdaten berechnen.

Als Horizontalgeschwindigkeit fordern wir $v = 150$ m/s	
das bedingt ein $c_a (= \bar{c}_{za}) = 0,142$	
und einen Schräganblasungswinkel	
nach (6) $\alpha_0 = 0,060 = 3,4^\circ$	

Diese Werte sind wesentlich durch die hohe Flächenbelastung bedingt. Eine solche kann jedoch zugelassen werden, da das betrachtete Flugzeug ja nicht wie ein normales zu landen und zu starten braucht: Hohe Flächenbelastungen sind geradezu ein besonderes Kennzeichen des Triebflügels. — Um den Schubbeiwert zu bekommen, müssen wir eine Annahme über den Widerstand des Flugzeugs machen; wir wählen, um einen Überblick zu bekommen, für den auf die Flügelfläche bezogenen Widerstandsbeiwert (in welchem der Profilwiderstand wie auch der des Rumpfes usw. enthalten sein soll) zwei Werte 0,03 und 0,04. Die zum letzteren gehörigen Größen sollen im folgenden in Klammer gesetzt werden. Damit ist

der Schubbeiwert C_s	0,03	(0,04)
der Fortschrittsgrad λ nach (20)	5,82	(5,05)
die Umfangsgeschwindigkeit		
$u = v/\lambda$	25,8 m/s	(29,7 m/s)
die Blattspitzengeschwindigkeit	152 m/s	(153 m/s)
die Winkelgeschwindigkeit		
$\omega = u/s$	6,88/s	(7,92/s)
die Drehzahl n	65,7 U/min	(75,6 U/min)
der maximale Anstellwinkel an der Flügelspitze $\alpha_{max} = \alpha_0 + 1/\lambda$	13,5°	(14,8°)

Wir brauchen also ein Untersetzungsgetriebe, welches die Drehzahl von 300 U/min im Hubflug auf etwa ein Viertel im Schnellflug herabsetzt.

Weiterhin ergibt sich:

der maximale theoretische Strahlwirkungsgrad, der wegen der in Wirklichkeit vorhandenen gegenläufigen Schrauben maßgebend sein wird, η_m	1,00	1,00
der induzierte Wirkungsgrad η_i nach (22)	0,90	(0,90)
der Drehmomentenbeiwert C_d nach (23)	0,194	(0,224)
das Luftkraftmoment M nach (17)	1710 mkg	(1972 mkg)
die Leistung $M\omega$, die aufgenommen werden kann	156 PS	(208 PS)
die Gesamtleistung bei zwei gegenläufigen dreiblättrigen Schrauben L_{ges}	468 PS	(624 PS)
die Leistungsbelastung G/L_{ges}	2,14 kg/PS	(1,62 kg/PS)

Ein weiteres Beispiel wird die charakteristischen Eigenschaften des Triebflügels: hohe Geschwindigkeit, hohe Flächenbelastung und große Leistung der »Schraube« bei vergleichsweise kleiner Blattspitzengeschwindigkeit und gutem Wirkungsgrad noch deutlicher zeigen:

Es seien gegeben:

$$G = 10000 \text{ kg}; \quad \frac{G}{F} = 400 \text{ kg/m}^2; \quad \sigma = 0,9; \quad c_w = 0,02.$$

Das Triebwerk bestehe aus zwei vierblättrigen Triebflügeln einer Spannweite $2s = 12$ m.

Gefordert werde eine Geschwindigkeit von $900 \text{ km/h} = 250 \text{ m/s}$.

Aus diesen Daten ergibt sich:

das Seitenverhältnis λ	23
die mittlere Tiefe l_m	0,52 m
der Auftriebsbeiwert $c_a = \bar{c}_{zu}$	0,102
der Anstellwinkel α_0	2,23°
der Schubbeiwert C_s	0,02
der Fortschrittsgrad λ	7,24
die Umfangsgeschwindigkeit u	34,5 m/s
die Blattspitzengeschwindigkeit $w = \sqrt{u^2 + v^2}$	252 m/s
die Winkelgeschwindigkeit ω	5,75/s
die Drehzahl n	55,0/min
der maximale Anstellwinkel an der Blattspitze α_{\max}	10,2°
der Wirkungsgrad η_i	0,86
der Drehmomentenbeiwert C_d	0,168
das Luftkraftmoment an einem Blatt M	12300 kgm
die erforderliche Gesamtleistung L_{ges} (zwei vierblättrige Triebflügel)	7560 PS
die Leistungsbelastung G/L_{ges}	1,32 kg/PS

Die angegebenen Leistungen und Momente seien in bezug auf konstruktive Durchführbarkeit zur Diskussion gestellt. Dabei mag darauf hingewiesen werden, daß das Moment von 12300 kgm in Beispiel 2 nicht größer ist als die Momente, die beim Hochreißen eines Flugzeugs vom Typ Me 109 am Flügel auftreten. — Als Hauptschwierigkeit erscheint uns die Konstruktion des Getriebes, dessen Gewicht entscheidend wichtig ist. Den angeführten Beispielen kommt nur eine orientierende Bedeutung zu, da es

u. a. zweifelhaft ist, ob man z. B. einen Motor von 7500 PS mit Getriebe in einem Flugzeug von 10 t unterbringen kann.

In diesem Zusammenhang sei ein Flugmodell erwähnt, das der erstgenannte Verfasser nach dem besprochenen Prinzip gebaut hat, auf welches im nächsten Abschnitt noch näher eingegangen werden soll. Ein Vergleich mit dem früher gebauten reinen Schwingenflugmodell (vgl. dazu die Daten in den unter Fußnote 1 angeführten Arbeiten), welches mit auf- und abschlappenden Flügeln den Vogelflug unmittelbar nachahmte, ergab bei annähernd gleicher Größe der tragenden Flächen und der Motorleistung, daß das Triebflügelmodell mehr als das doppelte Gewicht tragen konnte bei ähnlichen Flugleistungen wie das Schwingenmodell. Im Verhältnis zum Gewicht braucht also das Schwingenmodell einen etwa doppelt so starken Motor wie das Triebflügelmodell.

Neben den bisher behandelten Gesamtkräften interessieren für die Beanspruchung des Triebflügels auch die Einzelkräfte in ihrer Abhängigkeit von der Koordinate η in Spannweitenrichtung und vom Rollwinkel φ , welche wir aus den Beziehungen des vorigen Abschnittes berechnen können. Für ein Beispiel sind die Ergebnisse in Bild 5 bis 10 aufgetragen. Die Daten haben wir dem oben besprochenen Fall des Flugzeugs von 1000 kg Fluggewicht mit $c_w = 0,04$ entnommen. Man erkennt, daß die Kräfte in Spannweitenrichtung wesentlich durch die Luftschraubeneigenschaft des Triebflügels bedingt sind, daß also die Beanspruchungen eine gewisse Ähnlichkeit mit denen von Luftschrauben haben (wobei jedoch die Beanspruchungen des Materials durch Zentrifugalkräfte der geringen Drehzahl wegen stark vermindert sind.) Die Schräganblasung ruft periodische Unsymmetrien in den Luftkraftverteilungen hervor. Bei den Kräften an der Drehachse sind die Schwankungen des

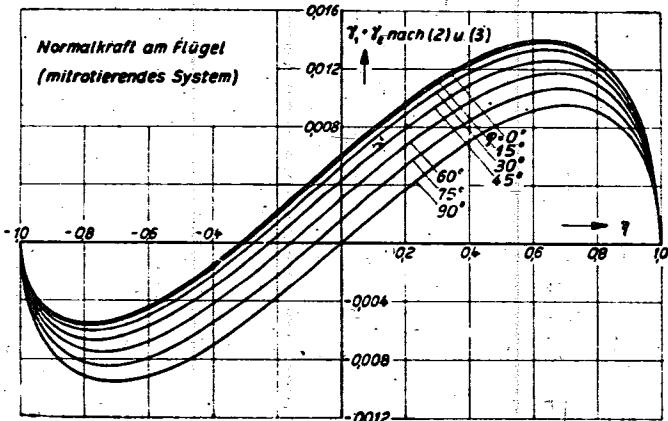


Bild 5.

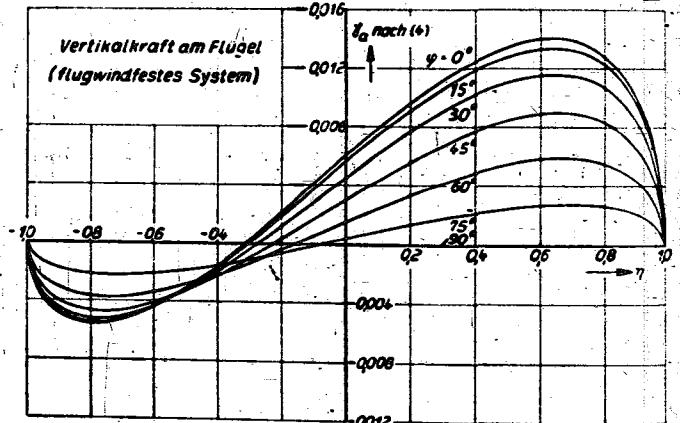


Bild 6.

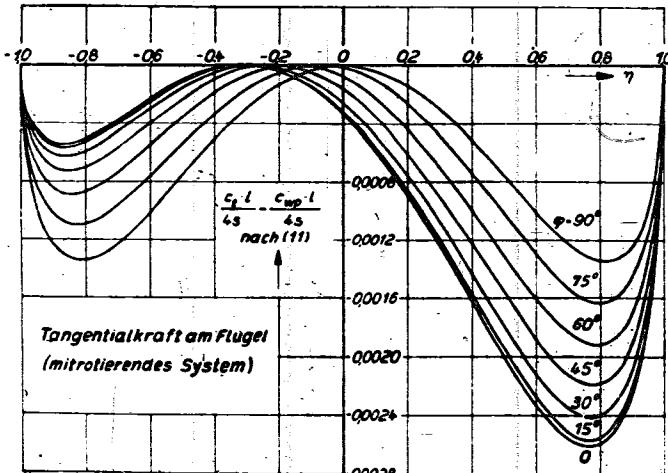


Bild 7.

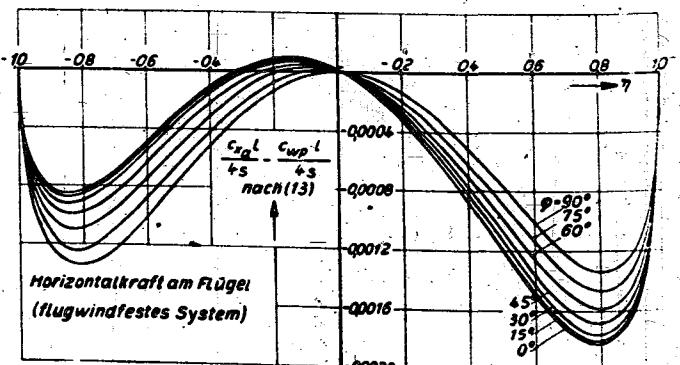


Bild 8.

Bild 5 bis 8. Luftkräfte an einem Triebflügel für ein Zahlenbeispiel. $\lambda = 30$; $\sigma = 0,8$; $\alpha_0 = 3,4^\circ$; $\lambda = 5,05$. Beispiel 1; S. 37f.

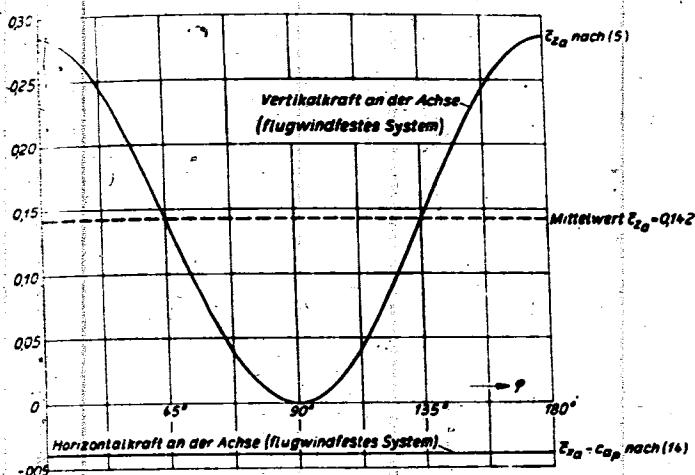


Bild 9. Kräfte an der Drehachse eines zwei-blättrigen Triebflügels. (Beispiel 1 mit $G = 1000 \text{ kg}$; $c_{D0} = 0,04$; Seite 37f.)

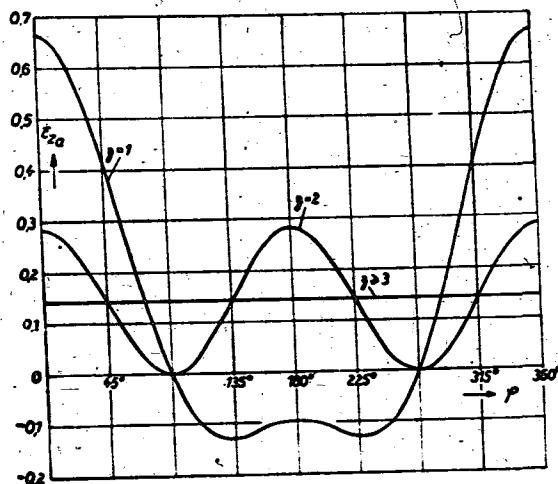


Bild 10. Einfluß der Blattzahl ζ auf die Kräfte an der Drehachse. (Beispiel 1 mit $G = 1000 \text{ kg}$; $c_{D0} = 0,04$; Seite 37f.)

Schubs recht klein, während der Auftrieb beträchtlich wechselt, Bild 9, $\zeta = 2$. Man muß jedoch bedenken, daß die bisherigen Überlegungen sich auf einen zwei-blättrigen Triebflügel beziehen. Wenn der Triebflügel aber drei oder mehr Blätter hat, so verschwinden sowohl die Schub- als auch die Auftriebsschwankungen völlig, wie man aus den Gl. (4) und (13) beweisen kann. Zur Veranschaulichung zeigt Bild 10 den Einfluß der Blattzahl ζ auf die Vertikalkraft an der Drehachse. Bei all diesen Berechnungen und Überlegungen ist zu beachten, daß es sich dabei um nur prinzipielle Ergebnisse an einfachen, nicht verwundenen Blättern handelt; im praktischen Falle wird sich durch geeignete Wahl der Blattausbildung eine weitgehende Anpassung an die jeweiligen Erfordernisse (Leistungsgrenzen des Materials usw.) erreichen lassen.

Die Verwirklichung des Triebflügels stellt also eine Reihe besonderer technischer Aufgaben, die im wesentlichen durch die geringen Drehzahlen und damit großen Drehmomente, durch die Forderung nach einem Untersetzungsgetriebe und nach weitgehender Verstellmöglichkeit gegeben sind. Es kann nicht unsere Aufgabe sein, an dieser Stelle Lösungen dieser Probleme zu geben; es kommt uns in der Hauptsache darauf an, das Prinzip darzulegen und die konstruktiven Schwierigkeiten aufzuzeigen und zur Diskussion zu stellen. Da wir bisher nur das extrem durchgeführte Prinzip betrachtet haben, soll jedoch darauf hingewiesen werden, daß auch Übergangsmöglichkeiten zwischen dem Normalflugzeug und dem neuen Projekt denkbar sind. So könnte man z. B. die Drehzahländerung dadurch vermeiden, daß man dem hinteren Triebflügel nur zwei Blätter gibt und diese im Schnellflug bei einer Steigung von annähernd 90° fixiert, wobei dann die vordere Schraube mit geringerer Blattsteigung und höherer Drehzahl für den Vortrieb allein sorgt und der hintere Flügel als Tragflügel nur zum Auftrieb beiträgt.

Bei der in einem sehr großen Bereich erforderlichen Verstellung der großen Flächen könnte ein automatisches Steuerungsprinzip zu Hilfe genommen werden, das die Beherrschung der auftretenden Momente um die Flügel-längsachse erleichtern würde, und welches in Bild 11 angedeutet ist. Man läßt dabei die Schwenkachse etwas schräg durch die Flächenebene verlaufen und überläßt einer elastischen Kraft die Einhaltung einer Ruhestellung mit einer Steigung von 90° . Im Hubflugzustand, also bei starker Anströmung der Flügelspitze und geringer Anströmung nahe der Drehachse liegt der Schwerpunkt der angreifenden Luftkräfte in weitem senkrechten Abstand von der Schwenkachse: die Fläche schlägt weit aus und wir erhalten eine geringe Blattsteigung. Im Schnellflug rückt der Luftkraftschwerpunkt zur Propellerachse und damit an die Schwenkachse heran, die Blattsteigung erhöht sich von selbst. Bei blockiertem Triebflügel (Gleitflug) rückt der Luftkraftschwerpunkt in die Schwenkachse, die Steigung wird 90° .

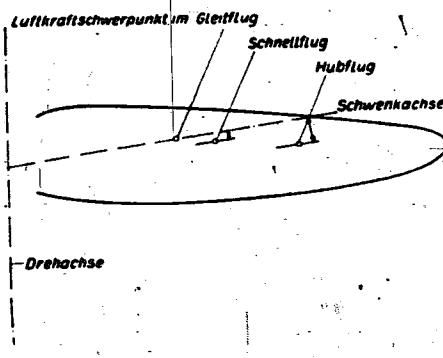


Bild 11. Prinzip einer automatischen Blattverstellung.

(Diese Verstellmöglichkeit bleibt natürlich nicht nur auf Triebflügel beschränkt.)

Eine besondere Aufgabe bildet die Ausführung des Fahr-gestelles. Läßt man vorerst die Möglichkeit einer schwenkbaren Propellerachse, die eine stets horizontale Lage des Rumpfes gestatten würde, aus konstruktiven Gründen außer Betracht, so ergibt sich die Notwendigkeit, eine Vorrichtung zu konstruieren, die einen Stand des Flugzeugs auf dem Rumpflheck ermöglicht¹²⁾.

IV. Die Flugeigenschaften des Triebflügels.

Um die Flugeigenschaften eines Triebflügels zu studieren, wurde von dem einen von uns (v. Holst) ein Flugmodell gebaut, von dem in Bild 12 einige Flugansichten gegeben sind. Der Durchmesser der beiden gegenläufigen dreiblättrigen Schrauben beträgt 0,55 m, die Gesamtfläche $0,08 \text{ m}^2$, von der ein Drittel auf die hintere feste Schwanzfläche entfällt. Im Horizontalflug werden $2/3$ des Gesamtauftriebes von den Triebflügeln, $1/3$ von der großen Schwanzfläche erzeugt. Die allgemeinen Flugeigenschaften des Triebflügels sind nach den vorliegenden Erfahrungen am Modell folgende:

Im Hubflug besteht ein Unterschied zum Hubschrauber nur im Vorhandensein von senkrechten festen Flächen (entsprechend Höhen- und Seitensteuer), die infolge ihrer Anströmung durch den Propellerstrahl zur Stabilisierung und ferner zur Einleitung des Überganges zum Horizontalflug herangezogen werden können. Im Horizontalflug ist die Fluglage völlig stabil; bei richtiger Schraubenblattsteigung und Höhenrudereinstellung kehrt das Flugmodell aus jeder anderen Ausgangslage in diese Fluglage zurück. Besonder-

¹²⁾ Ein Ausführungsvorschlag für eine solche Vorrichtung befindet sich z. B. in einer Patentschrift von O. Muck (DRP. 714001). Für ein Triebflügelflugzeug scheint uns allerdings Mucks Gedanke, das ganze Rumpflheck mitsamt dem Leitwerk seitlich auseinanderzuklappen, wenig geeignet. Die Patentschrift wurde uns erst nach Fertigstellung dieses Berichts bekannt. Wie weit auch M. an ein ähnliches Projekt wie das hier beschriebene gedacht hat, geht aus der Patentschrift nicht hervor.

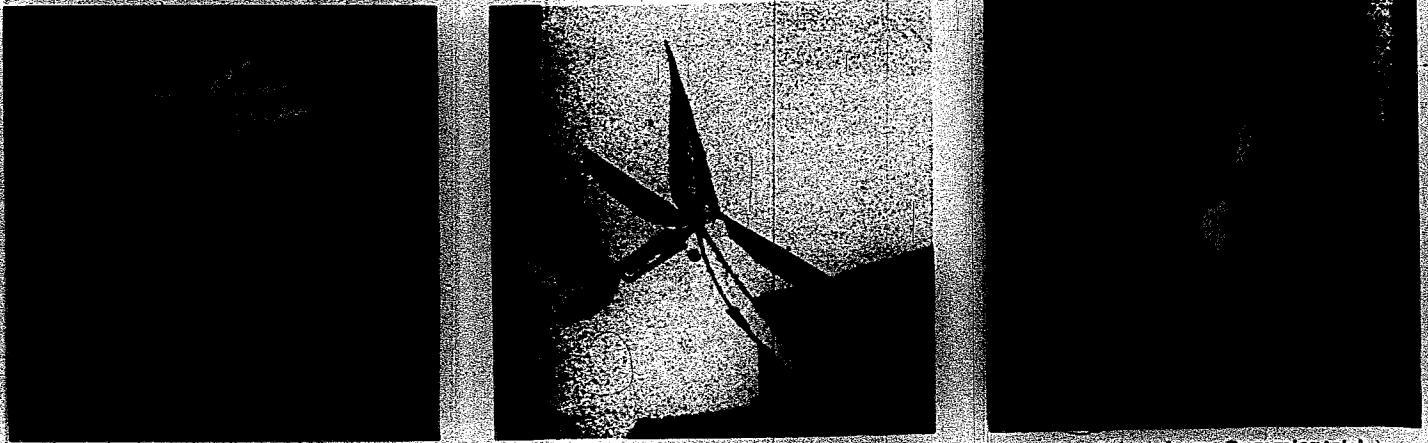


Bild 12. Modell eines Triebflügelflugzeugs im Hubflug, Steigflug und Schnellflug. (Zwei dreiblättrige Schrauben; Gummiantrieb.)

heiten ergeben sich dabei, wenn die Fluglage die Seitenlage ist: der Schwanz sinkt dann seitlich ab, während das Propellersystem wegen seiner Kreissymmetrie weiter trägt; der Apparat stellt sich damit vorübergehend steil auf in Hubschrauberstellung, sinkt dann (da die Schraubenströmung abreißt), nach unten durch, neigt sich dabei nach vorne und geht in den Horizontalflug über. — Für den Übergang vom Hub- zum Horizontalflug und zurück ist von Bedeutung, daß sich, bei entsprechender Einstellung der Schraubenblätter und richtigem Höhenruderausschlag auch beliebige Fluglagen zwischen der senkrechten und waagerechten Flugbahn einstellen lassen, in denen das Flugzeug völlig stabil einen beliebig schrägen Steigflug ausführt. Das Manöver des Übergangs von einem Flugzustand in den anderen dürfte demnach keine großen Schwierigkeiten bereiten.

Ein grundsätzlicher Unterschied zum Normalflugzeug zeigt sich beim Fliegen horizontaler Kurven. Das Flugzeug wird dabei nicht in die übliche Schräglage gebracht (diese würde den Kurvenflug sogar behindern), sondern es wird allein das Seitensteuer bestätigt und dadurch die Rotationsachse der Schrauben zur Fahrtrichtung seitlich gestellt. Die damit einhergehende Anströmung des Propellersystems von der Kurvenaußenseite her erzwingt eine Kurve von gegebenenfalls außerordentlich geringem Durchmesser. Die Seitensteuerung ist also sehr einfach, die Wendigkeit besonders groß. — Ein Kurvenflug kann auch auf andere Weise, nämlich durch bloße Schrägneigung um die Längsachse erzielt werden, die man z. B. durch gegensinnigen Ausschlag des rechten und linken Höhenruders erreichen kann. Die Schwanzfläche gleitet dann seitlich ab, es entsteht eine Kurve, bei der die Innenseite des Flugzeugs höher liegt als die dem Äußeren der Kurve zugewandte Seite. Zu einem eigentlichen »Trudeln« kommt es dabei nicht, weil die Schwanzfläche schnell an Höhe verliert, der Apparat ins Hängen und die Wendung zum Stillstand kommt; danach sinkt das Vorderende durch, das Flugzeug bekommt wieder Fahrt, Schräglage und Kurvenflug treten von neuem auf, und das gleiche Spiel wiederholt sich.

Was geschieht nun bei Ausfall des Triebwerkes? Zunächst hat das Schraubensystem verschiedene Autorotationsmöglichkeiten: Einmal bei horizontaler Lage der Drehachse als »Windmühle«, wobei Auftriebskräfte erzeugt werden, und weiterhin bei senkrechter Lage der Drehachse die Autorotationsmöglichkeit des Tragschraubers.

V. Zusammenfassung.

Eine Hauptaufgabe der Flugtechnik besteht auch heute noch darin, ein Flugzeug zu schaffen, welches eine große

Geschwindigkeitsspanne besitzt. Bei den erstrebten hohen Geschwindigkeiten liegt die Hauptschwierigkeit beim Vortriebsorgan, dessen Wirkungsweise durch den Einfluß der Kompressibilität der Luft möglichst wenig beeinträchtigt werden soll, und das die benötigten großen Triebwerksleistungen mit einem brauchbaren Wirkungsgrad aufzunehmen imstande sein muß. Bei den erstrebten kleinen Landegeschwindigkeiten liegt das Problem im Tragorgan, das in seiner heutigen starren Form eine gewisse, mit der Höchstgeschwindigkeit gekoppelte Mindestanströmungsgeschwindigkeit erfordert. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, grundsätzlich die Möglichkeit zu untersuchen, ob man sich ein Fluggerät denken kann, welches in bezug auf die obigen Forderungen mehr leistet als der heutige Flugzeugtyp, und das außerdem zur Arbeitsleistung ausschließlich die »Tragflügelkräfte« von zirkulatorisch umströmten Quertriebskörpern benutzt. Wir kommen dabei zu einem Flügel-system, das gleichzeitig den Vortrieb und den Auftrieb aufbringt, indem wir von dem uralten Vorbild der fliegenden Tierwelt ausgehen und dieses sinngemäß in die Flugtechnik übertragen. Der Vorgang dieser »Technisierung« wird ausführlich besprochen und dabei gleichzeitig das umstrittene und oft mit übertriebenen Hoffnungen beurteilte Prinzip des Schwingenflugs erörtert. — Das Triebflügel-system besteht aus zwei gegenläufigen mehrblättrigen Luftschrauben mit verhältnismäßig großem Durchmesser, deren Achse bei Start und Landung vertikal gestellt wird (Hubschrauberflug) bei zunehmender Fluggeschwindigkeit immer mehr nach vorne geneigt (Steigflug) und im Schnellflug nahezu horizontal gerichtet ist. Ein solches »Triebflügelflugzeug« vereinigt die Entwicklungstendenzen des Hubschraubers mit denen der heutigen Luftschrauben und kann gleichzeitig als Technisierung des Tierflugs angesehen werden. Es besitzt eine außergewöhnlich große Geschwindigkeitsspanne, ist wegen seiner geringen Blattspitzengeschwindigkeit nicht so empfindlich gegenüber dem Einfluß der Kompressibilität bei hohen Fluggeschwindigkeiten wie die normale schnellläufige Luftschraube, kann große Triebwerksleistungen bei gutem Wirkungsgrad aufnehmen und ermöglicht einen geräuschloseren Flug. Um die Verhältnisse im Schnellflug zu klären, wird eine einfache Theorie der zweiblättrigen Luftschraube großer Steigung bei großen Fortschrittsgraden angegeben; an Hand von einigen Beispielen werden die auftretenden Luftkräfte und Beanspruchungen abgeschätzt sowie die zu erwartenden konstruktiven Aufgaben, soweit sie sich überblicken lassen, besprochen. Die Erfahrungen an einem Flugmodell geben Aufschluß über die Flugeigenschaften.

Der Düsen einfluß auf die Windkanalkorrekturen bei ebener Strömung*).

Von F. Vandrey.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E. V., Institut für theoretische Aerodynamik.

Die Untersuchungen von L. Poggi [2] über den Düsen einfluß auf die Windkanalkorrekturen bei ebener Strömung werden durch eine Abänderung der zur Lösung führenden konformen Abbildung erweitert auf den Widerstandseinfluß, ferner wird eine erste Näherung für die Strahlverformung durch Auftrieb und Widerstand berechnet. Einige Überlegungen werden angeschlossen über die Eindeutigkeit der Lösung der vorliegenden und ähnlicher Aufgaben mit teils freien, teils festen Grenzen und über den Zusammenhang der Ergebnisse mit denen in den Grenzfällen des ganz geschlossenen Kanals und des reinen Freistrahles.

Gliederung.

- I. Aufgabenstellung.
- II. Die Randbedingungen der Aufgabe.
- III. Konforme Abbildung des Kanals auf die obere Hälfte des Äußeren des Einheitskreises.
- IV. Spiegelung der Singularitäten in der Bildebene.
- V. Einführung der Düsenpotentiale.
- VI. Vollständige Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Düsenpotentiale.
- VII. Berechnung des Vorstaues in der Düse, der Strahlablendung und der Korrektur der Anströmgeschwindigkeit.
- VIII. Zusammenhang der Korrekturformeln mit denen in den Grenzfällen des geschlossenen Kanals und des reinen Freistrahles.
- IX. Berechnung der Form der Strahlränder.
- X. Numerische Ergebnisse.
- XI. Zusammenfassung.
- XII. Schrifttum.

I. Aufgabenstellung.

In einer im Jahre 1931 erschienen Arbeit hat L. Poggi [2] den Einfluß der Windstromgrenzen auf den Strömungszustand in der Umgebung eines Tragflügels unendlicher Spannweite in einem Freistrahle berechnet, der aus einer von zwei parallelen ebenen Wänden gebildeten Düse austritt. Der Tragflügel wurde dabei durch einen geraden Wirbelfaden konstanter Zirkulation ersetzt, die Randbedingung konstanten Druckes auf der Freistrahlgrenze wurde in üblicher Weise angenähert durch die Forderung konstanten Potentials der Zusatzströmung auf der ungestörten Strahlengrenze. Die vorliegende Arbeit, die veranlaßt ist durch eine Bearbeitung der räumlichen Aufgabe eines Widerstandskörpers in der Achse eines aus einer Düse austretenden kreiszylindrischen Freistrahles ([4], [5]) soll die Arbeit von Poggi ergänzen vor allem im Hinblick auf die physikalische Deutung der bei dieser und ähnlichen Aufgaben mit teils freien, teils festen Grenzen auftretenden mathematischen Fragen. Die Arbeit beschränkt sich ebenso wie die von Poggi auf die ebene Aufgabe, in der eine Lösung mittels elementarer Funktionen in geschlossener Form möglich ist, ein Teil ihrer Ergebnisse gilt aber qualitativ auch für entsprechende räumliche Aufgaben, insbesondere ist dies bei den grundsätzlichen Überlegungen der Abschnitte V bis VIII der Fall. Neben dem von Poggi behandelten Fall eines Tragflügels soll hier noch der Fall des durch eine Quelle dargestellten Widerstandskörpers mit Totwasser betrachtet werden. Die Lösung dieser Aufgabe würde man auch unmittelbar aus der Lösung für den Wirbel erhalten können, wenn man Potential und Stromfunktion vertauscht, wobei gleichzeitig der feste Teil des Kanals mit dem Freistrahle vertauscht wird. Der Fall eines kurzen Körpers ohne Totwasser, dargestellt durch einen Dipol, wurde schon in einer früheren Arbeit des Verfassers behandelt [5].

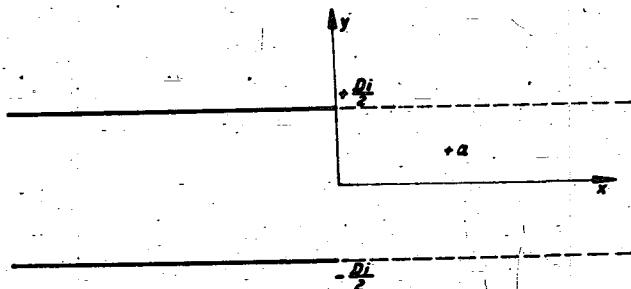


Bild 1. Koordinaten in der Strömungsebene.

Die zur Lösung der Aufgabe benutzte konforme Abbildung ist in der vorliegenden Arbeit etwas anders als bei Poggi durchgeführt; hierdurch wurde es möglich, Quelle und Wirbel zu einer Wirbelquelle zusammenzufassen und auch den Fall der außerhalb der Kanalachse liegenden Singularität unmittelbar zu behandeln, während Poggi in diesem Falle eine Aufspaltung in zwei gleichsinnige und zwei gegensinnige Wirbel in spiegelbildlicher Lage zur Achse vornehmen mußte. Die numerischen Rechnungen beschränken sich in der vorliegenden Arbeit auf den Fall einer in der Kanalachse liegenden Singularität, sie geben über die bei Poggi gerechneten Fälle hinaus noch eine erste Näherung für die Strahlverformung durch den Tragflügel oder Widerstandskörper. Für den Fall des außerhalb der Achse liegenden Flügels (und damit auch gleichzeitig für den Fall der Quelle) finden sich für die Zusatzgeschwindigkeit am Orte der Singularität selbst in der Arbeit von Poggi ausführliche Zahlenangaben, auf welche hier verwiesen werden kann.

II. Die Randbedingungen der Aufgabe.

Wir betrachten die folgende Anordnung (Bild 1): Der feste Teil des Kanals werde gebildet von den beiden Halbgeraden $y = \pm \frac{D}{2}$, $x < 0$ einer z -Ebene, der ungestörte Rand des Freistrahles von den Halbgeraden $y = \pm \frac{D}{2}$, $x > 0$. Im Inneren des festen Kanalstückes (der Düse) oder des Freistrahles befinde sich in der Umgebung des Punktes $z = a$ ein die Strömung störender Körper (Widerstandskörper oder Tragflügel), den wir durch eine Singularität im Punkte $z = a$ ersetzen. Um die beiden wichtigsten Fälle des Tragflügels und des Widerstandskörpers mit Totwasser in einer Rechnung zu erfassen, wollen wir als störende Singularität eine Wirbelquelle von der Zirkulation Γ und der Ergiebigkeit Q im Punkte $z = a$ annehmen, deren komplexes Potential ohne den Einfluß der Kanal- und Freistrahlgrenzen

$$\Phi_0(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln(z - a) \dots \dots \dots (1)$$

sein würde. Außer der Strömung der Wirbelquelle und der von den Kanalgrenzen herrührenden Zusatzströmung, die wir berechnen wollen, haben wir im Kanal noch eine gleichförmige Parallelströmung in Richtung der Kanalachse mit

*) A 35 82.

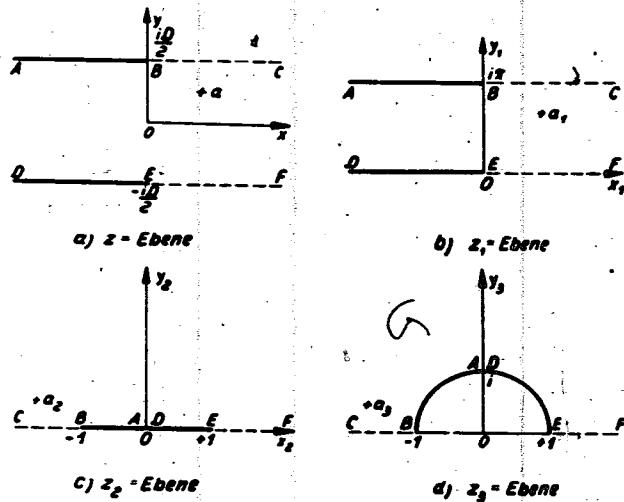


Bild 2. Konforme Abbildung des Kanals auf die obere Hälfte des Äußeren des Einheitskreises.

der Geschwindigkeit U . Um die Aufgabe linearisieren zu können, wollen wir voraussetzen, daß auf den ursprünglichen Freistrahlgrenzen gilt

$$\text{Max } \frac{d\Phi_0}{dz} \ll U \text{ für } y = \pm \frac{D}{2}, x \geq 0 \quad (2)$$

Dann haben wir als Randbedingungen der Aufgabe zu fordern, daß für die aus Φ_0 und der Zusatzströmung gebildete Strömung die festen Wände der Düse Stromlinien sind und daß die ursprünglichen Freistrahlgrenzen für diese Strömung Potentiallinien sind. Die erste dieser Forderungen ist genau, die zweite dagegen eine Näherung für die eigentlich zu stellende Forderung konstanten Druckes, d. h. konstanten Geschwindigkeitsbetrages auf einer neu zu bestimmenden Strahlengrenze. Diese Näherung ist zulässig, falls die von der Wirbelquelle und der Zusatzströmung herrührende Normalgeschwindigkeit auf der ursprünglichen Freistrahlgrenze überall klein bleibt gegen die Hauptgeschwindigkeit U . Wir werden später sehen, daß wegen des Wechsels der Randbedingung an der Düsenmündung gerade diese Voraussetzung bei der Lösung der Aufgabe besonders beachtet werden muß, und daß durch sie die Lösung überhaupt erst eindeutig wird.

III. Konforme Abbildung des Kanals auf die obere Hälfte des Äußeren des Einheitskreises.

Zur Lösung der Aufgabe bilden wir den Kanal konform ab auf einen Bereich, in dem die Methode der Spiegelbilder anwendbar ist (vgl. Bild 2). Zunächst führen wir eine Ähnlichkeitstransformation und eine Verschiebung so aus, daß der Kanal in einen Streifen der Breite π oberhalb der reellen Achse einer z_1 -Ebene übergeht. Dies leistet die Transformation

$$z_1 = \frac{\pi}{D} \left(z + i \frac{D}{2} \right) \quad (3)$$

Diesen Streifen bilden wir dann mit Hilfe der Exponentialfunktion auf die obere Halbebene einer z_2 -Ebene ab.

$$z_2 = e^{z_1} \quad (4)$$

Hierbei geht die untere feste Wand in die Strecke von 0 bis 1, die untere Strahlengrenze in die Strecke von 1 bis $+\infty$ der reellen Achse über, die obere feste Wand und die obere Strahlengrenze in die entsprechenden Teile der negativen reellen Achse. Schließlich bilden wir die längs der Strecke von -1 bis $+1$ aufgeschnittene z_3 -Ebene auf das Äußere des Einheitskreises einer z_3 -Ebene ab, indem wir setzen

$$z_3 = z_2 + 1 \overline{z_2} - 1 \quad (5)$$

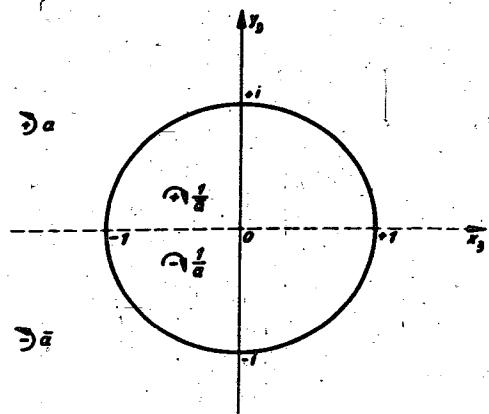


Bild 3. Spiegelung der Wirbelquelle am Einheitskreis und an der reellen Achse.

Insgesamt erhalten wir als Abbildung des Kanals mit Freistrahlgrenzen auf die obere Hälfte des Außenraumes des Einheitskreises die Transformation

$$z_3 = i \left(e^{\pi z_1/D} + \sqrt{e^{2\pi z_1/D} + 1} \right) \quad (6)$$

Bei dieser Transformation geht die untere feste Wand in den ersten Quadranten des Einheitskreises über, die obere feste Wand in den zweiten. Die untere Freistrahlgrenze geht in den Teil der reellen z_3 -Achse rechts von $z_3 = +1$ über, die obere Freistrahlgrenze in den links von $z_3 = -1$; die beiden Enden der festen Kanalwände schließlich gehen in die Punkte $z_3 = +1$ und $z_3 = -1$ über.

IV. Spiegelung der Singularitäten in der z_3 -Ebene.

In der z_3 -Ebene läßt sich die Aufgabe nun leicht durch Spiegelung lösen. Der Punkt a der z -Ebene, in dem wir die Wirbelquelle angenommen hatten, geht in der z_3 -Ebene über in einen Punkt

$$a_3 = i \left(e^{\pi a/D} + \sqrt{e^{2\pi a/D} + 1} \right) \quad (7)$$

Als Randbedingung haben wir dort die beiden Forderungen, daß der Einheitskreis Stromlinie und die reelle Achse Potentiallinie werden sollen. Der ersten Forderung genügen wir, wenn wir die Wirbelquelle und die zugehörige Wirbelsenke im Unendlichen unter Erhaltung des Vorzeichens der Quellen und Umkehr des Vorzeichens der Wirbel am Einheitskreis spiegeln, der zweiten, indem wir die ganze Anordnung nochmals unter Umkehr des Vorzeichens der Quellen und Erhaltung des Vorzeichens der Wirbel an der reellen Achse spiegeln (vgl. Bild 3). Hierbei fallen die Singularitäten bei $z_3 = 0$ und $z_3 = \infty$ fort, wir behalten also

1. Im Punkte a_3 eine Wirbelquelle der Stärke $Q - i\Gamma$
2. " " $1/\bar{a}_3$ " " " " $Q + i\Gamma$
3. " " \bar{a}_3 " " " " $-Q - i\Gamma$
4. " " $1/a_3$ " " " " $-Q + i\Gamma$

Als komplexes Potential dieser Anordnung von Wirbelquellen in der z_3 -Ebene erhalten wir demnach

$$\Phi_1 = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z_3 - a_3}{z_3 - 1/\bar{a}_3} - \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z_3 - \bar{a}_3}{z_3 - 1/a_3} \quad (8)$$

Damit haben wir eine Lösung gefunden, die in der z -Ebene und damit nach Einführung des Ausdruckes für z_3 aus der Transformationsgleichung (6) in der z_2 -Ebene die Bedingung erfüllt, daß die festen Wände des Kanals Stromlinien, die Freistrahlgrenzen Potentiallinien sind.

V. Einführung der Düsenpotentiale.

Trotzdem das durch (8) gegebene Potential die zunächst gestellten Bedingungen erfüllt, können wir es doch noch nicht als endgültige Lösung der Aufgabe ansehen. Bilden wir nämlich die komplexe Geschwindigkeit in der z_3 -Ebene

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z_3 - a_3} - \frac{1}{z_3 - 1/a_3} \right) - \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z_3 - \bar{a}_3} - \frac{1}{z_3 - 1/\bar{a}_3} \right) \quad (9)$$

so setzen wir, daß diese in den beiden der Düsenmündung entsprechenden Punkten $z_3 = \pm 1$ im allgemeinen einen endlichen Wert hat¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\Phi_1}{dz_3} \right)_{+1} &= \frac{i}{\pi} J \left[(Q - i\Gamma) \frac{1 + a_3}{1 - a_3} \right] \\ \left(\frac{d\Phi_1}{dz_3} \right)_{-1} &= -\frac{i}{\pi} J \left[(Q - i\Gamma) \frac{1 - a_3}{1 + a_3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Rechnen wir nun die Geschwindigkeit um in die z -Ebene, so müssen wir mit der Ableitung $\frac{dz_3}{dz}$ multiplizieren.

$$\frac{dz_3}{dz} = \frac{i\pi}{D} e^{\pi z} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi z}}} \right) \quad (11)$$

An der Düsenmündung, d. h. für $z = \pm \frac{iD}{2}$, wird aber

$$1 + e^{-2\pi z} = 1 + e^{\pm\pi i} = 0 \quad (12)$$

und damit $\frac{dz_3}{dz} = \infty$. Wir würden also an der Düsenmündung auf der Freistrahlgrenze eine unendliche Normalgeschwindigkeit erhalten im Gegensatz zu unserer Voraussetzung, daß die Normalgeschwindigkeit auf der Freistrahlgrenze überall klein ist gegen die Geschwindigkeit U der Hauptströmung. Physikalisch würde diese unendliche Zusatzgeschwindigkeit, die in Wirklichkeit gar nicht auftritt, eine starke Verformung der Strahlgrenze an der Düsenmündung bedeuten, die gleichfalls in Wirklichkeit gar nicht auftritt. Es gibt nun Aufgaben mit gemischten Randbedingungen, bei denen es im Bereiche einer linearen Theorie grundsätzlich unvermeidbar ist, daß unendliche Geschwindigkeiten an den Stellen auftreten, an denen die Randbedingung wechselt. Ein Beispiel hierzu bietet etwa die Frage nach der Korrektur des Anstellwinkels eines Flügels, der sich in einem teilweise abgedeckten Kanal befindet. In dem hier vorliegenden Falle läßt sich aber auch theoretisch auf der ganzen Grenze endliche Geschwindigkeit erreichen, wenn wir dem Potential Φ_1 noch eine geeignete Kombination zweier weiterer Potentiale Φ_{D_1} und Φ_{D_2} hinzufügen, die wir als Düsenpotentiale bezeichnen wollen.

Auf diese Düsenpotentiale werden wir geführt, wenn wir uns die Frage stellen, ob es in der z_3 -Ebene Strömungen gibt, die den Einheitskreis als Stromlinie und die reelle Achse als Potentiallinie haben, also die Randbedingungen erfüllen, die aber in der ganzen oberen Hälfte des Äußeren des Einheitskreises frei von Singularitäten sind. Auf der reellen Achse und auf dem Rande des Einheitskreises selbst dürfen gleichfalls für die gesuchten Strömungen keine Singularitäten liegen mit Ausnahme der Punkte $z_3 = i$ und $z_3 = \infty$, die beim Übergang zur z -Ebene in das Unendliche fallen, jedoch ist hierbei zu fordern, daß die Geschwindigkeit im Unendlichen der z -Ebene noch endlich (d. h. von der Größenordnung $Q - i\Gamma$) bleibt.

Von solchen Strömungen gibt es nun genau zwei wesentlich verschiedene, nämlich die Strömung von einer Quelle im Punkte $z_3 = -i$ zu einer Senke im Punkte $z_3 = +i$ und die Strömung eines Wirbels im Punkte $z_3 = 0$.

$$\Phi_{D_1} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{z_3 + i}{z_3 - i} \quad (13)$$

$$\Phi_{D_2} = \frac{i}{2\pi} \ln z_3 \quad (14)$$

In der z -Ebene entspricht Φ_{D_1} einer Strömung, die senkrecht durch die beiden Freistrahlgrenzen eintritt und im festen Teil des Kanals in eine Parallelströmung in Richtung

der Kanalachse übergeht; die beiden Enden der Düsenmündung werden dabei von außen nach innen umströmt. Φ_{D_2} entspricht einer Strömung, die senkrecht in die eine Strahlgrenze eintritt und durch die andere Strahlgrenze gleichfalls senkrecht wieder austritt, das eine Ende der Düsenmündung wird dabei in der Richtung von außen nach innen, das andere von innen nach außen umströmt. Im Freistrahls weit von der Düse entspricht Φ_{D_1} einer einfachen Parallelströmung senkrecht zur Strahlrichtung. Physikalisch läßt sich Φ_{D_1} z. B. deuten als Vorstau in der Düse, der dadurch hervorgebracht wird, daß der durch die Singularität ersetzte Körper die Düse zum Teil versperrt. Φ_{D_2} entspricht physikalisch einer Ablenkung des Freistrahles, wie sie z. B. durch einen in den Strahl hineingesteckten Flügel hervorgebracht wird.

VI. Vollständige Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Düsenpotentiale.

Die Existenz der beiden Düsenpotentiale Φ_{D_1} und Φ_{D_2} hat zunächst zur Folge, daß die Lösung der gestellten Aufgabe nicht eindeutig ist, da jedes Potential

$$\Phi = \Phi_1 + \lambda_1 \Phi_{D_1} + \lambda_2 \Phi_{D_2} \quad (15)$$

mit beliebigem λ_1 und λ_2 den geforderten Randbedingungen genügt. Unter allen diesen Lösungen gibt es aber genau eine, für welche die Geschwindigkeit in der z -Ebene an den Enden der festen Wände endlich bleibt. Da nun an der Düsenmündung ebenso wie an der Hinterkante eines Tragflügels keine Umströmung, sondern Ablösung der Strömung eintritt, ist diese Lösung die gesuchte. Wir finden sie offenbar, wenn wir λ_1 und λ_2 so bestimmen, daß in der z_3 -Ebene die Punkte $z_3 = \pm 1$ Staupunkte werden. Damit erhalten wir für λ_1 und λ_2 unter Berücksichtigung von (10) die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} z_3 = +1: \lambda_1 - \lambda_2 &= -2J \left[(Q - i\Gamma) \frac{a_3 + 1}{a_3 - 1} \right] \\ z_3 = -1: \lambda_1 + \lambda_2 &= -2J \left[(Q - i\Gamma) \frac{a_3 - 1}{a_3 + 1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

und daraus

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -2J \left[(Q - i\Gamma) \frac{2a_3}{a_3^2 - 1} \right] \\ \lambda_2 &= 2J \left[(Q - i\Gamma) \frac{a_3^2 + 1}{a_3^2 - 1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Damit ergibt sich insgesamt für die Strömung einer Wirbelquelle im Kanal unter dem Einfluß der Düse das Potential

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z_3 - a_3}{z_3 - 1/a_3} - \frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z_3 - \bar{a}_3}{z_3 + 1/\bar{a}_3} \\ & - \frac{1}{\pi} J \left[(Q - i\Gamma) \frac{2a_3}{a_3^2 - 1} \right] \ln \frac{z_3 + i}{z_3 - i} \\ & + \frac{i}{\pi} J \left[(Q - i\Gamma) \frac{a_3^2 + 1}{a_3^2 - 1} \right] \ln z_3 \quad (18) \end{aligned}$$

wo für z_3 und a_3 nach Gleichung (6) und (7) einzusetzen ist

$$\begin{aligned} z_3 &= i \left(e^{\pi z/D} + \sqrt{e^{2\pi z/D} + 1} \right) \\ a_3 &= i \left(e^{\pi a/D} + \sqrt{e^{2\pi a/D} + 1} \right) \end{aligned}$$

Für die komplexe Geschwindigkeit in der z -Ebene erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dz} = \frac{d\Phi}{dz_3} \cdot \frac{dz_3}{dz} = & \frac{1}{2D} \left[(Q - i\Gamma) \left(\frac{1}{z_3 - a_3} - \frac{1}{z_3 - 1/a_3} \right) \right. \\ & \left. - (Q + i\Gamma) \left(\frac{1}{z_3 - \bar{a}_3} - \frac{1}{z_3 - 1/\bar{a}_3} \right) \right] \cdot \frac{z_3(z_3^2 + 1)}{z_3^2 - 1} \\ & + \frac{i}{D} \left\{ J \left[(Q - i\Gamma) \frac{2a_3}{a_3^2 - 1} \right] \cdot \frac{2z_3}{z_3^2 - 1} \right. \\ & \left. + J \left[(Q - i\Gamma) \frac{a_3^2 + 1}{a_3^2 - 1} \right] \cdot \frac{z_3^2 + 1}{z_3^2 - 1} \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

wo $\frac{dz_3}{dz}$ der bequemerer Rechnung halber durch z_3 ausgedrückt ist. Die Gleichungen (18) und (19) geben die vollständige Lösung der gestellten Aufgabe.

¹⁾ In den Formeln bedeutet $J(z)$ den Imaginärteil (ohne den Faktor i) der komplexen Zahl z , entsprechend bedeutet $R(z)$ ihren Realteil.

VII. Berechnung des Vorstaus in der Düse, der Strahlablenkung und der Korrektur der Anströmgeschwindigkeit.

Wir berechnen jetzt noch aus Gleichung (19) die Geschwindigkeit u (-∞) weit im Inneren des festen Kanals bei z = -∞, d. h. den Vorstau in der Düse, weiter die Geschwindigkeit v (+∞) weit im Freistrah bei z = +∞, d. h. die Strahlablenkung, und schließlich die Geschwindigkeit w (a) am Orte der Singularität, die für die Korrektur der Anströmgeschwindigkeit und des Anstellwinkels maßgebend ist.

Der Vorstau in der Düse ist

u(-∞) = lim_{z → -∞} dΦ/dz = lim_{z_1 → i} dΦ/dz (20)

u(-∞) = 1/D J [(Q - iΓ) / (a_3^2 - 1)] (21)

oder nach Einführung des Wertes von a_3 aus (7)

u(-∞) = -1/D R ((Q - iΓ) / sqrt(1 + e^{2πa_3D})) (22)

Die Strahlablenkung wird entsprechend

-i v(+∞) / U = 1/U lim_{z → +∞} dΦ/dz = 1/U lim_{z_2 → ∞} dΦ/dz (23)

v(+∞) / U = -1/D U J [(Q - iΓ) / (a_3^2 - 1)] (24)

v(+∞) / U = -1/D U J ((Q - iΓ) / sqrt(1 + e^{2πa_3D})) (25)

Die Geschwindigkeit am Orte der Singularität z = a (ohne den Einfluß der Wirbelquelle selbst) erhält man durch

w(a) = u(a) - i v(a) = lim_{z → a} (dΦ/dz - (Q - iΓ) / (2π(z - a))) (26)

Durch Reihenentwicklung erhält man nach längerer Rechnung

w(a) = (Q - iΓ) / (4D) [1 - 2(a_3^2 + 1) / (a_3^2 - 1)] - (Q + iΓ) / (2D) * (a_3^2 + 1) / (a_3^2 - 1) * (a_3 / (a_3 - a_3) - a_3 a_3 / (a_3 a_3 - 1)) + i/D { 2a_3 / (a_3^2 - 1) J [(Q - iΓ) / (a_3^2 - 1)] + (a_3^2 + 1) / (a_3^2 - 1) J [(Q - iΓ) / (a_3^2 - 1)] } (27)

Für die Anwendungen der Theorie interessiert nun hauptsächlich der Fall, daß die Wirbelquelle in der Kanalachse liegt. In diesem Falle vereinfachen sich die Gleichungen (22) und (25) (und (27) bedeutend. a ist dann reell, a_3 rein imaginär. Aus (22) erhalten wir für den Vorstau in der Düse

u(-∞) = -Q/D * 1 / sqrt(1 + e^{2πa_3D}) (28)

Aus (25) erhalten wir entsprechend für die Strahlablenkung

v(+∞) / U = +Γ/D U * 1 / sqrt(1 + e^{2πa_3D}) (29)

Für die Geschwindigkeit im Punkte z = a erhalten wir aus (27) nach Trennung von Realteil und Imaginärteil

u(a) = -Q/D * 1 / (2(1 + e^{2πa_3D})) (30)

v(a) = +Γ/D * 1 / (2(1 + e^{2πa_3D})) (31)

Eine Quelle in der Kanalachse gibt also nur einen Vorstau in der Düse, ein Wirbel nur eine Strahlablenkung; am Orte der Quelle wird nur die Größe, am Orte des Wirbels nur die Richtung der Anströmung geändert.

Die durch die Gleichungen (22), (25), (27) bis (31) gegebenen Geschwindigkeitskorrekturen beziehen sich auf die gestörte Parallelströmung von der Geschwindigkeit U^2. In der gestörten Strömung herrscht diese nun auf dem Rande des Freistrahles und in größerer Entfernung von der Düse auch in seinem Inneren, dagegen ist die Geschwindigkeit im Inneren des festen Kanals wegen des Vorstaus i. a. von U verschieden. Man pflegt nun die Geschwindigkeit des Kanals zumeist aus dem Überdruck Δp in der Düsenvorkammer zu bestimmen nach der Beziehung

ρ/2 U^2 = Δp / (1 - (F_1/F_2)^2) (32)

wo F_1 der Düsenquerschnitt, F_2 der Querschnitt der Düsenvorkammer ist. Im Falle ebener Strömung kann man F_1/F_2 durch das Verhältnis der Wandabstände D_1/D_2 ersetzen. Nun hat man in der Düse die mittlere Geschwindigkeit

U_1 = U + u(-∞) (33)

in der Düsenvorkammer ist daher die Geschwindigkeit aus Kontinuitätsgründen

U_2 = (U + u(-∞)) * D_1/D_2 (34)

Der Druck in der Düsenvorkammer ist dann

p_2 = -ρ/2 * (D_1/D_2)^2 * (U + u(-∞))^2 + p_0 (35)

Der Druck im Freistrah ist

p_1 = -ρ/2 U^2 + p_0 (36)

Aus diesen beiden Gleichungen folgt für die Geschwindigkeit U

ρ/2 U^2 = (p_2 - p_1) / (1 - [(1 + u(-∞)/U) * D_1/D_2]^2) (37)

Dies Ergebnis läßt sich so aussprechen, daß wegen der Verengung der Düse durch den Körper der Endquerschnitt des Freistrahles (ohne den von der Quellströmung herrührenden Anteil, d. h. ohne die Breite des Totwassers) kleiner wird als der Düsenquerschnitt. Der Betrag dieser Verkleinerung ist durch das Verhältnis u(-∞)/U gegeben. Da bei der Auswertung von Messungen ein Staudruck zugrunde gelegt wird, der einfach nach (32) berechnet ist, so erhält man Beiwerte, die im Verhältnis

1 - [(1 + u(-∞)/U) * D_1/D_2]^2 ≈ 1 - 2 * (D_1/D_2)^2 * u(-∞)/U (38)

zu klein sind. Außer dieser Korrektur ist natürlich noch zu beachten, daß am Orte des zu untersuchenden Körpers die Strömungsgeschwindigkeit nicht U ist, sondern gemäß Gleichung (27) bzw. (30) gestört.

VIII. Zusammenhang der Korrekturformeln mit denen in den Grenzfällen der Wirbelquelle im geschlossenen Kanal und im Freistrah.

Die Korrekturformeln (22), (25), (27) bis (31) des vorigen Abschnittes stehen scheinbar im Widerspruch zu den bekannten Korrekturformeln für den geschlossenen Kanal und den Freistrah, in die sie der Erwartung nach übergehen sollten, wenn die Wirbelquelle sich weit vor oder hinter der Düsenmündung befindet.

Für den geschlossenen Kanal erhält man durch direkte Anwendung der Methode der Spiegelbilder in der z-Ebene als komplexes Potential einer Wirbelquelle der Stärke Q - iΓ im Punkte z = a

Φ* = (Q - iΓ) / (2π) ln |sin π(z - a) / (2D)| + (Q + iΓ) / (2π) ln |cos π(z - a) / (2D)| (39)

Für die komplexe Geschwindigkeit erhält man daraus

dΦ*/dz = (Q - iΓ) / (4D) ctg π(z - a) / (2D) + (Q + iΓ) / (4D) tg π(z - a) / (2D) (40)

*) Vgl. [6] Gl. (28) bis (32).

Die Zusatzgeschwindigkeit weit vor der Wirbelquelle wird dann

$$u^*(-\infty) = -\frac{Q}{2D}, \quad v^*(-\infty) = 0 \quad (41a)$$

Entsprechend wird die Zusatzgeschwindigkeit weit hinter der Wirbelquelle

$$u^*(+\infty) = +\frac{Q}{2D}, \quad v^*(+\infty) = 0 \quad (41b)$$

während die Geschwindigkeit am Orte der Wirbelquelle

$$w^*(a) = \frac{-\Gamma + iQ}{4D} \operatorname{tg} J\left(\frac{\pi a}{D}\right) \quad (41c)$$

wird. Wenn die Wirbelquelle in der Achse des Kanals liegt, so ist a reell, und es wird einfach

$$u(a) = 0; \quad v(a) = 0 \quad (41d)$$

Demgegenüber ergeben die Formeln (28) bis (31) für reelles a in der Grenze $a \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} u(-\infty) &= -\frac{Q}{D} & v(-\infty) &= 0 \\ u(+\infty) &= 0 & v(+\infty) &= 0 \\ u(a) &= -\frac{Q}{2D} & v(a) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Für das komplexe Potential einer Wirbelquelle im Freistrahle erhält man entsprechend

$$\phi^{**} = \frac{Q-i\Gamma}{2\pi} \ln \operatorname{Sin} \frac{\pi(z-a)}{2D} - \frac{Q+i\Gamma}{2\pi} \ln \operatorname{Cos} \frac{\pi(z-\bar{a})}{2D} \quad (43)$$

und daraus

$$\frac{d\phi^{**}}{dz} = \frac{Q-i\Gamma}{4D} \operatorname{Ctg} \frac{\pi(z-a)}{2D} - \frac{Q+i\Gamma}{4D} \operatorname{Tg} \frac{\pi(z-\bar{a})}{2D} \quad (44)$$

mit den Grenzwerten

$$\left. \begin{aligned} u^{**}(-\infty) &= 0 & v^{**}(-\infty) &= -\frac{\Gamma}{2D} \\ u^{**}(+\infty) &= 0 & v^{**}(+\infty) &= +\frac{\Gamma}{2D} \\ w^{**}(a) &= \frac{\Gamma-iQ}{4D} \operatorname{tg} J\left(\frac{\pi a}{D}\right) \\ u^{**}(a) &= 0 & v^{**}(a) &= 0 \text{ für reelles } a \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Aus (28) bis (31) ergibt sich dagegen für reelles a in der Grenze $a \rightarrow +\infty$

$$\left. \begin{aligned} u(-\infty) &= 0 & v(-\infty) &= 0 \\ u(+\infty) &= 0 & v(+\infty) &= +\frac{\Gamma}{D} \\ u(a) &= 0 & v(a) &= +\frac{\Gamma}{2D} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Der scheinbare Widerspruch zwischen (41) und (42) sowie zwischen (45) und (46) löst sich, wenn man beachtet, daß die Strömung der Wirbelquelle im geschlossenen Kanal und im Freistrahle mathematisch gesprochen nicht eindeutig bestimmt ist. Ohne die Randbedingungen zu verletzen, darf man im ersten Falle eine Parallelströmung beliebiger Größe in Richtung der Kanalachse hinzufügen und im zweiten eine Parallelströmung senkrecht zur Kanalachse von der Größenordnung $(Q-i\Gamma)/D$. Über diese Freiheit verfügt man dadurch, daß man eine Symmetrie der Strömung zur Wirbelquelle verlangt, wie sie sich bei der Spiegelung an den Grenzen von selbst ergibt. Im Falle des aus einer Düse austretenden Strahles besteht diese Freiheit nicht mehr wegen der Abflußbedingung an der Düsenmündung. Anschaulich gesprochen wählt man im Falle der Wirbelquelle im geschlossenen Kanal als Bezugsgeschwindigkeit U das arithmetische Mittel zwischen der Geschwindigkeit weit vor und der weit hinter der Wirbelquelle, während man im Falle der Wirbelquelle im Kanal mit anschließendem Freistrahle als Bezugs-

geschwindigkeit die Geschwindigkeit im Freistrahle, d. h. die weit hinter der Wirbelquelle wählt. Ebenso wählt man im Falle der Wirbelquelle im reinen Freistrahle als Bezugsrichtung das Mittel zwischen der Richtung des ankommenden und des abgehenden Strahls, im Falle der Wirbelquelle im Freistrahle mit davorliegender Düse dagegen die Richtung des ankommenden Strahls, d. h. die der Kanalachse.

IX. Berechnung der Form des Strahlrandes.

Aus der Gleichung (18) für das komplexe Potential der Strömung läßt sich leicht noch eine erste Näherung für die Verformung des Strahlrandes herleiten. Ist nämlich $\psi(x, \pm \frac{iD}{2})$ die Strömungsfunktion der Zusatzströmung auf den ungestörten Strahlrändern, d. h. der Imaginärteil von Φ , so hat der Strahl, da seine Geschwindigkeit U ist, an der Stelle x außerhalb des ursprünglichen Strahlrandes noch die Breite

$$\Delta y = \left[\psi\left(0, \pm \frac{iD}{2}\right) - \psi\left(x, \pm \frac{iD}{2}\right) \right] / U \quad (47)$$

Bei der weiteren Rechnung wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß die störende Wirbelquelle in der Kanalachse liegt. Wir erhalten dann aus (47) nach einiger Rechnung für den Fall der Quelle

$$\Delta y = \pm \frac{Q}{U} \cdot \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{e^{2\pi x/D} - 1}{e^{2\pi x/D} + 1}} - \frac{2}{\sqrt{e^{2\pi a/D} + 1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e^{\pi x/D} + \sqrt{e^{2\pi x/D} - 1} - 1}{e^{\pi x/D} + \sqrt{e^{2\pi x/D} - 1} + 1} \right) \quad (48)$$

Das obere Vorzeichen gilt hier für den oberen, das untere für den unteren Strahlrand. Für den Fall des Wirbels erhalten wir entsprechend

$$\Delta y = \frac{\Gamma}{2\pi U} \left[\ln \frac{(e^{\pi x/D} + \sqrt{e^{2\pi x/D} - 1})^2 + (e^{\pi a/D} + \sqrt{e^{2\pi a/D} + 1})^2}{(e^{\pi x/D} + \sqrt{e^{2\pi x/D} - 1})^2 \cdot (e^{\pi a/D} + \sqrt{e^{2\pi a/D} + 1})^2 + 1} + \frac{2e^{\pi a/D}}{\sqrt{e^{2\pi a/D} + 1}} \ln(e^{\pi x/D} + \sqrt{e^{2\pi x/D} - 1}) \right] \quad (49)$$

Das Vorzeichen ist hier für beide Strahlränder das gleiche. Wir betrachten nun noch das Verhalten des Strahlrandes an der Düsenmündung und in großer Entfernung von der Düse. Im Falle der Quelle erhalten wir aus (49) durch Reihenentwicklung für den Strahlrand in der Nähe der Düsenmündung

$$\Delta y \approx \pm \frac{Q}{U} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{3} \cdot \frac{e^{2\pi a/D}}{\sqrt{e^{2\pi a/D} + 1}^3} \sqrt{\frac{x^3}{D/2}} \text{ für } \frac{x}{D/2} \ll 1 \dots (50)$$

Der Strahlrand schließt sich also tangential an die Düsenmündung an, jedoch ist seine Krümmung dort unendlich groß. Die stärkste Verformung des Strahlrandes an der Düsenmündung erhalten wir aus der Bedingung

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{3} \cdot \frac{e^{2\pi a/D}}{\sqrt{e^{2\pi a/D} + 1}^3} \right) = 0 \quad (51)$$

für den Fall, daß die Quelle an der Stelle

$$\frac{a}{D/2} = \frac{1}{\pi} \ln 2 \approx 0,221 \quad (52)$$

der Kanalachse liegt, also im Freistrahle etwas vor der Düsenmündung. In diesem Falle wird

$$\Delta y \approx \pm \frac{2}{9} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{Q}{U} \sqrt{\frac{x^3}{D/2}} \approx \pm 0,227 \frac{Q}{U} \sqrt{\frac{x^3}{D/2}} \quad (53)$$

Für große Entfernung von der Düse erhalten wir gleichfalls durch Reihenentwicklung

$$\Delta y \approx \pm \frac{Q}{U} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi a/D} + 1}} \right) - \frac{1}{\pi \sqrt{1 + e^{-2\pi a/D}}} \right] \times e^{-\frac{\pi(x-a)}{D}} \text{ für } \frac{x}{D/2} \gg \text{Max} \left(1, \frac{a}{D/2} \right) \dots (54)$$

Der Freistrahл wird also im Unendlichen breiter als die Düse um den Betrag

$$2 \Delta y (\infty) = \frac{Q}{U} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi a/D} + 1}} \right) \dots (55)$$

Liegt die Quelle weit vor der Düse im Freistrahл, so erhält man als Verbreiterung einfach Q/U , d. h. die gleiche Strahlverbreiterung, die man auch im reinen Freistrahл erhalten würde. Bei endlicher Entfernung der Quelle von der Düse ist die Verbreiterung kleiner um $Q/U \sqrt{e^{-2\pi a/D} + 1}$; dieser Betrag entspricht dem ohne Vorhandensein der Hauptströmung in die Düse eintretenden Teil der Quellflüssigkeit, der den Vorstau in der Düse verursacht [vgl. Gleichung (28)].

Für den Fall des Wirbels erhalten wir in der Nähe der Düsenmündung die Entwicklung

$$\Delta y \approx \frac{\Gamma}{U} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{-2\pi a/D}}{\sqrt{e^{-2\pi a/D} + 1}} \sqrt{\frac{x^3}{D/2}} \text{ für } \frac{x}{D/2} \ll 1 \quad (56)$$

Die stärkste Verformung des Strahlrandes an der Düsenmündung erhalten wir, hier falls der Wirbel an der Stelle

$$\frac{a}{D/2} = -\frac{1}{\pi} \ln 2 \approx -0,221 \dots (57)$$

der Kanalachse liegt, also noch etwas im festen Teil des Kanals; es ist dann

$$\Delta y \approx \frac{2}{9} \left| \frac{\pi}{3} \frac{\Gamma}{U} \right| \sqrt{\frac{x^3}{D/2}} \approx 0,227 \frac{\Gamma}{U} \sqrt{\frac{x^3}{D/2}} \dots (58)$$

Für große Entfernung von der Düse ergibt sich die Entwicklung

$$\Delta y \approx \frac{\Gamma}{U} \left(\frac{x-a}{D} \sqrt{1 + e^{-2\pi a/D}} - \frac{1}{\pi \sqrt{1 + e^{-2\pi a/D}}} \ln \left(1 + \sqrt{1 + e^{-2\pi a/D}} \right) - \ln 2 \right) + \frac{e^{-2\pi a/D} + 2}{4\pi \sqrt{1 + e^{-2\pi a/D}}} e^{-\frac{2\pi(x-a)}{D}} \text{ für } \frac{x}{D/2} \gg \text{Max} \left(1, \frac{a}{D/2} \right) \dots (59)$$

Liegt der Wirbel sehr weit vor der Düse, so wird aus (59)

$$\Delta y \approx \frac{\Gamma}{U} \left(\frac{x-a}{D} + \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2\pi(x-a)}{D}} \right) \text{ für } a \rightarrow \infty, \frac{x-a}{D} \gg 1 \dots (60)$$

Behandelt man dagegen die Aufgabe des Wirbels im reinen Freistrahл direkt, so erhält man aus Gleichung (43)

$$\Delta y^{**} \approx \frac{\Gamma}{U} \left(\frac{x-a}{2D} - \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2\pi(x-a)}{D}} \right) \text{ für } \frac{x-a}{D} \gg 1 \dots (61)$$

Der Unterschied beider Formeln erklärt sich wiederum aus der Verschiedenheit der Bezugsgrößen. Im ersten Falle ist die Asymptote des ankommenden Strahls als »ungestörte Strahlgrenze« gewählt, im zweiten dagegen die Tangente der Strahlgrenze in dem senkrecht über bzw. unter dem Wirbel liegenden Punkte.

X. Numerische Ergebnisse.

Die folgenden numerischen Rechnungen sollen auf den Fall beschränkt bleiben, daß der störende Tragflügel oder Widerstandskörper in der Kanalachse liegt. Zunächst stellen wir den Zusammenhang zwischen den Größen Γ und Q der

theoretischen Rechnung und der Auftriebsziffer c_a bzw. der Widerstandsziffer c_w her. Aus den Gleichungen

$$A = \rho U \Gamma \text{ und } A = c_a \frac{\rho}{2} U^2 l \dots (62)$$

in denen A den Auftrieb der Spannweiteinheit des Flügels und l die Flügeltiefe bedeutet, folgt die bekannte Beziehung

$$\Gamma = \frac{c_a}{2} U l \dots (63)$$

In ähnlicher Weise erhält man durch Anwendung des Impulssatzes auf den Nachlauf eines Widerstandskörpers²⁾ die Beziehung

$$W = \rho U Q \dots (64)$$

in der w den Widerstand der Spannweiteinheit des Körpers bedeutet, und daraus zusammen mit der Definitionsgleichung der Widerstandsziffer c_w die Beziehung

$$Q = \frac{c_w}{2} U l \dots (65)$$

Bei diesem Ersatz eines Widerstandskörpers durch eine einfache Quelle ist allerdings die Voraussetzung der Kleinheit des Widerstandes noch mehr zu beachten als bei dem Flügel die Voraussetzung der Kleinheit des Auftriebes. Dieses Verfahren setzt nämlich voraus, daß sich die Ausbildung des Totwassers im Strahl ähnlich vollzieht wie in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit. Dies ist aber nur bei sehr kleinem Widerstand der Fall, bei größerem Widerstand wird der Nachlauf eines Körpers im festen Teil des Kanals von den Wänden zusammengehalten, während ein Körper/im Freistrahл zu einer Aufspaltung des Strahls mit seitlicher Ablenkung der beiden Teilstrahlen führt, also im Nachlauf ein völlig anderes Strömungsbild ergibt wie ein Körper in unendlich ausgedehnter Strömung³⁾. In diesem Fall hängt also die Ausbildung des Totwassers stark von der Lage des Körpers zur Düse ab; man kann daher nicht mehr hoffen, durch einfache Hinzufügung einer Korrektur zur Anströmgeschwindigkeit aus dem gemessenen Widerstand im Kanal den Widerstand in freier Strömung zu erhalten, weil das Strömungsbild schon in der Umgebung des Körpers sich wesentlich von dem in unbegrenzter Strömung unterscheidet.

Im einzelnen erhalten wir mit den Gleichungen (63) und (65) für den von einem Flügel oder Widerstandskörper in der Düse hervorgerufenen Vorstau aus (28)

$$\frac{u(-\infty)}{U} = -c_w \frac{l}{D} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{1 + e^{2\pi a/D}}} \dots (66)$$

Entsprechend erhalten wir für die Strahlablenkung aus (29)

$$\frac{v(+\infty)}{U} = +c_a \frac{l}{D} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{1 + e^{-2\pi a/D}}} \dots (67)$$

In Bild 4 sind Vorstau in der Düse und Strahlablenkung für verschiedene Lagen des Flügels zur Düse gezeichnet. Aus ihm kann man die durch (38) gegebene Korrektur der gemessenen Beiwerte wegen des Vorstaus in der Düse entnehmen.

Ebenso wie oben erhalten wir für die Korrektur der Anströmgeschwindigkeit am Orte des störenden Körpers aus (30)

$$\frac{u(a)}{U} = -c_w \frac{l}{D} \cdot \frac{1}{2(1 + e^{2\pi a/D})} \dots (68)$$

und für die Aufwärtsgeschwindigkeit am Orte des Körpers aus (31)

$$\frac{v(a)}{U} = +c_a \frac{l}{D} \cdot \frac{1}{2(1 + e^{-2\pi a/D})} \dots (69)$$

Um aus (68) die Korrektur des Anstellwinkels zu finden, hat man zu beachten, daß bei unserer Festsetzung der posi-

²⁾ Vgl. z. B. L. Prandtl u. O. Tietjens, Hydro- und Aeromechanik, Bd. 2, S. 139. Berlin 1931.

³⁾ Eine genauere Berechnung des Widerstandes läßt sich z. B. für den Fall einer quer zur Strömung gestellten ebenen Platte im Kanal unter dem Einfluß der Düse nach dem Hodographenverfahren durchführen. Vgl. hierzu die Göttinger Dissertation von V. Valcovici, 11.

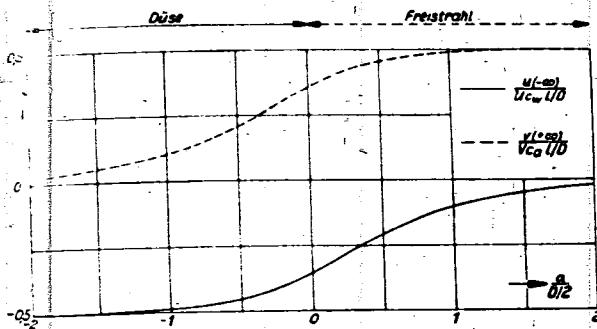


Bild 4. Vorstau in der Düse und Ablenkung des Freistrahles in Abhängigkeit von der Lage des störenden Körpers.

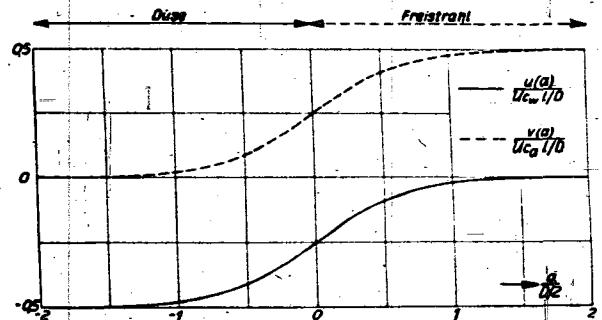


Bild 5. Horizontale und vertikale Komponente der Zusatzgeschwindigkeit am Orte des Körpers in Abhängigkeit von seiner Lage.

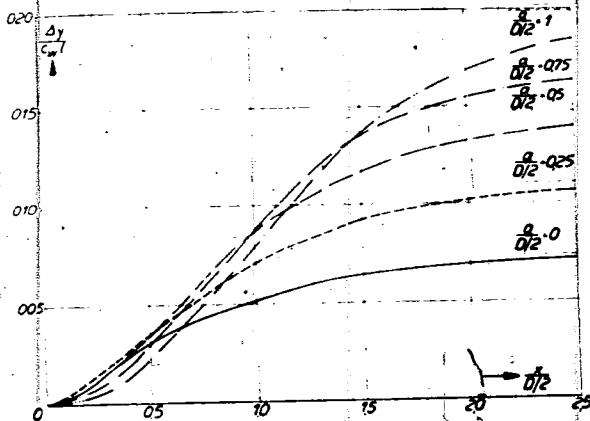


Bild 6. Verformung des Strahlrandes infolge des Widerstandes für verschiedene Lagen des Körpers zur Düse.

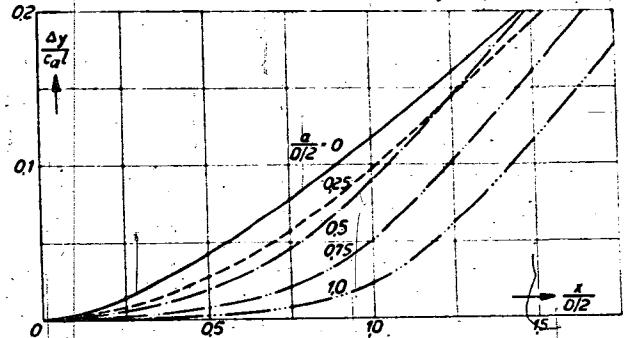


Bild 7. Verformung des Strahlrandes infolge des Auftriebes für verschiedene Lagen des Körpers zur Düse.

tiven Zirkulation der Flügel, wie das auch bei Messungen üblich ist, mit der Saugseite nach unten im Kanal zu denken ist, die Aufwärtsgeschwindigkeit entspricht also einer Verringerung des Anstellwinkels um den Betrag

$$\Delta \alpha = -c_a \frac{l}{D} \cdot \frac{28,6^\circ}{1 + e^{-2\pi a/D}} \quad (70)$$

In Bild 5 sind die beiden durch (68) und (69) gegebenen Korrekturen der Anströmgeschwindigkeit wegen des Widerstandes und des Anstellwinkels wegen des Auftriebes für verschiedene Lage des Flügels zur Düse gezeichnet. Schließlich erhalten wir für die Verformung des Strahlrandes infolge des Widerstandes aus (48)

$$\frac{\Delta y}{c_w l} = \pm \frac{1}{2\pi} \left(\text{arc tg} \left| \frac{e^{2\pi z/D} - 1}{e^{2\pi a/D} + 1} \right| - \frac{2}{\sqrt{e^{2\pi a/D} + 1}} \cdot \text{arc tg} \frac{e^{\pi z/D} + \sqrt{e^{2\pi z/D} - 1} - 1}{e^{\pi z/D} + \sqrt{e^{2\pi a/D} + 1} + 1} \right) \quad (71)$$

wo das obere Zeichen für den oberen, das untere für den unteren Strahlrand gilt. Ebenso wird die Verformung des Strahlrandes infolge des Auftriebes nach (49)

$$\frac{\Delta y}{c_w l} = \frac{1}{4\pi} \left[\ln \frac{(e^{\pi z/D} + \sqrt{e^{2\pi z/D} - 1})^2 + (e^{\pi a/D} + \sqrt{e^{2\pi a/D} + 1})^2}{(e^{\pi z/D} + \sqrt{e^{2\pi z/D} - 1})^2 \cdot (e^{\pi a/D} + \sqrt{e^{2\pi a/D} + 1})^2 + 1} + \frac{2}{\sqrt{1 + e^{-2\pi a/D}}} \ln (e^{\pi z/D} + \sqrt{e^{2\pi z/D} - 1}) \right] \quad (72)$$

Das Vorzeichen für beide Strahlränder das gleiche ist. Bild 6 ist durch (71) gegebene Verformung des oberen Strahlrandes infolge des Widerstandes für die Abstände $a/D = 0; 0,25; 0,5; 0,57; \text{ und } 1$ des Körpers von der Düse berechnet, in Bild 7 dann noch die durch (72) gegebene Verformung infolge des Auftriebes für die gleichen Werte von a/D .

Aus beiden Bildern erkennt man deutlich die gleich-

richtende Wirkung der Düse, die mit zunehmendem Abstand des Körpers von der Düse sehr rasch abklingt ($\sim e^{-2\pi a/D}$). Die Verformung des Strahlrandes durch das Zusammenwirken von Auftrieb und Widerstand ergibt sich durch einfache Überlagerung der beiden Anteile (71) und (72).

XI. Zusammenfassung.

Die ebene Strömung um einen Tragflügel mit nachfolgendem Totwasser — für die Rechnung dargestellt durch eine Wirbelquelle —, der sich in einem Freistrahle vor einer aus zwei parallelen Wänden gebildeten Düse befindet, wird im Bereiche der linearisierten Strahltheorie berechnet durch konforme Abbildung des aus Düse und Freistrahle gebildeten Strömungsgebietes auf die obere Hälfte des Äußeren des Einheitskreises und nachfolgende Anwendung der Methode der Spiegelbilder. Für die eindeutige Lösbarkeit der Aufgabe ist wesentlich, daß man über die Bedingung verschwindender Normalgeschwindigkeit an den festen bzw. Tangentialgeschwindigkeit an den freien Grenzen hinaus noch glatten Abfluß der Strömung an den beiden Enden der festen Wände verlangt. Dies wird erreicht durch Hinzufügung zweier im Kanal und im Freistrahle singularitätenfreier Strömungen, von denen die eine physikalisch einem Vorstau in der Düse entspricht, die andere einer Ablenkung des Freistrahles aus seiner ursprünglichen Richtung.

Als Korrekturen erhält man aus der Rechnung einen Abwind und eine Änderung der Anströmgeschwindigkeit am Orte des Flügels, ferner eine Korrektur der gemessenen Anströmgeschwindigkeit wegen des Vorstaues in der Düse, wenn man die Kanalgeschwindigkeit in üblicher Weise durch den Überdruck in der Düsenvorkammer mißt. Falls sich der Flügel in der Kanalachse befindet, hängt die Korrektur des Anstellwinkels nur von seinem Auftrieb ab, die beiden Korrekturen der Anströmgeschwindigkeit nur von seinem Widerstand. Die erhaltenen Korrekturformeln gehen für große Entfernung des Flügels von der Düse nicht in die durch Spiegelung in der Strömungsebene zu erhaltenden Korrekturformeln für den Flügel im festen Kanal und im reinen Freistrahle über, da in diesen Fällen die Bezugsgrößen andere sind.

Neben den Korrekturgrößen läßt sich aus dem komplexen Potential der Zusatzströmung leicht noch eine erste Näherung für die Verformung der freien Strahlgrenzen durch Auftrieb und Widerstand gewinnen. Diese Verformung sowie die Korrekturgrößen wurden für den Fall eines in der Kanalachse befindlichen Flügels in Abhängigkeit von der Lage des Flügels zur Düse numerisch berechnet.

XII. Schrifttum.

- [1] V. Válcovici, Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen mit zwei freien Strahlen. Dissertation Göttingen 1913.
- [2] L. Poggi, Sulla variazione da apportarsi ai risultati delle esperienze eseguite al tunnel aerodinamico su di un modello alare. *Aerotecnica* Bd. 11 (1931), S. 424 bis 435.
- [3] L. Prandtl und O. Tietjens, *Hydro- und Aeromechanik* Bd. 2 Berlin 1931.
- [4] D. Küchemann und F. Vandrey, Über den Einfluß der Düse (oder des Auffangtrichters) auf Widerstandsmessungen im Freistrah. *Z. angew. Math. Mech.* Bd. 21 (1941), S. 17 bis 31.
- [5] D. Küchemann und F. Vandrey, Über den Einfluß der Düse auf Widerstandsmessungen im Freistrah II. *Z. angew. Math. Mech.* Bd. 22 (1942), S. 15 bis 22.

J. Bukowski

Systematische Windkanalmessungen an Luftschauben

Messergebnisse des Aerodynamischen Instituts
der Technischen Hochschule Warschau

Herausgegeben mit Unterstützung der
Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring,
Braunschweig

Umfang 88 Seiten A 4 mit 84 Bildern und 61 Zahlentafeln

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 7,50 RM
je Exemplar einschl. Porto und Verpackung durch die ZWB

B. v. Schlippe und R. Dietrich

Zur Mechanik des Luftreifens

Herausgegeben von der

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen
der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)

Umfang 20 Seiten A 4 mit 51 Bildern

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 3,— RM
je Exemplar einschl. Porto und Verpackung durch die ZWB

G. N. Watson

A Treatise on the Theory of Bessel Functions

Vervielfältigt im Auftrage des Reichsluftfahrtministeriums
von der

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen
der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 25,— RM
je Exemplar einschl. Porto und Verpackung durch die ZWB

Fourier-Integrale für den praktischen Gebrauch

Vervielfältigt im Auftrage des Reichsluftfahrtministeriums
von der

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen
der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 5,50 RM
je Exemplar einschl. Porto und Verpackung durch die ZWB