

Technische Berichte

und

Vorabdrucke

aus

Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung

Heft 5 (15. Oktober)

7732

Herausgegeben

**von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB) - Berlin-Adlershof**

Inhaltsverzeichnis

„Thermodynamik in strömenden Gasen“. Von R. Focke, Berlin	133
„Die versuchsmäßige Ermittlung des Trägheitsmomentes um die Querachse bei Großflugzeugen“. Von E. Eujen, Göttingen	139
„Herstellung der Schaufeln für axial durchströmte Maschinen“. Von B. Eckert und W. Krautter, Stuttgart	143
„Eine neue hydraulische Presse und deren vielseitige Anwendungsmöglichkeiten“. Von P. Krekel, Brandenburg	157
„Mipolam-Preßkissen für Verformungszwecke von Leichtmetall“. Von H. A. Sagel, Troisdorf	161
„Flugzeugkonstrukteur und Fertigungsingenieur“. Von H. Tödter, Dessau	167
Aus deutschen Forschungsanstalten	171
Berichtigung	172

Zur Beachtung!

Dieser Bericht ist bestimmt für die Arbeiten im Dienstbereich des Empfängers. Der Bericht darf innerhalb dieses Dienstbereichs nur an Persönlichkeiten ausgehändigt werden, die aus dem Inhalt Anregungen für ihre Arbeiten zu schöpfen vermögen.

Verwendung zu Veröffentlichungen (ganz oder teilweise) sowie Weiterleitung an Persönlichkeiten außerhalb des Dienstbereichs des Empfängers ist ausgeschlossen.

**Der Bericht ist unter Stahlblechverschluß
mit Patentschloß zu halten.**

TECHNISCHE BERICHTE

Herausgegeben
 von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
 des Generalluftzeugmeisters (ZWB) / Berlin-Adlershof

Bd. 9 (1942)

Heft 5

Thermodynamik in strömenden Gasen

R. Focke, Berlin

A 65

Übersicht: Im folgenden werden die Zustandsänderungen von idealen Gasen bei Strömung in Rohren gleichbleibenden sowie veränderlichen Querschnittes bei Wärmezufuhr bzw. Wärmeabfuhr untersucht und die Gesetzmäßigkeiten abgeleitet. Im weiteren Verlauf der Untersuchungen kommt man zu einer rein thermodynamischen Entwicklung des Verdichtungsstoffes, welche erlaubt, über das Auftreten desselben sowie über die Stabilität überkritischer Strömungen bestimmte Aussagen zu machen.

Bei den in der Wärmemaschinentechnik in immer stärkerem Maße auftretenden Fällen der Erwartung von kontinuierlich strömenden Gasen in Rohren bzw. Kanälen gleichbleibenden Querschnittes bildet die Annahme, daß der Druck des zu erwärmenden Mittels dabei gleichbleibend ist, einen oft nicht mehr zu vernachlässigenden Fehler. In Anbetracht der Anstrengungen der modernen Technik an Verbrauchswerten und thermischen Wirkungsgraden das Äußerste herauszuholen, wird es notwendig, auch die bei der Erwärmung auftretenden Verhältnisse zu klären. Im Nachfolgenden werden diese Verhältnisse abgeleitet und der Berechnung zugänglich gemacht. Um dabei die verschiedenen Einflüsse ganz klar herauszustellen zu können, wird ideales Gas ohne Zähigkeit und somit ohne Reibung vorausgesetzt.

Die Art der Wärmezufuhr kann von außen durch Wärmeübertragung in Wärmetauschern oder durch Verbrennung von Kraftstoff im Gase selbst erfolgen; eine Veränderung der thermischen Eigenschaften des jeweiligen Gases wird hier nicht berücksichtigt.

In der Praxis wird vor allem der Fall eintreten, daß die Erwärmung eines Gases längs eines Strömungskanals erfolgt, der gleichbleibenden Querschnitt hat.

Die Kontinuität der Strömung erfordert: $G \cdot v = w \cdot F$, wobei G das sekundliche Gewicht, v das spezifische Volumen, w die Strömungsgeschwindigkeit und F der Kanalquerschnitt ist. Etwas umgeformt lautet also die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{G}{F} = \frac{w}{v} = c \quad (1)$$

Ersetzt man in der Grundgleichung für die Umwandlung von potentieller in kinetische Energie bei Gasen:

$$-v dp = d \frac{w^2}{2g} \quad (2)$$

die Geschwindigkeit w entsprechend Gl. (1) durch $w = c \cdot v$, so erhält man nach einfacher Zwischenrechnung:

$$- \frac{dp}{dv} = \frac{c^2}{g} \quad (3)$$

Dies ist die Zustandsgleichung der Gaserwärmung bzw. Abkühlung in Kanälen gleichbleibenden Querschnittes.

Diese Beziehung stellt im $p-v$ Diagramm eine Gerade dar, deren Neigung durch den Wert $\frac{c^2}{g}$ gegeben ist.

Die Folgerungen aus diesem Verhalten lassen sich im $p-v$ Diagramm, Bild 1, ableiten. Ein Gas habe den Zustand: p_1, T_1, v_1 (Punkt P_1) und ströme mit der Geschwindigkeit w_1 . Wird diesem Gas nun Wärme zugeführt, so ändern sich die Zustände nach Gl. (3), im $p-v$ Diagramm je nach dem Wert c^2/g nach einer der eingezeichneten Geraden durch Punkt P_1 . Mit der Erwärmung ist eine Verminderung des Druckes und eine Erhöhung der Geschwindigkeit verbunden, denn die Erwärmung bedingt eine Volumsvergrößerung, die das Gas zwingt, schneller zu strömen. Die Geschwindigkeitserhöhung wird jedoch nicht von der Wärmezufuhr allein energiemäßig gedeckt, sondern bedingt eine Druckabsenkung.

Diese Druckabsenkung ist streng getrennt zu halten von dem in der Praxis auftretenden Druckverlust infolge Reibung und hat mit letzterem nichts zu tun. Der Verlauf aller Zustandsgrößen läßt sich durch Integration von Gl. (3) in Verbindung mit der Zustandsgleichung der Gase angeben:

$$p_1 - p_2 = \frac{c^2}{g} (v_2 - v_1) \quad (4)$$

$$w_2 - w_1 = \frac{g}{c} (p_1 - p_2) \quad (5)$$

$$\frac{T_1}{v_1} = \frac{T_2}{v_2} = \frac{c^2}{Rg} (v_2 - v_1) \quad (5a)$$

$$p_1 - p_2 = R \cdot \left(\frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1} \right) \quad (5b)$$

Der Zusammenhang zwischen diesen Zustandsänderungen und der zugeführten Wärme ergibt sich aus dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre: $dQ = c_p \cdot dT = A \cdot v \cdot dp$

der Zustandsgleichung: $p \cdot v = R \cdot T$ und Gl. (3), zu:

$$dQ = c_p \left[-p \cdot dp \cdot \frac{g}{Rc^2} - v \cdot dv \cdot \frac{c^2}{Rg} \right] + A \frac{c^2}{g} v \cdot dv \quad (6)$$

oder integriert:

$$Q_{1-2} = c_p \frac{g}{2Rc^2} [p_1^2 - p_2^2] - c_v \frac{c^2}{2Rg} [v_2^2 - v_1^2] \quad (7)$$

und nach entsprechender Umformung:

1) Diese Form ist identisch mit der sog. Rayleighlinie, vergl. Stodola: Dampf- und Gasturbinen, S. 69.

$$Q_{1-2} = \frac{Ag}{2c^2(x-1)} \left[p_1^2(x-1) - p_2^2(x+1) + 2p_1 p_2 - \frac{2c}{g} w_1(p_1 - p_2) \right] \quad (7a)$$

Diese Gleichungen gelten natürlich nur für 1 kg Gas. Ist eine Menge G kg zu erwärmen, so sind Q_{1-2} in Gl. (7) und (7a) mit G zu vervielfachen.

Je größer die Wärmemenge ist, die man dem Gas zuführt, desto größer wird auch die Druckabsenkung und desto mehr steigt die Geschwindigkeit an. Man erkennt aus Bild 1 jedoch sofort, daß diesem Vorgang eine Grenze gesetzt ist, da es Isothermen gibt, die von der Geraden $\frac{dp}{dv} = \frac{c^2}{g}$ überhaupt nicht geschnitten werden;

d. h. aber, daß es für jedes Gas, das in einem Kanal konstanten Querschnittes erwärmt werden soll, für vorgegebene Anfangszustände p_1, v_1, w_1 eine maximal erreichbare Temperatur t_m bzw. T_m gibt (Punkt M in Bild 1) selbst wenn man eine beliebig große Druckabsenkung zulassen würde.

Diese überhaupt erreichbare höchste Temperatur T_m bestimmt sich nach folgender Überlegung: Eine kleine Wärmezufuhr ΔQ hat keinen Temperaturanstieg mehr zur Folge, d. h. $\frac{dp}{dv} = -\frac{c^2}{g}$ tangiert die entsprechende Isotherme, so daß für die unmittelbar benachbarten Zustandspunkte a vor Zufuhr und b nach Zufuhr von ΔQ gilt:

$$\frac{T_m - T_a}{v_a - v_i} = \frac{c^2}{Rg} (v_b - v_a)$$

oder mit $\Delta Q \rightarrow 0; v_a = v_i = v_m$ folgt:

$$T_m = \frac{c^2}{g} \frac{v_m^2}{R} \quad (8)$$

Diese Beziehung in Verbindung mit Gl. (5a) und Gl. (1) ergibt:

$$T_m = \frac{1}{4} \left[\sqrt{Rg} \cdot \frac{T_1}{w_1} + \sqrt{Rg} w_1 \right]^2 \quad (9)$$

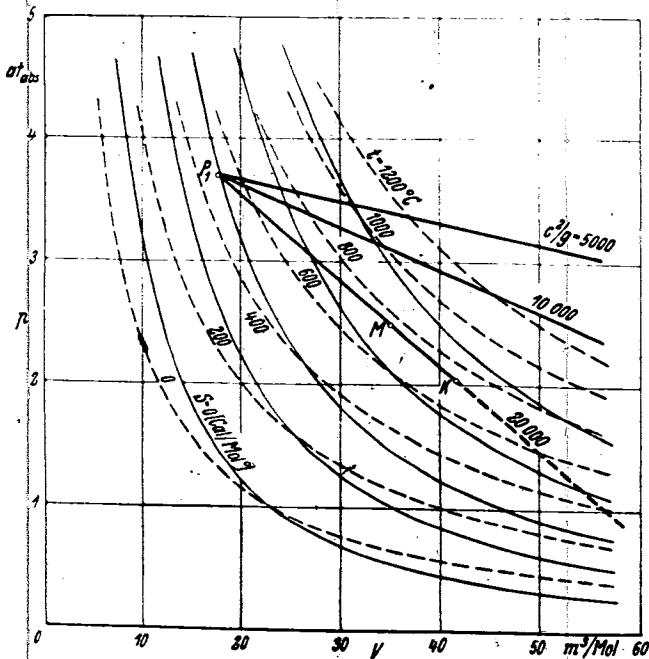


Bild 1. Erwärmung eines kontinuierlich strömenden Gases (hier Luft) in einem Kanal gleichbleibenden Querschnittes. Der Zustandsverlauf $\frac{dp}{dv} = \frac{c^2}{g}$ im p-v Diagramm.

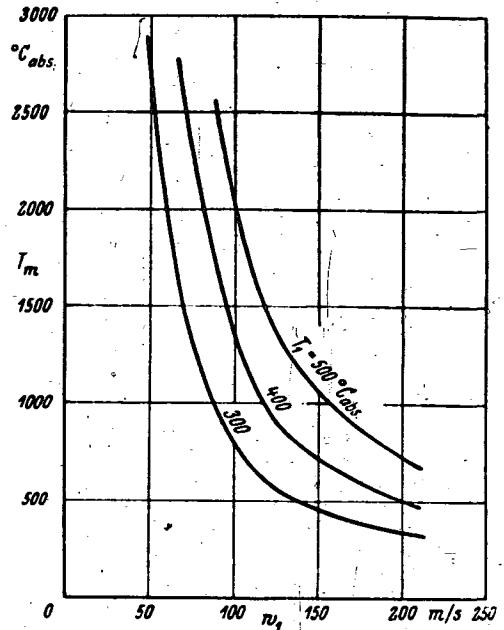


Bild 2. Maximal erreichbare Temperatur T_m für Luft bei Erwärmung in einem Kanal konstanten Querschnittes bei der Anfangsgeschwindigkeit w_1 und Anfangstemperatur T_1 .

Bild 2 zeigt die maximal erreichbaren Temperaturen T_m abhängig von der Anfangsgeschwindigkeit w_1 und der Anfangstemperatur T_1 . Man sieht, daß die hier bestimmten Grenzen durchaus nicht so extrem liegen, daß sie praktisch nicht in Frage kämen.

Führt man dem Gase über den Punkt M (Bild 1) hinaus Wärme zu, so gelangt man im Grenzfall bis zu Punkt K . Dort ist nämlich die Zustandsgerade parallel zur entsprechenden Adiabaten. Diese Verhältnisse lassen sich anschaulicher im $J-S$ Diagramm verfolgen.

In Bild 3 ist derselbe Zustandsverlauf wie in Bild 1 in das $J-S$ bzw. $T-S$ Diagramm übertragen. Man sieht, daß bis Punkt K Wärme zugeführt werden kann, während über K hinaus eine solche nicht mehr möglich ist, ohne die Anfangsgeschwindigkeit w_1 und damit die Neigung der Erwärmungsgeraden $\frac{dp}{dv} = \frac{c^2}{g}$ zu ändern.

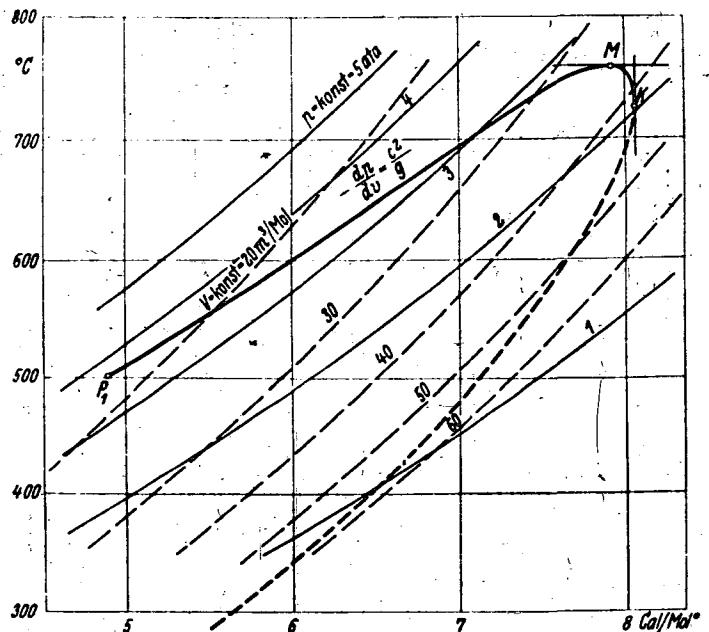


Bild 3. Darstellung des Zustandsverlaufes aus Bild 1 für $\frac{c^2}{g} = 20000$ im T-S Diagramm

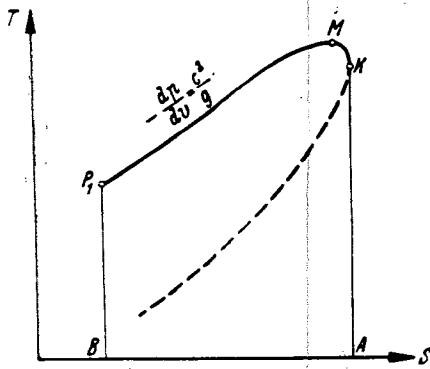
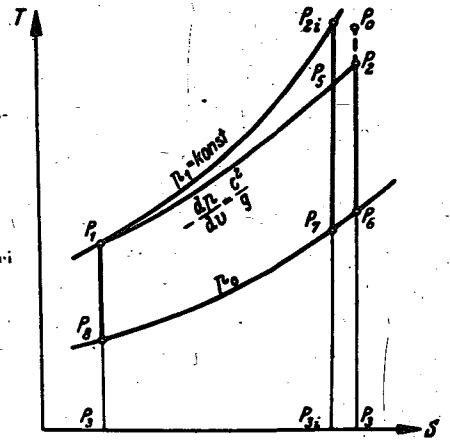


Bild 4 (links). Die einem Gase ohne Änderung der Anfangsgeschwindigkeit maximal zuführende Wärme

Bild 5 (rechts). Vergleich von zwei Kreisprozessen bei $p = const$ und im Kanal konstanten Querschnittes



Der Punkt K stellt somit einen besonderen Punkt und eine ganz bestimmte Grenze auf der Erwärmungsgeraden dar. In Bild 1 und 3 ist der Zustandsverlauf bis K ausgezogen, über K hinaus strichliert eingezeichnet. Der Verlauf der Zustände in diesem strichliert gezeichneten Gebiet wird noch in einem späteren Abschnitt näher untersucht werden. Hier soll vorläufig nur der Bereich bis Punkt K geklärt werden.

Eine über die maximale Temperatur hinausgehende Wärmezufuhr ist in geringem Maße noch möglich, bewirkt aber bereits keine Temperatursteigerung mehr, sondern im Gegenteil eine Temperaturabnahme. Führt man dem Gase eine größere Wärmemenge zu als dem Flächenstück P_1MKABP entspricht (Bild 4), so muß sich die Geschwindigkeit w_1 vermindern. In Bild 1 wird demzufolge die Neigung der Erwärmungsgeraden geringer; denn dann rückt der Punkt K in Bereiche höherer Temperaturen und höherer Drücke.

Ebendasselbe geschieht, wenn die einer bestimmten zugeführten Wärmemenge Q_{1-2} nach Gl. (7) entsprechende Druckabsenkung von p_1 auf p_2 nicht zur Verfügung steht. Ist also der Druck hinter bzw. das Druckgefälle vor bis hinter Wärmezufuhr vorgegeben, so gilt: Bei Wärmezufuhr längs eines Kanals konstanten Querschnittes vermindert sich das Durchsatzgewicht gegenüber dem bei Strömung ohne Wärmezufuhr.

Der ganze Vorgang der Erwärmung eines Gases im Kanal konstanten Querschnittes ist jedoch energiemäßig kein Verlust im eigentlichen Sinne, da dem niedrigeren Enddruck eine höhere Endgeschwindigkeit gegenübersteht. Trotzdem ist der Vorgang einer Erwärmung bei gleichbleibendem Querschnitt unvorteilhaft, ganz abgesehen von der oben nachgewiesenen Grenze der Temperaturerhöhung. Um diese Tatsache klarzustellen, ist es notwendig, den technisch-praktischen Sinn des Vorganges zu überlegen. Die Erwärmung eines Gases ist ja nie Selbstzweck, sondern soll die nutzbare Energie des Gases erhöhen. Das Verhältnis dieser Energieerhöhung zur aufgewendeten Wärmemenge ergibt bekanntlich den thermischen Wirkungsgrad.

Es möge nun folgender Vergleich angestellt werden. Ein Gas wird vom gleichen Anfangszustand p_1, t_1, w_1 einmal in einem Kanal gleichbleibenden Querschnittes erwärmt, ein andermal werde ihm dieselbe Wärmemenge längs eines entsprechend ausgebildeten Kanals so zugeführt, daß sich p_1 nicht ändert. Für diesen Fall gilt, wie nachfolgend noch gezeigt wird, daß sich w_1 ebenfalls nicht ändert. Wie beeinflussen diese beiden Verfahren die Energieerhöhung und damit den thermischen Wirkungsgrad?

Die Vorgänge lassen sich am besten wieder in $T-S$ bzw. $J-S$ Diagramm verfolgen (Bild 5). Die Wärme-

zufuhr bedingt einmal den Zustandsverlauf P_1P_2 gemäß Gl. (3), im anderen Fall führt sie auf $p_1 = const.$ zu Punkt P_{2i} . Nach den Eigenschaften des $T-S$ Diagrammes, bei vollkommenen Gasen auch des $J-S$ Diagrammes ist somit die Fläche $P_1P_2P_3P_4P_1$ gleich der Fläche $P_1P_{2i}P_3iP_4P_1$.

Wird nun beispielsweise der Kreisprozeß des Gases im weiteren durch zwei Adiabaten und der Isobaren p_0 begrenzt, so folgt die Wärmeausbeute im ersten Fall $(dp = -\frac{c^2}{g} dv)$ aus der Fläche $P_1P_2P_6P_8P_1$, im zweiten Fall ($p_1 = const$) zu $P_1P_{2i}P_7P_8P_1$. Da aber nun das Dreieck $P_1P_{2i}P_5P_1$ gleich dem Streifen $P_5P_2P_3P_4P_5$ ist, folgt unmittelbar, daß man im ersten Fall eine Wärmemenge von der Fläche $P_6P_3P_3iP_7P_6$ weniger ausnützen kann. Anders ausgedrückt heißt das: die höhere Geschwindigkeit w_2 ergibt, adiabatisch bis auf w_1 aufgestaut, einen Zustand P_0 , dessen Nutzgefälle kleiner ist, als dasjenige vom Zustand P_{2i} .

Es ist einleuchtend, daß die Form des Kreisprozesses keinen Einfluß auf das qualitative Ergebnis dieser Überlegungen haben kann. Je größer das Flächendreieck $P_1P_{2i}P_5P_1$ wird, desto größer wird die Einbuße an Wärmeausnützung.

Die Erwärmung bei gleichbleibendem Kanalquerschnitt stellt somit einen Verlust an nutzbarer Wärmeenergie dar, der umso größer wird, je schneller das Gas strömt und je höher die Endtemperatur liegt.

Um diesen Verlust zu vermeiden, muß also p konstant bleiben. Für die Wärmezufuhr längs einer $p = const$ -Linie gilt:

$$dQ = c_p \cdot dT$$

Setzt man in dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre

$$dQ = c_p \cdot dT - A \cdot v \cdot dp = c_p \cdot dT + Ad \frac{w^2}{2g}$$

diese Beziehung ein, so ergibt sich unmittelbar:

$$A \cdot d \frac{w^2}{2g} = 0$$

das heißt aber:

$$w = const$$

Der Querschnittsverlauf eines Kanales, in dem ein Gas bei gleichbleibendem Druck erwärmt werden soll, muß daher entsprechend der Volumenzunahme erweitert werden. Führt man einem Gase von der Stelle 1 eines Kanales bis zur Stelle 2 die Wärmemenge Q_{1-2} zu, so ergibt sich die Querschnittserweiterung gemäß

$$\int_1^2 dQ = G \cdot \int_{T_1}^{T_2} c_p \cdot dT + \int_{V_1}^{V_2} A p \cdot dV$$

zu:

$$F_2 = F_1 \left[G \cdot c_p \cdot T_1 + A p_1 \right] + 1 \quad (10)$$

Um also den oben erwähnten Verlust an nutzbarer Energie zu vermeiden oder auch um der Grenze der Erwärmung nach Bild 2 zu begegnen, ist es nötig, die Erwärmung des Gases in einem Kanal vorzunehmen, der nach Gl. (10) geformt ist.

Ein Beispiel möge einen Überblick über die auftretenden Größenordnungen der Nutzenenergieeinbuße geben. Gewählt sei dazu der Prozeß nach Bild 5. Eine Luftmenge werde von 1 at als 0° C adiabatisch auf 4 at verdichtet und dort bei $p = const$ auf 1000° C erwärmt. Die Nutzenenergie beträgt (nach dem $J - S$ Diagramm von Lutz und Wolff für Luft- und Rauchgase) 70,7 Cal/kg. Da die zugeführte Wärmemenge gleich 261 Cal/kg ist, ergibt sich somit ein thermischer Wirkungsgrad von 27,1%. Mit derselben Wärmemenge kann man die Luftmenge bei $p_1 = 4$ at abs und der zugehörigen Kompressionsendtemperatur $t_1 = 133°$ C bei der Anfangsgeschwindigkeit $w_1 = 100$ m/s in einem Kanal gleichen Querschnitts nach Gl. (7) auf den Zustand $p_2 = 2,93$ at abs, $t_2 = 948°$ C, $w_2 = 411$ m/s bringen, so daß die Nutzenergie jetzt nur noch 64,8 Cal/kg beträgt und der thermische Wirkungsgrad auf 24,8% absinkt.

Der thermische Wirkungsgrad verschlechtert sich also um 2,3% allein deshalb, weil die Luft in einem Kanal gleichbleibenden Querschnitts erwärmt wird. Die Nutzenergie ist dabei um fast 6 Cal/kg geringer geworden. Ist die Verdichtung sowie die Expansion des Kreisprozesses nun noch mit Wirkungsgraden behaftet, wie dies in der Praxis unvermeidlich ist, so werden obige Nachteile noch krasser; denn der Energieverlust von 5,9 Cal/kg, der der Fläche $P_6 P_3 P_7 P_6$ in Bild 5 entspricht, bleibt bestehen, macht aber relativ umso mehr aus, je schlechter die Wirkungsgrade der Kompression bzw. der Expansion sind. Die Anstrengungen der Technik die wirtschaftlichen Wirkungsgrade möglichst zu steigern, wobei nur noch jeweils geringe Steigerungen bei größten Anstrengungen erzielt werden, rechtfertigen daher vollkommen eine genaueste Beachtung obiger Überlegungen.

Als ein dritter ausgeprägter Fall kann eine Erwärmung eines kontinuierlich strömenden Gases bei gleichbleibendem Volumen angesehen werden. Aus der Grundgleichung (2) folgt mit $v = const$ sofort:

$$(p_2 - p_1) \cdot v = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}$$

und durch Einsetzen der Zustandsgleichung:

$$T_2 - T_1 = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2gR}$$

d. h. eine Erwärmung muß unter gleichzeitiger Geschwindigkeitsabnahme vor sich gehen. Die von Stelle 1 bis Stelle 2 zuzuführende Wärme für 1 kg Gas ergibt sich aus:

$$Q_{1-2} = \int_{T_1}^{T_2} c_p \cdot dT = \frac{A}{z-1} \cdot \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}$$

Dieser Prozeß läßt sich überhaupt nur bis zum völligen Aufstau der Anfangsgeschwindigkeit w_1 durchführen. Dabei muß der Strömungskanal noch stärker erweitert sein als er bei der Gleichdruckerwärmung war. Rechnerisch ergibt sich die Erweiterung für die Strecke, wo je Kilogramm Gas die Wärmemenge Q_{1-2} zugeführt wird, zu:

$$F_2 = \frac{F_1}{\sqrt{1 - \frac{2g(z-1)}{A \cdot w_1^2} \cdot Q_{1-2}}} \quad (11)$$

Abgesehen von der praktischen Schwierigkeit der Diffusorströmung ist es natürlich wieder ganz analog der Überlegungen bei einer Gaserwärmung bei $p = const$ und bei gleichbleibendem Kanalquerschnitt günstiger eine hohe Geschwindigkeit w_1 erst möglichst weitgehend in Druck umzusetzen und dann bei einer kleineren Geschwindigkeit, die nach rein praktischen Gesichtspunkten von Fall zu Fall gewählt werden muß längs einer Isobaren gemäß Gleichung (10) Wärme zuzuführen.

Wenden wir uns nun wieder der Strömung im Kanal konstanten Querschnitts zu. Es wurde schon vorher darauf hingewiesen, daß dem Punkt K (Bild 1 und Bild 3) eine besondere Bedeutung zukommt.

Er charakterisiert die Stelle, an der die Wärmezufuhr Null wird. Setzt man also in der Gleichung (6) $dQ = 0$, so folgt nach kurzem Umformen:

$$z \cdot \frac{p}{v} = \frac{c^2}{g} \quad (12)$$

Führt man noch

$c = \frac{w}{v}$ ein, so ergibt sich nach w aufgelöst:

$$w = \sqrt{z g p \cdot v}$$

Dies ist aber die bekannte Beziehung zwischen einem Gaszustand $p; v$; und seiner kritischen Geschwindigkeit $w = w_K$.

Einem Gas kann somit in einem Kanal gleichbleibenden Querschnitts nur solange Wärme zugeführt werden, bis die dabei dauernd steigende Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit des zugehörigen Gaszustandes ist.

Will man den Zustandsverlauf $\frac{dp}{dv} = \frac{c^2}{g}$ noch

über den Punkt K hinaus verwirklichen, in Bild 1 und Bild 3 strichliert eingezeichnet, so müßte man von dort an dem Gase Wärme entziehen, deren Größe zwischen zwei Zustandspunkten natürlich wieder durch Gl. (7) bzw. (7a) errechnet werden kann. Q_{1-2} ergibt sich als abzuführende Wärmemenge negativ. Die Gasgeschwindigkeit steigt dabei weiter an und wird in immer höherem Maße überkritisch. Die ausgezogenen Zustandsverläufe stellen somit das unterkritische Gebiet dar, die strichlierten Linien hingegen das überkritische Gebiet. Selbstverständlich kann die Erwärmungsgerade auch in entgegengesetzter Richtung aus dem überkritischen in das unterkritische Gebiet durchlaufen werden. Die Indexe 1 und 2 der Zustandsgrößen in den Gleichungen (4), (5), (5b), (7) und (7a) sind dann zu vertauschen. Es lassen sich somit für ein Gas, das in einem Kanal konstanten Querschnitts strömt, folgende Aussagen machen:

Bei unterkritischer Strömung bedingt eine Wärmezufuhr in Strömungsrichtung Druckabsenkung und Geschwindigkeitserhöhung, eine Wärmeabfuhr Druckzunahme und Geschwindigkeitsabnahme.

Bei überkritischer Strömung bedingt eine Wärmeabfuhr in Strömungsrichtung Druckzunahme und Geschwindigkeitsabnahme, eine Wärmeabfuhr Druckabnahme mit Geschwindigkeitserhöhung.

Diese Verhältnisse von Druck und Geschwindigkeit treten in einer Lavaldüse bei Expansion bzw. bei Ver-

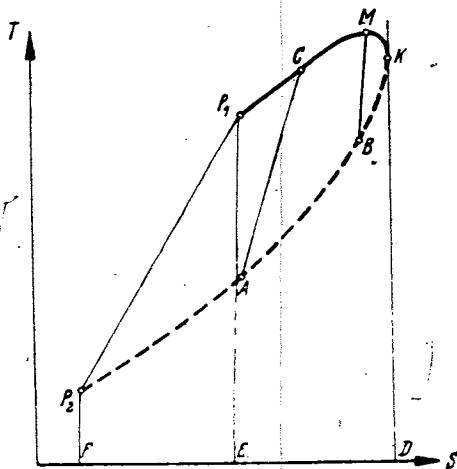


Bild 6. Einander zugeordnete Anfangs- und Endpunkte des Verdichtungsstoßes

Verdichtungsströmung in demselben qualitativen Maße auf. Wärmezu- bzw. -abfuhr in einem geraden Rohr hat also eine ähnliche Wirkung auf Druck- und Geschwindigkeitsverlauf wie eine erweiterte Düse bei adiabatischer Strömung.

Bild 4 legt die Frage nahe, wann man im überkritischen Gebiet soviel Wärme abgeführt hat, wie man vorher bei unterkritischer Strömung zuführen mußte, um bis zum kritischen Zustand zu kommen. Oder im umgekehrten Sinne des Zustandsverlaufes, wohin kommt man, wenn man die einer bestimmten überkritischen Strömung zuzuführende Wärme, um bis zum kritischen Zustand zu kommen, im unterkritischen Gebiet wieder entzieht. Bis also in Bild 6 die Flächen $P_1 M K D E P_1$ und $P_2 A K D F P_2$ gleich geworden sind, schreibt man Gleichung (7) in der Form:

$$Q_{1-2} = c_p \frac{g}{2R} (p_1^2 - p_2^2) - c_p \frac{1}{2gR} (w_2^2 - w_1^2)$$

so erhält man mit

$$Q_{1-2} = 0$$

in Verbindung mit Gleichung (5):

$$\frac{z g^2}{c^2} \left[\frac{c^2}{g^2} (w_2^2 - w_1^2) + p_2^2 + 2 \frac{c}{g} (w_2 - w_1) \cdot p_2 - p_2^2 \right] = -w_2^2 - w_1^2$$

$$w_1 = \frac{(z-1) \cdot w_2 + 2z \frac{g}{c} p_2}{z+1} \quad (13)$$

Diese Gleichung besagt nun: führe ich einem mit der überkritischen Geschwindigkeit w_2 strömenden Gase erst eine bestimmte Wärmemenge zu und dann die gleiche Wärmemenge wieder ab, so erhalte ich eine unterkritische Strömung mit der Geschwindigkeit w_1 . Die zugehörige Druckerhöhung ergibt sich, wenn man Gleichung (13) in Gleichung (5) einsetzt. Es folgt nach kurzer Zwischenrechnung:

$$p_1 = \frac{1}{z+1} \left[\frac{2c}{g} w_2 - (z-1) \cdot p_2 \right] \quad (14)$$

Der durch diese beiden Gleichungen festgelegte Zustandsverlauf zeichnet sich also dadurch aus, daß im Ganzen gesehen keine Wärme zu- oder abgeführt wurde.

Bei dem in der Praxis auftretenden un stetigen Übergang von Überschallströmung in Unterschallströmung, dem geraden Verdichtungsstoß, sind eben dieselben Bedingungen, wie sie oben zur Ableitung von Gl. (13) und Gl. (14) herangezogen wurden, vorhanden, nämlich:

keine Wärmezu- und -abfuhr an der Sprungstelle und der Sprung findet in einem Kanalstück statt, das unabhängig von der Form des Kanals, infolge der sehr kleinen Ausdehnung der Sprungstelle in Strömungsrichtung, als mit gleichbleibendem Querschnitt angesehen werden kann. (Daß der Verdichtungsstoß keine Unstetigkeitsstelle im mathematischen Sinne sein kann, ist unzweifelhaft, da er als physikalischer Vorgang zu seiner Ausbildung Zeit braucht. Nach obigem würde dabei der Zustandsverlauf eines Gasteilchens durch die Sprungstelle den in Bild 4 angegebenen Zustandsverlauf durchmachen. Daß also jedes betreffende Gasteilchen in den Zwischenzuständen während der Stoßverdichtung ein Entropiemaximum erreicht, von dem an sich sein Entropiewert wieder bis zum Zustand 1 verringert. Langrod²⁾ hat darin einen Widerspruch mit dem 2. Hauptsatz der Wärmelehre gesehen. Prandtl³⁾ hat jedoch diese Unklarheit behoben; indem er darauf hinwies, daß an der Stoßstelle Schichten mit endlichem Temperaturunterschied aneinander grenzen, daher ein intensivster Wärmeaustausch stattfinden muß. Ein Gasteilchen, das mit Überschallgeschwindigkeit in die Stoßstelle eintritt, bezieht beim Durchlaufen des überkritischen Gebietes bis zum kritischen Zustand die dazu nötige Wärme von einem Teilchen, das den unterkritischen Bereich durchläuft und dabei eben dieselbe Wärmemenge abgibt.

Es ist leicht zu zeigen, daß die Prandtl'sche Grundgleichung des Verdichtungsstoßes⁴⁾ $w_1 \cdot w_2 = a_0^2$ durch obige Gleichungen erfüllt wird. Aus Gl. (13) folgt:

$$w_1 \cdot w_2 = \frac{1}{z+1} \left[(z-1) \cdot w_2^2 + 2g z R T_2 \right]$$

Würde die Geschwindigkeit w_2 vom Zustand $p_2 T_2$ adiabatisch aufgestaut werden, so wäre die Temperaturerhöhung $\Delta T = \frac{w_2^2}{2g c_p}$ u. d. Stautemperatur $T_0 = T_2 + \Delta t$.

Die zu diesem „Kesselzustand“ gehörende Schallgeschwindigkeit bei Expansion ist bekanntlich

$$a_0 = \sqrt{2g \frac{z}{z+1} R \cdot T_0}$$

Setzt man für T_0 den entsprechenden Wert ein, so ergibt sich nach kurzem Umformen:

$$a_0^2 = \frac{1}{z+1} \left[(z-1) \cdot w_2^2 + 2g z R T_2 \right] = w_1 \cdot w_2$$

Diese kritische Geschwindigkeit a_0 ist eine ideale und nicht die beim Durchlaufen des Verdichtungsstoßes tatsächlich auftretende⁵⁾. Die tatsächlich auftretenden kritischen Zustände ergeben sich vielmehr aus Gleichung (12) und (4) zu

$$p_k = \frac{1}{z+1} \left(p_2 + \frac{c^2}{g} v_2 \right) \quad (15a)$$

$$w_k = w_2^2 - \left[\frac{p_2 + \frac{c^2}{g} v_2}{z+1} - p_2 \right] \cdot \frac{g}{c} \quad (15b)$$

oder:

2) Z. f. d. ges. Turbinenwesen 1905.

3) Z. f. d. ges. Turbinenwesen 1906.

4) Hütte I 26. Auflage S. 415.

5) Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, daß alle Ableitungen für ideale Gase gelten. Unter Berücksichtigung der Gaszähigkeit leitet A. Stodola (Dampf- und Gasturbinen VI. Auflage) eine Stoßgleichung ab, die der hier abgeleiteten äquivalent ist; jedoch noch ein Glied p^* , d. h. „Zermahlungsdruck“, enthält. Der Zustandsverlauf während des Stoßes ist dann ein etwas anderer, führt aber zu demselben Endzustand im unterkritischen Gebiet.

$$p_k = \frac{1}{z+1} \left(p_1 + \frac{c^2}{g} v_1 \right) \quad (16a)$$

$$w_k = \frac{g}{c} \left[p_1 + \frac{c^2}{g} v_1 \right] + w_1 \quad (16b)$$

Mit diesen kritischen Werten läßt sich ein sehr einfacher Zusammenhang zwischen Anfangszustand und Endzustand des Verdichtungsstoßes angeben.

Schreibt man Gleichung (14) in der Form

$$p_1 (z+1) + p_2 (z-1) = 2 \frac{c}{g} w_2$$

und Gleichung (15a):

$$p_k (z+1) - p_2 = \frac{c}{g} w_2$$

so folgt aus diesen beiden Beziehungen nach kurzer Rechnung:

$$p_k = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad (17)$$

Da also $p_1 - p_k = p_k - p_2$ ist, folgt unmittelbar:

$$w_k = \frac{w_1 + w_2}{2} \quad (18)$$

In Bild 6 sind verschiedene, einander zugeordnete Anfangs- und Endpunkte des Verdichtungsstoßes, P_2, P_1, A, C, B, M , eingezeichnet. Man sieht sofort, daß der Entropiezuwachs des Verdichtungsstoßes immer geringer wird, je weniger überkritisch der Anfangszustand der Strömung ist.

Man könnte somit den Verdichtungsstoß, wenn w nicht allzuviel höher liegt als w_k , gut als eine selbsttätige Verdichtung verwenden, deren adiabatischer Wirkungsgrad besser sein kann als der in einem Diffusor erreichbare, wobei noch die Stoßverdichtung keinerlei Aufwand erfordert. Ein derartiger „Stoßwirkungsgrad“ wäre definiert durch:

$$\eta_{st} = \frac{H_e}{H_i}$$

wobei $H_i = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g}$ und $H_e = \frac{z}{z-1} R \cdot T_2 \left[\frac{p_1}{p_2} \right]^{\frac{z-1}{z}}$

ist. Mit Gl. (5b) und (13) ergibt sich somit:

$$\eta_{st} = 2g \frac{z}{z-1} R \cdot T_2 \left[\frac{w_2^2}{w_1^2} - \frac{w_2(z-1) + 2gz}{1+z} \frac{RT_2}{w_2} \right]$$

Eine weitere Frage ist es nun noch, aus welchen Ursachen es in einem Strömungskanal überhaupt zu einem Verdichtungsstoß kommt. Um diese Ursachen qualitativ näher zu beleuchten, ist es notwendig, von dem idealen Gas auf Gase mit Zähigkeit und somit Reibung überzugehen.

Ein derartiges Gas kann, wenn es in einem Kanal gleichbleibenden Querschnittes ohne Wärmezu- oder -abfuhr strömt, nur Zustände annehmen, die durch die sogenannten Fannokurven⁶⁾ wiedergegeben werden.

In Bild 7 ist die zum überkritischen Zustand w_2, p_2, t_2 (Punkt P_2) gehörende Fannokurve eingezeichnet. Das mit diesem Zustand strömende Gas erfährt durch Reibung eine Drosselung etwa bis Punkt P_0 , so daß nun infolge des größeren Volumens v_0 und der kleineren Geschwindigkeit w_0 der Kanal zu eng wäre, wenn das Gas nicht den Ausweg hätte, durch Aufstau wieder stabile Verhältnisse zu schaffen. Bei überkritischer Strömung macht die

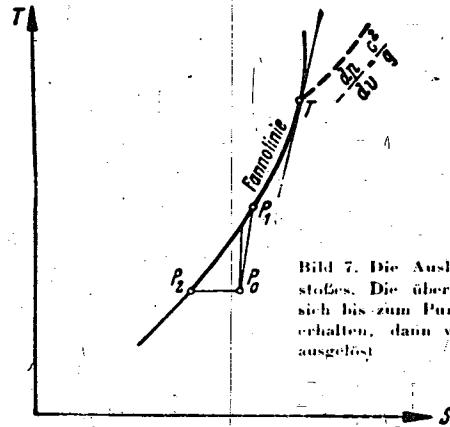


Bild 7. Die Auslösung des Verdichtungsstoßes. Die überkritische Strömung kann sich bis zum Punkt T auf der Fannokurve erhalten, dann wird ein Verdichtungsstoß ausgelöst.

Geschwindigkeitsabnahme bei adiabatischer Strömung weniger aus als die zugehörige Volumsabnahme. Nun erfolgt der Aufstau in zähen Gasen nicht adiabatisch, sondern polytrop, also von Punkt P_0 etwa nach Punkt P_1 ($w_1 < w_0$). Schneidet dabei die Polytrope die Fannokurve (wie dies hier angenommen ist), so hat das Gas wieder stabile Verhältnisse herstellen können.

Der hier in Drosselung und Aufstau mit Reibung zerlegte Vorgang wird natürlich gleichzeitig stattfinden. Man könnte jedoch in jedem Punkte der Fannokurve eine Polytropenneigung angeben, wenn die Zähigkeitswerte des Gases in dem betreffenden Zustandspunkt bekannt wären, die dann die Möglichkeit wiedergibt, die das Gas hat, durch Geschwindigkeitsverminderung seinen Zustand zu ändern. In dem Punkt der Fannokurve, wo diese Aufstaupolytrope Tangente wird, Punkt T in Bild 7, ist die Grenze erreicht, wo sich das Gas vermöge seiner Eigenschaften so zu helfen weiß, daß es die Kontinuität immer wieder herstellen kann. Bis dorthin hat somit keine Ursache zur Auslösung eines Verdichtungsstoßes bestanden. Geht jedoch die Aufstaupolytrope von der Fannokurve nach außen ab, dann kann durch weitere Geschwindigkeitsabnahme die nötige relativ größere Volumenabnahme nicht mehr erzielt werden, eine Kontinuität

$$\left[\begin{array}{c} w_2(z-1) + 2gz \\ c \\ g \end{array} \right] \frac{RT_2}{w_2} \left[\begin{array}{c} z \\ 1+z \\ p_2 \end{array} \right] + 1 \left[\begin{array}{c} z \\ z \\ -1 \end{array} \right] \quad (19)$$

ist nicht mehr zu erreichen, d. h. das Gas kommt durch den Querschnitt nicht mehr hindurch und sucht sich einen Zustand, bei dem es wieder in stabile Strömungsverhältnisse kommt. Dies geschieht eben durch einen Sprung in das unterkritische Gebiet.

Somit stellt der Punkt T in Bild 7 jenen Zustand dar, bei dem die überkritische Strömung mit dem Anfangszustand p_2, t_2, w_2 einen Verdichtungsstoß durchmachen muß. Eine überkritische Strömung wird daher umso besser und leichter dem $w = const$ -Gesetz folgen können und deshalb stabiler sein, je höher überkritisch sein Strömungszustand ist. Diese Überlegungen werden durch Versuche⁷⁾, die über überkritische Strömung angestellt wurden, gut bestätigt.

6) Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Band 4, S. 369.
7) W. Frössl, Strömung im Rohr mit Unter- und Überschallgeschwindigkeit, Forsch. Ing. Wes. 1936, S. 75/84.

Zusammenfassung

Ausgehend von den Verhältnissen, die auftreten, wenn man ein kontinuierlich strömendes Gas längs eines Kanals gleichbleibenden Querschnittes erwärmen will, wird festgestellt, daß der Erwärmung eine ganz bestimmte Grenze gesetzt ist sowie der nachteilige Einfluß dieses Vorganges auf den thermischen Wirkungsgrad mit kontinuierlicher Gasströmung nachgewiesen. Es wird weiter gezeigt, daß eine Wärmezufuhr nur bis zur Erreichung

des kritischen Gaszustandes möglich ist. In Erweiterung der Beziehungen auf das überkritische Gebiet bekommt man eine anschauliche Ableitung des Verdichtungsstoßes, bei der sehr einfache Zusammenhänge zwischen dem Anfangs- und Endzustand sowie den bei idealen Gasen tatsächlich durchlaufenen kritischen Werten aufgezeigt werden. Eine kurze Diskussion über die Ursachen, die zur Auslösung des Verdichtungsstoßes führen, beschließt diese Untersuchungen.

Die versuchsmäßige Ermittlung des Trägheitsmomentes um die Querachse bei Großflugzeugen

E. Eujen, Göttingen

Mitteilung der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen e. V.

C 22

Übersicht: Die normale Methode der Trägheitsmomentenbestimmung eines Flugzeugs durch Aufhängung als physikalisches Pendel ist bei Großflugzeugen wegen technischer Schwierigkeiten kaum noch anwendbar. Für den Fall, daß nur das Trägheitsmoment um die Querachse ermittelt werden soll, wird ein anderes Meßverfahren beschrieben und durch Versuche überprüft, daß bei größter Einfachheit in der Anwendung sehr befriedigende Ergebnisse liefert.

Gliederung

- I. Einleitung
- II. Theoretische Grundlagen des Verfahrens
- III. Durchführung von Versuchen
- IV. Zusammenfassung
- V. Schrifttum

I. Einleitung

Für die theoretische Untersuchung gewisser in der Symmetrieebene des Flugzeugs verlaufender beschleunigter Flugzustände wie z. B. des Abfangvorganges oder freier Schwingungen um die Querachse ist die Kenntnis des Trägheitsmomentes um diese Achse von großer Bedeutung. Bei im Entwurf befindlichen Flugzeugmustern hat man nur die Möglichkeit, das Trägheitsmoment unter weitgehender Aufteilung der Massen durch Rechnung zu erfassen. Darüber hinaus ist versucht worden, durch Sammlung von Unterlagen und ihrer statistischen Auswertung gesetzmäßige Abhängigkeiten des Trägheitsmomentes von den Abmessungen des Flugzeugs aufzufinden [1]¹), um auf diese Weise dem Konstrukteur wie dem Forscher Anhaltspunkte für seine Arbeiten zu geben.

Diese Verfahren sind jedoch nur als rohe Schätzung anzusehen, deren Genauigkeit für viele Aufgaben nicht ausreicht. Wo die Möglichkeit besteht, wird man daher immer auf eine versuchsmäßige Bestimmung des Trägheitsmomentes zurückkommen.

Am bekanntesten ist das Verfahren, die Trägheitsmomente eines Flugzeugs durch Aufhängung als Körperpendel zu ermitteln. Diese Methode erfordert allerdings selbst bei kleineren Flugzeugen bereits einen ziemlich großen Aufwand an Vorrichtungen, da zur Erzielung einer ausreichenden Genauigkeit gewisse Grundregeln hinsichtlich der Aufhängung selbst unbedingt beachtet werden müssen. Bei Großflugzeugen ist die Erfüllung dieser Voraussetzungen für das Gelingen des Pendelversuchs so schwierig — es muß beispielsweise das Aufhängegerüst so starr sein, daß ein Mitschwingen beim Pendeln unbedingt vermieden wird — daß die Methode der pendelnden Aufhängung des ganzen Flugzeugs prak-

tisch nicht mehr in Betracht kommt. Falls es sich nur darum handelt, das Trägheitsmoment bezüglich der Querachse festzustellen, gewinnt das nachstehend beschriebene Verfahren größere Bedeutung, weil es neben seiner Anwendbarkeit auf jede Flugzeuggröße noch den Vorteil größter Einfachheit besitzt. Es ist an sich wohl nicht neu, doch sollen an dieser Stelle nochmals die theoretischen Grundlagen dargestellt und die Fehlerquellen aufgezeigt, sowie an Hand von experimentellen Untersuchungen die Zuverlässigkeit und praktische Anwendbarkeit überprüft werden.

II. Theoretische Grundlagen des Verfahrens

Der Körper, dessen Trägheitsmoment bestimmt werden soll, ist an einem Ende drehbar gelagert und in der waagerechten Entfernung l von der Drehachse durch eine Feder bekannter Federcharakteristik c gehalten (vergl. Bild 1). Dieser Aufhängepunkt soll von einer durch den Drehpunkt gehenden horizontalen Bezugslinie den Abstand b haben. Der Schwerpunkt des Körpers hat bezüglich des Drehpunktes und der Bezugslinie die Koordinaten x_0 und z_0 . Wenn m die Masse des Körpers, J_0 sein Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse und φ der Auslenkungswinkel des Pendels aus der Gleichgewichtslage sind, lautet die Bewegungsgleichung des Schwingungssystems mit als masselos angenommener Feder für kleine Auslenkungswinkel [2]

$$J_0 \ddot{\varphi} + \left[c \left(1 + \lambda_0 \cdot \frac{b^2}{l^2} \right) - m g \frac{z_0}{l^2} \right] l^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

λ_0 ist hierin die Dehnung der Feder in der Gleichgewichtslage infolge der Belastung durch das Pendel; sie kann aus der statischen Gleichgewichtsbedingung

$$c \lambda_0 l = m g x_0 \quad (2)$$

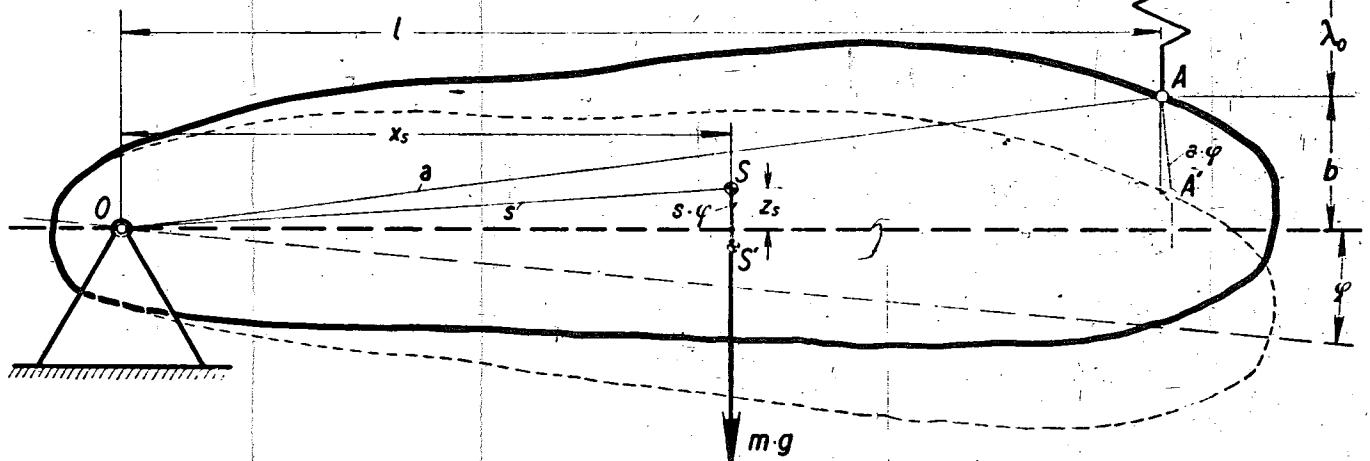
berechnet werden.

Nach Gleichung (1) erfährt die Federkonstante c eine scheinbare Vergrößerung um den Faktor $\left(1 + \lambda_0 \cdot \frac{b^2}{l^2} \right)$, die außer von der Größe b und der Federverlängerung λ_0 sehr stark vom Abstand l des Federaufhängepunktes vom Drehpunkt abhängt, da seine Größe im Quadrat eingeht. Bei Schwingungsversuchen mit Flugzeugen normaler Bauart ist der Abstand im allgemeinen groß gegen-

1) Die Angaben in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumsverzeichnis am Ende der Arbeit.

über der Höhe b des Federangriffpunktes über der Bezugslinie, so daß bei nicht zu weicher Feder (λ_0 groß) der obige Faktor praktisch kaum von eins abweicht. Die Berechnung des zweiten Summanden in der eckigen Klammer, der Größe $m g \cdot \frac{z_s^2}{l^2}$, setzt vor allen Dingen die Kenntnis der Schwerpunktlage des Körpers voraus. Die Feststellung erfolgt am einfachsten durch Wägung, wobei die größtmögliche Genauigkeit angestrebt werden muß²⁾, da der Abstand s zwischen Drehachse und Schwerpunkt später auch zur Umrechnung des durch den Schwingungsversuch bezüglich der Drehachse 0 ermittelten Trägheitsmomentes auf den Schwerpunkt S benötigt wird. Wenn das Gesamtgewicht des Körpers bereits bekannt ist, kann die Aufhängung auf den Schwingungsversuch mit Vorteil auch für die Schwer-

Bild 1. Schema des Schwingungssystems



punktsbestimmung herangezogen werden, wie später an einem Beispiel gezeigt wird. Wenn sowohl Schwerpunkt wie Aufhängepunkt in die Horizontallinie fallen, wird die Schwingungsgleichung erheblich vereinfacht. Umgekehrt läßt sich der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck als gesamte Federkonstante c' des Schwingungssystems v_s auffassen, deren Größe in bekannter Weise durch Anhängen von Zusatzgewichten und Messen der zugehörigen Federverlängerungen bestimmt werden kann. Es ist nur darauf zu achten, daß bei einer solchen Messung die Auslenkungswinkel φ klein bleiben. Auch soll der Anbringungsort der Zusatzgewichte möglichst in der Nähe der horizontalen Bezugslinie liegen, da andernfalls zu den jeweils ermittelten Federkonstanten ein von der Größe G_z des Zusatzgewichtes abhängendes Korrekturglied $G_z \cdot \frac{b_z^2}{l^2}$ hinzuzufügen ist, wobei b_z die Höhe bezeichnet, in der das Zusatzgewicht über der Bezugslinie (nach oben positiv) angreift.

Aus der versuchsmäßig ermittelten Schwingungszeit T des Systems erhält man auf Grund der Schwingungsgleichung das Trägheitsmoment I_0 des Körpers bezüglich der Drehachse zu

$$I_0 = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot c' l^2 \quad (3)$$

mit $c' = c \left(1 + \lambda_0 \cdot \frac{b}{l^2}\right) - m g \cdot \frac{z_s^2}{l^2}$. Das Trägheitsmoment um den Schwerpunkt ergibt sich aus dem Satz

$$I_s = I_0 - m s^2 \quad (4)$$

²⁾ Oberhaupt müssen alle Längenbestimmungen mit großer Sorgfalt durchgeführt werden.

Die Berücksichtigung der mitschwingenden Feder-
 masse in der Schwingungsgleichung erübrigt sich, wenn für die Vermessung eines Flugzeugs das Verhältnis von Feder-
 masse zur Flugzeugmasse so gewählt werden kann, daß es $1/2\%$ nicht überschreitet. Ist dies in besonderen Fällen nicht möglich, so rechnet man zweckmäßigerweise so, als ob das Schwingungssystem durch Hintereinanderschaltung einer schweren Feder und dem mit masseloser Feder versehenen Grundsystem entstanden ist. Das Quadrat der Schwingungsdauer eines derartig gestalteten Schwingungsgebildes ist dann gleich der Summe der Quadrate der Einzelschwingungszeiten. Hieraus kann der Betrag ermittelt werden, um den das unter Annahme einer masselosen Feder ermittelte Trägheitsmoment des Körpers vermindert werden muß. Für eine zylindrische, schwere Schraubensfeder von der Masse m_F ergibt die Rechnung (vergl. [3]) beispielsweise den für den Einfluß der Feder-
 masse abzurechnenden Betrag $\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{c'}{c} \cdot m_F l^2$.
 Für andere Federarten müßte im Zweifelsfalle die wirk-
 same Feder-
 masse mit Hilfe einer Messung der Schwin-
 gungsdauer der allein schwingenden Feder ermittelt werden.

III. Durchführung von Versuchen

Zur Überprüfung der Genauigkeit des Meßverfahrens wurden zunächst Versuche mit einem Körper von einfacher geometrischer Gestalt durchgeführt. Als Versuchsobjekt diente ein rechteckiges, bearbeitetes Stück Flach-eisen von der Länge 0,501 m und der Höhe 0,05 m. Das Gewicht dieses Stückes betrug $G = 1,96$ kg und sein Trägheitsmoment um die Drehachse, das sowohl durch

Q₁

C

240
245
250
255
260
265
270
275
280
285
290
295
300
305
310
315
320
325
330
335
340
345
350
355
360

Vol Co.

54
56
58
61
63.5
66.5
68.7
71.5
73.5
75.5
78
80
82
83.5
85
86.5
87.8
89
90.5
91.5
92
93
94

7742

Rechnung als auch versuchsmäßig durch Aufhängung als einfaches physikalisches Pendel ermittelt wurde, ergab sich übereinstimmend zu $I_0 = 0,01603 \text{ kg m}^2$. Die Anordnung als Schwinger nach Bild 1 erfolgte so, daß Drehpunkt und Schwerpunkt in der horizontalen Symmetrieachse lagen ($z_s = 0$), während die Feder an der Oberkante des Pendels im Abstände $b = 0,035 \text{ m}$ von der Symmetrielinie befestigt war. Die Versuche wurden mit verschiedenen Abständen l des Federangriffspunktes von der Drehachse ausgeführt und hatten das in Zahlentafel 1 enthaltene Ergebnis.

Zahlentafel 1. Versuchsergebnisse

l	c' gemessen	c' berechnet	c' bez. auf gemessene Werte	T gemessen	I_0	ΔI_0 bez. auf wirkl. Wert
[m.]	[kg m.]	[kg gm.]	[0,0]	[s.]	[kg m ²]	[0,0]
0,489	5,853	5,86	+0,12	0,676	0,01618	+0,935
0,443	5,965	5,91	-0,92	0,737	0,01605	+0,125
0,400	5,95	5,98	+0,50	0,8143	0,01608	+0,31
0,350	6,10	6,11	+0,16	0,9155	0,01595	-0,50
0,300	6,38	6,34	-0,62	1,049	0,0160	-0,187

Die Federkonstante der Feder für sich war $c = 5,72 \text{ kg m}$; die Federkonstanten des Versuchssystems wurden sowohl durch Rechnung als auch durch Messung ermittelt. Die geringen Unterschiede zwischen beiden Werten sind hauptsächlich auf Fehler in den Längenbestimmungen zurückzuführen. Das aus den gemessenen Schwingungszeiten ermittelte Trägheitsmoment I_0 wurde mit den am System gemessenen Federkonstanten berechnet. Die Schwingungszeiten sind dadurch, daß über eine größere Zahl von Schwingungen (50 oder 100) gestoppt werden konnte und eine Stoppuhr mit $\frac{1}{100}$ s Einteilung benutzt wurde, bis auf $\pm 0,2\%$ maximale Abweichung genau. Die Beobachtung der Durchgänge des Pendels durch die Nullage konnte durch Verwendung eines Tauchkontaktes, der eine kleine Glühlampe zum Aufleuchten brachte, sehr erleichtert werden. Wie Zahlentafel 1 zeigt, bleibt der Fehler in dem versuchsmäßig ermittelten Trägheitsmoment des Körpers um die Drehachse gegenüber

dem wirklichen Trägheitsmoment in allen Versuchen unter 1 %.

Nachdem somit durch die Vorversuche die Brauchbarkeit des Verfahrens erwiesen war, wurde als Anwendung auf die Bestimmung des Trägheitsmomentes von Flugzeugen um die Querachse ein Großversuch mit dem Flugzeugmuster Messerschmitt Bf 108 durchgeführt. Den Versuchsaufbau zeigt Bild 2. Das Flugzeug war im Vorderteil des Rumpfes an den dafür vorgesehenen Kugelpfannen unterböckt und in der Nähe des Sporns an einer Schraubenfeder aufgehängt, wobei die am Rumpf des Flugzeugs gekennzeichnete Bezugslinie mittels einer Schlauchwasserwaage waagrecht ausgerichtet wurde. In dieser Anordnung lagen der Federangriffspunkt und der Schwerpunkt des Flugzeugs oberhalb der durch den Drehpunkt gehenden Bezugssachse. Aus der Wägung in der Horizontallage ergibt sich unmittelbar der Schwer-

punktsabstand $x_s = -\frac{G}{G_{so}} \cdot l$. Hierbei ist das Gesamtgewicht G des Flugzeugs durch besondere Wägung ermittelt worden, während das Gewicht G_{so} am Rumpfe der Einfachheit halber aus der Auslenkung der Feder errechnet wurde. Zur Ermittlung der Schwerpunkthochlage z_s ist eine zweite Wägung mit geneigter Bezugssachse (Spornlage) notwendig. Ihre Kombination mit der Wägung in Horizontallage ergibt mit den entsprechend der Skizze, Bild 3, zu bestimmenden Längenmaßen und dem neuen Sporngewicht G_s die Hochlage des Schwerpunktes aus der Beziehung

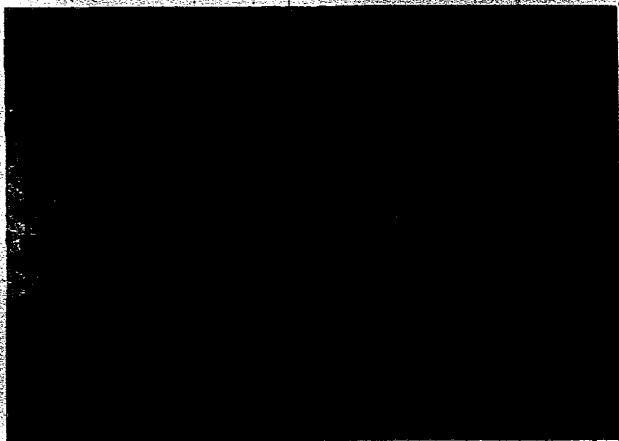
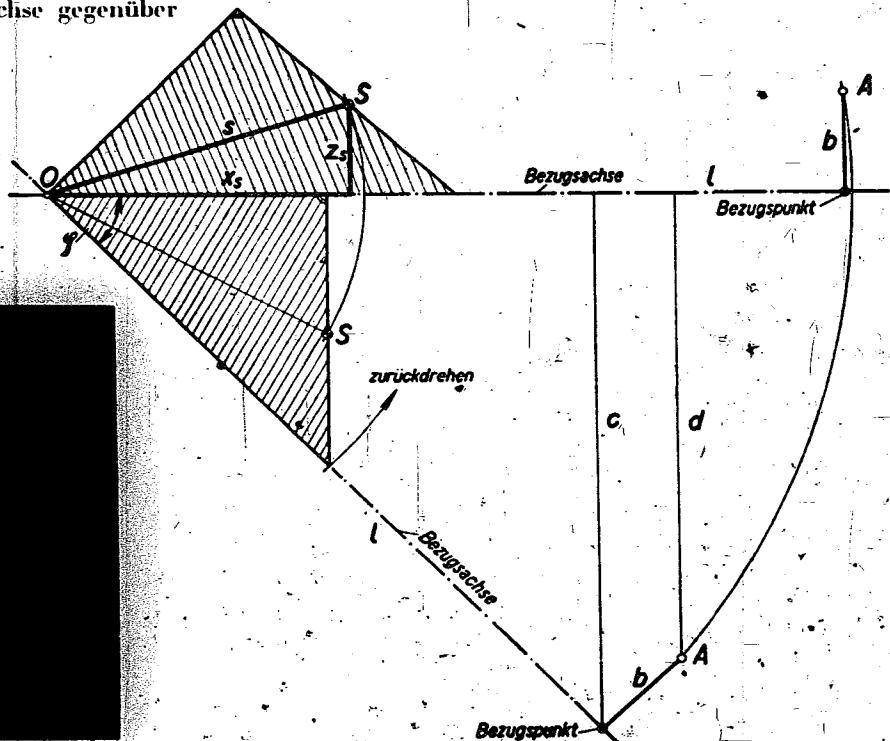
$$z_s = \frac{G_s}{G} \cdot b \left(1 + k \sqrt{1 - \left(\frac{c}{l}\right)^2} \right) - \frac{G_{so}}{G} k \cdot (c - d)$$

mit der Abkürzung $\frac{l^2}{c \cdot b} = k$. Für die Umrechnung des Trägheitsmomentes von der Drehachse auf die Schwerachse interessiert das Quadrat des Abstandes $s^2 = x_s^2 + z_s^2$.

Es wurden Versuche mit zwei verschiedenen Federn durchgeführt. Hierbei sind zunächst die Federkonstanten c der Federung für sich versuchsmäßig bestimmt und dann am Versuchssystem durch Anhängen von Zusatz-

Bild 3 (rechts). Schema zur Schwerpunktsbestimmung

Bild 2 (unten). Versuchsaufbau zur Ermittlung des Trägheitsmomentes um die Querachse an einem Flugzeug vom Muster Bf 108



gewichten am Federangriffspunkt die scheinbaren Federkonstanten c' . Zwecks Vergleich mit den gemessenen Werten wurden die Federkonstanten c' auch durch Rechnung ermittelt.

Daten der Feder: Drahtstärke $d = 0,008$ m
 Windungshalbmesser $r = 0,025$ m
 Windungszahl $i = 93,25$
 Gewicht $G_F = 5,7$ kg
 Federkonstante (gemessen) $c = 360,5$ kg/m

Schwerpunktsbestimmung des Flugzeugs:
 Gesamtgewicht $G = 1272,6$ kg

a) Wägung in Horizontallage:
 $l = 4,675$ m $b = 0,456$ m
 $G_{oo} = 71,7$ kg (aus der Federdehnung bestimmt)

Schwerpunktrücklage (bezogen auf den Auflagerpunkt):

$$x_s = 0,263$$
 m

b) Wägung in Spornlage:
 $c = 0,876$ m $d = 0,428$ m
 $G_s = 92,0$ kg (aus der Federdehnung bestimmt)

Schwerpunkthochlage (bezogen auf die durch den Auflagerpunkt gehende Bezugslinie)

$$z_s = 0,425$$
 m

Schwingungsversuch:

Federkonstante des Schwingungssystems
 gemessen $c' = 336,2$ kg/m
 berechnet $c' = 337,0$ kg/m

Als Mittelwert aus einer Reihe von Messungen über 20 Schwingungen bestimmte Schwingungsdauer

$$T = 1,45$$
 s ($\pm 0,4\%$)

Trägheitsmoment ohne Berücksichtigung der mitschwingenden Federmasse:

$$I_o' = 391,0$$
 kg m²

Trägheitsmoment mit Berücksichtigung der mitschwingenden Federmasse:

$$I_o = 386,2$$
 kg m²

Trägheitsmoment um die Querachse:

$$I_s = 353,75$$
 kg m²

Daten der Feder: Drahtstärke $d = 0,01$ m
 Windungshalbmesser $r = 0,039$ m
 Windungszahl $i = 56,5$
 Gewicht $G_F = 8,8$ kg
 Federkonstante (gemessen) $c = 393,0$ kg/m

Schwerpunktsbestimmung des Flugzeugs:
 Gesamtgewicht $G = 1272,6$ kg

a) Wägung in Horizontallage:
 $l = 4,675$ m $b = 0,456$ m
 $G_{oo} = 71,2$ kg (aus der Federdehnung bestimmt)

Schwerpunktrücklage $x_s = 0,262$ m

b) Wägung in Spornlage:
 $c = 0,978$ m $d = 0,532$ m
 $G_s = 94,3$ kg (aus der Federdehnung bestimmt)

Schwerpunkthochlage $z_s = 0,431$ m

Schwingungsversuch:

Federkonstante des Schwingungssystems
 gemessen $c' = 368,9$ kg/m
 gerechnet $c' = 368,9$ kg/m

Als Mittelwert aus einer Reihe von Messungen über 60 Schwingungen bestimmte Schwingungsdauer

$$T = 1,393$$
 s ($\pm 0,25\%$)

$$\text{Trägheitsmoment } I_o' = 396,0$$
 kg m²

$$\text{Trägheitsmoment } I_o = 388,55$$
 kg m²

Trägheitsmoment um die Schwerachse

$$I_s = 355,5$$
 kg m²

Das aus beiden Versuchen gemittelte Trägheitsmoment beträgt demnach:

$$I_s = 354,6$$
 kg m²

mit einer Abweichung von $\pm 0,25\%$. Die erzielte Genauigkeit ist somit bemerkenswert groß. Bei der Berechnung der Trägheitsmomente aus den gemessenen Schwingungszeiten wurde die am System gemessene Federkonstante zugrunde gelegt. Die Übereinstimmung zwischen den aus den geometrischen Beziehungen berechneten und den direkt gemessenen Werten ist jedoch so gut, daß man sich eine gesonderte Ermittlung der Federkonstanten am Versuchssystem selbst ersparen kann.

Bei der Bestimmung von Flugzeugträgheitsmomenten durch Schwingungsversuche ist noch zu beachten, daß durch den Einfluß mitbewegter Luftmassen eine scheinbare Vergrößerung der Trägheitsmomente entsteht. Bei Drehungen um die Querachse bzw. hierzu parallelen Achsen ist dieser Effekt allerdings klein. Den wesentlichen Anteil trägt in diesem Falle das Höhenleitwerk. Nach Versuchen mit schwingenden Platten [4] kann die Größe des zusätzlichen Trägheitsmomentes ermittelt werden, jedoch lassen sich für die vorliegenden Verhältnisse die Versuchsergebnisse nicht besonders gut interpolieren. Man erhält für die Erhöhung des wirklichen Trägheitsmomentes infolge der am Höhenleitwerk mitschwingenden Luftmassen angenähert den Wert $I_L = 8,5$ kg m². Nach der Theorie des schwingenden Tragflügels würde sich für den Einfluß der mitbewegten Luft

$$I_L = \frac{\pi}{4} \rho F_H l_H r_H^2$$

ergeben, worin F_H die Höhenleitwerksfläche, l_H die mittlere Leitwerkstiefe und r_H der Abstand der Leitwerksmitte vom Drehpunkt des Flugzeugs ist. Diese Beziehung liefert im vorliegenden Falle den Wert $I_L = 6,3$ kg m².

IV. Zusammenfassung

Für die Lösung vieler Aufgaben der Flugdynamik ist eine möglichst genaue Kenntnis des Flugzeugträgheitsmomentes um die Querachse erforderlich. Da die Berechnung immer sehr mühsam und auch meistens nicht genügend genau ist, wird das Trägheitsmoment, wenn möglich, durch einen Pendelversuch bestimmt. Bei Großflugzeugen entstehen jedoch in der Anwendung der normalen Pendelmethode so große Schwierigkeiten, daß das im vorliegenden Bericht beschriebene Verfahren größere Bedeutung erlangen dürfte. Hierbei schwingt das Flugzeug horizontal liegend um eine im Vorderteil des Rumpfes liegende Drehachse unter der Rückstellkraft einer am Rumpfe angegreifenden Feder. Als Auflager werden zweckmäßig die wohl an jedem Flugzeugmuster vorhandenen Aufbockpunkte gewählt. Es empfiehlt sich nicht, die Versuche so auszuführen, daß das Flugzeug auf seinem Fahrwerk ruht und somit die Fahrwerksachse als Drehachse dient. Abgesehen davon, daß das auf diese

Weise ermittelte Trägheitsmoment bei Flugzeugen mit Einziehfahrwerk nicht den Verhältnissen im Fluge entsprechen würde, bedeutet der zweite Freiheitsgrad, den das System infolge der Fahrwerksfederung erhält, nur eine unliebsame Komplikation der Verhältnisse ohne eine besondere Vereinfachung des Versuchs zu erbringen. Bei den geschilderten Versuchen mit einem Flugzeug vom Typ Messerschmitt Bf 108 wurden als Federn Schraubenfedern aus Spezialstahl verwendet, die eigens für die Versuche angefertigt wurden. Es würden jedoch auch andere Federn mit einwandfreien elastischen Eigenschaften (lineare Federcharakteristik) dieselben Dienste tun. Die Federn können in der Anordnung für den Schwingungsversuch gleichzeitig zur Schwerpunktwägung benutzt werden, sofern das Gesamtgewicht des Flugzeugs aus einer anderen Wägung her bekannt ist. Einige Sorg-

falt ist bei der Ermittlung der benötigten Längenabmessungen erforderlich. Wie der ausgeführte Großversuch mit zwei verschiedenen Federn zeigt, liefert das angegebene Verfahren bei größter Einfachheit sehr befriedigende Ergebnisse.

V. Schrifttum

- [1] M. P. Miller u. H. A. Soulé: Moments of inertia of several airplanes. NACA-Techn. Note 375 (1931).
- [2] K. Klotter: Einführung in die technische Schwingungslehre, Bd. 1.
- [3] S. Timoshenko: Schwingungsprobleme der Technik.
- [4] W. Pleines: Der Einfluß der mitschwingenden Luftmassen bei Pendelschwingungsversuchen mit Flugzeugen. Jahrbuch der Luftfahrtforschung 1937, Teil 1.

Herstellung der Schaufeln für axial durchströmte Maschinen

B. Eckert und W. Krautter, Stuttgart

I 13, R 1

Bericht aus dem Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Axialgebläse und Axiallader können mit befriedigender Sicherheit vorausgerechnet werden, wenn die Ergebnisse der heutigen Turbinentheorie berücksichtigt werden, die ein Zwischenglied darstellt zwischen Stromfadentheorie und der Theorie des alleinstehenden Tragflügelprofils. Die rechnungsgetreue Herstellung der Einzelschaufel und die einheitliche Formgebung und Oberflächengestaltung sämtlicher zu einem Gebläse gehörender Schaufeln ist die Voraussetzung für das Erreichen höchster Luftleistungen und Wirkungsgrade. Im Zuge der Entwicklung axial durchströmter Maschinen wurden im Stuttgarter Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen zur Herstellung der Lauf- und Leitrad-schaufeln mehrere Verfahren entwickelt und erprobt, wobei teilweise größere Schwierigkeiten zu überwinden waren. Es gelang, eine nach einem neuartigen Verfahren arbeitende Schaufelfräsmaschine zu schaffen, die keine Nachbearbeitung der Schaufeln oder des Schaufelgrundes erfordert und hohen Genauigkeitsansprüchen genügt.

Gliederung

- I. Einleitung
- II. Bisher übliche Herstellungsverfahren
 1. Handwerkliche Herstellung
 2. Sandfußherstellung
 3. Herstellung der Gebläseschaufeln auf handelsüblichen Kopierfräsmaschinen
- III. Herstellungsverfahren für große Stückzahlen und hohe Genauigkeitsansprüche
 1. Herstellung der Schaufeln auf einer Rundtischfräsmaschine
 - a) Arbeitsweise
 - b) Ausführung des Meisterflügels
 2. Die Schaufel-schwenkfräsmaschine, Bauart Krautter
 - a) Gründe für die Entwicklung
 - b) Äußerer Aufbau
 - c) Arbeitsweise
 - d) Entstehung der Schaufelform
 - e) Entwurf des Steuernockens
 - f) Herstellung des Steuernockens
 - g) Abwandlungen
 - h) Vorteile der Schwenkfräsmaschine
- IV. Zusammenfassung.

I. Einleitung

Zur Herstellung einer Gebläseschaufel werden üblicherweise die Schaufeltiefe und die Schaufelrichtung für beliebig viele axiale Zylinderschnitte rechnerisch ermittelt. Die Profilform wird entweder Profilbüchern entnommen oder bei Profilen, die durch konforme Abbil-

dung eines Kreises gebildet werden, zeichnerisch entwickelt.

II. Bisher übliche Herstellungsverfahren

1. Handwerkliche Herstellung

Bei der handwerklichen Darstellung werden die aus der Rechnung ermittelten Gebläseumrißformen für beliebig viele gleichachsige Schaufelschnitte gezeichnet und zur Herstellung von Blechschablonen als Hohlmasken verwendet (Bild 1). Nach einem anfänglichen Aufkleben der Zeichnungspause auf das Blech oder einem Markieren durch Körner wurde später versucht, die Urzeichnungen nach Aufbringen einer lichtempfindlichen Emulsion auf das Blech auf photographischem Wege unmittelbar zu übertragen. Im letzten Falle kann die Profilform durch Nachätzen sehr genau gewonnen werden.

Bild 2 zeigt die Hohlmasken für Druck- und Saugseite einer Axialgebläselaufschaufel. Zum Einpassen des auf Waagrecht-Stoßmaschinen der Profilform roh angepaßten Werkstücks werden z. B. für eine 40 mm hohe Gebläseschaufel einschließlich Nachfeilen und Polieren etwa 25 Arbeitsstunden benötigt; nicht einberechnet in diese Arbeitszeit ist die Herstellung der Schablone selbst.

Neben der unzulässig langen Bearbeitungszeit hat dieses Herstellungsverfahren den Nachteil der kaum vermeidbaren Abweichung von den absoluten Sollmaßen und der Ungenauigkeit der einzuhaltenden Maße innerhalb eines zu einem Gebläse gehörenden Schaufelsatzes. Dies hat dann zur Folge, daß der gewünschte Rechnungspunkt (R. P. in Bild 3) nicht auf der zur jeweiligen Schaufelstellung gehörenden Drossellinie liegt. Außer-

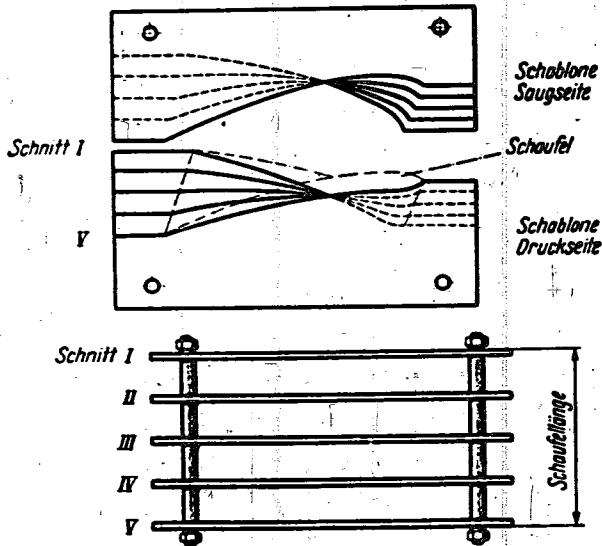


Bild 1. Laufschaufel-Schablonen für handwerkliche Herstellung

dem können derartige Arbeiten nur von Fachkräften durchgeführt werden.

2. Sandgüßherstellung

Wenn die Beherrschung der Flieh- und Biegekräfte ein Gießen der Schaufel im Sandgüßverfahren aus Aluminiumlegierung zuläßt, kann mit dem Schablonenverfahren die Arbeitszeit von 25 auf etwa 20 h bis zur Fertigstellung einer einzelnen Schaufel gesenkt werden. Nach besonders sorgfältigem Einformen und Gießen gelang es teilweise, die Schaufel so gut von der Gießerei zu bekommen, daß nur noch die aus strömungstechnischen Gründen gewünschte scharfe Abflußkante der Schaufel nachgearbeitet und die Oberfläche zum Erreichen der gewünschten Beschaffenheit geschwabbelt werden mußte. Außerdem ist bei diesem Verfahren eine etwas gleichmäßigere Formgebung aller Schaufeln innerhalb eines Schaufelsatzes erreichbar.

3. Herstellung der Gebläseschaufeln auf handelsüblichen Kopierfräsmaschinen

Wie bereits Prof. Betz im Frühjahr 1937 ausführte¹⁾, lassen sich allein durch genaue Bearbeitung der Gebläse-

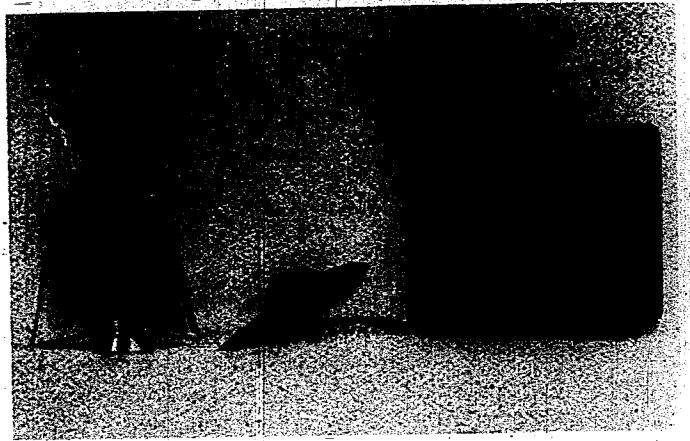


Bild 2. Fertigbearbeitete Axial-Laufschaufel mit Schablone

flügel Drucksteigerungen von 12%, durch Weiterentwicklung der Flügelformen zusammen mit einer besseren Herstellung bis etwa 20% erzielen, was insbesondere für Ladegebläse, also Bauweisen mit hohen Druckzahlen, von großer Bedeutung ist. Diese Tatsache macht eine Herstellung der Flügel auf Sonderfräsmaschinen erforderlich, wozu zunächst eine nach dem Kopierverfahren arbeitende Werkzeugmaschine verwendet wurde. Hierbei waren für je einen Flügel zwei Mutterschaufeln und zwar für Druck- und Saugseite erforderlich (Bild 4). Die Profilmrisse wurden auf photographischem Wege auf Aluminiumblech übertragen und hiernach ausgearbeitet.

Schwierigkeiten bereitete dabei die Ausfüllmasse, da die üblichen Werkstoffe, Monolith, Trolan, Porzellankitt, sich als zu wenig widerstandsfähig erwiesen, Eisenkitt zu sehr schwand und nach Erstarren oberflächenmäßig unzureichend war. Am geeignetsten erwies sich, wenigstens für kürzere Zeit, Hartholz, das allerdings nach einigen Wochen ebenfalls zum Schwinden neigte. Neben den Schwierigkeiten bei der Herstellung der Positivmodelle, die außerordentlich hohe Genauigkeit verlangten, war bei dieser Herstellungsart die Oberflächenbeschaffenheit ohne Nacharbeit in Form von Schlichten und Schwabbeln der Einzelflügel vollkommen unbefrie-

1) A. Betz: Axiallader. Jb. Dtsch. Luftf.-Forsch. 1938, Teil II, S. 183.

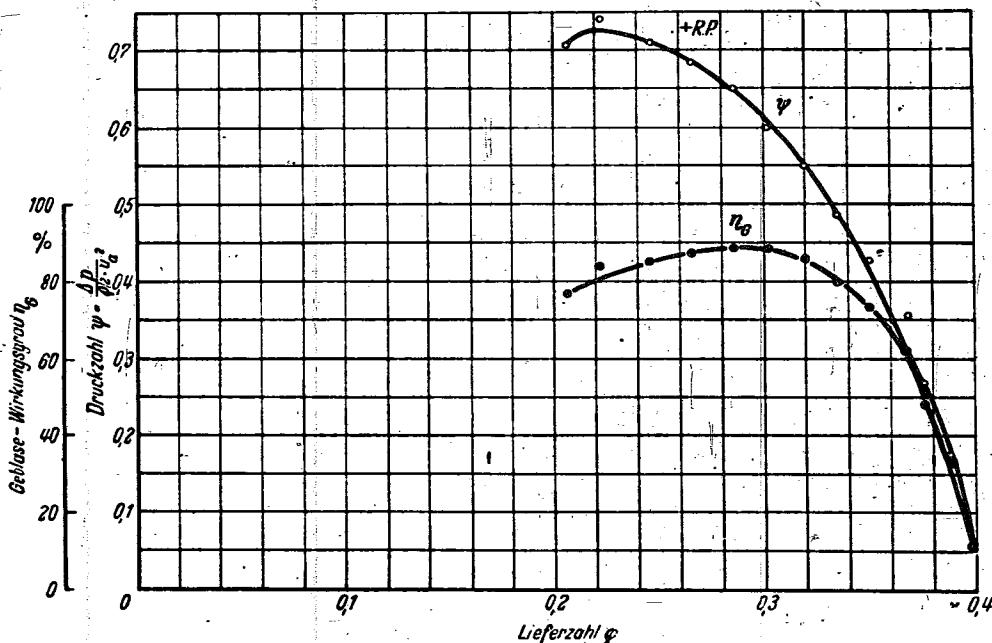


Bild 3. Kennlinien eines Axialgebläses. RP = Rechnungspunkt



Bild 4. Geteiltes Positivmodell für die Herstellung einer Laderleitvorrichtung auf einer handelsüblichen Kopierfräsmaschine

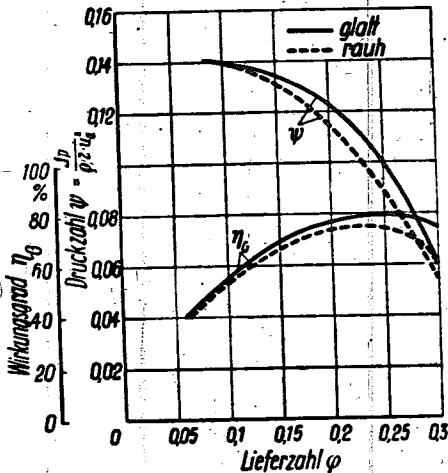


Bild 5. Einfluß der Oberflächengüte auf die erreichbaren Luftleistung und Wirkungsgrade bei Axialgebläsen

digend. Der Zeitgewinn der maschinellen Herstellung wurde hierdurch z. T. wieder aufgehoben, so daß wiederum für eine 40 mm hohe Gebläseschaufel etwa 16 Arbeitsstunden notwendig waren.

Zur Beurteilung des Einflusses der Oberflächengüte auf die erreichbare Druckerhöhung und den Gebläsewirkungsgrad kann Bild 5 dienen. Die Druckzahl- und Wirkungsgradverminderung kann bei den für Flugmotoren-lader und Strahltriebwerke in Frage kommenden wesentlich höheren Druckzahlen von nicht vernachlässigbarer Bedeutung sein.

Etwas günstigere Arbeitszeiten und außerdem eine Ersparnis an Werkstoff ließ sich bei diesem Verfahren erzielen, wenn Einzelflügel aus Aluminiumlegierung gegossen und hernach auf der Kopierfräsmaschine nachgearbeitet wurden. Bild 6 zeigt die Herstellung von Einzelflügeln auf einer handelsüblichen Kopierfräsmaschine mit Hilfe von Positivmodellen. Bei dieser Art der Herstellung muß der Kopierstift von Hand an die Meisterschaufel angepreßt werden, was bei längerem Arbeiten sehr ermüdend wirkt und immer ein unschönes Fräsbild ergibt.

Durch eine einfache, von Meister Barth des Forschungsinstituts gebaute Vorrichtung konnte diese Kopierfräsmaschine zu einer brauchbaren Maschine zum Fräsen von Gebläseflügeln ausgestaltet werden. Bild 7 zeigt die wesentlichen Merkmale der umgebauten handelsüblichen Kopierfräsmaschine. Ein Koperrollenträger (1) wird bei der kreisenden Bewegung um die Meisterschaufel jeweils mit gleich großer Kraft senkrecht an die Meisterschaufel angelegt. Dies wird dadurch ermöglicht, daß der Koperrollenträger, welcher in einer Nute in Teil 3 geführt und fest mit Teil 5 verbunden, drehbar in Teil 4 gelagert ist. Der Anpreßdruck erfolgt durch das Gewicht (6) selbst, welches an dem Rundriemen 7 über die beiden Umlenk-

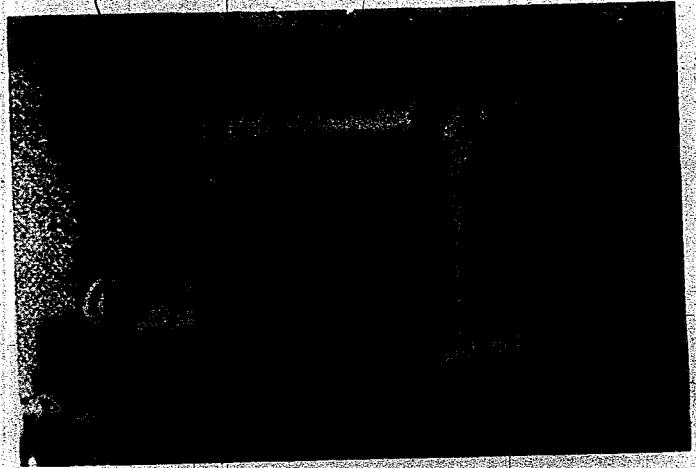


Bild 6. Herstellung einer Leitvorrichtung mit Hilfe von Positivmodellen auf einer handelsüblichen Kopierfräsmaschine

rollen 8 am Kugellager 2 angehängt ist. Durch diese einfache Vorrichtung wurde insbesondere die Gefahr einer Beschädigung der Nachbarflügel wesentlich vermindert und gleichzeitig die Maschinenzeit herabgesetzt.

III. Herstellungsverfahren für große Stückzahlen und hohe Genauigkeitsansprüche

4. Herstellung der Schaufeln auf einer Rundtischfräsmaschine

a) Arbeitsweise

Zwar konnte die Herstellungsgenauigkeit durch das eben genannte Verfahren erhöht werden, trotzdem war insbesondere für große Schaufelzahlen, wie sie beispielsweise für Flugmotoren-lader erforderlich sind, das Bearbeitungsverfahren verbesserungsbedürftig.

Das wird jedem Betriebsingenieur sinnfällig, wenn er bedenkt, daß beispielsweise bei dem in Bild 8 gezeigten Axialverdichter, der nur aus drei Laufrädern und

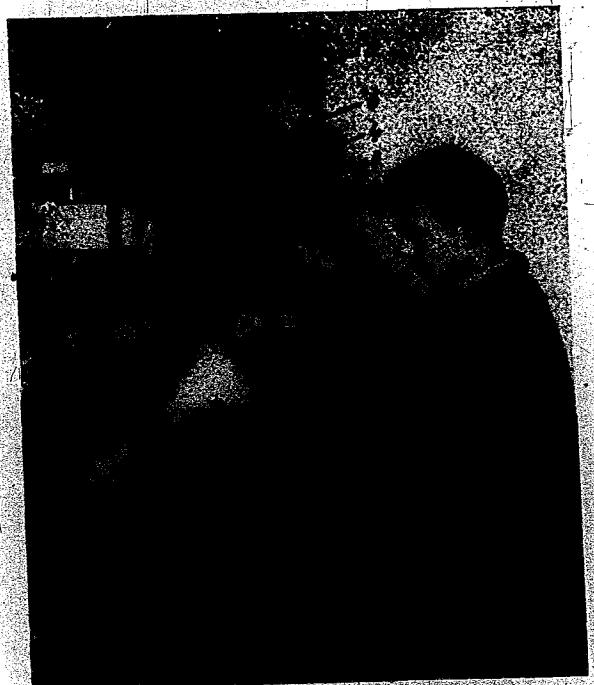


Bild 7. Vorrichtung zum Fräsen von Gebläseschaufeln auf einer handelsüblichen Kopierfräsmaschine

- | | |
|---------------------|-----------------|
| 1 Koperrollenträger | 5 Führungsstift |
| 2 Kugellager | 6 Gewicht |
| 3 Führungsteil | 7 Rundriemen |
| 4 Lagerteil | 8 Umlenkrollen |

vier Leitradstufen besteht, insgesamt 187 Schaufeln bearbeitet werden müssen. Eine Herstellung der Schaufeln nach den bisherigen Methoden ist dann aus wirtschaftlichen Erwägungen nicht mehr zu vertreten.

Unter Berücksichtigung der Erfahrungen an anderen Stellen wurde deshalb im Stuttgarter Forschungsinstitut eine Rundtischfräsmaschine entworfen und gebaut. Kennzeichnend für diese Maschine sind zwei Rundtische (Bild 9), die sich gleichsinnig drehen und langsam samt dem Unterlagetisch heben. Der erste Rundtisch ist zur Aufnahme des Meisterflügels, der zweite für das Werkstück bestimmt. Der Durchmesser der Kopierrolle, die den Meisterflügel abtastet, steht zum Durchmesser des mit etwa 200 m/min Schnittgeschwindigkeit arbeitenden Fräasers in gleichem Verhältnis wie die Größe der Meisterschaukel zu der des fertigen Gebläseflügels.

In Bild 10 ist schematisch die Anordnung für die Einstellung von Meisterschaukel und Rohling von Gebläseflügeln auf der Rundtischfräsmaschine dargestellt. Die Drehrichtung des Fräasers läßt sich einfach ändern, ebenso kann der senkrechte Vorschub dem jeweiligen Werkstoff durch ein Wechselgetriebe angepaßt werden. Die Bearbeitungsdauer des der Betrachtung zugrunde liegenden Flügels beträgt bei dieser Maschine 30 min, wozu für Nachbearbeitung bis zur Fertigstellung des Flügels noch etwa 2 h benötigt werden. Während der Laufzeit ist keine Bedienung der Fräsmaschine erforderlich, da nach beendigem Arbeitsgang der Antriebsmotor durch einen Endkontakt abgeschaltet wird und die Maschine keiner Wartung während des Fräsvorgangs bedarf.

Die Oberflächenbeschaffenheit der auf diese Weise mit hoher Schnittgeschwindigkeit des Fräasers hergestellten Flügel ist zufriedenstellend und kann gegebenenfalls noch verbessert werden. Auch zur Bearbeitung von Profilkranzen für die Laufräder von Axialladern eignete sich die Rundtischfräsmaschine, wenn die Teilung der Schaufeln nicht zu klein und die Verschränkung nicht zu groß ist.

Bild 11 zeigt ein Laufrad in verschiedenen Bearbeitungszuständen, rechts der vorgedrehte Rohling, in der Mitte der vorgefräste und links der fertige Profilkranz. Bild 12 zeigt die Bearbeitung eines dreistufigen Laderlaufrades in Trommelbauweise auf der Rundtischfräsmaschine. Die einzelnen Flügel wurden mit einem Fräser von 7 mm Durchmesser bearbeitet, wobei der Fräser nur 2 mm Durchmesser hatte.

Da die Gebläseschaukel an ihrer Wurzel in eine kegelige oder ballig geformte Nabe überläuft, können auf der Rundtischfräsmaschine die Einzelflügel bei Profilkranzen und Einzelschaukeln nur bis zum Übergangspunkt, also bis zum größten Nabendurchmesser bearbeitet werden. Das Schaufelstück zwischen dem größten und kleinsten Nabendurchmesser (Bild 13) muß auf einer üblichen Kopierfräsmaschine nachgefräst werden, wie in Bild 14 dargestellt ist. Das dabei notwendige Umspannen des Werkstücks hat neben der dadurch entstehenden Herstellungsungenauigkeit einen bei der Vielzahl von Schaufeln nicht vertretbaren Zeitverlust zur Folge. Stets mußten aber außerdem noch die letzten Unebenheiten mit kleinen Handschleifmaschinen beseitigt werden.

Weitere Schwierigkeiten bei dem Rundtischverfahren ergaben sich bei stark gekrümmten Schaufeln dadurch, daß die Kopierrolle hierbei sehr ungünstige Abrollverhältnisse hatte (Bild 15), was in Grenzfällen zu einem vollständigen Abheben der Kopierrolle von der Meisterschaukel führte. Als Folge davon blieb dann an dem



Bild 8. Dreistufiger Axialerdichter mit vierstufiger Leitsvorrichtung.

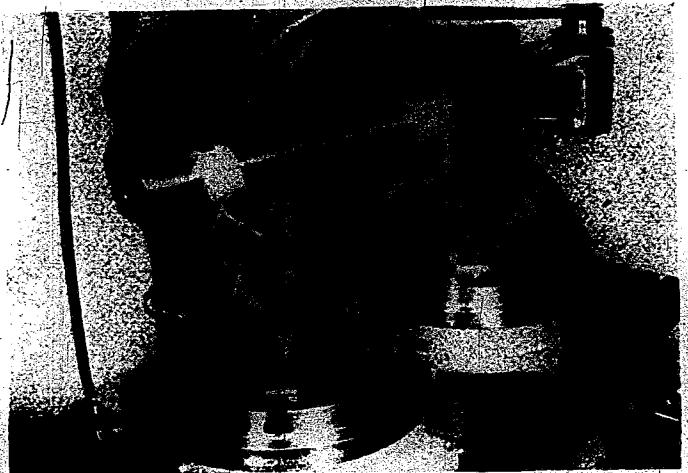


Bild 9. Rundtische einer Rundtischfräsmaschine zur Aufnahme des Meisterflügels und des Werkstückes.

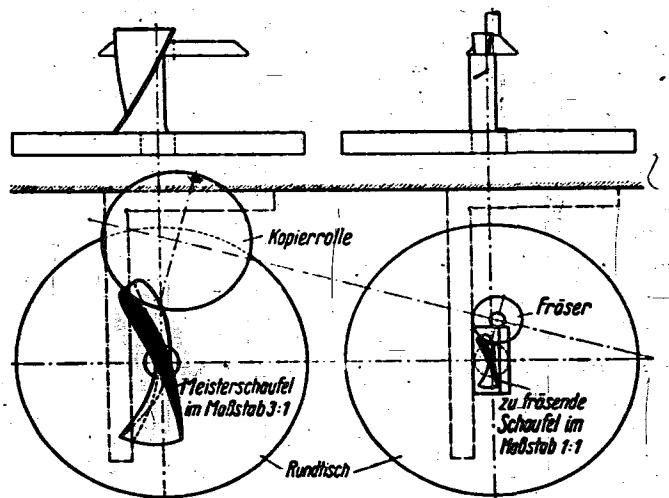


Bild 10. Einstellung von Meisterschaukel und Flügelrohling auf der Rundtischfräsmaschine.

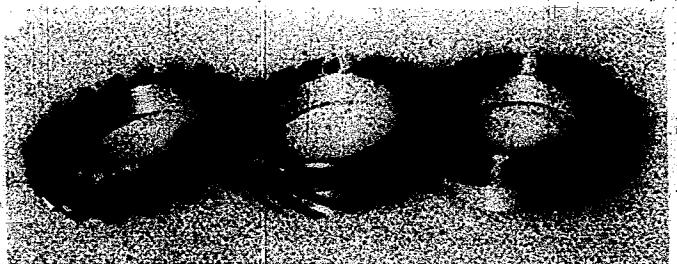


Bild 11. Profilkranz in verschiedenen Bearbeitungszuständen



Bild 12. Dreistufiges Laderlaufrad in Trommelbauweise bei der Bearbeitung auf der Rundtischfräsmaschine

Werkstück Material stehen, das wiederum durch Nacharbeit beseitigt werden mußte. In Bild 16 ist der Gesamtaufbau der Rundtischfräsmaschine des Forschungsinstituts wiedergegeben.

b) Ausführung des Meisterflügels

Die Herstellungsgenauigkeit hängt bei Verwendung einer Kopierfräsmaschine weitgehend von der formgerechten Ausführung der Meisterschaufel ab. Diese Aufgabe wurde wie folgt gelöst.

Bestimmt man nach der Aufzeichnung eines Profilumrisses die jeweiligen senkrechten Abstände der Einzelpunkte der Profilver- bzw. -oberseite von einer Ebene, dann lassen sich bei entsprechend zahlreicher Unterteilung beliebig viele Punkte der Sollform des Flügels eindeutig festlegen. In Bild 17 ist eine zu diesem Zweck vorbereitete Zeichnung wiedergegeben. Die in Millimetern angegebenen Zahlen auf der Druck- und Saugseite des Profils geben die Entfernung an zwischen der Bezugsebene des gehobelten oder vorgefrästen Werkstücks und dem gewünschten Tragflügelprofil. Am Teilgerät eines entsprechenden Bohrwerks lassen sich ohne Schwierigkeiten die genauen waagerechten und senkrechten Abstände einstellen. Auf diese Weise erhält man, wie Bild 18 zeigt, ein Netz von Bohrungen, deren Endpunkte auf der Tragflügeloberfläche liegen. Nach Fertigbohren wird der Rohling auf einer Fräsmaschine vorgeschruppt und

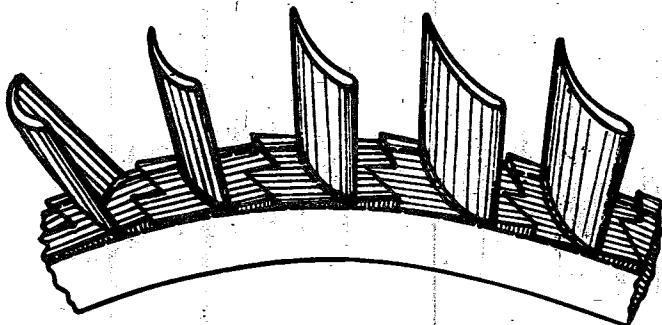


Bild 13. Schematische Wiedergabe der Arbeitsweise der Rundtischfräsmaschine an den Schaufelwurzeln



Bild 14. Fertigbearbeitung einer vorbearbeiteten Leitschaufel auf einer handelsüblichen Kopierfräsmaschine

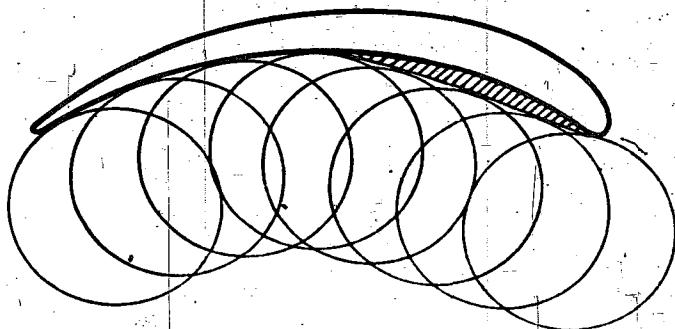


Bild 15. Ungünstige Abrollverhältnisse der Kopierrolle bei einer stark gekrümmten Schaufel

die kleinen Flächenteilehen durch Handarbeit zwischen den einzelnen Bohrlöchern bis zur Bohrerspitze genau zugefeilt. Auf diese Weise ist es dem Institut gelungen, Meisterschaufeln herzustellen, die den Rechnungswerten in großer Übereinstimmung entsprechen.

Bei wenig belasteten Gebläseflügeln und bei Gebläsen mit großem Nabenverhältnis kann die Schaufeltiefe für sämtliche Schaufelschnitte von der Nabe bis zum Außendurchmesser gleichbleiben. Legt man dabei allen gleich-

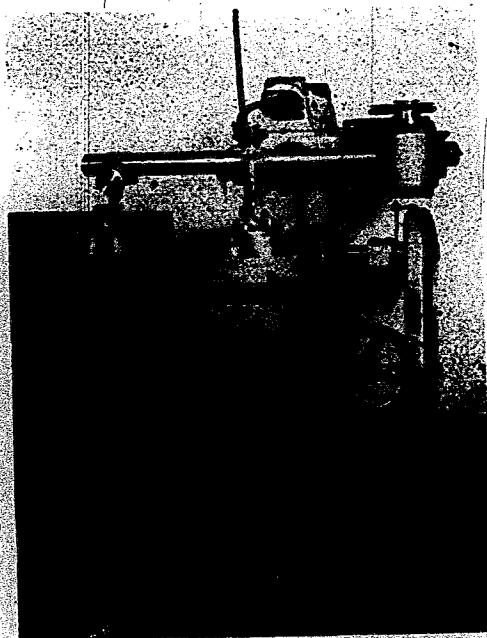


Bild 16. Gesamtaufbau einer Rundtischfräsmaschine zur Herstellung von Axialgebläseschaufeln

achsigen Zylinderschnitten die gleiche Profilform zugrunde, dann genügt zur Herstellung des Meisterflügels ein einziger Profilschnitt, was eine wesentliche Vereinfachung der Meisterschaufel bedeutet. Bild 19 zeigt die Werkstattzeichnung eines Laderflügels mit gleichbleibender Schaufeltiefe und gleichen Profilen über die ganze Schaufelhöhe. Die in jedem Schaufelschnitt, also Schnitt 1 bis 39, sich ändernden Gesamtwinkel γ zwischen Umfangsrichtung und Profilschneide lassen sich am Teilgerät einer Kopierfräsmaschine genau einstellen. Die Masken für die Druck- und Saugseite des Profils, die

zur Herstellung des über die ganze Flügelhöhe gleichbleibenden Profilschnittes dienen, sind in Bild 20 dargestellt. Sind nur wenige Schaufeln herzustellen, dann können die Flügel ohne Meisterschaufeln unmittelbar mit der Profilmasken angefertigt werden.

5. Die Schaufelschwenkfräsmaschine, Bauart Krautter
 a) Gründe für die Entwicklung

Für die Weiterentwicklung von Axialladern zu hochbelastbaren Strömungsmaschinen ist, wie schon ausgeführt, eine genaue Herstellung der Einzelflügel Voraussetzung. Zum Erreichen guter Wirkungsgrade müssen die Flügel innerhalb eines Schaufelsatzes unter sich vollkommen gleich sein. Diese Forderungen können nach den im Institut vorliegenden Erfahrungen nur mit Sonderwerkzeugmaschinen erfüllt werden. Dagegen war die Herstellungsgenauigkeit der Einzelschaufel auf der Rundtischfräsmaschine des Instituts wenigstens in den nicht nachzubearbeitenden Schaufelschnitten bereits gewährleistet.

Im Bestreben, die axialen Bauabmessungen mehrstufiger axial durchströmter Maschinen zu verkleinern, wurde die Schaufelzahl je Rad vergrößert. Damit verbunden ist eine Verkleinerung der Teilung, was bei den bisherigen Herstellungsverfahren insbesondere an der Nabe die Schwierigkeit ergab, daß der höchstzulässige Fräserdurchmesser wegen der geringen Abstände der Profile immer kleiner wurde. Andererseits wurde als Folge der notwendigen Winkelübertreibung die Verwindung der Schaufeln zwischen Außen- und Nabendurchmesser teilweise sehr groß. Die als Folge dieser Winkelübertreibung sich ergebende starke Überdeckung des Nabenprofils am Außendurchmesser machte die Verwendung großer Fräserdurchmesser bei kleinstmöglichem

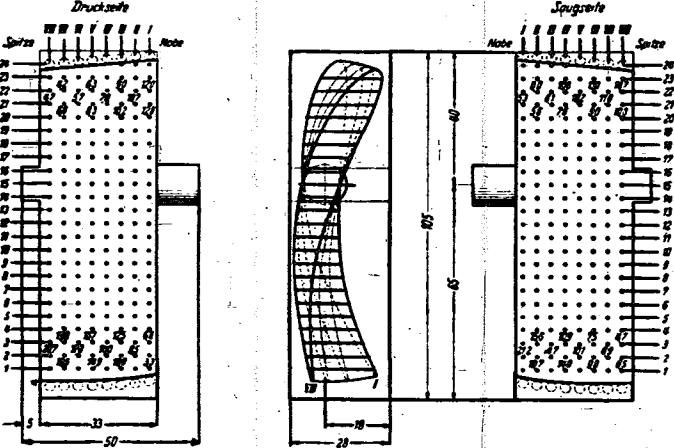


Bild 17. Werkstattzeichnung zur Herstellung einer Meisterschaufel



Bild 18 (oben). Anbohren der Meisterschaufel zur Herausarbeitung der Schaufeloberfläche

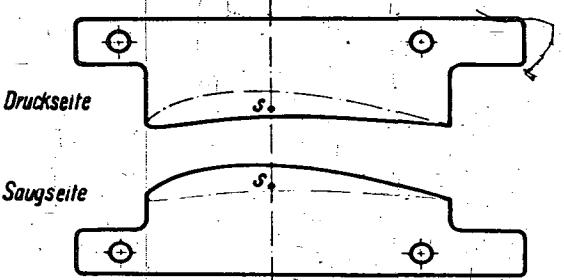
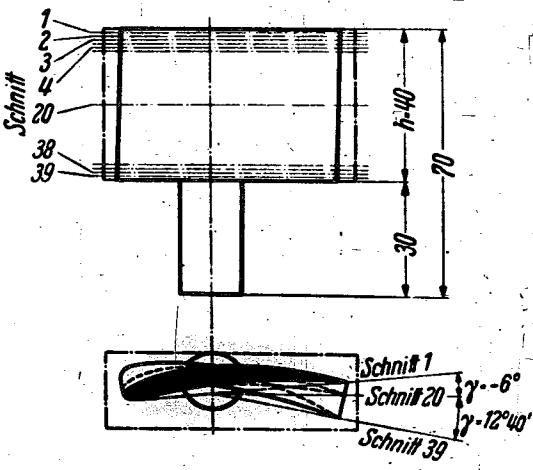
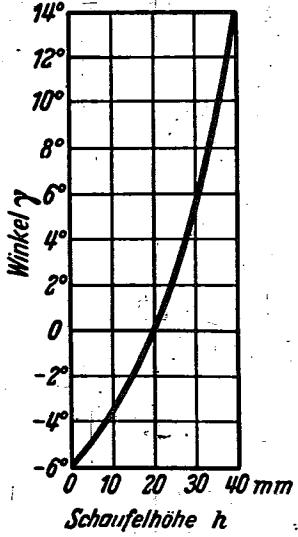


Bild 20. Masken für Druck- und Saugseite eines Flügels

Schnitt	Einstellung	Schnitt	Einstellung
1	-6°	21	0°25'
2	-5°47'	22	0°50'
3	-5°32'	23	1°20'
4	-5°17'	24	1°50'
5	-5°	25	2°20'
6	-4°45'	26	2°55'
7	-4°30'	27	3°25'
8	-4°12'	28	4°
9	-3°55'	29	4°35'
10	-3°35'	30	5°20'
11	-3°17'	31	6°
12	-3°	32	6°40'
13	-2°40'	33	7°25'
14	-2°20'	34	8°10'
15	-2°	35	9°
16	-1°35'	36	9°50'
17	-1°15'	37	10°45'
18	-0°50'	38	11°40'
19	-0°25'	39	12°40'
20	0°		

Bild 19. Werkstattzeichnung zur Herstellung eines Meisterflügels mit gleichbleibender Schaufeltiefe und gleichem Profil

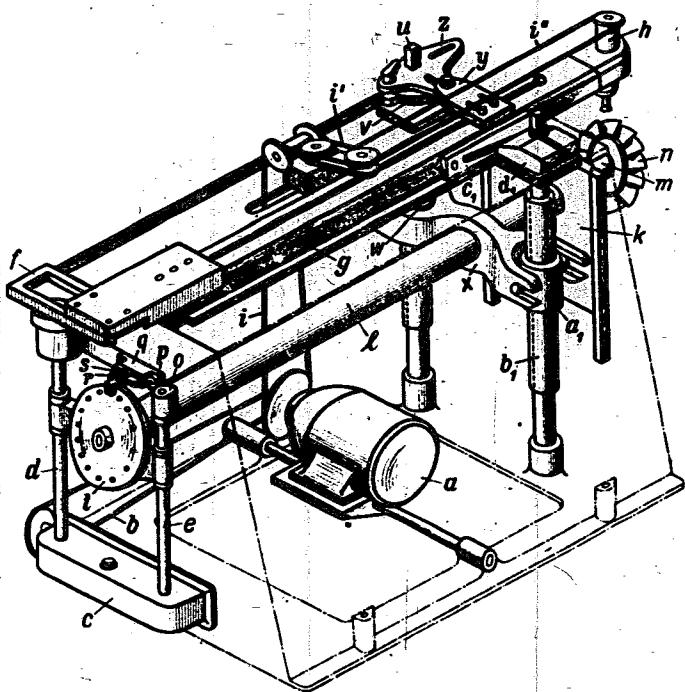


Bild 21. Grundsätzlicher Aufbau der Schaufel-schwenkfräsmaschine. Bauart Krautter

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|
| a Antriebsmotor | q Übersetzungsgetriebe |
| b Keilriementrieb | r Druckstück |
| c Schneckengetriebe | s Schwenkarm (Steuerhebel) |
| d Spindeln | t Teilscheibe |
| f Kurbelschleife | u Gewindespindel |
| g Frässlittens | v Rastgetriebe |
| h Frässpindel | w Spindelmutter |
| i, i' Antriebsriemen für Frässpindel | x Schwinde |
| k Gleitschlitten | y Mitnehmer |
| l Lagerrohr | z Schwindehebel |
| m Schwenkwelle | a ₁ Spindelmutter |
| n Werkstück | b ₁ Gewindespindel |
| o Steuernocken | c ₁ Führungsleiste |
| p Steuerrolle | d ₁ Klemmstück |

Fräserchaftdurchmesser erforderlich. Der Schaftdurchmesser durfte jedoch andererseits mit Rücksicht auf ratterfreies Arbeiten des Fräasers eine gewisse untere Grenze nicht überschreiten. Die Herstellungsweise erforderte also wegen der Verwindung einen großen, wegen der engen Teilung aber einen möglichst kleinen Fräserdurchmesser.

So wäre beispielsweise in einem Anwendungsfalle ein Schaftdurchmesser von 2 mm gerade noch verwendbar gewesen, während der Fräserdurchmesser 8 mm haben sollte. Ein Arbeiten unter diesen Verhältnissen war natürlich nicht möglich, weshalb sich diese Schaufel auf der Rundtischfräsmaschine nicht bearbeiten ließ. In einem anderen Falle hätte der Fräserdurchmesser sogar gleich Null sein müssen. In diesem Falle mußte die Schaufelzahl von 19 auf 15 vermindert werden, was natürlich die Leistung des Gebläses im Verhältnis 15 : 19 herabsetzte.

Die Weiterentwicklung axialer Strömungsmaschinen verlangte aus diesen Gründen eine Umgestaltung der hierfür notwendigen Werkzeugmaschinen. Gleichzeitig war erwünscht, die Bearbeitungsdauer der zumeist großen Stückzahl weiter zu verkürzen. Eine diesen Anforderungen Rechnung tragende Bearbeitungsmaschine für axiale Strömungsmaschinen konnte im Stuttgarter Institut durch die in Bild 21 schematisch gezeigte Schaufel-schwenkfräsmaschine, Bauart Krautter, verwirklicht werden.

Mit dieser neuesten Maschinenausführung können wiederum Einzelflügel und ganze Schaufelkränze beliebiger Schaufelform mit und ohne Verwindung, mit zylindrischem, schrägem oder balligem Schaufelgrund in einem Arbeitsgang bis zur fertigen Form hergestellt werden. Erreicht wird dies durch eine Schenkbewegung der Schaufel um die Drehachse des Rades und durch die Steuerung der Schenkbewegung von einem Steuernocken aus. In Verbindung mit der Hubbewegung des Fräasers parallel zu der Drehachse des Rades kann auf diese Weise die ganze Flügellänge fertig bearbeitet werden. Die schwierige und zeitraubende Nacharbeit fällt vollkommen weg.

b) Äußerer Aufbau

Der äußere Aufbau ist gekennzeichnet durch Aufteilung der Maschine in eine Arbeitsseite (Bild 22) und eine Steuerseite (Bild 23) sowie durch völlige Kapselung (Bild 24), um das Umherschleudern der Späne zu vermeiden und unbefugte Eingriffe während des selbsttätigen Arbeitens der Maschine zu verhindern.

c) Arbeitsweise

Das Arbeiten der Maschine geht nun folgendermaßen vor sich (Bild 21): Der im Maschinengestell auf einer Wippe aufgebaute Antriebsmotor a treibt über einen Keilriementrieb b für verschiedene Arbeitsgeschwindigkeiten und ein verstellbares Schneckengetriebe c auf der Steuerseite der Maschine zwei gleichlaufende senkrechte Spindeln d, e an. Die eine (d) treibt über eine verstellbare Kurbelschleife f den Frässlittens g an und erteilt so der am anderen Ende des Frässlittens sitzenden Frässpindel h die Hubbewegung. Der Antrieb der Frässpindel erfolgt über Keil- und Rundriemen i, i' mit veränderlicher Drehzahl vom Antriebsmotor a aus. Auf der Arbeitsseite trägt ein senkrecht verschiebbarer Gleitschlitten k mit Lagerrohr l die Schwenkwelle m, auf der auf auswechselbaren Dornen das Werkstück n sitzt. Die Schwenkbewegung des Werkstücks wird von dem auf der zweiten Spindel e der Steuerseite sitzenden Steuernocken o abgeleitet und auf die Schwenkwelle über den damit verbundenen Steuerhebel s und das am Gestell angeordnete feste Übersetzungsgetriebe q übertragen. Der Kraftschluß zwischen Steuernocken o und Steuerrolle p wird durch Federdruck erzeugt. Der Vor-schub des Werkstückes gegen die Frässpindel wird erzeugt durch Umwandlung der Hubbewegung des Frässlittens g in eine Drehbewegung der im Gestell angeordneten senkrechten Gewindespindel u durch das Rastgetriebe v und durch Übertragung der senkrechten Bewegung der Spindelmutter w über die Schwinde x auf das Lagerrohr l des Gleitschlittens k. Die Größe des Vor-schubes kann verändert werden durch Ändern der Eingriffsverhältnisse zwischen dem Mitnehmer y auf dem Frässlittens und dem Schwindehebel z des Rastgetriebes.

Um bei stark unterschiedlichen Durchmessern der Schaufelräder eine zu große Schrägstellung der Schwinde x zu vermeiden, stützt sich die Schwinde gegen die in der Höhe verstellbare Spindelmutter a₁ einer zweiten Gewindespindel b₁ ab, die gleichzeitig zur Bearbeitung von Schaufelrädern mit nicht zylindrischen Naben benützt wird. In diesem Falle wird der Spindel b₁ und über die Schwinde x dem Gleitschlitten k und Werkstück n eine senkrechte Hubbewegung erteilt, die von einer mit dem Frässlittens hin- und hergehenden Führungsleiste c₁ mit der Nabe entsprechend geformtem Schlitz abgeleitet und über das Klemmstück d₁ auf die Gewindespindel b₁ übertragen wird.

Bei Fertigstellung einer Schaufel betätigt ein verstellbarer Anschlag den Endschalter, der über einen Schaltschutz die Maschine stillsetzt, und einen Summer, der das Ende des Arbeitsganges anzeigt. Durch Rückwärtsdrehen der Vorschub-Gewindespindel u werden Gleitschlitten und Werkstück wieder in die Ausgangsstellung gebracht. Bei ganzen Rädern wird zur Bearbeitung einer weiteren Schaufel die auf der Schwenkwelle m sitzende Teilscheibe t gegen den Steuerhebel s um eine Teilung weitergedreht.

Durch Anbau weiterer Frässpindeln am Frässlitten können mehrere Schaufeln gleichzeitig bearbeitet werden.

d) Entstehung der Schaufelform

Bei der vorliegenden Herstellungsart wird einem Fräs-
werkzeug — neben seiner Drehung — eine Hubbewegung und dem Werkstück eine entsprechende Schwenkbewegung erteilt (Bild 25).

Die Laufbahn des Fräsmittelpunktes ist die Umhüllende des Schaufelprofils im Abstand des Fräserhalbmessers. Führt der Fräser die Hubbewegung H_1 aus, so muß die Schaufel eine entsprechende Seitenverschiebung S_1 ausführen. In Bild 25 ist der Einfachheit halber die Seitenbewegung dem Fräser übertragen.

Die Hubbewegung wird von einer Kurbelschleife (Bild 26) erzeugt und von dem Fräser mit Frässpindel und Fräser ausgeführt.

Der gesamte Hub entspricht der axialen Erstreckung der Umhüllenden. Die Seitenverschiebung des Profils entsteht durch eine Schwenkbewegung des Werkstückes, deren Größe der Erstreckung des Profils in der Umfangsrichtung entspricht.

Die Schwenkbewegung ergibt eine kreiszylindrische Bearbeitung des Schaufelgrundes und ermöglicht bei engstehenden, verdrehten Schaufeln und kleinem Fräser die Anwendung eines verhältnismäßig großen Fräserchaftdurchmessers (Bild 27).

Die Schwenkbewegung des Schaufelrades wird über Teilscheibe, Steuerhebel, Übersetzungsgetriebe mit Druck-



Bild 23. Steuerseite der Schaufelschwenkfräsmaschine

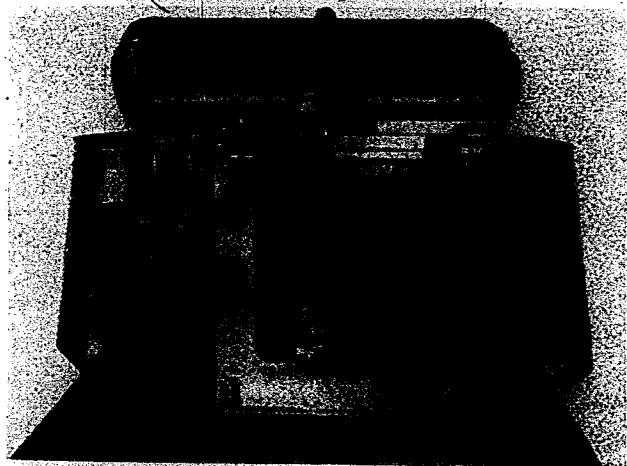


Bild 24. Kapselfung der Schwenkfräsmaschine



Bild 22. Arbeitsseite der Schaufelschwenkfräsmaschine

stück und Steuerrolle von einem Steuernocken abgeleitet (Bild 26). Im Übersetzungsgetriebe werden die Erhebungen des Steuernockens verdoppelt. Während nun, infolge der Schwenkbewegung des Werkstückes, die Bearbeitung der Schaufel kreisbogenförmig erfolgt, bewegt sich das Druckstück in einer Geradeführung und gleitet also auf der Anschlagseite des Steuerhebels im gleichen Abstand von der Werkstückmitte wie der Fräser (Bild 28). Zu einem bestimmten Winkel γ ist ein größerer waagerechter Weg des Druckstückes notwendig, der dem Tangens des Winkels entspricht. Diese Verschiedenheit muß beim Entwurf des Steuernockens berücksichtigt werden.

Zu diesem Zweck wird der auf einem Zylindermantel liegende Schaufelquerschnitt, wie in Bild 29, auf die Tangente projiziert und dem Steuernockenentwurf zugrunde gelegt. Die Tangente berührt in der Winkelmitte

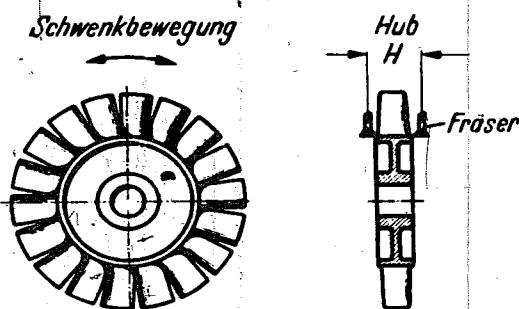
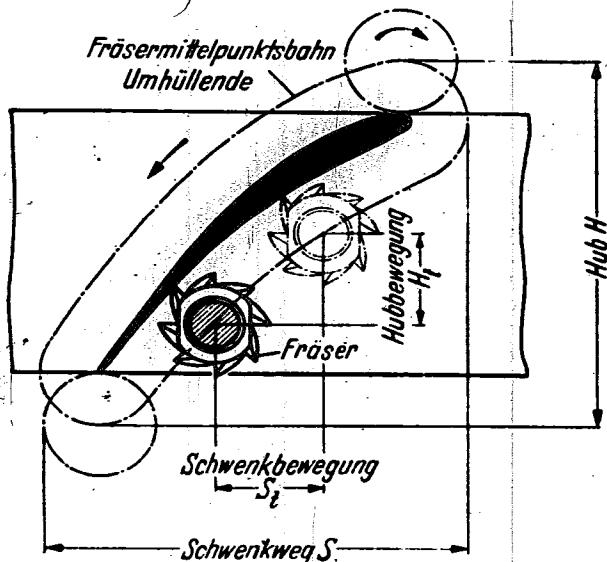


Bild 25. Bewegungsverhältnisse beim Fräsorgan

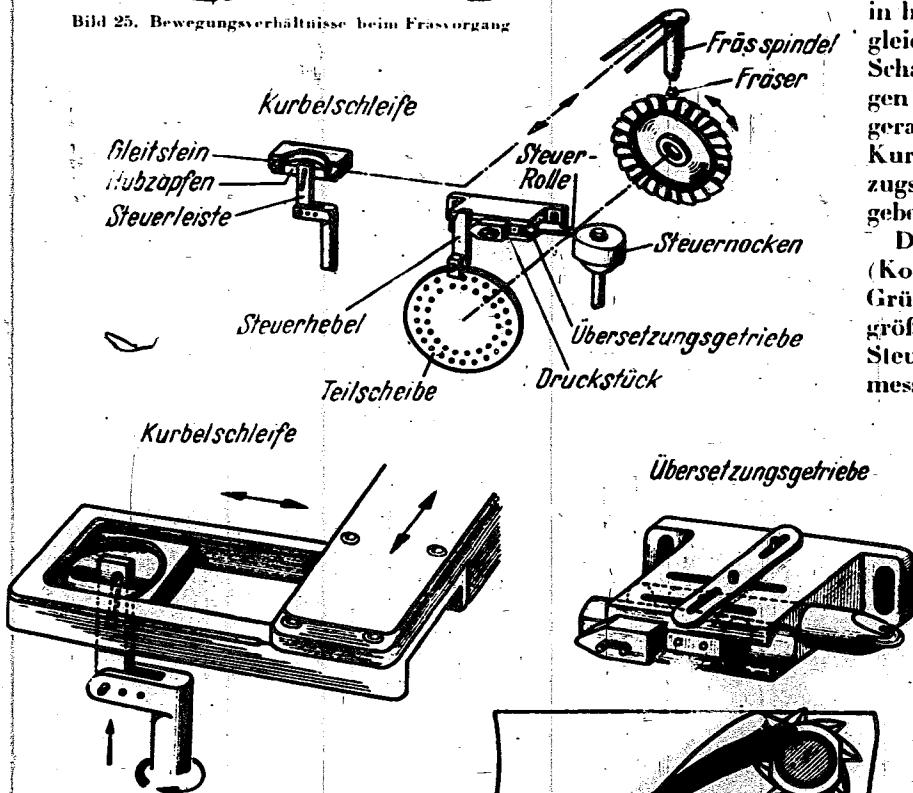
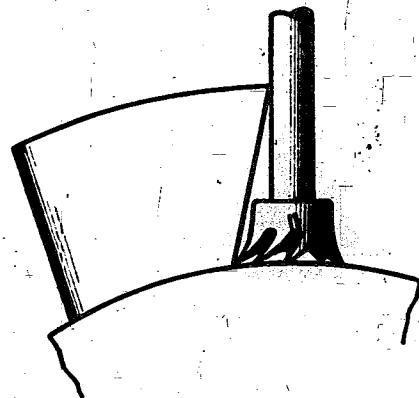
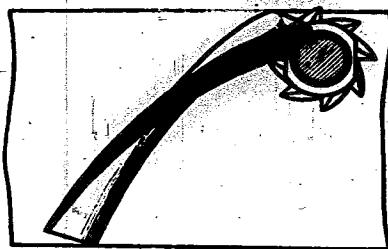


Bild 26. Steuernteile der Schwenkfräsmaschine

Bild 27 (rechts). Fräserstellung bei großer Schaufelverwindung



der Schaufel. Die einzelnen Punkte des Schaufelquerschnittes werden durch Strahlen $M-P_1$, $M-P_2$ usw. auf die Tangente projiziert. Daraus ergibt sich eine Projektion, wie sie in Bild 29 strichpunktiert gezeichnet ist. Die axialen Ausdehnungen bleiben gleich, so daß ein Punkt, z. B. P_1 , nur waagrecht nach P_1' verschoben wird.

Bei gleichbleibender axialer Schaufellänge (Bild 25) bleibt auch der Hub über die ganze Schaufelhöhe gleich; seine Größe wird durch Verstellen des Hubzapfens eingestellt (Bild 26). Dabei ist der Steuerschlitz in der Steuerleiste zur Kurbelachse parallel.

e) Entwurf des Steuernockens

Beim Aufzeichnen des Steuernockens werden die notwendigen Schwenkwege in halber Größe zugrunde gelegt. Je nach der gewünschten Genauigkeit der Schaufel wird nun eine entsprechende Anzahl Projektionen der Schaufelschnitte im Maßstab 5:1 hergestellt. Um die Projektion (Bild 30) wird, wie in Bild 25, die Umhüllende gezeichnet. Zu beachten ist, daß die Projektion so gezeichnet wird, daß die Fräsmaschine unterhalb der Projektion liegt (wie in Bild 30). Der Größe des Abstandes II der beiden Geraden A und B entsprechend wird der Kurbelkreis (Hub) gezeichnet und in gleiche Teile eingeteilt (5° Teilung). In der Nähe der Totlagen werden zweckmäßig Zwischenwerte eingelegt und gekennzeichnet. Durch die Schnittpunkte S_1 der Strahlen mit dem Kurbelkreis werden die Parallelen zu A und B gezogen und die Schnittpunkte mit der Umhüllenden entsprechend gekennzeichnet. Links von der Umhüllenden wird die Bezugsgerade C—D in beliebigem, jedoch für sämtliche Schnitte gleichem Abstand von der Winkelmitte der Schaufel gezogen. Die halbierten Entfernungen der Fräsermittelpunkte von der Bezugsgeraden C—D werden nun von einem dem Kurbelkreis entsprechend eingeteilten Bezugskreis K nach außen abgetragen und ergeben die Mittelpunktsbahn der Steuerrolle.

Der größte Steuernockenhalbmesser (Kopfkreis halbmesser) darf aus baulichen Gründen 50 mm nicht überschreiten. Der größte Halbmesser der Mittelpunktsbahn der Steuerrolle ist um den Steuerrollenhalbmesser größer. Der Bezugskreis halbmesser ist um die größte halbierte Entfernung E—F des von der Bezugsgeraden C—D am entferntesten liegenden Punktes der Umhüllenden kleiner. Werden in den Schnittpunkten Kreise im Durchmesser der Steuerrolle errichtet, so ergibt die innere Berüh-

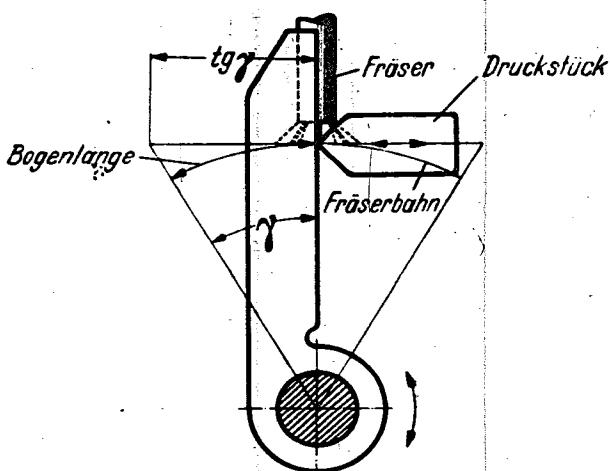


Bild 28. Bewegungsverhältnisse des Druckstücks (vgl. Bild 26) und des Fräserwerkzeugs.

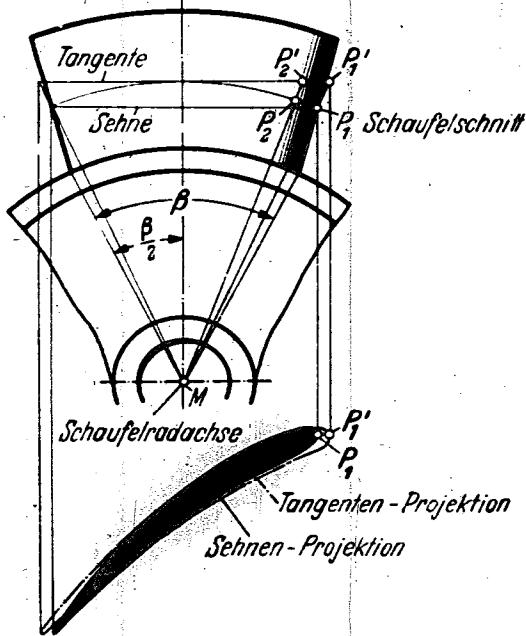
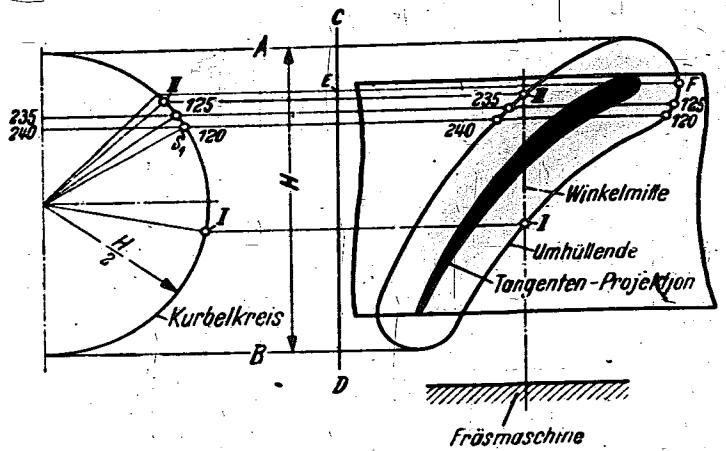


Bild 29. Projektionen der Schaufelschnitte für den Entwurf des Steuernockens

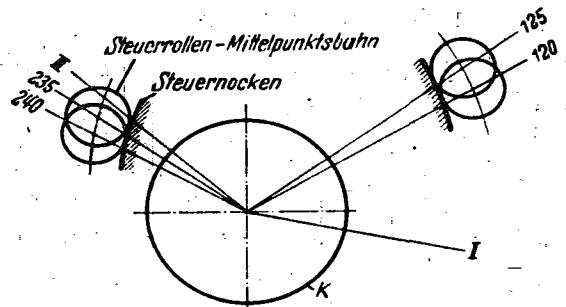


Bild 30. Aufzeichnung des Steuernockens

rende den Querschnitt des Steuernockens an der entsprechenden Stelle. Die zur späteren Maschineneinstellung erforderliche Lage der Schnittpunkte I und II der Winkelmittle mit der Schaufelumhüllenden wird durch Zurückgehen auf den Kurbelkreis mit Übertragung auf den Steuernocken festgehalten. Zur Ermittlung weiterer Querschnitte des Steuernockens wird in derselben Art vorgegangen.

f) Herstellung des Steuernockens

Die Anordnung der Maße kann je nach dem Herstellungsverfahren verschiedenartig vorgenommen werden.

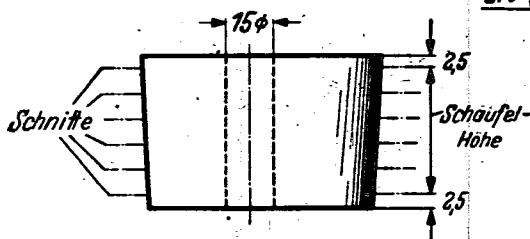


Bild 31a

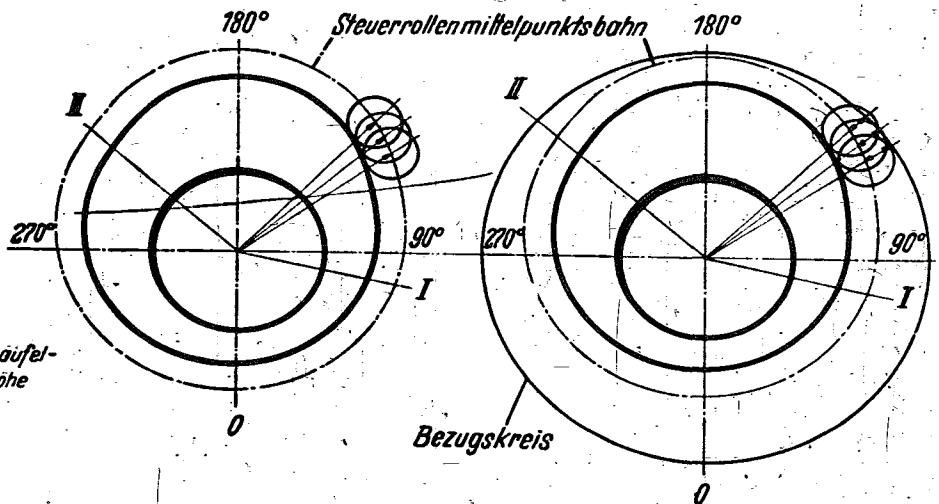


Bild 31b

Bild 31c

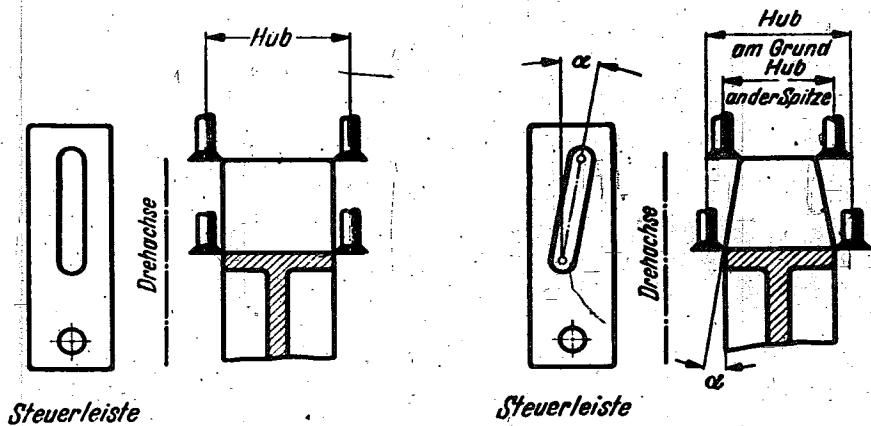
- Bild 31. Herstellung des Steuernockens
- Bemessung der Nockenhöhe
 - Maßangabe im Grundriß vom Mittelpunkt aus
 - Maßangabe von einem Bezugskreis aus

In Bild 31 b sind diese von dem Mittelpunkt und in Bild 31 c von einem Bezugskreis aus angegeben. Die Maße müssen die Lage des Fräsermittelpunktes bestimmen, wobei noch zu beachten ist, daß der Fräserdurchmesser gleich dem Steuerrollendurchmesser sein muß. Um die Maschine später einstellen zu können, ist es notwendig, daß die Achsen $0-180^\circ$ und $90^\circ-270^\circ$ sowie die Strahlen I und II angerissen und gekennzeichnet werden. Die Höhe des Steuernockens ist zweckmäßig 5 mm größer zu wählen als die Schaufelhöhe (Bild 31 a), um ein einwandfreies Abfließen der Steuerrolle an den äußersten Querschnitten zu gewährleisten. Der Abstand der Steuernockenquerschnitte entspricht dem Abstand der den Projektionen zugrunde gelegten Schaufelquerschnitte.

g) Abwandlungen

Schaufelprojektionen

Wird dem Steuernocken-Entwurf eine Projektion des kreiszylindrischen Schaufelschnittes auf die Sehne des Kreisbogens zugrunde gelegt (Bild 29), so wird die Erstreckung des Schaufelprofils auf dem Umfang kleiner und das Profil etwas verzerrt. Die Fehler richten sich nach der Länge des Profils auf dem Umfang und werden bedeutend kleiner, wenn statt der Sehnenprojektion die Abwicklung des Schaufelprofils verwendet wird. Genügt die durch den Fräser erzeugte Oberflächengüte der Schaufel

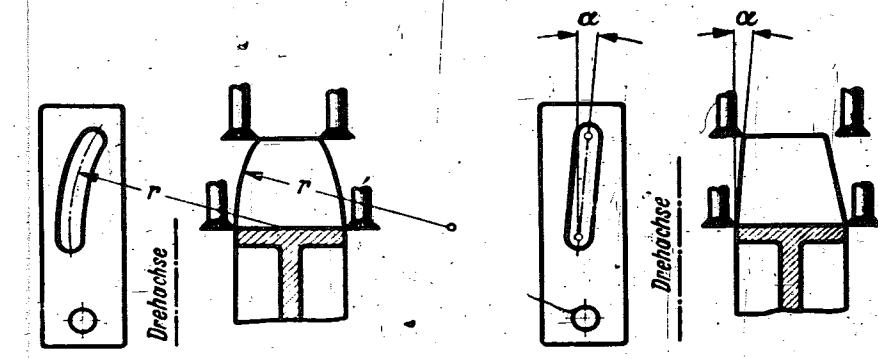


Hub gleichbleibend

Bild 32 a

Hub angepaßt

Bild 32 b



Steuerleiste

Hub angepaßt

Bild 32 c

Steuerleiste

Hub einerseits angepaßt

Bild 32 d

Bild 32. Entwurf der Steuerleiste zur selbständigen Hubverstellung für verschiedene Schaufelformen

mit einem Hub bearbeitet, der der jeweiligen axialen Erstreckung der Umhüllenden entspricht. Die Anpassung des Hubes an die Schaufelform geschieht durch den Steuerschlitz in der Steuerleiste, in den ein Bolzen des Hubschlittens eingreift (Bild 26). Bei gleichbleibendem Hub verläuft der Steuerschlitz senkrecht, wie in Bild 32a, und muß etwas länger sein als die Schaufelhöhe. Bei symmetrischen Schaufelformen nach Bild 32b, 32c und ähnlichen, bei denen der Hub der Schaufelform angepaßt wird, muß die Mittellinie des Steuerschlitzes wie die Außenkante der Schaufel verlaufen. Ist die Schaufelform unsymmetrisch, wie in Bild 32d, so muß der Steuerschlitz der

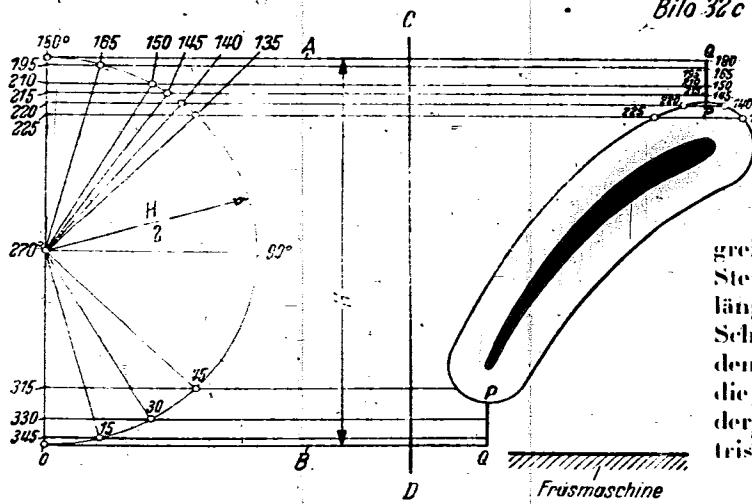


Bild 33 a

Bild 33. Fräser- und Steuerrollen-Mittelpunkt-bahnen sowie Auswirkung auf die Schaufelbearbeitung für eine Schaufelform nach Bild 32 b bei gleichgehaltenem Fräserhub

den Anforderungen nicht, so ist an den Projektionen eine den Nacharbeiten entsprechende Bearbeitungszugabe vorzusehen.

Steuerleiste

Schaufeln nach Bild 32 werden, wie bisher beschrieben, mit gleichbleibendem Hub oder aber

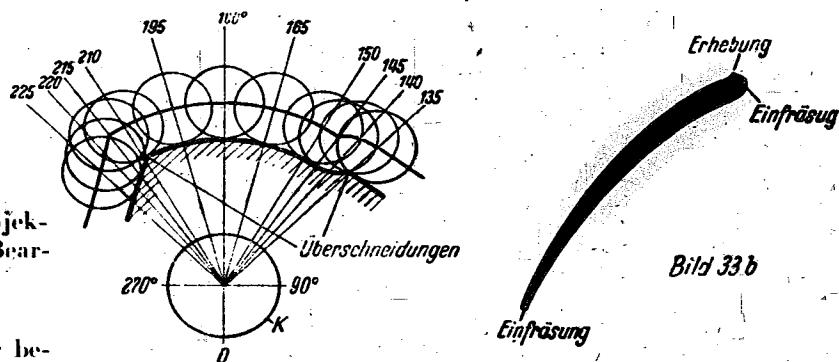


Bild 33 b

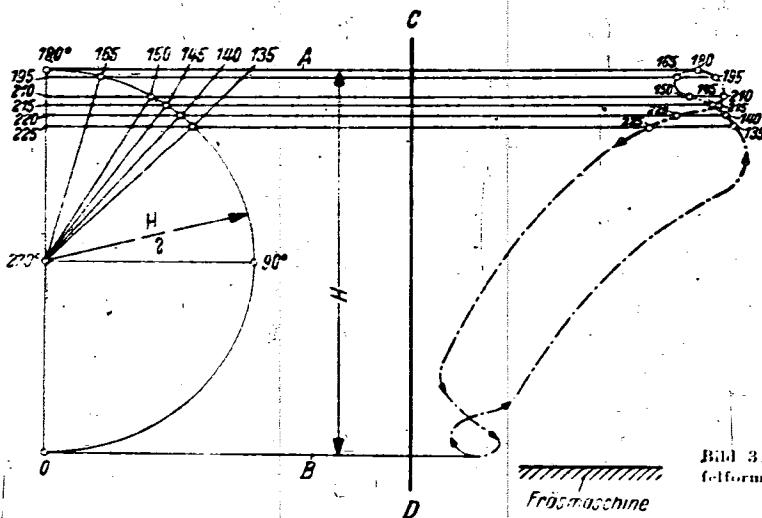


Bild 34a

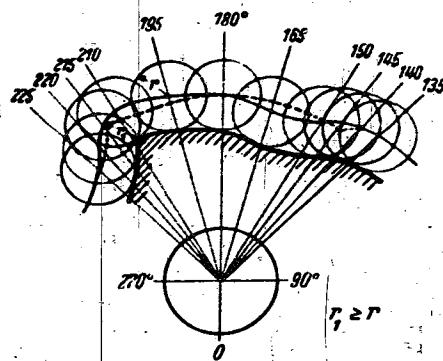


Bild 34b

Bild 34. Berichtete Fräser- und Steuerrollen Bahnkurven für eine Schaufelform nach Bild 32 b bei gleichgehaltenem Fräserhub

Seite entsprechen, die am wenigsten geneigt oder senkrecht ist.

Steuernocken

Für die Schaufelformen nach Bild 32 bleibt die Art des Steuernockenentwurfes gleich wie in Bild 30. Bei der symmetrischen Schaufelform in Bild 32b nimmt die axiale Länge der Schaufel und somit auch der Umhüllenden nach der Spitze zu ab. Wird nun der Hub durch die Steuerleiste der Schaufelform angepaßt, so ändert sich der Kurbelkreishalbmesser (Hub) entsprechend dem Abstand der Berührenden A und B.

Wird der Hub trotz abnehmender axialer Erstreckung der Umhüllenden gleichgehalten, Bild 33a, so verläßt der Fräser die von ihm einzuhaltende Mittelpunktsbahn an den Endlagen und führt seinen Hub ohne Seitenverschiebung der Schaufel solange aus, bis er diese wieder erreicht hat (Strecken P-Q). Bei der Aufzeichnung des Steuernockenabschnittes ergeben sich dadurch an vier Stellen Überschneidungen, so daß die in Bild 33b gezeigten Fehler auftreten, deren Größe durch Zurückkonstruieren von der wirklichen Steuerrollenbahn aus zeichnerisch festgestellt werden kann.

Erhält nun der Fräser in den Endlagen eine beliebige, schleifenförmige Bahn, Bild 34a, so ergeben sich keine Überschneidungen mehr. Es ist aber beim Aufzeichnen der Steuerrollenbahn darauf zu achten, daß die Halbmesser der vorspringenden (konvexen) Bahnabschnitte größer als der Steuerrollenhalbmesser sind, Bild 34b. Zum Vergleich ist in diesem Bild auch die nicht berichtigte Bahnkurve (Bild 33) eingezeichnet. Trotz der Berichtigung ergeben sich noch kleine Fehler, die aber höchstens als feiner Grat an der Schaufelnase und am Schaufelende auftreten. Ihre Größe kann zeichnerisch ermittelt werden.

Beliebiger Schaufelrad-Grundkörper

Zur Herstellung von Schaufelrädern mit beliebigem, axial veränderlichem Durchmesser (Bild 37) wird die in Bild 35 dargestellte Einrichtung der Maschine benützt.

Mit dem Frässchlitten ist eine Führungsleiste verbunden und führt mit ihm die Hubbewegung aus (vgl. a. Bild 21). Ein auf der Gewindespindel festsetzendes Klemmstück greift mit einem Zapfen in einen dem Grundkörper entsprechend geformten Schlitz der Führungsleiste ein, der dem Klemmstück mit der Gewinde-

spindel eine senkrechte Bewegung gibt, die über die Schwinde in halber Größe auf das Schaufelrad übertragen wird.

Entwurf der Führungsleiste

In Bild 37a und b sind zwei solcher Schaufelräder mit beliebigem Grundkörper dargestellt und der dazugehörige Schlitzverlauf angegeben. Die Schlitzlänge ist etwas größer als der Hub zu wählen. Die Größe der senkrechten Bewegung ist aber auf den größten Hub zu beziehen. Es ist darauf zu achten, daß die Abstände der Schlitzmittellinie an sämtlichen Stellen von der Waagrechten doppelt so groß sind wie an dem Grundkörper.

Da die Steuerrolle bei diesen Schaufelrädern in schräger Richtung auf dem Steuernocken verläuft, ist es notwendig, die dem Entwurf zugrunde liegende Schaufel wie in Bild 36 nach oben zu verlängern.

h) Vorteile der Schwenkfräsmaschine

Die früheren Herstellungsschwierigkeiten, mangelnde Oberflächengüte, hoher Zeit- und Kostenaufwand und beschränkte Anwendbarkeit stark gekrümmter Schaufeln und Schaufelprofile, konnten durch die Schaufel-schwenkfräsmaschine beseitigt werden. Außerdem ist bei deren Verwendung dem Konstrukteur größte Freiheit in der Gestaltung der Strömungsmaschine gelassen, dem Gebläsebauer eine beliebige Wahl der Schaufelteilung und -krümmung ermöglicht.

Im Stuttgarter Institut konnte immer wieder die Erfahrung gemacht werden, daß Herstellung und Konstruktion auch auf diesem Gebiet sich wechselseitig beeinflussen. Nach dem früheren Herstellungsverfahren mußte beispielsweise ein Versuchsgebläse, dessen Kennlinien bei verschiedenen Schaufelstellungen wissenswert waren, aus zeitlichen und wirtschaftlichen Gründen mit verstellbaren Einzelschaufeln ausgerüstet werden (Bild 38). Die dabei nicht vermeidbaren Einstellfehler bei der Schaufelverstellung machten teilweise die Auswertung von Versuchsergebnissen sehr schwierig und mußten auch nach Klärung dieser Einflüsse jeweils eliminiert werden. Auch die bauliche Ausführung derartiger Verstellgebläse mit in der Regel geteilter Nabe war naturgemäß schwieriger. Heute ist das Fräsen mehrerer Lauf- oder Leiträder mit verschiedenen Schaufelwinkeln, im gesamten betrachtet, billiger als die Herstellung eines Verstellrades mit geteilter Nabe und die Auswertung der damit zusammenhängenden Fehlerquellen bei der Auswertung.

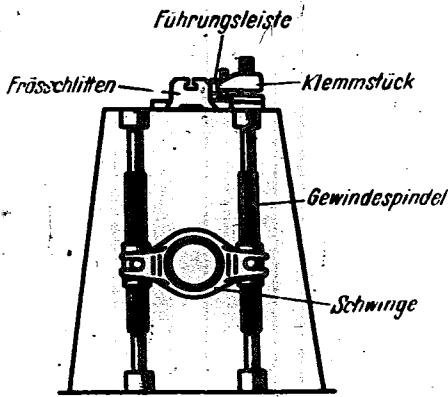


Bild 35. Einrichtung zur Bearbeitung des Schaufelgrundes bei Schaufelrädern mit nicht-zylindrischem Schaufelgrund

Verlängerung

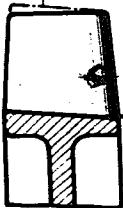


Bild 36 (links). Schaufelverlängerung bei nichtzylindrischem Schaufelgrund

Bild 38 (unten). Geteilte Nabe eines Axialgebläselaufers mit einzeln verstellbaren Flügeln

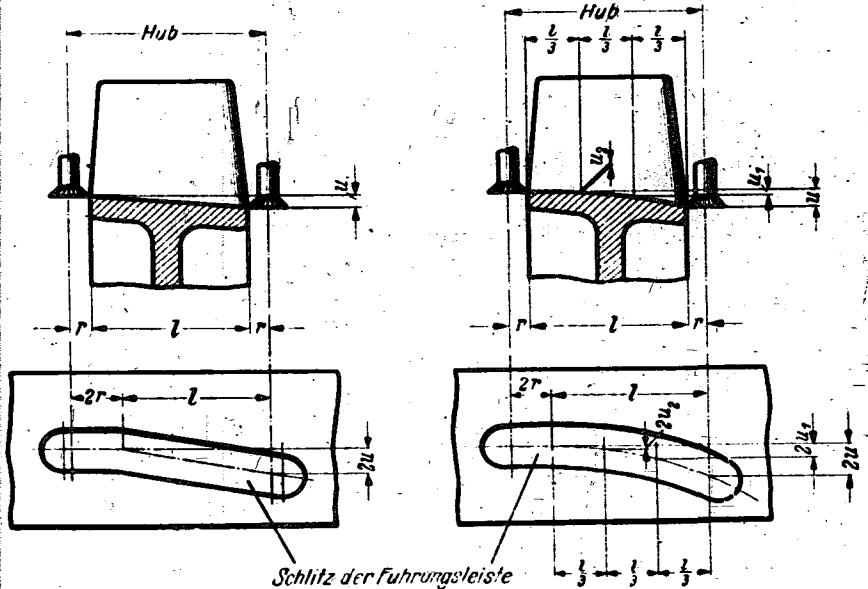


Bild 37a

Bild 37b

Bild 37. Führungsleisten für Räder mit verschieden geformtem Schaufelgrund

Dieses Beispiel ist vielleicht nur für den Versuchingenieur von Interesse. In einem anderen Falle hat sich aber auch für den Konstrukteur und den Fertigungsingenieur durch die Weiterentwicklung der Werkzeugmaschine ein wesentlicher Vorteil ergeben. Solange auf der Rundtischfräsmaschine Leitvorrichtungen mit zum Teil großen Verwindungen und engen Teilungen hergestellt werden mußten, war dies nur bei einzeln einsetzbaren Flügeln möglich. Diese im Betrieb stillstehenden Schaufeln mußten nun in einen Kranz eingepaßt werden, was erstens eine Teilung des Ladergehäuses und zweitens hohe Anforderungen an Paßarbeit verlangte (Bild 39). Heute sind diese Schwierigkeiten dadurch beseitigt, daß mit der Schwenkfräsmaschine beliebig enge Teilungen

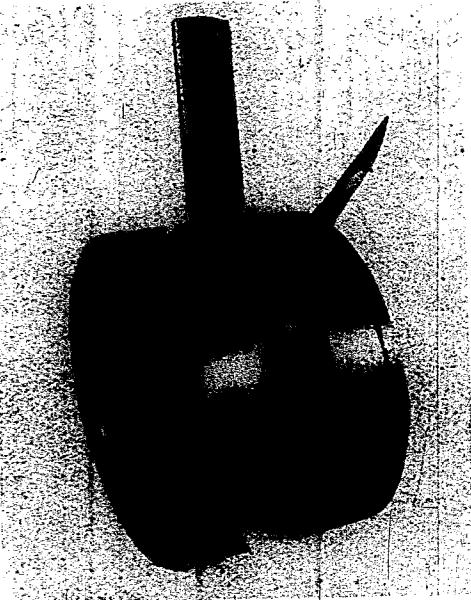


Bild 39. Geteilte Leitvorrichtung für einen Axiallader

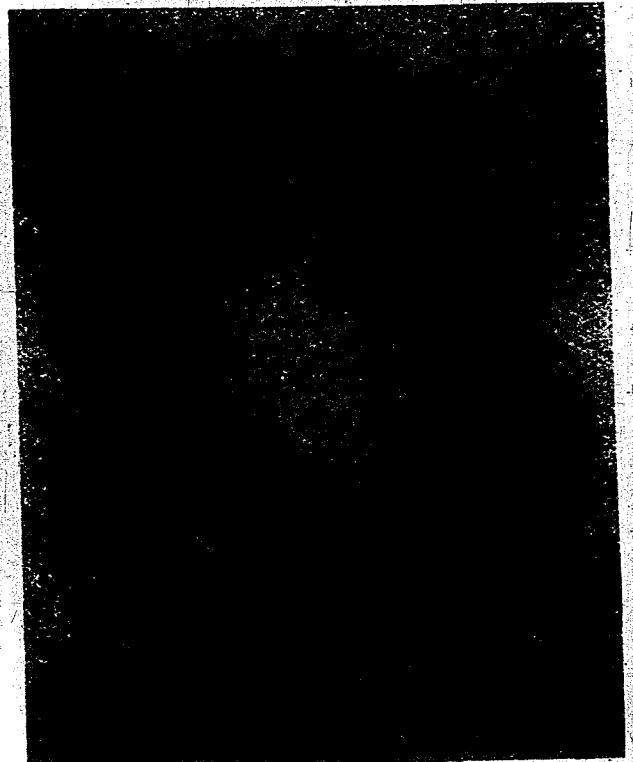


Bild 40 (rechts). Leitvorrichtung für einen Axiallader als Schaufelstern

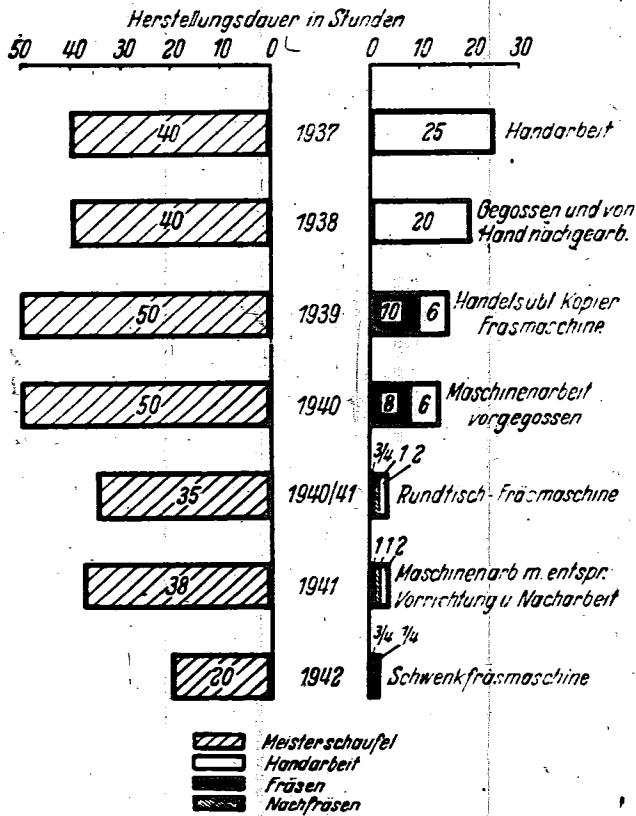


Bild 41. Herstellungsdauer einer 40 mm hohen Glastschaufel und der dazu gehörenden Schablone bzw. Meisterschaufel bei den verschiedenen Herstellungsverfahren

und Verwindungen gefräst werden können, weshalb auch die Leitvorrichtungen nach den jüngsten Erfahrungen ebenfalls als Schaufelstern gefräst werden (Bild 40). Einpaßarbeit und Teilung des Ladergehäuses sind dadurch in Wegfall gekommen.

Das Arbeitsverfahren der Schaufelschwenkfräsmaschine beruht, wie aus der Beschreibung hervorging, im wesentlichen in der Verbindung einer Hubbewegung des Fräserwerkzeugs parallel zur Drehachse des Schaufelrades und einer von einem Steuernocken aus abgeleiteten Schwenk- oder Pendelbewegung des Schaufelrades um seine Drehachse. Nach dem Bearbeiten bleibt nur ein einfaches Glätten der Oberfläche übrig, soweit dies im Hinblick auf kleinste Oberflächenrauigkeiten überhaupt notwendig ist. An der Schaufel- und Nabenform selbst wird also im Gegensatz zu anderen Herstellungsverfahren nichts mehr nachgearbeitet. Hervorzuheben ist noch, daß infolge der Stützwirkung des noch un bearbeiteten Werkstoffes messerscharfe Schaufelenden erzielt werden können, was, wie schon erwähnt, aus strömungstechnischen Gründen wichtig ist.

Weiterhin eignet sich die Maschine für die Nachbearbeitung von auf eine andere Weise vorbearbeiteten Beschauflungen, ferner auch für die Herstellung und Nachbearbeitung von andersartigen, ähnliche Anforderungen stellenden Werkstücken. Die Schaufelschwenkfräsmaschine kann mehrspindlig betrieben werden, so daß gleichzeitig mehrere Rohlinge bearbeitet werden können.

Bild 41 gibt zusammenfassend einen Überblick über die Bearbeitungszeiten bei den verschiedenen Herstellungsverfahren, woraus vor allem für den Fertigungsingenieur der Vorteil der jüngsten Entwicklung, insbesondere der Schaufelschwenkfräsmaschine, sinfälliger wird.

IV. Zusammenfassung

Bei dem stets wachsenden Bedarf an hochbelastbaren Strömungsmaschinen aller Art entspricht eine rechengetreue und sorgfältige, dabei aber wenig zeitraubende Bearbeitungsweise heute einer Notwendigkeit. Gleichmaßen setzt die Weiterentwicklung axial durchströmter Arbeits- und Kraftmaschinen eine der Vorbesprechung bzw. der Zeichnung entsprechende Herstellung der Einzelflügel voraus. Die handwerkliche Herstellungsweise, die für niedrig belastete Gebläse in manchen Fällen noch ausreichende Herstellungsgenauigkeit verbietet sich bei hohen Anforderungen und großen Schaufelzahlen wegen der unzulässig langen Bearbeitungszeit. Aus dem gleichen Grunde scheiden auch die bisher auf dem Markt erhältlichen Kopierfräsmaschinen für diesen Zweck aus.

Mit der im Stuttgarter Institut gebauten Rundtischfräsmaschine können zwar Einzelflügel und Flügelkränze axial durchströmter Maschinen mit großer Genauigkeit und ausreichender Oberflächenbeschaffenheit bei wesentlicher Verkürzung der Bearbeitungsdauer hergestellt werden. Man ist aber bei der Rechnung und beim Entwurf auf bestimmte Teilungsverhältnisse und Schaufelverwindungen beschränkt. Nachteilig ist ferner, daß die Rundtischfräsmaschine nicht die endgültige Form liefert; diese muß erst durch Handarbeit geschaffen werden. Dabei ist aber wiederum die Genauigkeit ganz vom Geschick des Werkmannes abhängig.

Alle diese Herstellungsschwierigkeiten werden durch die Schaufelschwenkfräsmaschine, Bauart Kräutter, beseitigt und damit die Wünsche nach hoher Genauigkeit bei niedrigem Zeit- und Kostenaufwand für die Herstellung erfüllt. Der Strömungsmaschinenbauer hat dabei vollkommene Freiheit in der aerodynamischen Gestaltung der Flügelform, für den Konstrukteur ergeben sich einfachere und zweckmäßigere Entwurflösungen. Diese Vorteile schaffen die Voraussetzung dafür, daß die axial durchströmte Arbeits- und Kraftmaschine in ihrer Leistung und ihrer Wirtschaftlichkeit auf eine höhere Entwicklungsstufe gehoben wird.

Eine neue hydraulische Presse und deren vielseitige Anwendungsmöglichkeit

P. Kreckel, Brandenburg

Bericht der Arado-Flugzeugwerke, Brandenburg/Havel

1 11

Übersicht: Es wird eine hydraulische, dreifachwirkende Presse mit Verriegelung, System Arado¹⁾, beschrieben, die von der Fa. Becker & van Hüllen auf Veranlassung der Arado-Flugzeugwerke gebaut wurde. Die vielseitigen Arbeitsmöglichkeiten dieser neuen Presse werden an Hand einer Zahlentafel und von mehreren Bildern gezeigt.

Gliederung

- I. Einleitung
- II. Beschreibung der Presse
- III. Die verschiedenen Arbeitsmöglichkeiten
- IV. Zusammenfassung

I. Einleitung

Mit den steigenden Forderungen in der spanlosen Verformung und deren Vielseitigkeiten muß auch die Entwicklung der Pressen Schritt halten. Auf der einen Seite ergibt sich hierbei die Forderung, bei größeren Verformungen die Anzahl der notwendigen Verformungsstufen zu verringern und möglichst in nur einem Arbeitsgang durchzuführen. Auf der anderen Seite soll eine Presse, deren Beschaffung immerhin sehr kostspielig ist, möglichst vielen geforderten Fertigungsverfahren gerecht werden.

Auf Grund dieser beiden Forderungen entstand eine hydraulische Ziehpresse, welche durch Anordnung einer einfachen neuartigen Verriegelung dreifachwirkend wird.

Hiermit kann man in zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Verformungsstufen, mit ein und demselben Werkzeug, in nur einem Arbeitsgang, verhältnismäßig große Verformungen erreichen. Ferner ermöglicht diese Presse eine Anpassung an die verschiedensten bekannten Arbeitsverfahren der spanlosen Verformung.

II. Beschreibung der Presse

Hauptbauteile

Die Presse, vergl. Bild 1, besteht aus sieben Hauptbauteilen; diese sind:

1. Der feststehende Pressenrahmen, bestehend aus dem unteren festen Tisch 1 mit den Stützsäulen 2 und dem oberen Querjoch 3.
2. Der bewegliche Pressenrahmen, bestehend aus dem oberen Niederhalterrahmen 4, den Zugstangen 5 und dem unteren Querjoch 6 mit zugehörigem Druckzylinder-System 7.
3. Der obere Ziehstößel 8 mit zugehörigem Drucksystem 9.
4. Der untere Gegenstößel 10, mit zugehörigem Drucksystem 11.
5. Die Verriegelung 12 mit zugehörigem Betätigungssystem 13.
6. Die Kupplung 14 mit zugehörigem Betätigungssystem.
7. Die Arretierung 16.

Arbeitsweise

Die neue hydraulische Presse zeigt in ihrer Anwendung als normale ein- und zweifachwirkende Presse nichts Neues. Diese Arbeitsweise ist allgemein bekannt und erü-

bringt sich daher eine besondere Beschreibung. Wesentlich sind jedoch die verschiedenen Arbeitsmöglichkeiten, die sich aus der einzelnen oder gemeinsamen Anwendung der neuartigen Zusatzanordnungen ergeben haben (Verriegelung, Kupplung und Arretierung). Der Zweck der einzelnen Zusatzanordnungen und deren Arbeitsweise ist folgender:

1. Die Verriegelung ermöglicht in der ersten Arbeitsstufe des Arbeitsfalles 15, vergl. Bild 16, die Hinzuschaltung des unteren Gegenstößeldruckes zum Niederhalterdruck. In der zweiten Arbeitsstufe wird dann die Verriegelung freigegeben und es kann dann der untere Gegenstößel mittels der Stifte die Gegenverformung durchführen.

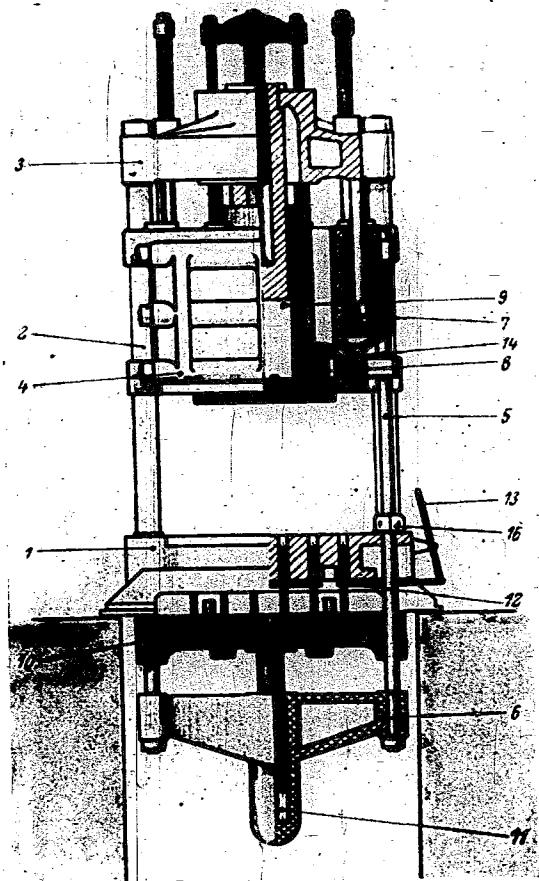


Bild 1. Schematischer Querschnitt durch die neue dreifachwirkende hydraulische Presse

- | | |
|-----------------------|---------------------------------------|
| 1 fester Tisch | 9 Drucksystem für Ziehstößel |
| 2 Stützsäulen | 10 Gegenstößel |
| 3 oberes Querjoch | 11 Drucksystem für Gegenstößel |
| 4 Niederhalterrahmen | 12 Verriegelung |
| 5 Zugstangen | 13 Betätigungssystem für Verriegelung |
| 6 unteres Querjoch | 14 Kupplung |
| 7 Druckzylindersystem | 16 Arretierung |
| 8 Ziehstößel | |

1) DRP angemeldet.

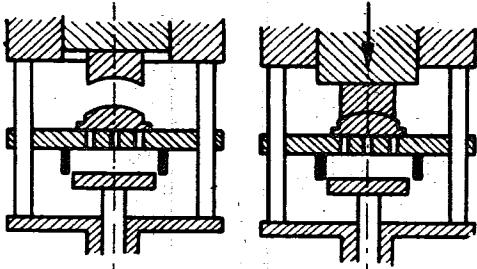


Bild 2 (links). Arbeitsmöglichkeit 1
unter Druck: $ZS = 800 \text{ t}$
drucklos: ONH; UNH

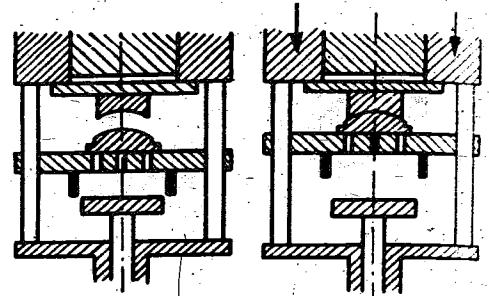


Bild 3 (rechts). Arbeitsmöglichkeit 2
unter Druck: ONH = 700 t
drucklos: ZS; UNH

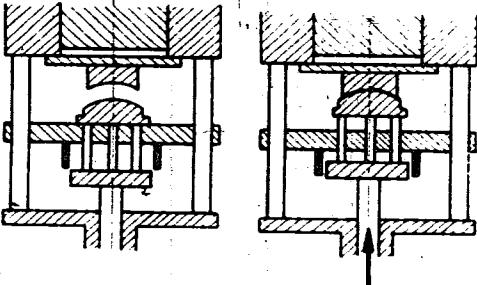


Bild 4 (links). Arbeitsmöglichkeit 3
unter Druck: UNH = 1000 t
drucklos: ZS; ONH

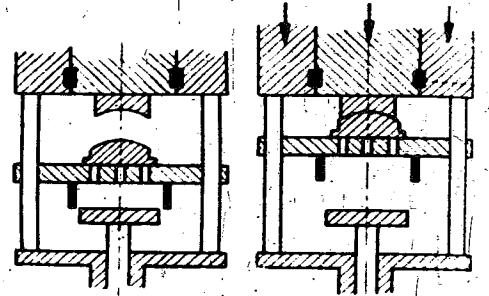


Bild 5 (rechts). Arbeitsmöglichkeit 4
unter Druck: $ZS + ONH = 800 + 700 = 1500 \text{ t}$
drucklos: UNH
*) ZS mit ONH gekuppelt

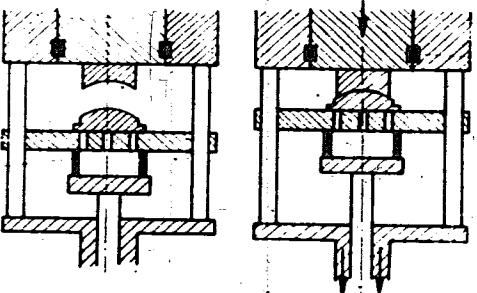


Bild 6 (links). Arbeitsmöglichkeit 5
unter Druck: $ZS + UNH = 800 + 1000 = 1800 \text{ t}$
drucklos: ONH
*) ZS mit ONH gekuppelt
**) UNH verriegelt

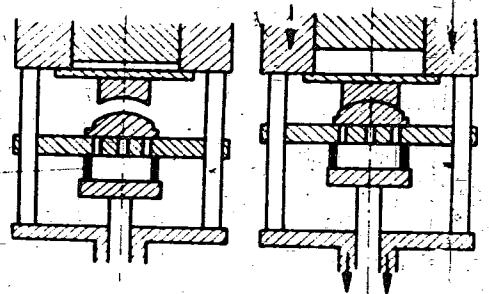


Bild 7 (rechts). Arbeitsmöglichkeit 6
unter Druck: $ONH + UNH = 700 + 1000 = 1700 \text{ t}$
drucklos: ZS
*) UNH verriegelt

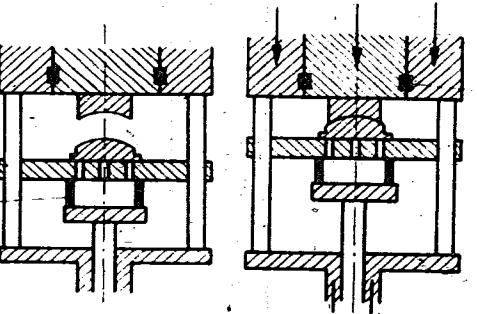


Bild 8 (links). Arbeitsmöglichkeit 7
unter Druck: $ZS + ONH + UNH = 800 + 700 + 1000 = 2500 \text{ t}$
drucklos: —
*) ZS mit ONH gekuppelt
**) UNH verriegelt

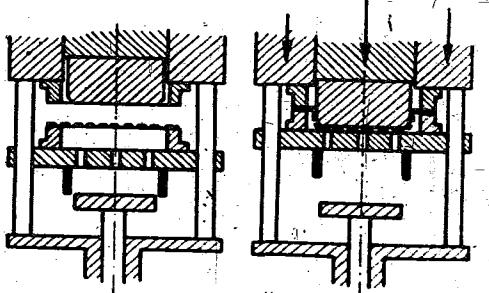


Bild 9 (rechts). Arbeitsmöglichkeit 8
unter Druck: $ZS = 800 \text{ t}$
ONH = 700 t
drucklos: UNH

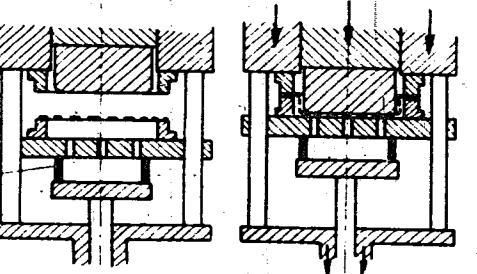


Bild 10 (links). Arbeitsmöglichkeit 9
unter Druck: $ZS = 800 \text{ t}$
UNH = 1000 t
drucklos: ONH
*) UNH verriegelt

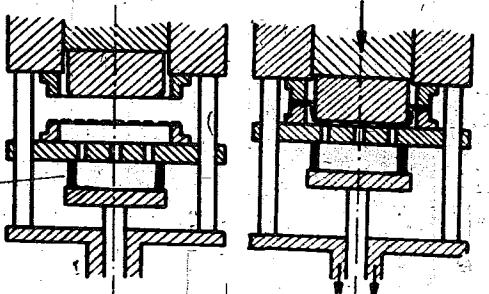


Bild 11 (rechts). Arbeitsmöglichkeit 10
unter Druck: $ZS = 800 \text{ t}$
 $ONH + UNH = 700 + 1000 = 1700 \text{ t}$
drucklos: —
*) UNH verriegelt

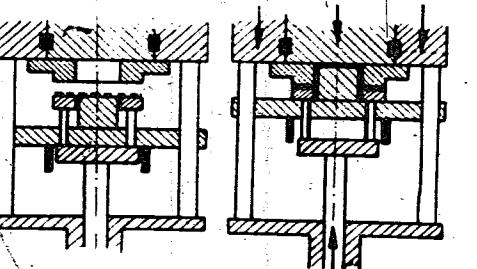


Bild 12 (links). Arbeitsmöglichkeit 11
unter Druck: $ZS + ONH = 800 + 700 = 1500 \text{ t}$
UNH = 1000 t
drucklos: —
*) ZS mit ONH gekuppelt

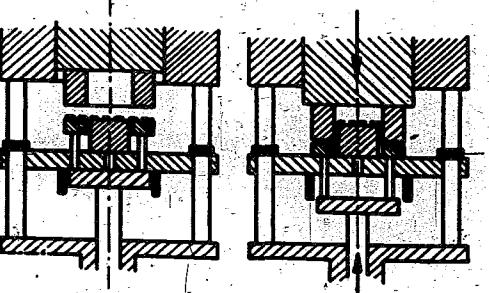


Bild 13 (rechts). Arbeitsmöglichkeit 12
unter Druck: $ZS = 800 \text{ t}$
UNH = 1000 t
drucklos: ONH
*) ONH gegen Verschiebung arretiert

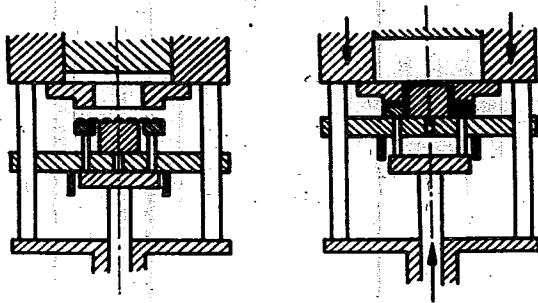


Bild 14. Arbeitsmöglichkeit 13
 unter Druck: ONH = 700 t
 UNH = 1000 t
 drucklos: ZS

Bild 2 bis 16. Arbeitsmöglichkeiten
 ZS ≡ Ziehstempel
 ONH ≡ obere Niederhaltung
 UNH ≡ untere Niederhaltung

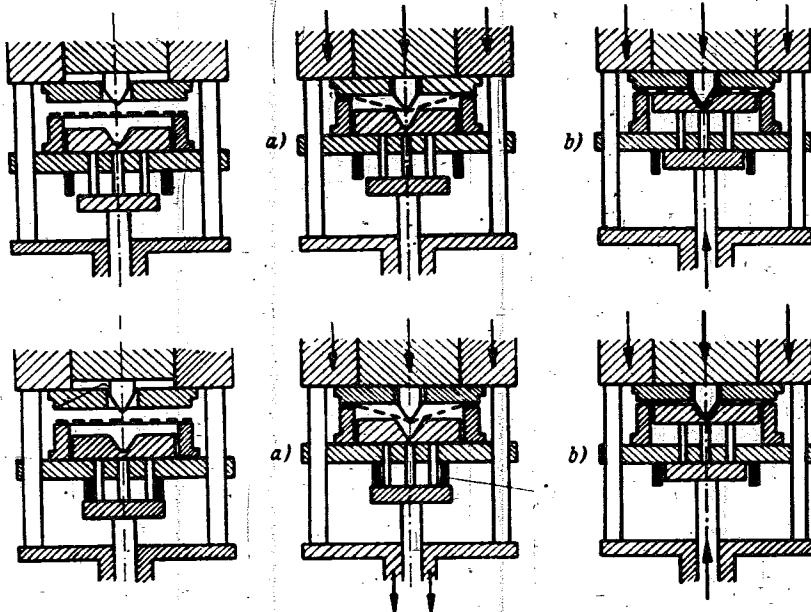


Bild 15. Arbeitsmöglichkeit 14
 unter Druck: a) ZS = 800 t
 ONH = 700 t
 b) ZS = 800 t
 ONH = 700 t
 UNH = 1000 t
 drucklos: a) UNH
 b) —

Bild 16. Arbeitsmöglichkeit 15
 unter Druck: a) ZS = 800 t
 ONH + UNH = 700 + 1000 = 1700 t
 b) ZS = 800 t
 ONH = 700 t
 UNH = 1000 t
 drucklos: a) —
 b) —
 *) a) UNH verriegelt
 b) entriegelt

Die im Bild 1 schematisch gezeichnete Verriegelung wird praktisch dadurch erreicht, daß einige Abstützbolzen sich gegen einen Verriegelungsschieber abstützen, der bei kleinen Pressen mechanisch von Hand, bei großen Pressen jedoch hydraulisch betätigt wird.

Bei zurückgeschobener Verriegelung (Entriegelung) bewegen sich die Abstützbolzen ungehindert durch entsprechende Aussparungen des Schiebers in zugehörige Aussparungen des Pressentisches; sodann können sich bei Betätigung des unteren Gegenstoßelldrucksystems die Stifte zum Arbeiten nach oben bewegen.

2. Die Kupplung ermöglicht eine starre Verbindung des oberen Ziehstößels mit dem oberen Niederhalter und damit eine Addition der beiden Drücke bzw. eine Vergrößerung der nutzbaren Druckfläche. Sie wird erreicht durch Einschieben der im Niederhalter befindlichen Kupplungsleisten in zugehörige Ausschnitte des Ziehstempels.

3. Die Arretierung wird vorgenommen, indem man die vier Zugstangen des beweglichen Pressenrahmens durch zweiteilige Klemmringe auf den Pressentisch abstützt (s. Arbeitsfall 12 in Bild 13).

III. Die verschiedenen Arbeitsmöglichkeiten

Die verschiedenen erreichbaren Arbeitsfälle sind aus der nachfolgenden Zahlentafel, sowie aus den Bildern 2 bis 16 zu ersehen. Gleichzeitig zeigen die Bilder im Schema den für die betreffenden Arbeitsfälle erforderlichen

Werkzeugaufbau. Besonders soll auf die Arbeitsfälle 14 und 15 hingewiesen werden, bei denen infolge der aufeinanderfolgenden Verformungsstufen nur ein Werkzeug benötigt wird.

Zahlentafel 1. Höchstdrücke, sowie Arbeitsmöglichkeiten der dreifachwirkenden hydraulischen Pressen von Becker & van Hüllen mit Verriegelung, System Arado; Gesamtdruck: 2500 t.

Arbeitsmöglichkeit	Nr.	ZS	ONH	UNH	UNH als Gegenstempel	NH in % v. ZS	Gesamt-druck
Einfachwirkende Presse	1	800	—	—	—	—	800
	2	—	700	—	—	—	700
	3	—	—	1000	—	—	1000
	4	800	700	—	—	—	1500
	5	800	—	1000	—	—	1800
	6	—	700	1000	—	—	1700
	7	800	700	1000	—	—	2500
Doppeltwirkende Presse	8	800	700	—	—	88	—
	9	800	—	1000	—	125	—
	10	800	700	1000	—	210	—
	11	800	700	—	1000	—	—
	12	800	—	—	1000	—	—
	13	—	700	—	1000	—	—
Dreifachwirkende Presse	14a	800	700	—	—	88	—
	14b	800	700	—	1000	88	—
	15a	800	700	1000	—	210	—
	15b	800	700	—	1000	88	—

Hierdurch werden nicht nur die Einzelwerkzeuge für die erste und zweite Verformungsstufe, sondern auch das erforderliche und zeitraubende Zwischenglühen erspart. Außerdem werden die Rüst- und Verlustzeiten noch wesentlich verringert.

Die in Zahlentafel 1 und den Bildunterschriften angegebenen Drücke gelten für eine Presse von einem Gesamtdruck von 2500 t.

Die verwendeten Abkürzungen haben folgende Bedeutung:

- ZS \equiv Ziehstempeldruck
- NH \equiv Niederhalterdruck
- ONH \equiv oberer Niederhalterdruck
- UNH \equiv unterer Niederhalterdruck

Bild 17 zeigt die Ausführung einer Presse nach dem beschriebenen neuen System mit den angegebenen Drücken, und einer nutzbaren Tischgröße von 1600 \times 2000 mm.

IV. Zusammenfassung

Es wurde eine neue hydraulische dreifachwirkende Presse mit Verriegelung, System Arado, beschrieben. Die vielseitigen Arbeitsmöglichkeiten mit dieser Presse wurden an Hand einer Zahlentafel und von mehreren Bildern gezeigt. Ein besonderes Arbeitsverfahren bringt eine Ersparnis an Werkzeugkosten und Stückzeit.

Mit Hilfe dieser neuen Presse ist es möglich, in einem Arbeitsgang mehrere Verformungsstufen unmittelbar hintereinander auszuführen.

Fortsetzung von S. 170

V. Änderungen

In diesem Zusammenhang soll auch einmal kurz über die Änderungen der Flugzeugteile gesprochen werden. Sie haben sich als ein unvermeidbarer Faktor eingemistet, und man muß mit ihnen rechnen. Jedem Fertigungsmann sind sie ein Grauel, denn sie stoßen häufig seine schönsten Planungen und Berechnungen um. Bei näherer Betrachtung von Bild 6 ist ersichtlich, welcher Aufwand an Zeit und Arbeit erforderlich ist, um Änderungen, die mit Lehren abgestimmte Betriebsmittel betreffen, reibungslos und ohne Unterbrechung der Fertigung durchzuführen, wenn die Großfertigung im Anlauf oder bereits in vollem Gange ist.

Die Organisation muß schon außerordentlich gut eingespielt und schlagkräftig sein, um die gestellte Aufgabe zu erfüllen. Berücksichtigt man, daß die von der Änderung betroffenen Betriebsmittel in der Großfertigung sehr oft örtlich getrennt sind, an denen die Änderung erst vorgenommen werden kann, wenn die entsprechenden Arbeits- oder Vorrichtungslehren mit der Urlehre, die sich immer im Stammwerk befindet, abgestimmt sind, so ergibt sich, welcher ein Apparat in Gang gesetzt werden muß, um den Austausch an wichtigen Bauteilen sicher zu stellen. Bis zur restlosen Durchführung der Änderung können ein Monat und mehrere vergehen.

Für den Flugzeugkonstrukteur ergibt sich daraus die Lehre, Änderungen während der Großserie nur dann zu bringen, wenn sie unbedingt notwendig sind. Auf alle Fälle sind sie einer kritischen Betrachtung zu unterziehen und zu prüfen, welche Fertigungsmittel davon betroffen werden. Vor allen Dingen hüte er sich, Änderungen an Systemvermassungen oder aerodynamischen



Bild 17. Ansicht der neuen dreifachwirkenden hydraulischen Presse; Tischgröße 1600 \times 2000 mm

Konturen vorzunehmen, die weittragende Auswirkungen haben können und hohe Kosten verursachen. Es ist angebracht, die beratenden Fertigungsingenieure dazu mit heranzuziehen, die an Hand ihrer Listen und Unterlagen in der Lage sind, festzustellen, wie weit die Betriebsmittel von den Änderungen beeinflusst werden. Nur mit deren Billigung können unbeabsichtigte aber schwerwiegende Folgen hinsichtlich Arbeitsaufwand, Werkstoffverlust, Zeit Lohn vermieden werden.

Aber nicht nur die Betriebsmittel, sondern auch die Bauteile werden von den Änderungen häufig derart betroffen, daß eine Durchführung der Änderung nicht mehr möglich ist und das Teil als Ausschuß angesehen werden muß. In der Großserie ist dieses meistens eine erhebliche Anzahl, da auf Vorrat gearbeitet wird.

VI. Schlußbetrachtung

Die Ausführungen werden gezeigt haben, daß in keinem Gebiet die Zusammenarbeit zwischen Konstrukteur und Fertigungsmann so notwendig ist, wie im Flugzeugbau, um einen reibungslosen Ablauf der Fertigung zu erzielen. Durch die immer mehr fortschreitende Mechanisierung wird diese Zusammenarbeit wichtiger denn je. Für den Flugzeugkonstrukteur ergibt sich die Aufgabe, einfache große Bauteile zu gestalten, die möglichst auf automatischen Maschinen gefertigt werden können. Dabei sind Änderungen, wenn irgendmöglich, zu vermeiden. Das Bestreben des Fertigungsingenieurs muß sein, die Erfahrungen der Fertigung dem Konstrukteur wieder zuleiten und ihn über fertigungstechnische Möglichkeiten zu unterrichten. Erst wenn dieser Ring geschlossen ist, wird sich die harmonische Zusammenarbeit auf die Flugzeugkonstruktion günstig auswirken.

Mipolam-Preßkissen für Verformungszwecke von Leichtmetall

H. A. Sagel, Troisdorf

I 113; E 5

Übersicht: Um die guten Eigenschaften des Mipolam-Preßkissens für Blechverformungszwecke voll ausnutzen zu können, ist eine zweckentsprechende Anwendung des Gummi-Preßverfahrens Vorbedingung.

In dem folgenden Beitrag werden Angaben über Eigenschaften und Verwendung des Mipolam-Preßkissens gemacht; sodann wird der Einbau dieses Massivpreßkissens eingehend beschrieben, wobei die Verschweißung von Mipolam-Blöcken und die Wiedernutzbarmachung beschädigter Mipolam-Preßkissen besonders erörtert wird.

Gliederung

- I. Einführung
- II. Eigenschaften des Mipolams
- III. Anwendungstechnische Fragen
- IV. Verarbeitungstechnische Fragen
 1. Befestigung des Mipolam-Preßkissens
 2. Verschweißen von Mipolam-Preßkissen
 3. Glättung abgenutzter Arbeitsflächen
 4. Aufschweißen neuer Arbeits- bzw. Abdeckplatten
- V. Ausführungsformen
- VI. Zusammenfassung

I. Einführung

Im Verfolg des Gedankens, die heimischen Werkstoffe im Rahmen des Vierjahresplanes möglichst vielen Zwecken des Flugzeugbaues nutzbar zu machen, wurde in Zusammenarbeit mit dem Reichsluftfahrtministerium und einschlägigen Industrie-Unternehmungen das aus heimischen Rohprodukten aufgebaute alterungsbeständige und verschleißfeste Mipolam-Preßkissen für die spanlose Verformung von Leichtmetallblechen entwickelt.

Der dem Mipolam-Preßkissen zu Grunde liegende Kunststoff gehört zur Gruppe der thermoplastischen Vinylpolymerisatharze, zu denen auch der Buna-Kautschuk zählt, die mit ihrer ungewöhnlichen Vielseitigkeit und ihren hohen Gebrauchswerten eine wertvolle Bereicherung des gesamten Gebietes der Kunststoffe bedeuten.

Mit diesem hochwertigen Werkstoff konnte, wie sich bald herausstellte, das früher benutzte Gummikissen nicht nur ersetzt, sondern in Bezug auf Verschleißfestigkeit, Einsatzmöglichkeit und Handhabung weit übertroufen werden.

Das Gummi-Preßverfahren als jüngstes Verfahren der spanlosen Verformung von Leichtmetallblechen hat uns bekanntlich dem Ziele, den verformungstechnischen Stand einer Großreihenfertigung unter weitgehen-

der Ausschaltung von Handarbeit zu erreichen, ein gutes Stück näher gerückt. Es hat insbesondere, als es beim Wiederaufbau der deutschen Luftwaffe darauf ankam, viele Flugzeuge in verhältnismäßig kurzer Zeit zu bauen, dazu beigetragen, eine große Fabrikations- oder Typenumstellung reibungslos und ohne Termenschwierigkeiten abzuwickeln und nicht zuletzt erhebliche Werkzeugkosten einzusparen. Durch diese weitgehende Mechanisierung der Verformungsarbeiten in der Flugzeugindustrie ist eine sehr erhebliche Steigerung der Ausbringung und Arbeitsgüte eingetreten.

Dieses neuartige Arbeitsverfahren auf dem Gebiet der Blechverformung gewann bald entscheidende Bedeutung und beeinflusste natürlich die hierfür erforderlichen Arbeitsmaschinen. So entstanden die eigens für den Flugzeugbau entwickelten Spezialpressen, deren Geschwindigkeiten durch Verwendung von hydraulischen Akkumulatoren genau geregelt bzw. in jedem Augenblick geändert werden können, um den Fließvorgang und damit die Beanspruchung des Bleches günstig zu beeinflussen. Die Pressenteile sind vorteilhaft genormt und ermöglichen ein Austauschen des auswechselbaren Preßrahmens auf Pressen höherer Leistung zwecks Erreichung höherer spezifischer Preßdrücke. Auf derartigen Pressen wird im Vergleich zu allen bekannten Formungsverfahren nur mit einem einteiligen Werkzeug gearbeitet, und zwar wird das aus Festholz, Zink, Elektron oder neuerdings aus gießfähigem Kunstharz bestehende Formungswerkzeug gegen den von einem Stahlrahmen eingefasten Mipolam-Stempel bzw. gegen das von einem Stahlkoffer umgebene Mipolam-Preßkissen gefahren, welches in-



Werkstück

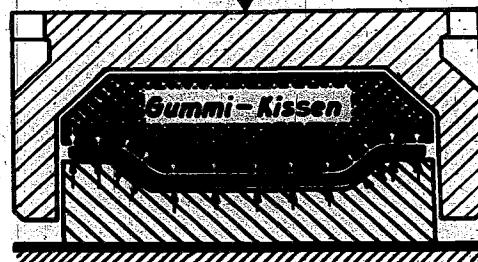
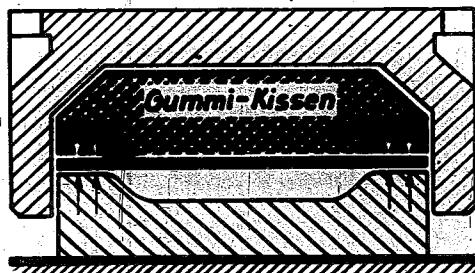


Bild 1. Skizze der Wirkungsweise des Gummi-Preßverfahrens;

links vor dem Zug
rechts nach dem Zug

folge des hohen Druckes in alle Vertiefungen gedrängt wird und somit die Umformung des Bleches zum Verformungsteil bewirkt. Das elastische Preßkissen übernimmt also die Aufgabe des Oberstempels, vergl. Bild 1. Der vor Beginn einer Verformung auf dem Blech aufsitzen- de Mipolam-Stempel wirkt zugleich als Blechhalter, wobei sich naturgemäß mit fortschreitendem Ziehvor- gang der Blechhalterdruck erhöht.

Unter Verwendung geeigneter Mipolam-Qualitäten ist es möglich, das Arbeitsverfahren der spanlosen Blechver- formung auf vollständig gratfreies Schneiden von Blechen bis 1,0 mm Dicke auszudehnen. Auch Abkantungen und Bördelungen lassen sich mittels besonderer Weichmipolam-Ansätze in einem Arbeitshub ausführen, jedoch ist zu betonen, daß neben dem Grad der Verformung, ins- besondere der Stauchung an Außenbördeln, auch die Abmessungen des Bauteiles für die Anwendung des Gummi-Preßverfahrens ausschlaggebend sind.

Hervorgehoben sei, daß eine Oberflächenbeschädigung des Leichtmetallbleches durch den Mipolam-Werkstoff gleicherweise wie bei Gummi nicht möglich ist, da dieser Werkstoff, selbst wenn er auf dem Blech gleitet, keine Beschädigungen verursachen kann. Dies ist bei der Ver- formung von Leichtmetallblechen, die im Vergleich zu Eisen- und Stahlblechen gegen Kratzer sehr empfindlich sind, ein besonderer Vorteil.

Während das Gummikissen nach einer gewissen Be- nutzungsdauer durch Einschnitte und Ausbrüche un- brauchbar und wertlos geworden ist, glättet man das nach längerem Gebrauch oberflächlich beschädigte Mi- polam-Kissen durch einfache Anwendung von Hitze. Die thermoplastischen Eigenschaften von Mipolam gestatten es zudem, das abgenutzte Preßkissen einem neuen Ver- wendungszweck zuzuführen. Der Werkstoff behält also im Gegensatz zu Gummi zu einem gewissen Grade seinen Rohstoffwert.

II. Eigenschaften des Mipolams

Wie bereits eingangs erwähnt, stellt der Grundstoff des Mipolam-Preßkissens ein aus heimischen Rohstoffen hergestelltes thermoplastisches Polymerisat auf Vinyl- derivatbasis dar. Mipolam zeichnet sich durch eine sehr hohe Alterungsbeständigkeit aus, d. h. der Werkstoff ist beständig gegen atmosphärische Einflüsse; er erlei- det also unter dem Einfluß von Licht, Wärme und Sau- erstoff keine dauernde Veränderung und wird mit der Zeit nicht mürbe und brüchig.

Seine Beständigkeit, insbesondere gegen Öl und gegen die Einwirkung von Chemikalien verschiedener Art sowie die Flammenwidrigkeit und Feuchtigkeitsunempfindlich- keit, geben diesem Werkstoff als Austauschstoff für viele Verwendungszwecke ein besonderes Gepräge.

Während hartes Mipolam eine feststehende, gegebene Größe darstellt, ergibt sich bei Weichmipolam die Mög- lichkeit, den Grad der Weichheit ganz nach Bedarf so zu beeinflussen, daß der Stoff gummi- oder lederartige Beschaffenheit annimmt, bzw. daß je nach den Mi- schungsverhältnissen harte bis weiche, mehr oder weni- ger dehnbare und elastische Massen von gummiartigem Charakter entstehen. Diese besitzen eine Reihe von Vor- zügen, die ihre Anwendung für Blechverformungszwecke mit Vorteil gestatten.

Wenn auch Mipolam gegenüber Weichgummi für be- stimmte Verwendungszwecke den Nachteil besitzt, daß bei Überschreitung einer gewissen Grenze die elastische Dehnung in eine plastische Dehnung übergeht, so wirkt

sich diese Eigenschaft jedoch für Verformungszwecke insofern vorteilhaft aus, als die bei diesem Werkstoff im Vergleich zu Kautschuk vorhandene weniger hohe Rück- federung bzw. Nervigkeit eine bessere Fließfähigkeit be- dingt, die mit einer besseren Ausprägung der verformten Bleche im Einklang steht.

Diese Eigenschaft der besseren Fließfähigkeit setzt jedoch voraus, daß erstens das an und für sich selbst- verständliche Erfordernis des vollkommenen Preßkof- ferverschlusses vor Druckgebung bzw. vor Druckanstieg erfüllt ist und daß zum anderen der für Verformungs- zwecke entwickelte Preßkissenansatz solche Rückfed- rungseigenschaften besitzt, daß er nach der geleisteten Verformungsarbeit, d. h. nach Öffnen des Preßkoffers, wieder in den ursprünglichen Zustand zurückgekehrt ist.

Infolge der Eigenschaft des thermoplastischen Werk- stoffes Mipolam, bei Anwendung höherer Wärmegrade weich zu werden ohne zu brennen oder sich rasch zu zer- setzen, ist es möglich, ein nach einer gewissen Benutzungsdauer oberflächlich durch Risse oder Eindrücke be- schädigtes Preßkissen durch Verschweißen auf einer heißen Stahlplatte wieder in einen einwandfreien Zu- stand zurückzuführen.

Die leichte Verarbeitbarkeit dieses vielseitig verwend- baren Kunststoffes ist letzten Endes auf seine Thermo- plastizität bzw. Wärmebildsamkeit zurückzuführen, die bei der Verwendung als Preßkissen besonders nutzvoll zur Auswirkung kommt. Der Werkstoff Mipolam ist in den nachstehend aufgeführten, für die „spanlose Ver- formung“ von Leichtmetallblech entwickelten Qualitäten außerordentlich elastisch, zerreiß- und einschnittfest, vgl. Zahlentafel 1.

Zahlentafel 1.

Weich- mipolam Typ	Zerreiß- festigkeit*) kg/cm ²	Bruch- dehnung*) %	Shore- Härte*)	DVM- Härte*)	spez. Gewicht
MP/K 190	70	350	50	90	1,22
MP K 6569	120	300	65	70	1,27
MP/K 6568	150	250	80	30	1,30

*) Werte abgerundet.

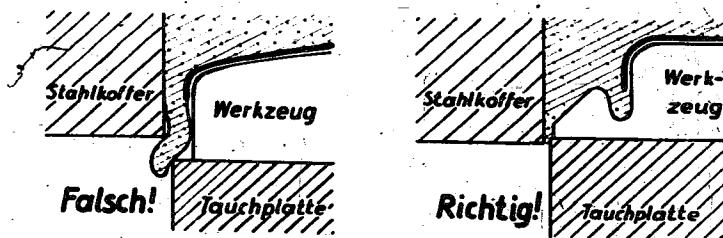


Bild 2. Lage der Werkzeuge am Kofferrand

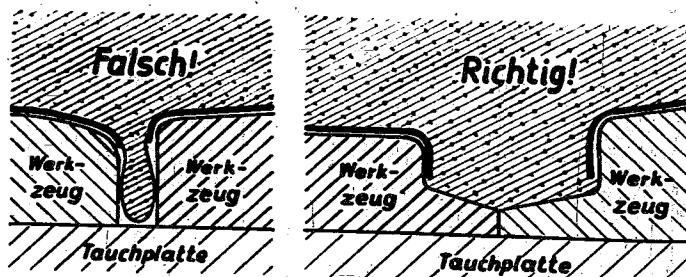


Bild 3. Lage der Werkzeuge in Mitte Kofferfläche

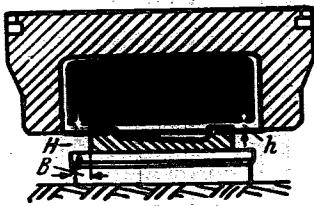


Bild 4. Falsche Anordnung des Gummipreßkissens bei Nichtbeachtung der Werkzeugausführung

- | | |
|---------------------------|---|
| $H > 60 < 100 \text{ mm}$ | } dann Preßfläche mit Beilage ausfüllen |
| $B < 2 \cdot H$ | |
| $H > 100 \text{ mm}$ | } dann Preßfläche mit Beilage ausfüllen |
| $B < 2 \cdot H$ | |

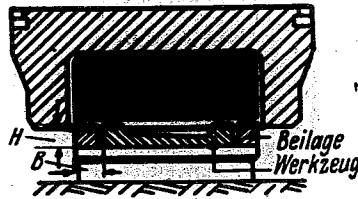


Bild 6. Schnitt durch ein 650 mm langes Werkstück.
Material des Werkstückes: Dural 3116.4; 0,8 mm
Material des Werkzeuges: Obholz
Gepreßt mit Mipolamkissen $700 \times 1150 \times 210 \text{ mm}$
bestehend aus 190 mm Weichmipolam Typ MP/K 190
20 mm Weichmipolam Typ MP/K 6569,
210 mm
Preßdruck: ca. 160 kg/cm^2

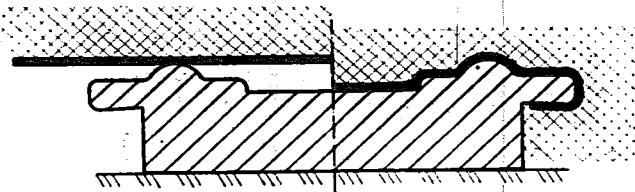


Bild 5. Pressen unterschmittener Formteile

III. Anwendungstechnische Fragen

Daß für die volle Ausnutzung dieser hochwertigen Eigenschaften des Mipolam-Werkstoffes für Blechverformungszwecke eine zweckentsprechende Anwendung des Gummi-Preßverfahrens erforderlich ist, wurde bereits hervorgehoben. Verwendbar für die „spanlose Verformung“ mittels elastischer Preßkissen sind gleichermaßen wie bei Gummi nur weiche Mipolam-Sorten, die bei der großen Formänderung nicht zu hart und gegen die auftretenden hohen Enddrücke genügend widerstandsfähig sind.

Die Höhe des Verformungsdruckes, für dessen Erreichung einfach wirkende hydraulische Pressen hoher Druckleistung erforderlich sind, beträgt durchschnittlich 100 bis 300 kg/cm^2 , je nach Form des Verformungsteiles, was bei der Bestimmung der Größenabmessung und Druckleistung von Gummi-Pressen von ausschlaggebender Bedeutung ist. Hieraus ist zu erkennen, daß beispielsweise für einen Arbeitsbereich von $1500 \times 1500 \text{ mm}$ der Pressendruck bei rd. 2250 bis 6750 t liegt.

Der Stahlrahmen muß entsprechend den auftretenden Kräften stark bemessen werden und ist auf Flüssigkeitsdruck zu berechnen; denn das gummiartige Mipolam-Kissen verhält sich wie eine Flüssigkeit.

Um ein seitliches Kriechen oder Abscheren der Preßkissen-Kanten zu verhindern, ist es erforderlich, daß einmal das Einfahren der Tauchplatte in den Preßrahmen unbedingt vor Formungsbeginn erfolgt, zum anderen der Abstand der Werkzeuge von der Kofferwandung zumindest nicht kleiner ist als die größte Werkzeughöhe bzw. Arbeitstiefe, vgl. Bild 4.

Das Werkzeug selbst, von dessen Gestalt die Beanspruchung des Preßkissens während der Verformung in erster Linie abhängig ist, ist so auszubilden, daß scharfe Kanten zumindest an den Stellen, die für die Form des Ziehteiles ohne Belang sind, vermieden werden. Dies geschieht am einfachsten durch Schaffung weicher Randübergänge, Bild 2 und 4. Überhaupt sind die Richtlinien für die Gestaltung der Verformungswerkzeuge so festzulegen, daß diese dem Wesen des Gummi-Preßverfahrens angepaßt sind bzw. daß die elastische Preßmasse während der Verformung nicht solchen Beanspruchungen unterworfen ist, die zu einem großen Ver-

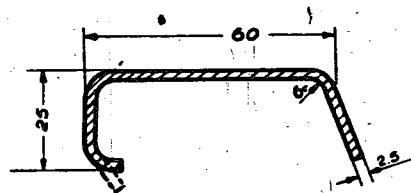


Bild 7. Schnitt durch einen Spant $1250 \times 589 \text{ mm}$ an der verformungstechnisch schwierigsten Stelle

Material des Werkstückes: Dural 3116.4; 2,5 mm
Material des Werkzeuges: Obholz
Gepreßt mit Mipolamkissen $730 \times 1340 \times 225 \text{ mm}$
bestehend aus 205 mm Weichmipolam Typ MP/K 190
20 mm Weichmipolam Typ MP/K 6569,
225 mm

Preßdruck: ca. 160 kg/cm^2

Durch das Pressen wurde die gestrichelt eingezeichnete Form erreicht, die endgültige Form durch Nacharbeit von Hand

schleiß oder zu einer frühzeitigen Zerstörung des elastischen Preßkissens führen müssen.

Die Auffassung, daß die im Vergleich zu Gummi bei Mipolam vorhandene gewisse Trägheit bei einigen Verformungsarten nachteilig sein könnte, wie z. B. bei unterschmitteten Formteilen Bild 5, daß also beim Zurückfahren des Preßrahmens der Mipolam-Werkstoff nicht genügend Zeit hat, um aus dem unterschmitteten Werkzeug heraus wieder in Preßrichtung zu fließen und dadurch zerstört wird, konnte bei eingehenden Versuchen nicht beobachtet werden.

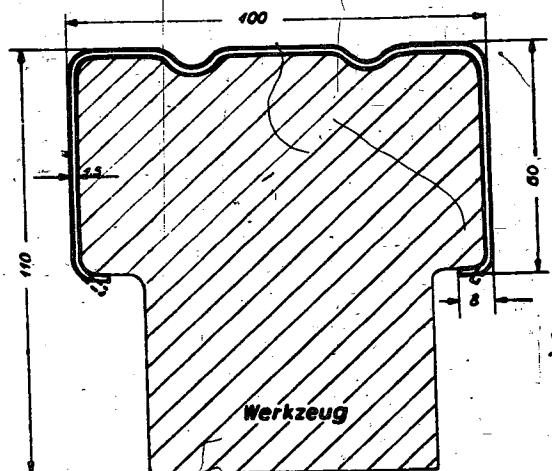


Bild 8. Schnitt durch ein 1058 mm langes Werkstück an der verformungstechnisch schwierigsten Stelle

Material des Werkstückes: Dural 3116.4; 1,5 mm
Material des Werkzeuges: Leichtmetall
Gepreßt mit Mipolamkissen $730 \times 1340 \times 225 \text{ mm}$
bestehend aus 205 mm Weichmipolam Typ MP/K 190
20 mm Weichmipolam Typ MP/K 6569,
225 mm

Preßdruck: ca. 160 kg/cm^2

Durch das Pressen wurde die gestrichelt eingezeichnete Form erreicht, die endgültige Form durch Nacharbeit von Hand

Festigkeitsmäßig hoch beanspruchte Verformungsteile zeichnen sich stets dadurch aus, daß die Bauteile von fast ebener Gestalt sind und die Versteifungselemente: Blindprägen, Bördelprägen, einfache Durchzüge, gerollte Durchzüge, Außenbördel und Sieken in allen Formen enthalten. Solche Bauteile eignen sich besonders für die Gummiverformung; der Verformungsbereich hierfür liegt, wie bereits oben erwähnt, zwischen dem spezifischen Preßdruck von 100 bis 300 kg/cm², vgl. Bild 6, 7 und 8.

Da die Beanspruchung bzw. der Verschleiß des Preßkissens von der Gestalt des Werkzeuges direkt abhängig ist, zum andern das Gummipreßverfahren nicht das Tiefziehen ersetzen kann, ist es erforderlich, daß schon beim Entwurf und der Konstruktionsvorklärung die Gesichtspunkte der Fertigung mittels Gummipressen zur Erzielung wirtschaftlich herstellbarer Konstruktionen, insbesondere Verkleidungen, beachtet werden, indem sowohl der Werkstoff als auch das Bearbeitungsmittel der gewünschten Verformung bestimmte Grenzen setzt. Hier hilft oft besser eine andere Aufteilung oder die Verlegung von Trennstellen und Hautstößen.

Wie bereits oben angedeutet, kann das Polymerisat-Preßkissen durch geschickte Kombination der Qualitäten auch für Scher- und Schneidzwecke eingesetzt werden. Der Anschaulichkeit halber sei hier ein mit Mipolam-Preßkissen unter Verwendung geeigneter Schneidwerkzeuge erzielttes Betriebsergebnis eines bekannten Flugzeugwerkes im Wortlaut wiedergegeben:

„In Verwendung ist ein Mipolam-Preßkissen für Scherzwecke mit nachstehenden Abmessungen:

285 mm Weichmipolam Typ MP/K 190	
10 „ „ „ „ MP/K 6569	
5 „ „ „ „ MP/K 6568	

300 mm Gesamthöhe bei 750 mm Durchmesser.

Dieses Kissen ist in eine 750 t-Pressen eingebaut; der spezifische Druck beträgt 170 kg/cm².

Das Kissen wurde warm auf eine Dural-Gußplatte von 30 mm Dicke, in die Schwalbenschwanznuten von 12 mm Tiefe und 38 mm Teilung eingehobelt sind, aufgepreßt. Die Platte mit Mipolam-Kissen ist mit einer versenkten 25 mm-Schraube im Stahlkoffer festgeschraubt. Zum Ausfahren des Mipolam-Kissens sind im Stahlkoffer vier Bohrungen von 20 mm vorgesehen. Durch diese Bohrungen können beim Ausfahren des Kissens vier löse Druckbolzen auf die Duralbefestigungsplatte drücken. Das Kissen wurde ausschließlich zum Schneiden verwendet.

Die Schnittkanten aus Stahl von 10 mm Dicke sind 3° hinterschliften und auf einer Eisenplatte von 20 mm Dicke aufgeschraubt. Je nach der Größe der Schnittplatten sind 3 bis 7 Platten auf der Grundplatte befestigt, so daß ein Preßhub 3 bis 7 Zusehnitte ergibt. Geschnitten wird Duralblech von 0,6 bis 1 mm Dicke.

Nach 2592 Pressungen, welche 15 492 Zusehnitte ergaben, mußte das Mipolam-Kissen geglättet werden. Diese Reparatur erfolgte nach der vom Lieferwerk angegebenen Arbeitsweise und ergab nach darauffolgender Wiederinbetriebnahme keinerlei Anstände. Nach diesem Glätten wurden bis heute abermals 1710 Pressungen mit 9660 Einzelteilen anstandslos durchgeführt.

IV. Verarbeitungstechnische Fragen

1. Befestigung des Mipolam-Preßkissens

Die sehr einfache Einbaumöglichkeit des Mipolam-Preßkissens in Oberdruckpressen kann im Hinblick auf



Bild 9. Stahlplatte zur Verbindung zwischen Preßkoffer und Mipolamblock

die Befestigungsschwierigkeiten des früheren Gummi-Preßkissens als ideal bezeichnet werden.

Beim Einbau des Preßkissens in den Stahlkoffer ist auf möglichst geringes seitliches Spiel besonderes Augenmerk zu richten; der Mipolam-Block wird je nach Preßrahmengröße passend zugeschnitten, so daß er leicht in den Rahmen eingeführt werden kann.

Die Verbindung zwischen Preßkoffer und Mipolam-Block wird durch eine, an einer Seite schwalbenschwanzförmig ausgesparte Stahlplatte hergestellt. Die Aussparungen laufen dabei in Längsrichtung der Stahlplatte. Bild 9. Die Stahlplatte selbst wird durch Stiftschrauben mit dem Koffer verbunden, Bild 10.

Die Verbindung des Mipolam-Blockes mit der Befestigungsplatte geschieht dann folgendermaßen (Bild 11): Der Mipolam-Block wird mit seiner Preßfläche auf die Tauchplatte gelegt. Durch Niederfahren der Presse ist festzustellen, ob der Mipolam-Block leicht in den Preßrahmen einfährt. Beispielsweise betragen die Abmaße der Befestigungsplatte für einen Preßrahmen im Format:

400×400 mm	=	398×398 mm
400×600 mm	=	398×600 mm
600×1200 mm	=	597×1196 mm
800×2400 mm	=	797×2393 mm
1000×1000 mm	=	996×996 mm
1000×2000 mm	=	996×1993 mm
1000×3000 mm	=	996×2992 mm

Zur Erwärmung wird die Befestigungsplatte mit den eingeschraubten Stiftschrauben zweckmäßig auf zwei Abstellböcke gelegt. Das Erhitzen geschieht durch Gasflamme oder mittels Schweißbrenner. Die Höchsttemperatur beträgt rd. 300° C. Das Messen der Temperatur wird mit einem Thermoelement durchgeführt. Bei Erreichen der vorgeschriebenen Temperatur wird die Befestigungsplatte mit der schwalbenschwanzförmig gearbeiteten Seite auf den Mipolam-Block gelegt (Bild 11, links oben). Jetzt wird die Presse vorsichtig niedergefahren, bis die Befestigungsplatte anliegt. Nun wird mit vollem Betriebsdruck die Presse etwa 1/4 Std. unter Druck gelassen. Durch die Wärme der Befestigungsplatte kommt der Mipolam-Werkstoff an der Berührungzone in einen siegellackartigen Fluß und füllt die Ausfräsungen aus (Bild 11, links unten). Nach viertelstündiger Preßzeit werden die Halteschrauben für den Preßrahmen gelöst und der Stempel hochgefahren. Das Gewicht des Preß-

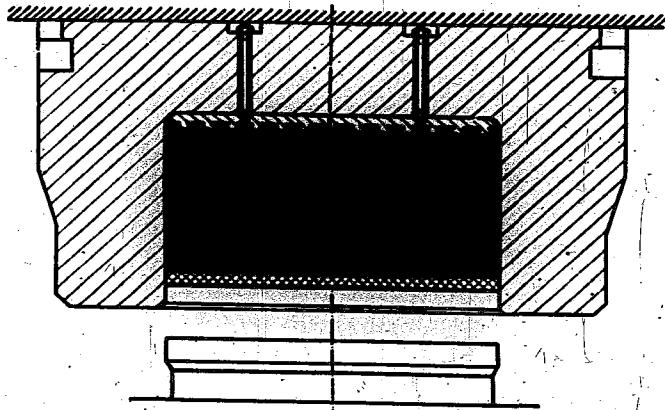


Bild 10. Verbindung zwischen Stahlplatte und Preßkoffer

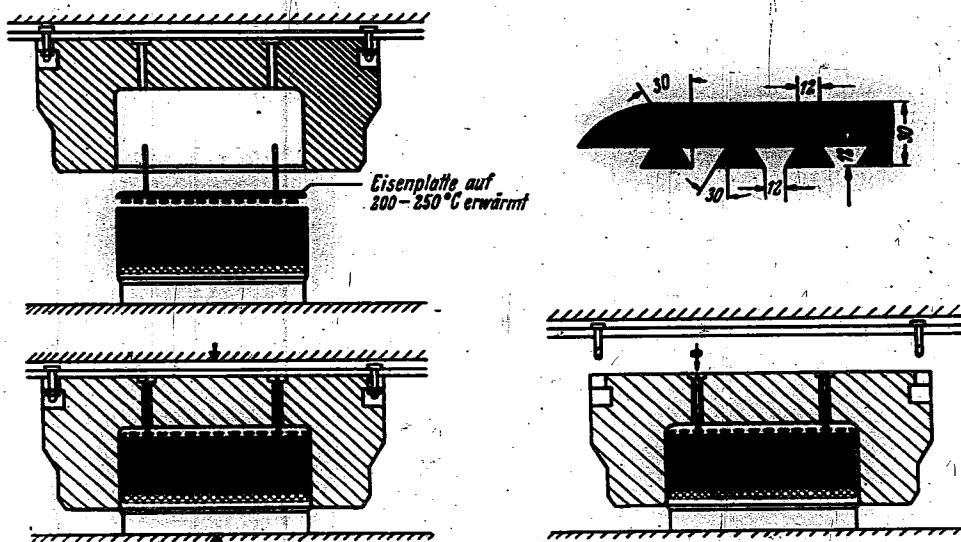


Bild 11. Verbindung des Mipolamblockes mit der Befestigungsplatte

rahmens genügt zur Belastung, bis die Befestigungsplatte abgekühlt ist. Dies ist nach etwa 2 Std. der Fall. Zum Schluß werden die Muttern noch auf die Stiftschrauben aufgeschraubt (Bild 11, rechts unten).

2. Verschweißen von Mipolam-Preßkissen

Beim Verschweißen von Weichmipolam-Blöcken und -Platten miteinander wird so vorgegangen, daß die zu verschweißenden Flächen auf einer Heizplatte erhitzt werden. Die Temperatur der Heizplatte soll ebenfalls etwa 250 bis 300° C betragen. Je nach der Größe der zu vereinigenden Flächen wird nach wenigen Minuten die erhitzte Fläche weich und beginnt siegellackartig zu fließen.

In diesem Zustand werden beide Flächen fest gegeneinandergedreßt, so daß an der Schweißstelle Material wulstartig austritt. Das Material muß unter Druck erkalten; gegebenenfalls kann durch Übergießen von kaltem Wasser die Abkühlung beschleunigt werden. Insbesondere ist bei dicken Platten oder Blöcken darauf zu achten, daß die Abkühlung auch wirklich durch und durch erfolgt ist; es empfiehlt sich, hier vor Weiterbearbeitung das Material mehrere Stunden auskühlen zu lassen.

Das an der Schweißnaht wulstartig ausgetretene Material kann mit einem warm gemachten, scharfen Messer leicht entfernt werden; bei einiger Geschicklichkeit erzielt man so vollkommen saubere und kaum sichtbare Verschweißungen.

Sollte bei dicken Blöcken die Schweißnaht nicht an allen Stellen nach außen hin gebunden haben, so können diese Stellen nachträglich verschweißt werden. Man leitet einen warmen Luftstrom auf die betreffende Stelle, wodurch das Material wieder plastisch wird. Dann bringt man eine entsprechende Menge Weichmipolam in die Fuge, wozu man z. B. die beim Zuschneiden entstehenden Abfälle oder Schnipfel verwenden kann.

3. Glättung abgenutzter Arbeitsflächen

Beschädigte Preßkissen, welche nach einer gewissen Benutzungsdauer an der Arbeitsfläche Risse oder Kerben bekommen haben, lassen sich nach dem oben angeführten Arbeitsprinzip durch Verschweißen auf einer heißen Stahlplatte in einen einwandfreien Zustand zurückführen. Bild 12 und 13.

In diesem Falle geht man so vor, daß die beschädigte Preßkissenfläche möglichst mit einem Heißluftgerät (z. B. dem „Griesheim“ T. B.-Schweißbrenner der Firma Griesogen, Griesheimer Autogen Verkaufs - G. m. b. H., Frankfurt a. M.-Griesheim) gut durchwärmt wird, bis auf der ganzen Fläche der gewünschte Weichheitsgrad erreicht ist. Hierauf wird durch vorsichtiges Zufahren der Presse der oberflächlich durchwärmte Mipolam-Block gegen eine auf den Pressentisch aufgelegte heiße gefettete Blankeisenplatte gedrückt. Die Presse bleibt unter Druck geschlossen, bis das Kissen wieder vollkommen erkaltet ist.

Bild 12. Ansicht einer Mipolamoberfläche nach 30 Arbeitsstunden



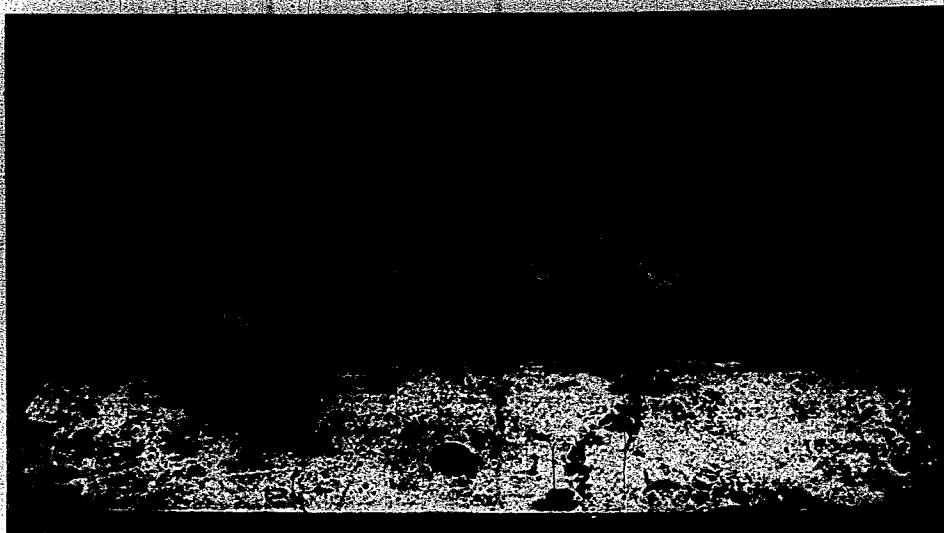


Bild 13. Ansicht der geglätteten Mipolam-Kissenoberfläche nach 30 Arbeitsstunden

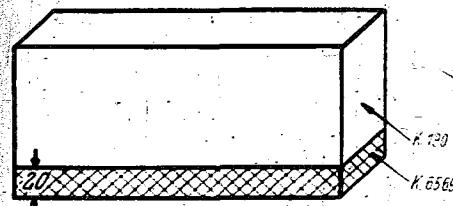


Bild 14. Preßkissen aus Weichmipolam K 190 mit 20 mm dicker Deckschicht aus Weichmipolam K 6569

Da Mipolam nicht vulkanisierfähig ist, bereitet die Entfernung der möglicherweise an der geglätteten Preßkissenfläche anhaftenden Blankeisenplatte keinerlei Schwierigkeiten.

Zur bestmöglichen Schonung des Mipolam-Preßkissens empfiehlt es sich, diese höchst einfach, keinerlei wesentliche Betriebsstörung verursachende Regenerierung der Arbeitsfläche nach jeweils 400 bis 500 Betriebsstunden durchzuführen.

4. Aufschweißen neuer Arbeits- bzw. Abdeckplatten

Eine im Duralveredlungsbad oder Luftumwälzofen auf rd. 350 bis 400° C erhitzte Blankeisen- oder Stahlplatte von 8 bis 10 mm Stärke wird auf die auf den Preßtisch abgelegte 20 mm starke Abdeckplatte aus Weichmipolam Typ MP/K 6569 aufgelegt und unmittelbar hierauf die Presse mit dem Mipolam-Unterkissen ohne sonderlichen Druck kurz zu- und wieder ausgefahren.

Das kurzzeitige Schließen der Presse genügt vollauf, um die Wärme der verhältnismäßig dünnen Stahlplatte an die zu verschweißenden Mipolam-Flächen so weitgehend abzugeben, daß nach schnellem Entfernen bzw. Wegziehen der Eisenplatte durch wiederholtes schnelles Zufahren der Presse — nunmehr mit vollem Betriebsdruck — eine einwandfreie Verschweißung herbeigeführt wird.

V. Ausführungsformen

Zur Auslieferung gelangen folgende Preßkissen:

1. für normale Verformungszwecke

Weichmipolam Typ MP/K 190

verschweißt mit einer 20 mm starken zähelelastischen Abdeckschicht aus

Weichmipolam Typ MP/K 6569 (=Arbeitsfläche)

Mit diesem Preßkissen lassen sich sämtliche Verformungsarten erfassen, wie sie beim Gummipreßverfahren anfallen, vgl. Bild 14.

II. für Schneidzwecke

Weichmipolam Typ MP/K 190

verschweißt mit einer zweigeschichteten zähelelastischen Abdeckplatte aus

Weichmipolam Typ MP/K 6569 (20 mm) und

Weichmipolam Typ MP/K 6568 (10 bis 20 mm = Arbeitsfläche) (siehe Bild 15)

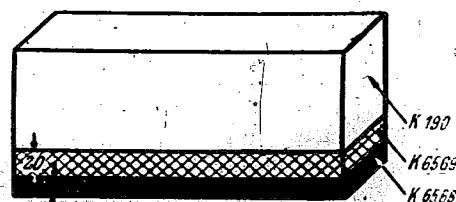


Bild 15. Preßkissen für Schneidzwecke aus Weichmipolam K 190 mit 20 mm dicker Deckschicht aus Weichmipolam K 6569 und 10 bis 20 mm dicker Deckschicht aus Weichmipolam K 6568

III. als Beilagen für mehrere Verarbeitungsgänge

Weichmipolam Typ MP/K 6569

in beliebigen Block- und Plattenstärken.

Die Lieferung kann in allen gewünschten Formaten vorgenommen werden.

VI. Zusammenfassung

Der Mipolam-Werkstoff besitzt auf Grund seiner Fließfähigkeit, Alterungsbeständigkeit und Regenerierfähigkeit hervorragende Eignung für Verformungszwecke. Er vermag allen Anforderungen der „Gummiverformung“ gerecht zu werden, wenn:

1. das an und für sich selbstverständliche Erfordernis des vollständigen Preßkofferverschlusses vor Druckgebung bzw. Druckanstieg erfüllt ist.
2. zwischen Stahlrahmen- und Preßkissen-Unterkante genügend freier Raum für die Aufnahme des Werkzeuges vorhanden ist, mit anderen Worten, wenn der Inhalt des Arbeitsraumes zumindest dem Werkzeugvolumen entspricht.
3. für genügenden Randabstand des auf den Preßtisch bzw. Tauchplatte aufgelegten Werkzeuges gesorgt ist oder das Werkzeug die Größe der Preßplatte hat, d. h. den Preßkoffer auf dem ganzen Umfang der Preßfläche ausfüllt.

Die Befestigung des Preßkissens durch Einpressen in schwalbenschwanzförmige Aussparungen einer Stahlplatte ist fabrikatorisch einfach und betriebssicher. Die Schweißbarkeit des Mipolam-Werkstoffes bietet die Möglichkeit, beschädigte Preßflächen wieder auszubessern.

Flugzeugkonstrukteur und Fertigungsingenieur

II. Tödter, Dessau

P. 39 01

Übersicht: Die lebhaft verlaufende Entwicklung in der Flugzeugkonstruktion hat dem Flugzeugkonstrukteur kaum Gelegenheit gegeben, sich mit den Problemen der Flugzeugfertigung auseinanderzusetzen. Im neuzeitlichen Metallflugzeugbau ist jedoch zwischen dem Flugzeugkonstrukteur und dem Fertigungsingenieur eine gute Zusammenarbeit unbedingt erforderlich, um fertigungsgerechte Konstruktionen unter Berücksichtigung der betrieblichen Belange zu erzielen. Im folgenden wird gezeigt, was der Konstrukteur von der Fertigung wissen muß und auf welche Gesichtspunkte er bei der Konstruktion zu achten hat, um seinen Teil zu einem planmäßigen und reibungslosen Fertigungsablauf beizutragen.

Gliederung

- I. Allgemeines
- II. Zusammenarbeit zwischen Konstrukteur und Fertigungsingenieur
- III. Betriebsmittel
- IV. Ablauf der Fertigung
- V. Änderungen
- VI. Schlußbetrachtung

I. Allgemeines

Bei der Großfertigung im Flugzeugbau wird die Verwirklichung des konstruktiven Gedankens umso schwieriger, je größer und komplizierter das Bauobjekt und je umfangreicher ein Großbetrieb mit seinen vielen Unterteilungen und Organisationswegen ist. Dabei spielt die Zeit für den Durchlauf durch alle diese Stellen eine beachtliche Rolle.

In früherer Zeit war mit schwierig zu fertigenden Teilen leichter fertig zu werden. Die geringen Stückzahlen erlaubten mehr oder weniger behelfsmäßige Einrichtungen, die in kurzer Zeit herstellbar waren. Vielfach würde hier der Konstrukteur selbst noch zu Rate gezogen. Sein Einfluß erstreckte sich oft weitgehend auf die Werkstatt, um bei auftretenden Fertigungsproblemen beratend einzugreifen.

Der größer werdende Betrieb und die erhöhten Ausbringungszahlen erfordern heute jedoch eine sorgfältige Vorbereitung, die sich auf Planung, Vorkalkulation, Werkstoffbeschaffung sowohl der Bauteile selbst als auch auf entsprechende Fertigungsmittel erstreckt. Hier ist es dem Konstrukteur oft nicht mehr ohne weiteres möglich einzugreifen. Vielmehr tragen diese Umstände manchmal dazu bei, ihn aus der Werkstatt zu verdrängen

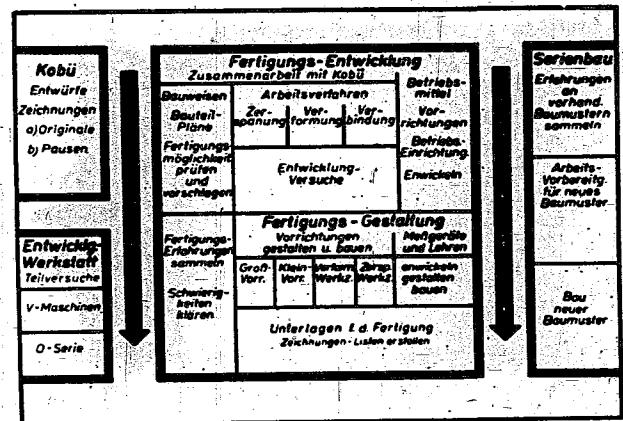


Abb. 1. Fertigungsvorbereiten zwischen Konstruktion und Großfertigung

und von dem Gegenstand seiner Konstruktion zu entfernen.

Jüngeren Konstrukteuren ist dieser Umstand vielleicht wenig zu Bewußtsein gekommen, stehen sie doch Tag für Tag an ihren Konstruktionsbrettern, wo sie genug mit den eigenen Problemen zu tun haben und sich über den weiteren Gang der Dinge keine Gedanken mehr machen. Wenn sie ihre Zeichnung keine Gedanken mehr machen, ist das weitere Interesse an ihren geistigen Erzeugnissen oft erloschen. Hier und da werden sie vielleicht noch einmal in die Werkstatt gerufen, wenn sich Zeichnungsfehler oder Unzulänglichkeiten am Versuchsstück herausgestellt haben, und dann lassen neue Aufgaben das alte schnell vergessen.

Jeder Konstrukteur soll sich aber darüber klar sein, daß nimmehr der Organisationsapparat des Großbetriebes zu spielen beginnt und alle noch verbliebenen Unvoll-

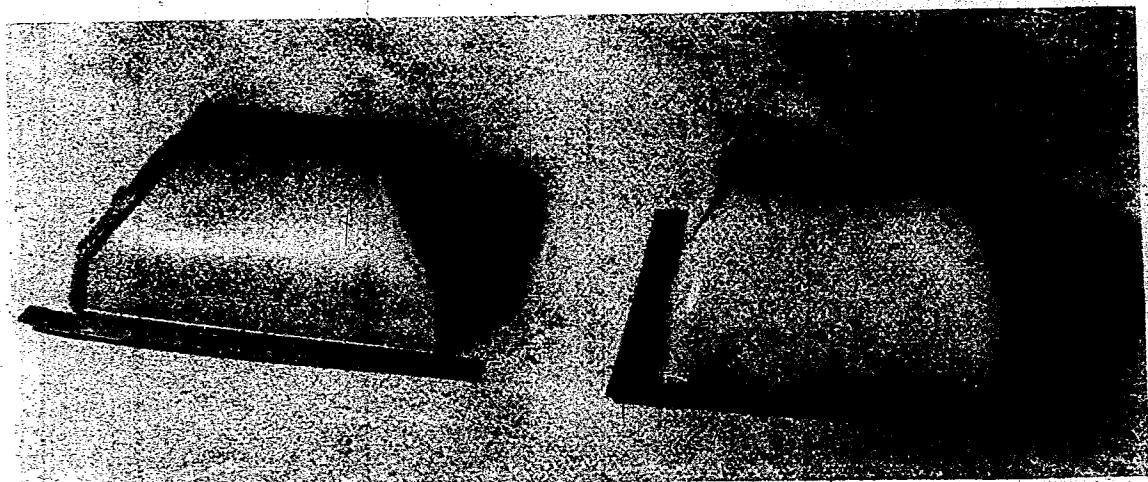


Abb. 2. Verkleidungsteil; links als Schweißteil, rechts als Ziehteil ausgebildet

kommenheiten oder Zeichnungsfehler am Objekt sich auszuwirken beginnen. Sie verursachen oft Kosten, von denen er sich bestimmt keine Vorstellungen gemacht hat. Es soll deshalb im folgenden beschrieben werden, was der Flugzeugkonstrukteur von der Fertigung wissen muß und welche Vorbereitungen notwendig sind, ein Flugzeug für die Großserie reif zu machen. Die Ausführungen sollen dazu beitragen, dem Konstrukteur einen Einblick in dieses umfangreiche Gebiet zu vermitteln und seine Selbstverantwortung zu steigern.

II. Zusammenarbeit zwischen Konstrukteur und Fertigungsingenieur

Es ist heute dem Flugzeugkonstrukteur kaum möglich, außer seinem eigensten Aufgabengebiet auch noch alle Probleme der Fertigung zu beherrschen und auf seine Konstruktionen anzuwenden. In Erkenntnis dieser Dinge greift die Fertigungsvorbereitung bereits hier unterstützend ein und stellt ihm Fertigungsingenieure zur Seite, die in engster Zusammenarbeit mit ihm die Fertigungsmöglichkeiten bestimmter Bauteile prüfen und gegebenenfalls neue Vorschläge machen. Deren Beratung resultiert unmittelbar aus ihren Erfahrungen in der Werkstatt sowie dem Erfahrungsaustausch mit den Betriebsingenieuren der Großfertigung (Bild 1).

Die Fertigungsingenieure sind mit allen neuzeitlichen Fertigungsverfahren wie z. B. der Verformung, Zerspaltung, Nietung, Schweißung usw. vertraut. Auch beherrschen sie die Bearbeitungsmöglichkeiten der verschiedenen Werkstoffe wie Dural, Elektron, Aluminium, Pantal, Hydronalium usw., so daß durch diese Beeinflussung fertigungsgerechte Bauteile zu erwarten sind, und Fertigungsschwierigkeiten weitestgehend vermieden werden können (Bild 2).

Bild 2 zeigt z. B. ein Verkleidungsteil aus Leichtmetallblech, einmal als Schweißteil ausgebildet für Einzelanfertigung bzw. geringe Stückzahlen und das andere Mal als Ziehteil für Serienherstellung. Während der Zeitaufwand zur Herstellung des Schweißteiles, Zuschneiden, Verformen und Schweißen in der Serie beträchtliche Kosten verursacht, ist er beim Ziehteil unerheblich, da das Teil nach dem rechteckigen Zuschnitt in einem Arbeitsgang gefertigt wird. Die etwas größeren Kosten für das Werkzeug betragen ebenfalls nur einen Bruchteil der Gesamtkosten und werden auf Grund der Wirtschaftlichkeitsberechnung abgeschrieben.

Aber nicht nur die Einzelteile, auch die ganze Bauweise des Flugzeuges muß im Zusammenbau neuzeitlichen Fertigungsverfahren entsprechen. Hier sind insbesondere die verbindenden Verfahren Nietung und Schweißung zu berücksichtigen und die Bauteile für eine möglichst automatische Fertigung vorzusehen.

— In Bild 3 z. B. ist links eine Flügelendkappe dargestellt, die an der Stirnkante vernietet ist. Hier wird auch ein tüchtiger Facharbeiter in der Werkstatt Mühe haben, ein gutes Aussehen und Anliegen des Blechschlusses zu erzielen. Rechts daneben ist die Endkappe veranschaulicht, wie sie durch Einfügen des oberen niedrigen Randbogens fertigungstechnisch gut durchgebildet werden kann. Der Randbogen ist mittels Streckziehverfahren leicht herstellbar. Die beiden Seitenbleche sind erheblich leichter verformbar als die in dem linken Teil des Bildes gezeigten.

Hieraus erwächst dem Fertigungsingenieur die Aufgabe, die Fertigung schon auf weite Sicht vorzubereiten und festzulegen. Er bedient sich dazu sogenannter „Fertigungspläne“, in denen die einzelnen Arbeitsoperationen festgelegt werden und die später allen nachgeordneten Stellen als Unterlage dienen. Daß er dazu die erforderlichen Betriebsmittel in großen Umrissen planen und skizzieren muß, ist unbedingtes Erfordernis einer kommenden Großfertigung.

Gleichzeitig sind auch die für den Austauschbau wichtigen Trennstellen festzulegen und die Herstellung entsprechender Lehren und Meßgeräte vorzubereiten. Auf diesen Punkt sei besonders nachdrücklich verwiesen; denn diese Lehren bilden den Ausgangspunkt für alle danach zu erstellenden Bauvorrichtungen und Werkzeuge. Bei nicht rechtzeitigem Vorhandensein wird deren Anfertigung verzögert und damit der ganze Ablaufplan terminlich hinausgeschoben.

Eine außerordentlich schwierige, aber sehr wichtige Fertigungsvorarbeit ist die richtige Übertragung der theoretisch ermittelten aerodynamischen Konturen. Ungenauigkeiten können hier zu Schwierigkeiten großen Umfangs führen, die sich insbesondere an Trennstellen, Verkleidungsteilen, Klappen usw. ungünstig auswirken. Mit steigenden Fluggeschwindigkeiten ergeben sich bekanntlich bei Formabweichungen erhebliche Leistungsminderungen sowie Veränderungen in den Flugeigenschaften. Die Praxis hat ergeben, daß die errechneten Querschnitts-Maße im Längsverlauf der Bauteile selten

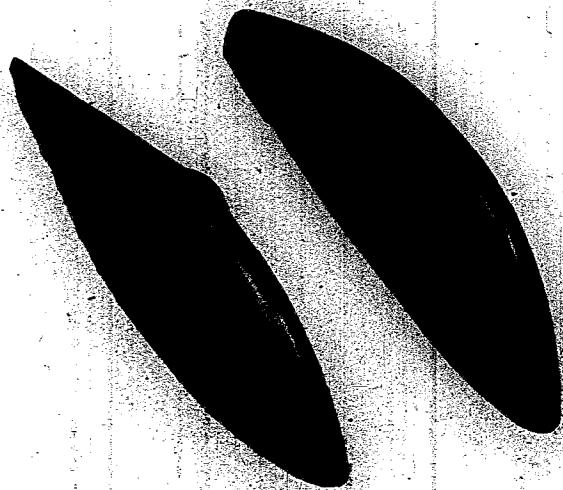


Abb. 3. Flügelendkappe; links mit Blechschluß an der Stirnkante, rechts mit eingefügtem Randbogen

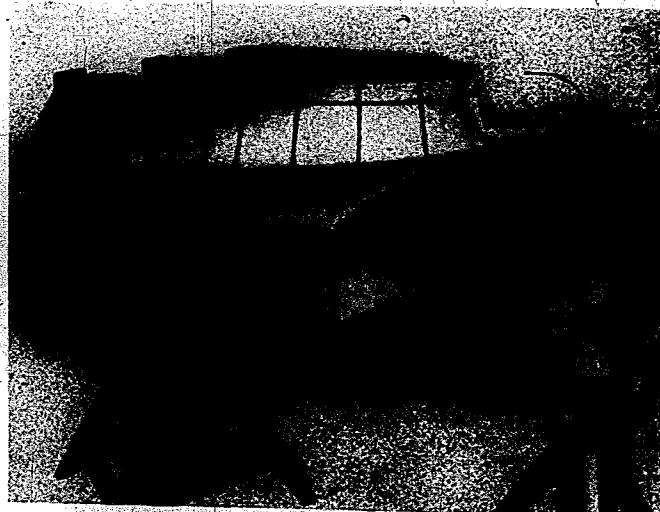


Abb. 4. Formkörper mit aufgezeichneten Schnittstellen, auf Unterstütböcken und Rohrträger angeordnet

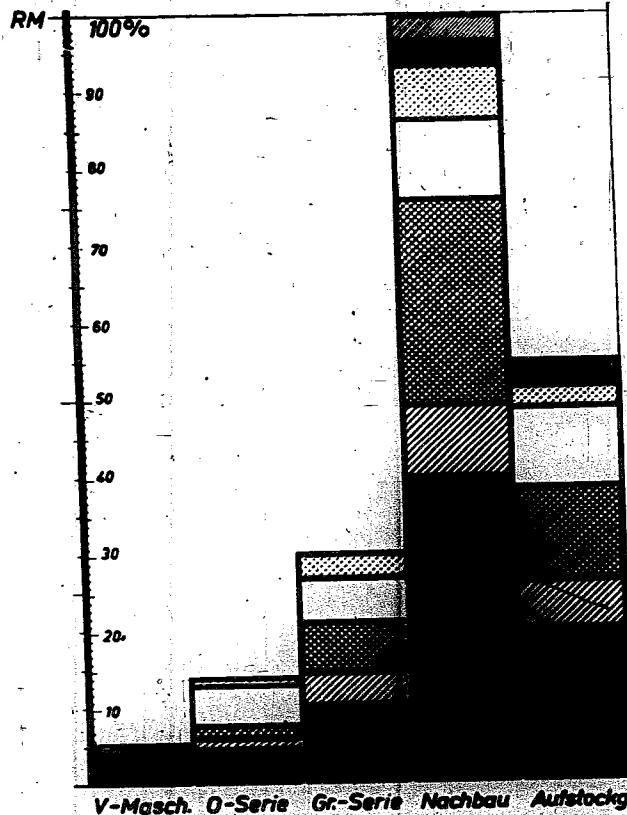


Abb. 5. Prozentuale Verteilung der Betriebsmittelarten

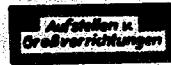
Zeichenklärung



Lehren



Zerpannung



Aufstellen u. Großvorrichtungen



Verformung



Schablonen



Kleine Bauvorrichtg.



Lehren



Großvorrichtung

einen genauen Fluchtverlauf ergeben. Vorsorglich werden deshalb die nach Systemzeichnungen angefertigten Formlehren am besten im Maßstab 1 : 1 und in wahren Abständen auf einem gemeinsamen Träger aufgefädelt und gefluchtet. Unterschiede im Fluchtverlauf werden korrigiert. Von den so ermittelten Lehren werden alle weiteren Vervielfältigungen für die eigene Fertigung und den Nachbau abgenommen (Bild 4).

Um jedoch noch Ungenauigkeiten und mögliche Fehler im Formverlauf zwischen den einzelnen Formlehren auszugleichen, wird der Zwischenraum häufig noch mit einem Füllstoff, z. B. erhärtende und beständige Kunststoffe, ausgefüllt und gestrakt. Es entsteht so ein „Formkörper“, der als Ausgangspunkt für zu erstellende Bauvorrichtungen und Werkzeuge dient. Erforderlichenfalls wird er von vornherein in mehreren Teilkörpern hergestellt, die zusammengesetzt ein Ganzes ergeben. Die Abnahme der Lehren und Werkzeuge und deren Kontrolle bei erfolgter Abnutzung gestaltet sich so erheblich einfacher.

III. Betriebsmittel

Nach der vorbereitenden Tätigkeit der als Verbindungsmänner eingesetzten Fertigungsingenieure, deren Arbeit als rohe Voraufteilung anzusehen ist, beginnt die eigentliche Planung, Konstruktion, Herstellung, Beschaffung und Bereitstellung der Betriebsmittel. Um den Flugzeugkonstrukteur jedoch nicht allzu sehr zu belasten, sollen die zur Fertigungsvorbereitung ebenfalls erforderlichen papiermäßigen Unterlagen der Werkstoff- und Terminplanung der Vorkalkulation sowie des Nachbaus nicht behandelt werden, sondern es soll auf die technischen Aufgaben hingewiesen werden, die zwischen der Konstruktion und der Fertigung vorherrschen.

In der Planung der Betriebsmittel treten im Flugzeugbau ganz klar drei Stufen hervor, die Aufwand und Stückzahlen bestimmen:

1. Der Versuchsbau, wo nur wenige Versuchsobjekte zur Klärung der Konstruktionsreife und der Fertigungsmöglichkeiten angefertigt werden.
2. Die Kleinserie, wo die Erprobung der Fertigung in kleinen Serien erfolgt.
3. Die Großserie, wo die Fertigung der Flugzeuge in großen Stückzahlen betrieben wird.

Zur Herstellung der Versuchsflugzeuge werden zunächst einfache Betriebsmittel, möglichst schnell angefertigt, soweit als möglich aber auch entwicklungsmäßig neue Betriebsmittel eingesetzt und erprobt.

Verformungs- und Zerspanungswerkzeuge sind im Anfall naturgemäß noch klein, da viele Teile behelfsmäßig angefertigt werden können. Außerdem sind sie in der nur beschränkt zur Verfügung stehenden Zeit im allgemeinen auch gar nicht herstellbar. Klein-Bauvorrichtungen sind meistens ebenfalls noch nicht erforderlich.

Dagegen liegen die Großvorrichtungen anteilmäßig sehr hoch. Die Gestaltung erfolgt jedoch in den einfachsten Formen, um unnötige Kosten zu ersparen. In vielen Fällen werden Holzvorrichtungen für den beabsichtigten Zweck ausreichen.

Von den Lehren sind im Anfang nur die wichtigsten notwendig. Nur die großen Trennstellen, Austauschsteile und aerodynamischen Formen werden lehrenhaltig festgelegt.

Bei der Kleinserie wird die Anzahl der Betriebsmittel durch die vermehrten Stückzahlen höher. Zu den Großvorrichtungen treten Kleinbauvorrichtungen und Verformungswerkzeuge. Auch Zuschneideschablonen treten in erheblichem Umfang auf. Der Lehrenpark wird ebenfalls erweitert (Bild 5).

Beim Übergang zur Großserie endlich, wo fast für jeden Arbeitsgang eine Vorrichtung erstellt wird, steigen manche Betriebsmittelarten sprunghaft an. Insbesondere

nehmen Verformungs- und Zerspanungswerkzeuge erheblich zu. Aber auch die Kleinbauvorrichtungen und Lehren folgen in ähnlichem Ausmaß. Nur die Großvorrichtungen und Zuschneideschablonen lassen anteilmäßig keinen großen Wandel erkennen. In der Gestaltung und Ausführung unterscheiden sich die Großvorrichtungen jedoch wesentlich. Während im Versuchsbetrieb noch oft Holz zur Verwendung kommt, müssen die Vorrichtungen in der Großserie aus Stahl in Leichtbauweise angefertigt werden und allen Anforderungen einer Großfertigung hinsichtlich Genauigkeit, Festigkeit, Beanspruchung und gegebenenfalls Ortsbeweglichkeit entsprechen.

Während der Großfertigung müssen die Werften beginnen, rechtzeitig Reparaturvorrichtungen bereitzustellen, denn Beschädigungen an Versuchs- und Kleinserienmaschinen können schon vorliegen, wenn die Großserie läuft.

Alle Betriebsmittel werden in umfangreichen Listen zusammengefaßt, wie auch die Fertigungsunterlagen der Vorkalkulation übersichtlich geordnet sind, so daß ein in Erwägung gezogener Nachbau jeder Zeit einsetzen kann.

Zu den Betriebsmitteln zählen aber nicht nur diejenigen, die für ein Flugzeugmuster jedesmal neu erstellt werden müssen, sondern auch der gesamte Maschinenpark des Werkes mit seinen umfangreichen Betriebseinrichtungen. Hier herrscht beim Flugzeugkonstrukteur in der Regel noch große Unkenntnis, und es wird im Rahmen eines reibungslosen Fertigungsablaufes erforderlich sein, daß darin ein Wandel eingesetzt. Aufgabe der Betriebsschulung muß es sein, an dieser Stelle helfend und fördernd einzugreifen. Wenn auch nicht alle Bearbeitungsmaschinen mit ihren genauen Leistungsangaben dem Konstrukteur geläufig sein können, so müssen ihm aber doch die wichtigsten Maschinen der Nietung, Schweißung, Verformung und Zerspannung bekannt sein. Er muß wissen, ob z. B. Streckziehpressen vorhanden sind oder hydraulische Pressen zur Anwendung des Formungsverfahrens mittels Gummi. Die Ausführungen der vorhandenen Niet- und Schweißmaschinen müssen ihm nicht nur bekannt sein, sondern er muß auch eine Vorstellung davon haben, wie die Bauteile darunter gefertigt werden. Die Kenntnis von dem Vorhandensein eines Lehrenbohrwerkes vermittelt ihm, wie weit er gegebenenfalls mit der Tolerierung bestimmter Teile gehen kann, wie ihm die Größe eines Veredlungssofens sagt, in welchen Abmessungen die Bauteile zu gestalten sind, damit sie noch hineingehen.

Vor allen Dingen ist aber wichtig, daß er Kenntnis von Spezialmaschinen hat, die eigens zur Herstellung schwieriger Bauteile entwickelt worden sind. Überhaupt muß die von der Fertigung beschrittene Entwicklungseinrichtung dem Konstrukteur bekannt sein, um seine Entwürfe und Konstruktionen von vornherein darauf abstellen zu können. Dem Fertigungsmann ist es unangenehm, wenn er von Baumuster zu Baumuster ständig seinen Maschinenpark umgestalten muß und ein Teil davon infolge gänzlich anderer Bauweise des Flugzeuges nicht zum Einsatz gelangen kann.

IV. Ablauf der Fertigung

Nach dieser notwendigen Übersicht über den Anfall der Betriebsmittel und deren Einsatz in den einzelnen Fertigungsstufen soll der weitere Ablauf der Fertigung aufgezeigt werden. Es erscheint angebracht, auf die folgenden Ausführungen besonders hinzuweisen, da sie dem

Flugzeugkonstrukteur einen interessanten Einblick in die Fertigungsvorbereitung vermittelt, aus denen er Anregungen für seine eigene Planung schöpfen kann.

Die Konstruktion und Herstellung der Betriebsmittel für den Versuchs- und Kleinserienbau bereiten im allgemeinen keine Schwierigkeiten. Die anfallenden Arbeiten können mit den vorhandenen Kapazitäten fast ausnahmslos erledigt werden. Vielfach müssen jedoch der Schnelligkeit wegen die Betriebsmittelzeichnungen nach unvollendeten Unterlagen vorbereitet werden, und nur Systemmasse dienen als vorläufige Anhaltspunkte. Eine gute Zusammenarbeit zwischen Flugzeug- und Vorrichtungskonstrukteur ist dann unerlässlich.

Kritisch kann sich der plötzliche Anlauf einer Großserie gestalten, wo die Kapazitäten über Gebühr in Anspruch genommen werden müssen. Eine Erschwerung im Anlauf liegt darin, daß die große Anzahl der Verformungswerkzeuge, Zerspannungs- und Kleinbauvorrichtungen in dem gewünschten Zeitraum konstruktiv und werkstattmäßig nicht zu bewältigen ist. Hieraus ergibt sich, daß diese Vorrichtungen zu einem Teil zu spät in die Fertigung gelangen und die entsprechenden Werkstücke noch von Hand gefertigt werden müssen. Bauvorrichtungen für Großteile z. B. Flügel, Rumpf usw. kommen, obwohl sie die längsten Durchlaufzeiten erfordern, in der Regel zu rechten Zeit. Voraussetzung ist natürlich, daß die erforderlichen zeichnerischen Unterlagen des Flugzeugkonstruktors rechtzeitig ausgeliefert werden.

Wie kompliziert sich manchmal die Verhältnisse im Anlauf gestalten, wenn die Betriebsmittel und Lehren vervielfältigt werden, um auf mehreren Baustellen z. B. Zweigwerken und Nachbaurfirmen die Fertigung zu betreiben, geht aus Bild 6 hervor.

Zwischen der Konstruktion und der Betriebsmittelgestaltung ist beispielsweise eine Woche als Durchlaufzeit der Zeichnungsunterlagen angenommen. Die Gestaltung selbst ist mit 4 Wochen veranschlagt. Die sich daran anschließende Herstellung der Betriebsmittel ist in eine Zeit zum Bau der Urlehren, Vorrichtungs- und Arbeitslehren und Vorrichtungen sowie für die Abstimmung untereinander unterteilt. Wie ersichtlich, kann die Abstimmung erst nach Fertigstellung der Urlehren und übrigen Vorrichtungslehren erfolgen. Erst dann können die abgestimmten Vorrichtungen zu den anderen Baustellen weitergeleitet und hier mit der Fertigung begonnen werden. Der Anlauf der Fertigung ist also wesentlich von der Bereitstellung abgestimmter Vorrichtungen abhängig.

Fortsetzung auf S. 160

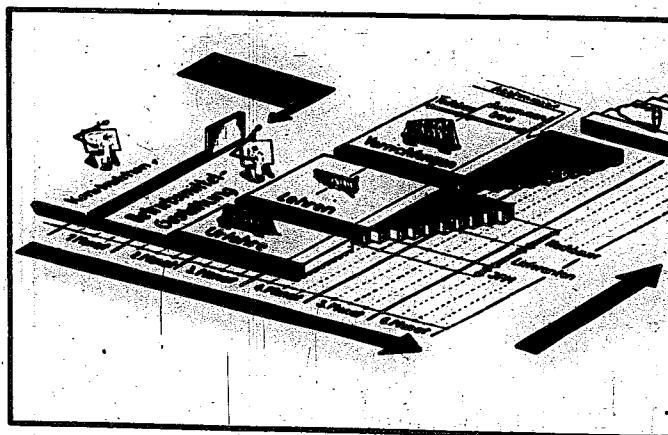


Abb. 6. Beschaffungszeiten für Betriebsmittel

77711

Aus deutschen Forschungsanstalten

A Grundwissenschaften

FB 1581; Pfeiffer/Meyer-König (Forschungsanstalt Graf Zeppelin): **Die Charakteristikenmethode bei stationären ebenen und rotationssymmetrischen Gasströmungen.**

Es werden aus den Differentialgleichungen der stationären kompressiblen Überschallströmungen im ebenen und im rotationssymmetrischen Fall mit Hilfe der Charakteristikentheorie Formeln zur zahlenmäßigen Behandlung solcher Strömungen gewonnen.

16 S., 8 Abb.

FB 1582; K. Zoller (Forschungsanstalt Graf Zeppelin): **Über die Entleerung von Luftbehältern durch einen sinkenden Kolben.**

Die Untersuchungen über den instationären Ausfluß von Gasen aus Behältern wurden durch die Behandlung folgender Aufgaben weitergeführt:

Der zeitliche Verlauf der Entleerung eines Luftbehälters durch ein Ausflußrohr, wenn die Luft durch einen im Behälter herabsinkenden Kolben verdrängt wird. Es wird festgestellt, wie dieser Vorgang von den Abmessungen der Versuchsanordnung abhängt und insbesondere unter welchen Umständen die Luft möglichst schwan-
kungsfrei austritt.

54 S., 28 Abb., 4 Zahlent.

E Werkstoffe

FB 1464/2; Schenck/Nickell (Staatliches Forschungsinstitut für Metallochemie, Marburg): **Herstellung und Untersuchung von Kontaktwerkstoffen. Teil II**

Da auch das Platin als Kontaktwerkstoff nicht mehr in voll ausreichender Menge zur Verfügung steht, hat es sich also notwendig erwiesen, nach Legierungen anderer Metalle zu suchen, welche in gleicher Weise verwendbar sind. Es liegt nahe, das Edelmetall Platin durch das reichlich zur Verfügung stehende Gold zu ersetzen. Aus diesem Grunde würde eine Anzahl von Goldlegierungen mit edlen und unedlen Zusatzmetallen hergestellt und ähnlich wie die Platinlegierungen des ersten Zwischenberichtes auf ihre Herstellbarkeit, ihre Bearbeitbarkeit, ihre Widerstandsfähigkeit gegen atmosphärische Einflüsse und gegenüber Materialwanderungen unter Gleichstrom bei Lichtbogenfreiem Betriebe geprüft.

15 S., 4 S. Abb., 3 Zahlent.

G Betriebsstoffe

FB 1610; K. Franke (DVL): **Einfluß verschiedener Kraftstoffe und Ventilüberschneidung auf Motoren.**

Bei Prüfstandsläufen an einzelnen Motoren mit Kraftstoffen verschiedener chemischer Zusammensetzung wurde die Änderung der Meßwerte untersucht. Unterschiede in der Leistung, im Luftdurchsatz und im Verbrauch bei gleichen Betriebsbedingungen wurden durch Kraftstoffeigenschaften, Gemischaufbereitung und die Prüfstands-anordnung bedingt. Der Einfluß geänderter Ventilüberschneidung auf Leistung und Luftmenge und damit auf

die Klopfgrenze wurde festgestellt. Restlose Totraum-ausspülung ist bei ungefähr 100° Ventilüberschneidung erreicht. Die verbesserte Spülung bei zunehmender Überschneidung bewirkt eine stärkere Innenkühlung des Motors und damit bei gleichen Mitteldruck ein Hinaufsetzen der Klopfgrenze. Beim DB 601 eintretendes Klopfen im Reichgebiet wurde durch unvollständige Gemischaufbereitung erklärt. Der Einfluß von Überschneidung, Ladelufttemperatur und Verdunstungsgeschwindigkeit der Kraftstoffe auf die Gemischbildung konnte festgestellt werden unter Berücksichtigung des auftretenden Leistungsabfalles und der Veränderung des Klopfgebietes.

67 S., 34 Abb., 4 Zahlent.

P Luftfahrt

FB 1509/2; B. Filzek (DVL): **Messungen der Tragwerksbeanspruchungen an verschiedenen Flugzeugmustern beim Fronteinsatz.**

Es werden die vorläufigen Ergebnisse der Tragwerksbeanspruchungsmessungen am Flugzeugmuster Ju 88 beim Fronteinsatz, die bei einem Kampfgeschwader in Sizilien durchgeführt wurden, mitgeteilt. Sie umfassen eine gesamte Meßzeit von 330 Flugstunden, wovon 297 Stunden auf Feindflüge gegen Malta, 25 Stunden auf Geleitschutz und 8 Stunden auf Werkstattflüge entfallen. Als Grenzwerte wurden einmal $-1,4g$ und $+5,4g$ gemessen.

11 S., 4 Abb., 5 Zahlent.

FB 1572; K. Ramsayer (DVL): **Atlas für die astronomische Ortsbestimmung.**

Auf der Grundlage der Cassini-Soldnerschen Projektion eines Himmelsoktanten (querachsiges Plattkartendiagramm) wird eine Netztafel zur genauen Berechnung von Höhe u. Azimut eines Gestirns aus der geographischen Breite, dem Stundenwinkel und der Deklination entworfen. Der Entwurf wird an Hand von drei Probestärkern bezüglich Herstellbarkeit, Genauigkeit, Rechensicherheit und Anforderungen an den Auswerter im Zimmer und Flugzeug erprobt. Die Fehlerquellen der Höhenberechnung werden einzeln und in ihrem Zusammenwirken untersucht.

48 S., 17 Abb.

FB 1584; E. Pflanz (Forschungsanstalt Graf Zeppelin): **Näherungsformeln für Bombenwurfbahnen.**

Für Wurfweite x und Fallhöhe y von in beliebiger Richtung abgeworfenen Bomben werden unter Zugrundelegung eines quadratischen Luftwiderstandsgesetzes und einer mittleren konstanten Luftdichte Näherungsformeln (A), (B) und (C) hergeleitet. Mit diesen lassen sich Wurfbahnpunkte mit praktisch befriedigender Genauigkeit festlegen, wie aus dem Vergleich mit genau gerechneten Wurfbahnen hervorgeht. Die Formeln sind zur zonenweisen Berechnung von Wurfbahnen verwendbar, weiter zur näherungsweise Bestimmung der Wurfweitenänderungen infolge kleiner Fehler der Ausgangsdaten.

21 S., 4 Abb., 2 Zusammenstellungen

FB 1586; G. Lange (DVL): Systematische Sechskomponentenmessungen an Flügel-Gondel-Rumpf-Kombinationen zwecks Neutralpunktbestimmung für Quer- und Hochachse.

Als erste Teilmessung aus einem Meßprogramm zur Bestimmung von Neutralpunktlagen von Flügel-Gondel-Rumpf-Kombinationen wird das Ergebnis der 6-Komponentenmessung an den Rümpfen mitgeteilt. Sie zeigen den Einfluß der Rumpfform und der Grenzschichtausbildung auf die Kräfte und Momente. Für Reibungsauftrieb und Reibungsquerkraft werden Neutralpunktlagen angegeben.

29 S., 10 Abb., 10 Taf.

FB 1592; J. Sydow (DVL): Der Bodendruck beim Starten und Landen von Seeflugzeugen nach Versuch und Rechnung.

Zur Feststellung von Größe und Verteilung des Bodendruckes beim Starten und Landen im Seegang wurden Messungen an mehreren Flugzeugen durchgeführt.

15 S., 25 Abb., 5 Zahlent.

FB 1611; A. Walz (AVA): Versuche mit Reibungsschichtabsaugung an einem Flügelprofil NACA 23015 bei verschiedenen Lagen des Absaugeschlitzes längs der Flügeltiefe.

Dieser Bericht gibt eine zusammenfassende Darstellung der schon in den Forschungsberichten FB 1060 und FB 1159 mitgeteilten Ergebnisse von Versuchen mit Reibungsschichtabsaugung an einem Flügel NACA 23015 ohne und mit Spreizklappe, ergänzt durch Messungen und Strömungsbeobachtungen im Wasserkanal.

Aufgabenstellung war die Frage, bei welcher Lage des Absaugeschlitzes längs der Tiefe sich bei Steigerung des Höchstauftriebsbeiwertes oder Verkleinerung des Profilwiderstandes ein Kleinstwert für die Absaugemenge ergibt.

55 S., 138 Abb.

FB 1614; Görner (DVL): Regler mit Fotozellenabgriff und differenzierendem Verstärker.

Es wird eine Regler-Anordnung behandelt, bei der von einem Anzeige-Instrument mittels zweier Photozellen die Abweichung φ der zu regelnden Größe von ihrem Sollwert abgegriffen und in einem nachfolgenden Röhrenverstärker die Impulssumme $c\dot{\varphi} + b\ddot{\varphi} + a\ddot{\varphi}$ gebildet wird. Die Unterlagen für die Dimensionierung der einzelnen Schaltungselemente werden angegeben und die Grenzen des Verfahrens kritisch betrachtet.

15 S., 7 Abb., 1 Anhang

FB 1616; E. Bartsch (DVL): Torpedoabwurf.

Ein Torpedo, der aus dem Flugzeug im Horizontalflug abgeworfen wird, erfährt im Augenblick des Abwurfs eine sprungartige Krümmungsänderung der Flugbahn. Dieser Krümmungssprung bewirkt, daß ein Torpedo mit Luftleitwerk Anstellwinkelschwingungen ausführt, deren Amplitude von der Fluggeschwindigkeit und der Größe des Luftleitwerks abhängt. Es wird gezeigt, daß durch Änderung der Abwurfbedingungen die Anstellwinkelschwingungen fast restlos beseitigt werden können. Es werden verschiedene Möglichkeiten besprochen, dem Torpedo beim Abwurf einen Drall um die Querachse zu erteilen.

16 S., 2 Abb.

FB 1626; M. Hansen (AVA): Dreikomponentenmessungen an Pfeilflügeln mit Spreizklappe.

An vorhandenen Pfeilflügeln mit Parallelogramm- und Trapezumriß wurden Spreizklappen verschiedener Spannweite und Anordnung angebracht. Der Einfluß der Spreizklappen auf Höchstauftrieb und Kippmoment wurden untersucht.

38 S., 32 Abb.

UM 681; B. Regenscheidt (AVA): Standschubmessung an zwei ummantelten Luftschrauben.

In der vorliegenden Arbeit wurde der Standschub von ummantelten Luftschrauben gemessen. Der Schubgewinn durch den Schraubenmantel, der eine Breite von nur 0,27 bis 0,29 D hatte, ist bei gleichem Drehmoment von der Einstellung des Schraubenblattes abhängig und beträgt bis zu 50% des Schubes ohne Schraubenmantel.

11 S., 5 Abb.

R Hochfrequenztechnik

FB 1564; Kinder (Flugfunkforschungsinstitut Oberpfaffenhofen): Radiosondenpeilung mit spiegelgebündelten 25 cm-Wellen.

Ein Verfahren zur direkten räumlichen Peilung von Radiosonden wird beschrieben. Die Genauigkeit der Ortsbestimmung wird für eine beliebige Kombination von Peilstellen aus den mittleren Winkelfehlern berechnet. Die mit dem Peilverfahren im praktischen Einsatz erzielten Ergebnisse werden mitgeteilt und diskutiert.

41 S., 14 Abb., 3 Tab.

FB 1578; P. Mallach/O. Zinke (Institut für elektrotechnische Schwingungslehre T. H. Berlin): Strahlung und Anpassung von Hohlleitern und Hornstrahlern mit dielektrischen Abschlußplatten.

Es wird gezeigt, wie rechteckige Hohlleiter und Trichter, die zum Teil oder ganz mit Dielektrikum gefüllt sind, an den freien Raum angepaßt werden müssen. Ferner wird über die Beeinflussung des Strahlungsdiagramms von Hohlleitern und Hornstrahlern durch dielektrische Platten in der Mündung berichtet.

39 S., 21 Abb., 1 Taf., 9 Diagramme

FB 1627; Schwenkhagen (Elektrotechnisches Institut T. H. Danzig): Der Steuerumformer.

Das Gerät zeichnet sich durch hohe elektrische Empfindlichkeit bei geringster Beeinflussung durch mechanische Störeinflüsse aus. Die Anpassung des Gerätes an den Meßstromkreis und seine Grenzempfindlichkeit werden ausführlich besprochen. — Betriebserfahrungen. Verwendungsmöglichkeiten: Außer für reine Meßzwecke kann der Steuerumformer vor allem eingesetzt werden als Gleichstromverstärker, als Kennlinienumsetzer, sowie für alle Zwecke der Regelung, besonders für Regelungen mit starren oder elastischen Rückführungen.

46 S., 25 Abb., 1 Tabelle.

Berichtigung!

In dem in Bd. 9 (1942) Nr. 4 erschienenen Aufsatz von I. Meyer über „Das gestörte Strömungsfeld einer Luftschraube als Ursache von Luftschrauben-Schwingungen“ sind auf S. 127 die Unterschriften zu Bild 1 und Bild 2 zu vertauschen.

Vorabdrucke
aus
Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung

Inhalt:

Das Strömungsfeld in einer Lavaldüse. Von Kl. Oswatitsch und W. Rothstein	2
Die Flugpolarenmessung. Von R. Schmidt	14
Umschlagbeginn und Absaugung. Von J. Pretsch	27
Die Stabilitätsgrenze der Kreiszyinderschale bei Beanspruchung durch Schub- und Längskräfte. Von A. Kromm	34

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof

Das Strömungsfeld in einer Lavaldüse*).

Von Kl. Oswatitsch und W. Rothstein.

Bericht des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung, Göttingen.

In der vorliegenden Arbeit soll ein neues Verfahren beschrieben werden, welches die Berechnung des Strömungsverlaufes eines Gases im zweidimensionalen und rotationssymmetrischen Fall gestattet. Es wird dabei angenommen, daß die Ausdehnung des Gases adiabatisch vor sich geht und die Strömung stationär ist. Über die Düsenform müssen einige Voraussetzungen gemacht werden, welche aber bei den gebräuchlichen Düsen im allgemeinen keine wesentliche Einschränkung bedeuten. Die Methode ist für den ganzen Geschwindigkeitsbereich anwendbar, auch spielt die Schallgeschwindigkeit dabei keine ausgezeichnete Rolle. Das Hauptgewicht wird auf die Behandlung der Strömung in der Nähe der engsten Stelle einer Lavaldüse gelegt. Für schlanke Düsen werden Formeln zur Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten als Funktion des Ortes abgeleitet.

Gliederung.

- I. Einleitung.
- II. Ableitung der Grundgleichungen für den Fall der zweidimensionalen Strömung.
 - a) Berechnung der Koeffizienten a_2, a_4, b_1, b_3 .
 - b) Erste Näherung für a_2, a_4, b_1, b_3 .
 - c) Ableitung einer Differentialgleichung für $u_0(x)$, Mengenkorrektur.
 - d) Erste Näherung von u_0 und von der Mengenkorrektur, Gültigkeitsbereich der ersten Näherung.
 - e) Lösung der Gleichung für u_0 .
- III. Ableitung der ersten Näherung für den Fall rotationssymmetrischer Strömung.
- IV. Anwendungen und Beispiele.
 - a) Die zweidimensionale Quelle bei kompressibler Strömung.
 - b) Vergleich von Theorie und Experiment bei einer rotationssymmetrischen Düse.
 - c) Strömungen durch Hyperbeldüsen, zweidimensionales Problem.
 - d) Strömungen durch Hyperbeldüsen, rotationssymmetrisches Problem.
 - e) Mengenkorrekturen für Hyperbeldüsen.
 - f) Die Bedeutung der Wandschrägung an der engsten Stelle bei der Konstruktion von Überschalldüsen mit Parallelstrahl.
- V. Schrifttum.

I. Einleitung.

Das Feld einer kompressiblen Düsenströmung wurde bisher öfters behandelt. Th. Meyer [1] berechnete den Übergang einer Unterschallströmung in eine Überschallströmung bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung auf der Düsenachse. G. I. Taylor [2] berechnete den Fall einer Unterschallströmung, welche an der engsten Stelle der Düse so hohe Geschwindigkeiten erreicht, daß die Schallgeschwindigkeit stellenweise überschritten wird. H. Gürtler [3] beschäftigte sich insbesondere mit dem Übergang von einer dieser beiden Strömungstypen in die andere. Mit dem Hinweis auf diese letzte Arbeit möge der historische Überblick geschlossen werden, da dort eine ausführliche Behandlung der einschlägigen Arbeiten zu finden ist.

II. Ableitung der Grundgleichungen für den Fall der zweidimensionalen Strömung.

Wir bezeichnen die Düsenachse mit x , die Normale dazu mit y und verlegen den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte des engsten Querschnittes einer um die x -Achse symmetrischen Lavaldüse, Bild 1. Die Geschwindigkeitskomponenten bezeichnen wir entsprechend mit u und v und denken uns die Strömungsrichtung mit der Schreib-

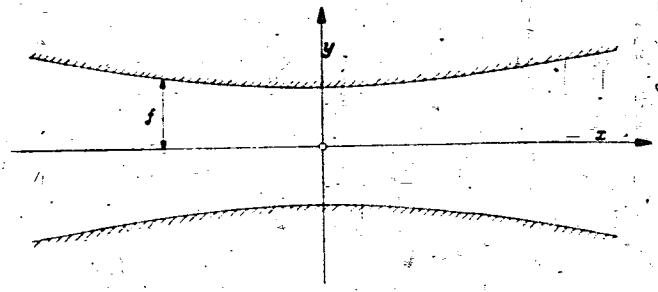


Bild 1. Querschnitt der Lavaldüse.

richtung übereinstimmend. Die Form der Düse sei gegeben durch eine Funktion $f(x)$, wobei wir mit f die halbe Höhe der Düse bezeichnen. Wir setzen ferner $f(0) = 1$, machen also alle Längemaße mit der halben kleinsten Düsenhöhe dimensionslos.

Im Gegensatz zu den früheren Arbeiten soll nun für u und v keine Doppelreihe angesetzt werden, sondern eine Potenzreihe in y , deren Koeffizienten von x abhängen. Wegen der zur x -Achse symmetrischen Düsenform denken wir uns auch die Strömung zur x -Achse symmetrisch. Wir bezeichnen ferner die Geschwindigkeit an der x -Achse mit u_0 , v_0 ist hier ja gleich Null. Wir begnügen uns mit Gliedern von höchstens der 4. Potenz von y und machen für die Geschwindigkeitskomponenten also folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left\{ u_0 - \frac{1}{2!} a_2 y^2 + \frac{1}{4!} a_4 y^4 - \dots \right\} \\ v(x, y) &= \left\{ b_1 y + \frac{1}{3!} b_3 y^3 - \dots \right\} \end{aligned}$$

wobei u_0, a_2, a_4, b_1 und b_3 Funktionen von x sind. Der Inhalt unserer Arbeit besteht nun darin, die Abhängigkeit dieser Größen von der Funktion $f(x)$ zu ermitteln. Zunächst wollen wir die Abhängigkeit der Koeffizienten a_2, a_4, b_1, b_3 von den Größen $u_0(x)$ und $f(x)$ berechnen.

a) Berechnung der Koeffizienten a_2, a_4, b_1, b_3 .

Da es sich im folgenden stets um eine Potentialströmung handeln soll, erhalten wir aus der Gleichung der Drehungsfreiheit

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

mit Hilfe von (1)

$$a_2 y + \frac{1}{3!} a_4 y^3 = b_1' y + \frac{1}{3!} b_3' y^3.$$

Der Strich in b_1' und b_3' soll dabei die Ableitung nach x symbolisieren. Zwischen den Koeffizienten müssen also folgende Beziehungen bestehen:

$$a_2 = b_1'; \quad a_4 = b_3'. \quad (2a)$$

Wir wollen uns im folgenden die Dichte ρ durch die »Kesseldichte«, also die Dichte bei der Geschwindigkeit $v = \sqrt{u^2 + v^2} = 0$ und alle Geschwindigkeiten durch die Maximalgeschwindigkeit, also die Geschwindigkeit bei der Dichte $\rho = 0$, dimensionslos gemacht denken. Der Energie-

*) A 35 4.

Satz nimmt dann die Form an

$$w^2 = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 u^2 \dots \dots \dots (3)$$

Dabei ist α das Verhältnis der spezifischen Wärmen.

Eliminieren wir aus der Eulerschen Gleichung der Kontinuitätsbedingung und der Adiabatengleichung Druck und Dichte, so bekommen wir die bekannte gasdynamische Gleichung:

$$(c^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (c^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} - 2uv \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Dabei ist c^2 das Quadrat der Schallgeschwindigkeit. Dafür können wir auch schreiben:

$$c^2 = \frac{\alpha - 1}{2} \frac{1}{\alpha} (1 - u^2) \dots \dots \dots (4)$$

Eliminieren wir mit Hilfe dieser Gleichung die Schallgeschwindigkeit aus der gasdynamischen Gleichung, so lautet diese

$$\left(1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{v^2}{u^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{v}{u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{4}{\alpha} uv \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Bilden wir nun mit Hilfe der Gl. (1) die ersten Ableitungen von u und v und setzen wir diese sowie die Geschwindigkeitskomponenten selbst in Gl. (5) ein, so erhalten wir durch Koeffizientenvergleich Beziehungen zwischen $u_0, a_2, a_4, b_1, b_3, a'_2, a'_4$ und u'_0 . Natürlich hat es dabei nur einen Sinn, Glieder bis zur 4. Potenz von y mitzunehmen, da wir die Entwicklung in (1) auch nur bis zu dieser Potenz ausgeführt haben. Die von y unabhängigen Glieder ergeben dabei ein besonders einfaches Resultat. Wie leicht einzusehen, bekommt man

$$b_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{u_0^2}{u_0^2} \dots \dots \dots (6)$$

Wir können nun auch mit Hilfe von Gl. (2a) die Größe a_2 in ihrer Abhängigkeit von u_0 und deren Ableitungen berechnen. Es sei ferner bereits hier darauf hingewiesen, daß die Glieder $b_1 y$ und $\frac{1}{2} a_2 y^2$ in Gl. (1) u_0 gegenüber bei einer Düsenströmung verhältnismäßig klein sein werden. Für eine erste Näherung von a_2 und b_1 genügt es also, in Gleichung (6) die Geschwindigkeit, welche die einfache Stromfadentheorie liefert und deren Ableitung einzusetzen. Wir werden darauf noch später zurückkommen.

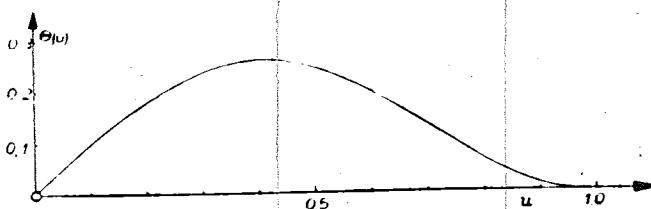
Für die einfache Stromfadentheorie lautet die Kontinuitätsbedingung, wenn wir mit u_s die Stromfadengeschwindigkeit bezeichnen,

$$u_s (1 - u_s^2)^{\frac{\alpha - 1}{2}} = \text{konst.}$$

Bei der kompressiblen Strömung tritt also die Funktion $u_s (1 - u_s^2)^{\frac{\alpha - 1}{2}}$ an Stelle der Geschwindigkeit u_s bei der inkompressiblen Strömung, und es erweist sich im folgenden als praktisch, für diese Funktion ein besonderes Symbol einzuführen. Wir setzen

$$\Theta(u) = u (1 - u^2)^{\frac{\alpha - 1}{2}} \dots \dots \dots (7)$$

Der Funktionsverlauf ist für $\alpha = 1,400$ folgender, die Funktionswerte sind in Zahlentafel 1 angegeben.



Skizze: Die Funktion $\Theta(u)$ für $\alpha = 1,400$.

Wir führen für die Ableitungen von Θ nach u die Abkürzungen ein

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d\Theta}{du} = \frac{\Theta_u}{\Theta} = \frac{1 - \alpha + 1}{u(1 - u^2)} \dots \dots \dots \frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{du^2} = \frac{\Theta_{uu}}{\Theta} \dots \dots \dots (7a)$$

Ferner setzen wir

$$\frac{G}{2} = \frac{\Theta_u}{\Theta} u \left[\frac{\Theta_{uu}}{\Theta} - \left(\frac{\Theta_u}{\Theta} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (7b)$$

Auch die Werte der Ableitungen von Θ nach u sowie die Funktion G und das oft gebrauchte Produkt $u \frac{\Theta_u}{\Theta}$ sind in Zahlentafel 1 zu finden. Wird die Funktion für die Geschwindigkeit an der Achse u_0 oder für die Stromfadengeschwindigkeit u_s benötigt, so soll das durch den Index 0 oder s gekennzeichnet werden. Die Formeln für b_1 und a_2 können wir dann auch schreiben:

$$b_1 f = \frac{\Theta_{u_0 u_0}}{\Theta_0} u_0 u_0' f \dots \dots \dots (8a)$$

$$a_2 f^2 = b_1' f^2 - \left[\frac{\Theta_{u_0 u_0}}{\Theta_0} - \left(\frac{\Theta_{u_0 u_0}}{\Theta_0} \right)^2 \right] u_0 (u_0' f)^2 - \frac{\Theta_{u_0 u_0}}{\Theta_0} [(u_0' f)^2 + u_0 u_0' f^2] = \frac{G_0}{2} (u_0' f)^2 - \frac{\Theta_{u_0 u_0}}{\Theta_0} u_0 u_0' f^2 \dots \dots \dots (8b)$$

Die Glieder $\frac{1}{3!} b_3 y^3$ und $\frac{1}{4!} a_4 y^4$ werden in erster Linie am Düsenrand eine Rolle spielen, da sie mit Annäherung an die x -Achse mit der 3. und 4. Potenz von y verschwinden. Es ist daher naheliegend, diese Glieder zur Erfüllung der Randbedingung zu verwenden.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeitskomponenten am Düsenrand $y = f$ mit u_f und v_f , so muß folgende Randbedingung erfüllt sein:

$$v_f = u_f f' \dots \dots \dots (9)$$

Zahlentafel 1.

u	$\Theta(u)$	$\frac{\Theta_u}{\Theta}$	$\frac{\Theta_{uu}}{\Theta}$	G	$u \frac{\Theta_u}{\Theta}$	
0,10	0,04083	0,04065	24,290	-15,00	0,82	0,992
0,20	0,08165	0,08030	11,836	-15,00	1,67	0,966
0,30	0,12247	0,11795	7,544	-15,00	2,52	0,924
0,40	0,16330	0,15263	5,285	-14,99	3,45	0,863
0,50	0,20412	0,18352	3,834	-14,97	4,45	0,783
0,55	0,22454	0,19729	3,271	-14,96	4,98	0,735
0,60	0,24495	0,20985	2,780	-14,94	5,54	0,681
0,65	0,26536	0,22108	2,341	-14,91	6,14	0,621
0,70	0,28577	0,23094	1,943	-14,88	6,78	0,555
0,75	0,30619	0,23939	1,577	-14,84	7,46	0,483
0,80	0,32660	0,24637	1,234	-14,79	8,19	0,403
0,85	0,34701	0,25177	0,909	-14,72	8,97	0,315
0,90	0,36742	0,25569	0,598	-14,63	9,82	0,220
0,95	0,38784	0,25802	0,296	-14,53	10,75	0,115
1,00	0,40825	0,25880	0,000	-14,40	11,76	0,000
1,05	0,42866	0,25803	-0,293	-14,24	12,87	-0,126
1,10	0,44907	0,25572	-0,586	-14,04	14,09	-0,263
1,15	0,46949	0,25192	-0,881	-13,80	15,45	-0,414
1,20	0,48990	0,24677	-1,182	-13,50	16,96	-0,579
1,25	0,51031	0,24004	-1,490	-13,14	18,66	-0,761
1,30	0,53072	0,23209	-1,810	-12,69	20,56	-0,961
1,35	0,55114	0,22292	-2,144	-12,14	22,74	-1,181
1,40	0,57155	0,21262	-2,495	-11,47	25,21	-1,426
1,45	0,59196	0,20130	-2,867	-10,63	28,06	-1,697
1,50	0,61237	0,18910	-3,266	-9,60	31,35	-2,000
1,60	0,65320	0,16260	-4,166	-6,69	39,74	-2,721
1,70	0,69402	0,13424	-5,247	-2,05	51,50	-3,642
1,80	0,73485	0,10541	-6,627	5,67	69,46	-4,870
1,90	0,77567	0,07767	-8,447	19,22	97,77	-6,554
2,00	0,81650	0,05238	-11,023	45,02	146,95	-9,000
2,10	0,85732	0,03100	-15,009	100,39	244,16	-12,868
2,20	0,89815	0,01476	-22,115	246,16	480,60	-19,863
2,30	0,93897	0,00453	-38,609	817,68	1341,06	-36,253
2,40	0,97980	0,00031	-121,479	8630,54	12248,82	-119,025
2,45	1,00000	0,00000	-	-	-	-

oder auch

$$b_1 f + \frac{1}{6} b_3 f^3 = f' (u_0 + \frac{1}{2} a_2 f^2 + \frac{1}{24} b_3 f^3)$$

Wir erhalten also eine Differentialgleichung für b_3 , welche wir in folgender Form schreiben können:

$$\frac{1}{6} b_3 f^3 = f' (u_0 + \frac{1}{2} a_2 f^2) - b_1 f + \frac{1}{24} b_3 f^3 \quad (8c)$$

Das nicht unterstrichene Glied ist dem Glied $f' u_0$ gegenüber, wie der Entwicklung (1) zu entnehmen ist, klein. Man scheint es im allgemeinen streichen zu können. Zum mindesten läßt sich die Gleichung (8c) aber außerordentlich leicht iterieren, indem man das letzte Glied beim ersten Iterationsschritt streicht und dann durch graphische Differentiation des so in erster Näherung erhaltenen b_3 eine zweite Näherung dieser Größe errechnet. Bildet man nun wieder die Ableitung, so wird sich dieses b_3 vom früheren kaum mehr unterscheiden. Es ist dabei zu beachten, daß es nicht auf die relative Änderung von b_3 ankommt, sondern die Änderung des Gliedes $\frac{1}{24} b_3 f^3$ im Verhältnis zu u_0 maßgebend ist. Die geschilderte Iteration bedeutet dabei keinen wesentlichen Mehraufwand an Arbeit, da man hiermit auch den Koeffizienten a_1 gewonnen hat. Man rechnet dabei am besten mit folgendem Ausdruck, den man mit Hilfe von (2a) sofort erhält:

$$\frac{1}{24} a_1 f^3 = \frac{1}{24} b_3 f^3 \quad (8d)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (8a) bis (8d) können wir also die Koeffizienten der Potenzreihe (1) ohne allzu großen Arbeitsaufwand berechnen, wenn wir f und u_0 als Funktionen von x gegeben haben. Im allgemeinen ist die Aufgabe die, daß f vorgegeben ist und u_0 gefragt ist. Bevor wir uns aber der Lösung dieser Aufgabe widmen, wollen wir uns einfachere Formeln für die erste Näherung der Koeffizienten verschaffen.

b) Erste Näherung für a_2, a_1, b_1, b_3 .

Wenn die Hauptströmungsrichtung durch die u -Komponente der Geschwindigkeit gegeben ist, was ja bei den meisten Düsen zutrifft, und was vor allem an der engsten Stelle einer Lavaldüse stets der Fall ist, so stellt der Wert der Geschwindigkeit u_0 , den man mit Hilfe der einfachen Stromfadentheorie erhält, jedenfalls eine erste Näherung für die Geschwindigkeit an der Achse dar. Die Glieder $b_1 y, \frac{1}{2} a_2 y^2$ sind nun u_0 gegenüber nach unserer Voraussetzung klein und wir werden für diese Größen dann schon eine gute erste Näherung erhalten, wenn wir in den Formeln (8) anstatt der Geschwindigkeit u_0 und deren Ableitungen die entsprechenden Größen von u_0 setzen.

Bedenken wir, daß wir an der engsten Stelle der Düse $f = 1$ gesetzt haben, so lautet die Kontinuitätsbedingung, aus der wir die Stromfadengeschwindigkeit ermitteln können,

$$\Theta_s f = \Theta_{\max} \quad (10)$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach x erhalten wir leicht eine Formel für den Geschwindigkeitsanstieg

$$u_s' f = \frac{\Theta_s}{\Theta_{\max}} f' \quad (10a)$$

Die Gleichung wird an der engsten Stelle allerdings unbestimmt. Durch Anwenden der Regel von L'Hopital erhalten wir für

$$f = 0; \quad u_s' f = \frac{1}{x+1} (x-1) f'' \quad (10b)$$

In dieser Gleichung hätten wir das f natürlich auch weglassen können, da dieses an dieser Stelle ja gleich Eins gesetzt ist, nachdem uns aber die Ausdrücke $u' f$ und $f f''$ sehr oft begegnen werden, wollen wir diese Form auch hier beibehalten. Die Größe $f f''$ können wir hier auch als Verhältnis von halber Düsenhöhe und Krümmungsradius des Düsenrandes an der engsten Stelle deuten.

Setzen wir nun in der Gl. (8a) die Stromfadenwerte ein, so erhalten wir folgende Formel für $b_1 f$, wobei wir durch ein Pluszeichen und einige Striche andeuten, daß wir es mit einer ersten Näherung zu tun haben.

$$b_1 f = u_s' f + \dots \quad (11a)$$

Mit Hilfe von (2a) erhalten wir leicht

$$a_2 f^2 = u_s' f f' + u_s' f f'' - u_s' f^2 + \dots \quad (11b)$$

Die letzte Gleichung hätten wir natürlich ebensogut erhalten, wenn wir die Stromfadenwerte in Gl. (8b) eingesetzt hätten. Mit Hilfe der Gleichungen (10) können wir uns u_s und $u_s' f$ berechnet denken, in den Gleichungen (11) ist also nichts mehr unbekannt. Nachdem wir zur Berechnung dieser beiden Koeffizienten anstatt der Achsenwerte die Stromfadenwerte genommen haben, so ist es nur folgerichtig, auch bei der Berechnung von b_3 die Stromfadenwerte zu verwenden. Wir schreiben also die Randbedingung (9) in erster Näherung

$$v_f = u_s' f + \dots$$

und erhalten dann mit Hilfe von (11a)

$$\frac{1}{6} b_3 f^3 = u_s' f - b_1 f = 0 \quad (11c)$$

Wegen Gl. (2a) erhalten wir daher auch

$$\frac{1}{24} a_1 f^4 = 0 \quad (11d)$$

Die beiden letzten Resultate sind von vornherein zu erwarten. Wenn man in den Gleichungen (1) in den Koeffizienten die Stromfadenwerte einsetzt, kann man nicht erwarten, gleich zwei Glieder der Entwicklung zu erhalten.

Über Gl. (11a) ist nichts weiter zu sagen. Man würde auch ohne irgendeine Theorie durch eine Abschätzung des v mit Hilfe der Randbedingung (9) zum gleichen Resultat gelangen. Mehr ist der Formel (11b) zu entnehmen. Bilden wir mit ihrer Hilfe w , so können wir in erster Näherung auch w ausrechnen. Es ist

$$w = u \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{u} \right)^2 + \dots \right] = u_0 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{f^2} (f f'' + \frac{u_s' f}{u_s} f') \right] + \dots \quad (11e)$$

Interessant ist dabei vor allem der letzte Klammerausdruck. $f f''$ ist in der Nähe des engsten Querschnittes stets positiv. Nehmen wir an, wir hätten im konvergenten Teil der Düse Unterschallgeschwindigkeit, im divergenten Teil Überschallgeschwindigkeit, so ist der letzte Summand im Unterschallgebiet negativ, im Überschallgebiet positiv. Wir können nach dieser Formel in erster Näherung zwei Effekte unterscheiden, welche ein Abweichen der Geschwindigkeit w an einer Stelle y von der zugehörigen Achsengeschwindigkeit u_0 verursachen. Der eine kommt durch die Krümmung des Düsenrandes zustande und ist durch das Glied $f f''$ gegeben, der andere hat seine Ursache in der Neigung des Düsenrandes und ist durch das Glied $\frac{u_s' f}{u_s} f'$ gegeben. Im Unterschallgebiet hat Krümmungs- und Neigungseffekt entgegengesetztes Vorzeichen. Im Überschallgebiet addieren sich die beiden Effekte. Zeichnen wir also Kurven konstanter Geschwindigkeit in die Düse ein, so werden sich die Linien im allgemeinen im Überschallgebiet viel mehr durchwölben als im Unterschallgebiet. Hier können die Kurven konstanter Geschwindigkeit unter Umständen sogar parallel zur y -Achse verlaufen. Dieses charakteristische Verhalten der Kurven konstanter Geschwindigkeit oder konstanter Druckes, was ja das gleiche ist, werden wir immer wieder beobachten.

c) Ableitung einer Differentialgleichung für $u_0(x)$. Mengenkorrektur.

Zur vollkommenen Lösung der Aufgabe ist es also nunmehr notwendig, die Funktion $u_0(x)$ zu finden. Der Charakter der Profile ist durch die Koeffizienten bestimmt. Es ist einleuchtend, daß wir eine Gleichung für u_0 mit Hilfe der Kontinuitätsbedingung erhalten müssen. Dies wollen wir in folgender Gestalt schreiben:

$$\int_0^b u (1 - u^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} dy = M \quad (12)$$

M ist dabei eine Durchflußmenge, die durch die Kessel-dichte, die Maximalgeschwindigkeit und den engsten Düsen-querschnitt dimensionslos gemacht ist.

Um hieraus eine Gleichung für u_0 zu erhalten, müßten wir den Integranden an der Stelle $u = u_0$ und $v = 0$ bis zu Gliedern der 4. Potenz von y entwickeln und dann integrieren. Wir wollen aber einen etwas kürzeren Weg gehen, der es uns außerdem gestattet, die Bedeutung der einzelnen Glieder besser zu erkennen.

In Analogie zur Gl. (7) wollen wir für unseren Inte-granden zunächst folgende Bezeichnungsweise einführen

$$\Theta(u, v^2) = u (1 - u^2 - v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (7a)$$

Beachten wir, daß die Entwicklung von $u = u_0$ und von v^2 mit der 2. Potenz von y beginnt, so können wir uns bei $\Theta(u, v^2)$ mit folgender Entwicklung begnügen:

$$\Theta(u, v^2) = \Theta(u_0, 0) + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u} \right)_{u_0, 0} (u - u_0) + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v^2} \right)_{u_0, 0} v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} \right)_{u_0, 0} (u - u_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v^2} \right)_{u_0, 0} (u - u_0) v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^4} \right)_{u_0, 0} v^4 \quad (7b)$$

Wie leicht einzusehen, können wir diese Gleichung auch anders schreiben, indem wir überall unsere Funktion (7) einführen:

$$\Theta(u, v^2) = \Theta_0 + \Theta_{u_0} (u - u_0) + \frac{1}{2} \Theta_{u_0 u_0} (u - u_0)^2 + \frac{1}{2} \Theta_{u_0 v^2} (u - u_0) v^2 + \frac{1}{8} \Theta_{v^2 v^2} v^4 + \frac{3}{4} \Theta_{u_0 v^2} v^4$$

Setzen wir nun in diesem Ausdruck die Entwicklung von $u = u_0$ und von v^2 ein, wobei wir wieder nur Glieder bis einschließlich zur 4. Potenz von y berücksichtigen, und führen wir das Integral in (12) aus, so erhalten wir unter Benützung der Gleichungen (8a), (8b) und (8c) leicht folgendes Resultat

$$\frac{M}{f} = \frac{\Theta_0}{f} + \Theta_{u_0} \left\{ \frac{1}{6} a_2 f^2 + \frac{1}{120} a_4 f^4 + \frac{1}{6} u_0 (b_1 f + u_0 f) \right\} + \left\{ \frac{1}{2} a_2 f^2 (f - \frac{6}{5} \frac{1}{u_0} b_1 f) + \frac{3}{5} \frac{1}{u_0} a_2 f^2 b_1 f \right\} + \frac{1}{24} a_4 f^4 f + \frac{1}{30} b_3 f^3 \left\{ \Theta_{u_0 u_0} \left\{ \frac{1}{40} a_2^2 f^4 + \frac{1}{20} \frac{1}{u_0^2} a_2 f^2 b_1^2 f^2 \right\} + \frac{1}{40} u_0^2 \left(\Theta_{u_0 u_0} - 3 \frac{\Theta_{u_0}}{u_0} + 3 \frac{\Theta_0}{u_0^2} \right) b_1^2 f^4 \right\}$$

Diese Gleichung hat zwar zunächst ein erschreckendes Ausmaß, sie läßt sich aber, wie wir gleich sehen werden, unter Umständen bedeutend vereinfachen, wenn man gewisse einschränkende Voraussetzungen macht. Bedenken wir, daß wir beim Mitnehmen noch weitere Glieder in Gl. (1)

neben dem Glied $\frac{1}{120} a_4 f^4$ auch noch ein Glied von der Form $\frac{1}{7!} a_6 f^6$ antreffen würden, so sehen wir ein, daß es keinen Sinn hat, in dieser Gleichung Summanden mitzunehmen, welche nur den zehnten Teil von $\frac{1}{120} a_4 f^4$ oder $\frac{1}{30} b_3 f^3$ ausmachen. Dasselbe gilt, wenn sie kleiner als etwa der hundertste Teil von $\frac{1}{6} a_2 f^2$ sind.

Um unsere Gleichung beträchtlich vereinfachen zu können, wollen wir uns für genaue Resultate auf ein Gebiet in der Nähe des engsten Düsenquerschnittes be-schränken. Für dieses Gebiet wollen wir folgende Vor-aussetzungen machen:

$$|f| < 0,10 \quad (13)$$

und ferner

$$|ff'| < 0,50 \quad (14)$$

Wir erhalten dann mit Hilfe von Gl. (10b) und (11a) sofort folgende Abschätzungen für $\alpha = 1,500$, also etwa für Luft:

$$b_1 f \cong 0,04; \quad u_0' f \cong 0,20.$$

Nachdem u_0 an der engsten Stelle im allgemeinen unge-fähr den Wert 0,40 hat, ist also

$$\frac{1}{6} u_0 (b_1 f + u_0' f) \cong 0,1$$

$$\frac{1}{2} a_2 f^2 \left(f - \frac{6}{5} \frac{1}{u_0} b_1 f \right) \cong 0,01 a_2 f^2.$$

Nach unserer Darlegung können wir im Ausdruck in der eckigen Klammer alle Glieder streichen bis auf das unter-strichene Glied, die Glieder sind klein genug, so daß auch nicht die Gefahr besteht, sie könnten in ihrer Summe einen wesentlichen Beitrag liefern. Im letzten Klammerausdruck ist das größte Glied durch $\Theta_{u_0 u_0}$ gegeben, wie sich leicht an der Hand von Zahlentafel 1 zeigen läßt. Dieses Glied kann den Wert 15 nicht überschreiten. Nachdem $b_1 f$ in der 4. Potenz vorkommt, bestehen keine Bedenken, dieses letzte Glied ebenfalls wegzulassen. Wir erhalten also fol-gende Gleichung, welche unter den Voraussetzungen (13) und (14) ganz beträchtliche Genauigkeit zukommt:

$$\frac{M}{f} = \Theta_0 + \Theta_{u_0} \left\{ \frac{1}{6} a_2 f^2 + \frac{1}{120} a_4 f^4 + \frac{1}{6} f (b_1 f + u_0' f) \right\} + \Theta_{u_0 u_0} \left\{ \frac{1}{40} (a_2 f^2)^2 + \frac{1}{20} u_0 a_2 f^2 (b_1 f)^2 \right\} \quad (12a)$$

Der Gl. (12a) können wir folgende Gestalt geben

$$\frac{M}{f} = \Theta_0 + \Theta_{u_0} \left\{ \frac{1}{6} a_2 f^2 + \frac{1}{120} a_4 f^4 + \frac{1}{6} f (b_1 f + u_0' f) \right\} + \frac{1}{2} \Theta_{u_0 u_0} \left\{ \frac{1}{6} a_2 f^2 + \frac{1}{120} a_4 f^4 + \frac{1}{6} f (b_1 f + u_0' f) \right\}^2 + \Theta_{u_0 u_0} \left\{ \frac{1}{90} (a_2 f^2)^2 + \frac{1}{720} a_2 f^2 a_4 f^4 \right\} + \frac{1}{20} u_0 a_2 f^2 (b_1 f)^2 + \frac{1}{36} a_2 f^2 (b_1 f + u_0' f) f + \dots$$

Wir haben uns bei der Entwicklung von Θ stets mit Gliedern von höchstens der zweiten Ableitung begnügt, was bei kleinen Geschwindigkeitsunterschieden auch vollkommen ausreichend ist. In der letzten Gleichung können wir die ersten drei Glieder auch als Entwicklung von Θ für den Wert

$$u_0 = du = u_0 + \frac{1}{6} a_2 f^2 + \frac{1}{120} a_4 f^4 + \frac{1}{6} f (b_1 f + u_0' f) \quad (15)$$

an der Stelle $u = u_0$ auffassen und können daher die Gleichung auch in folgender Form schreiben

$$M = f \Theta(u_0 + du) = f \Theta_{u_0 u_0} \left\{ \frac{1}{90} (a_2 f^2)^2 + \frac{1}{720} a_2 f^2 a_4 f^4 + \dots \right\} \quad (12b)$$

Die Klammer bei Θ enthält dabei den Wert des Funk-tionsargumentes. Im zweiten Summanden haben wir wieder nur diejenigen Glieder stengelassen, welche in der Gegend der engsten Stelle von Bedeutung sind. Das Hauptglied ist hier das erste Glied, was schon aus dem Ansatz (1) hervorgeht. Im übrigen werden die kommenden Überlegun-gen zeigen, daß wir die übrigen Glieder auch hätten mit-nehmen können.

Nachdem $\Theta_{u_0 u_0}$ stets negativ ist, stellt das letzte Glied eine kleine negative Größe dar. Wir können seine Größe leicht abschätzen. Für einen Wert an der engsten Stelle

von $ff'' = 0,20$, das entspricht einem Verhältnis der halben Düsenhöhe zum Krümmungsradius des Düsenrandes an der engsten Stelle von 1:5, erhalten wir in erster Näherung nach Formel (11b) $a_2 f^2 = 0,08$. $\frac{\Theta_{uu}}{\Theta}$ ist kleiner als 15. Der zweite Summand der Gl. (12b) ist also in diesem Falle nicht ganz der tausendste Teil des ersten. Eine später folgende genaue Berechnung zeigt, daß er nur 0,5‰ des ersten ausmacht. Die Durchflußmenge ist nichts anderes als das $\int \Theta dy$ an der engsten Stelle der Düse. Nachdem wir uns aber in der Nähe des Maximums der Funktion Θ befinden, so wird sich der Wert des Integrals von $\int \Theta_{\max}$ nur sehr wenig unterscheiden. Es ist also zu erwarten, daß die Durchflußmenge einer Lavaldüse im allgemeinen dem durch die Stromfadentheorie gegebenen Wert sehr nahe kommt. Bezeichnen wir also die Mengenkorrektur, d. i. also derjenige Anteil der Durchflußmenge, um den diese bei unserer Rechnung kleiner herauskommt als bei der einfachen Stromfadentheorie mit dM , so können wir die Gleichung (12b) mit Hilfe von Gl. (10) auch schreiben:

$$\Theta_s \int \Theta_{\max} dy = \int \Theta_{\max} (u_0 + du) dy = \int \Theta_{\max} \left\{ \frac{1}{90} (a_2 f^2)^2 - \frac{1}{720} a_2 f^2 a_1 f^4 + \dots \right\} dy \quad (12c)$$

Die Hauptglieder dieser Gleichung sind das erste Glied auf der rechten und linken Gleichungsseite. Nachdem das letzte Glied sehr klein ist, seine Änderung bei fortschreitendem x in der Gegend der engsten Stelle also auch sehr klein sein wird, bekommen wir eine Lösung, indem wir die beiden Hauptglieder einander gleichsetzen. Wir werden sehen, daß diese Lösung unseren Genauigkeitsansprüchen vollkommen genügt.

Aus der Gleichheit der Funktionswerte

$$\Theta_s = \Theta(u_0 + du)$$

können wir allerdings noch nicht auf die Gleichheit der Argumente schließen, da die Umkehrfunktion von Θ zweideutig ist. Doch ist es einleuchtend, daß einem Unterschallwert von u_s auch ein Unterschallwert von $u_0 + du$ entsprechen muß und das gleiche gilt für Überschallwerte, da sonst mit zunehmender Entfernung von $x = 0$ der Unterschied von u_s und $u_0 + du$ immer mehr zunehmen würde, während die beiden Werte ja sicher nahe beieinander liegen. Wir können daher mit Hilfe von Gl. (15) schreiben

$$u_s - u_0 = \frac{1}{6} \left[a_2 f^2 - \frac{1}{20} a_1 f^4 - f(b_1) + u_0 f \right] \quad (16)$$

Die relative Mengenkorrektur ist dann

$$\frac{dM}{M_s} = \frac{\Theta_{\max}}{\Theta_{\max}} \left\{ \frac{1}{90} (a_2 f^2)^2 - \frac{1}{720} a_2 f^2 a_1 f^4 + \dots \right\} \quad (17)$$

wobei auf der rechten Seite die Werte der Größen an der engsten Stelle einzusetzen sind. Dabei ist es von unwesentlichem Einfluß, wenn man folgende Näherungsgleichung verwendet:

$$\frac{\Theta_{\max}}{\Theta_{\max}} = \frac{\Theta_{\max}}{\Theta_{\max}} \frac{(z-1)^2}{z-1}$$

Wir wollen nun zeigen, daß sich die Gl. (16) noch durch eine besondere Eigenschaft auszeichnet. Greifen wir eine Stelle der Düse heraus, für welche $f' = 0$ ist. Es ist dabei nicht vorausgesetzt, daß dies unbedingt die engste Stelle der Düse sein soll. Wir mitteln nun die u -Komponente der Geschwindigkeit über den Querschnitt. Wir können dieses Mittel auch dem Mittel der Geschwindigkeit w gleichsetzen. Es ist zwar für $f' = \Theta v$ auch innerhalb der Grenzen unserer Genauigkeit keineswegs gleich Null, doch ist es klein genug, daß es für die Bildung von w , wo es nur mit seinem Quadrat eingeht, keine Rolle spielt. Wir erhalten dann für $f' = 0$

$$\bar{w} = \bar{u} = u_0 + \frac{1}{6} a_2 f^2 - \frac{1}{120} a_1 f^4$$

Betrachten wir nun die Gl. (16), so sehen wir, daß an der engsten Stelle der Düse oder an irgendeiner anderen Stelle

mit parallelen Wänden die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit gleich der Stromfadengeschwindigkeit u_s ist. Bei der Ableitung der Gl. (16) haben wir die Voraussetzung gemacht, daß folgende Beziehung erfüllt ist:

$$dM = \int \Theta_{\max} \left\{ \frac{1}{90} (a_2 f^2)^2 - \frac{1}{720} a_2 f^2 a_1 f^4 + \dots \right\} dy$$

Dies ist aber nur an der engsten Stelle der Düse exakt erfüllt, wo wir die Richtigkeit der Gleichung einfach verlangen haben. Wir wollen sehen, inwieweit die Tatsache, daß diese Gleichung an anderen Stellen der Düse nicht gilt, für die Gl. (16) von Einfluß sein kann. Zu diesem Zweck setzen wir

$$dM = \int \Theta_{\max} \left\{ \frac{1}{90} (a_2 f^2)^2 - \frac{1}{720} a_2 f^2 a_1 f^4 + \dots \right\} dy$$

$u_0 + du$ wird nun nicht exakt gleich u_s sein, es möge von dieser Größe um den Betrag du_s abweichen. Wir setzen also

$$u_0 + du = u_s + du_s$$

und wollen nun die Größe der Abweichung du_s berechnen. Führen wir in der Gl. (12c) den Ausdruck ϵf ein und entwickeln wir wieder, so erhalten wir

$$\Theta_s + \epsilon = \Theta(u_s + du_s) = \Theta_s + \Theta_{us} du_s + \frac{1}{2} \Theta_{uus} (du_s)^2$$

Wir erhalten also eine quadratische Gleichung für du_s mit dem Resultat

$$du_s = \frac{\Theta_{us}}{\Theta_{us}} \left[\sqrt{1 + \frac{2 \epsilon \Theta_{uus}}{\Theta_{us}^2}} - 1 \right]$$

Die praktische Rechnung zeigt nun aber, daß der zweite Summand unter der Wurzel auch ganz in der Nähe der engsten Stelle klein gegen 1 ist. Wir können also entwickeln und erhalten für

$$f \neq 0: \quad du_s = \frac{\epsilon}{\Theta_{us}}$$

Für eine Düse, deren Wert $ff'' = 0,20$ an der engsten Stelle ist, fanden wir folgende Abhängigkeit des Fehlers du_s vom Werte f' :

Die Düse wird bei den Beispielen noch öfters behandelt werden. Im Klammerausdruck sind dabei noch einige Glieder mehr mitgenommen, welche in der Gleichung von ϵf bereits weggelassen sind. Außerdem wurde der Wert auch innerhalb eines Gebietes von f' ausgerechnet, welches der Bedingung (13) nicht mehr genügt. Bild 2 zeigt, daß der Fehler ganz bedeutungslos ist. Er macht im ganzen Gebiet weniger als 0,5‰ der Geschwindigkeit aus. Gl. (16) ist daher innerhalb der Fehlergrenzen unserer Theorie als exakte Lösung der Gl. (12) und (12a) anzusehen.

d) Erste Näherung von u_0 und von der Mengenkorrektur. Gültigkeitsbereich der ersten Näherung.

Ganz entsprechend zu unseren früheren Rechnungen erhalten wir eine erste Näherung für u_0 , wenn wir in Gl. (16)

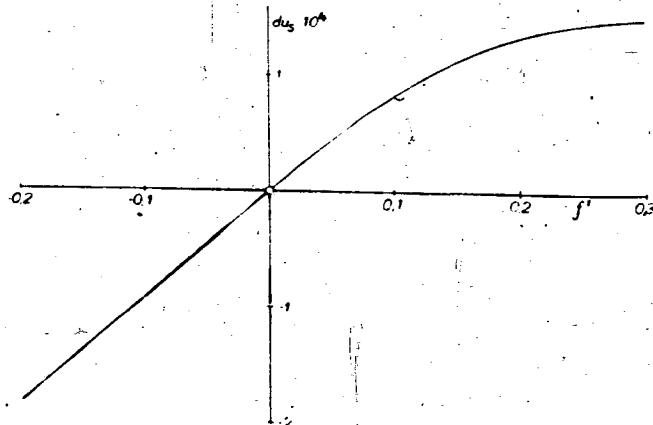


Bild 2. Der Fehler du_s in Abhängigkeit von der Wandneigung f' .

Die erste Näherung von $a_2 f^2$, $a_1 f$ und $b_1 f$ einsetzen. u_0' ist dann natürlich durch u_s' zu ersetzen und wir erhalten folgendes Resultat:

$$u_0 = u_s \left[1 - \frac{1}{6} (ff'' + 2 \frac{u_s'}{u_s} f') \right] \dots \quad (16a)$$

Wir sind nun also imstande, mit Hilfe von Gl. (11a), (11b) und (16a) den Geschwindigkeitsverlauf in einer Düse, deren Hauptströmungsrichtung durch die x -Komponente der Geschwindigkeit gegeben ist, zu berechnen. u_s und $u_s' f$ erhalten wir dabei mit Hilfe der Gleichungen (10), (10a) und (10b). Gl. (16) und (16a) haben an und für sich selbständige Bedeutung. Vielfach wird der Druckverlauf in der Düsenachse gemessen. Um diesen mit den theoretischen Resultaten zu vergleichen, kann man mit Hilfe der Gl. (16) oder (16a) je nach den Genauigkeitsansprüchen das u_0 berechnen und daraus leicht den Druck an der Achse ermitteln. Begnügt man sich mit der ersten Näherung, so kann man sich einfach eine direkte Beziehung zwischen dem Druck an der Achse und dem Druck der Stromfadentheorie nach Art der Gl. (16a) ableiten.

Gl. (16a) hat große Ähnlichkeit mit Gl. (11c). Bilden wir z. B. die mittlere Geschwindigkeit in erster Näherung, so können wir, weil der Ausdruck

$$\frac{1}{2} \frac{u_s'}{f^2} (ff'' + \frac{u_s'}{u_s} f')$$

klein gegen 1 sein muß, mit Hilfe von (11c) folgendes schreiben:

$$u_0 = \bar{u} \left[1 - \frac{1}{6} (ff'' + \frac{u_s'}{u_s} f') \right]$$

Natürlich ergibt sich wieder für $f' = 0$, $u_s = \bar{u}$. Wir sehen aber auch, daß diese Gleichung für $f' \neq 0$ nicht gilt, da das Glied mit f' in Gl. (16a) den Faktor 2 enthält. Die qualitativen Aussagen über Krümmungs- und Neigungseinfluß der Düse gelten aber in entsprechender Weise gerade, so wie früher. Während im Überschallgebiet stets $u_0 < u_s$ sein muß, kann im Unterschallgebiet sowohl $u_0 = u_s$ als auch $u_0 > u_s$ sein.

Gl. (16a) bietet uns auch eine Handhabe für die Gültigkeitsgrenze der ersten Näherung. Wir werden in den Koeffizienten $a_2 f^2$ und $b_1 f$ mit um so größerem Recht u_0 durch u_s ersetzen können, je kleiner die Neigung f' der Düse ist und je kleiner die dimensionslose Krümmung ff'' der Düse ist. Bilden wir mit Hilfe von (16a) die erste Näherung von $u_0' f$, so erhalten wir

$$u_0' f = u_s' f - \frac{1}{6} [u_s' f^2 f'' + 3 u_s' f f' f'' + u_s' f f' f'' - 2 u_s' f f'^2 + 2 u_s' f' f' f'] \dots \quad (18)$$

Dieser Gleichung ist zu entnehmen, daß die Frage, ob wir $u_0' f$ durch $u_s' f$ ersetzen können, bereits viel schwerer zu beantworten ist. Jedenfalls kann man sagen, daß wir dies bei Düsen, welche um die y -Achse symmetrisch sind, an der engsten Stelle mit weniger Recht tun können als bei u_0 und u_s , denn dort erhalten wir nach (18) neben

$$u_0 = u_s \left(1 - \frac{1}{6} ff'' \right) \dots; \quad u_0' f = u_s' f \left(1 - \frac{1}{2} ff'' \right) \dots$$

wobei zu bedenken ist, daß in der Bildung von $a_2 f^2$ ($u_0' f$)² eingreift. Hierin haben wir auch den Hauptgrund für ein allfälliges Versagen der ersten Näherung zu suchen. Wir müssen damit rechnen, daß für ff'' klein gegen Eins der Fehler der ersten Näherung in der Nähe von $f' = 0$ von der Größenordnung von ff'' selbst ist, und zwar gibt die erste Näherung einen zu großen Wert des Abweichens von der Stromfadentheorie. Für die Anwendbarkeit aller unserer ersten Näherungen ist also Voraussetzung, daß wir in der Entwicklung von $1 + ff''$ nach ff'' die Reihe bereits nach dem ersten Glied abbrechen können.

Gl. (17) gibt uns die relative Mengenkorrektur, also das Abweichen der wirklichen Durchflußmenge von der durch die Stromfadentheorie errechneten Durchflußmenge. Setzen wir in dieser Gleichung wieder lauter erste Näherungen

ein, so erhalten wir das Resultat

$$\frac{dM}{M_s} \approx \frac{1}{99} (ff'')^2 + \dots \quad (17a)$$

Von dieser Formel müssen wir für größere ff'' beträchtliche Ungenauigkeit voraussetzen, denn was wir für die Ausrechnung von u_0 gesagt haben, bei welcher wir $a_2 f^2$ verwendeten, gilt hier in bedeutend stärkerem Maß, wo diese Größe im Quadrat und außerdem $a_1 f$ vorkommt. Spätere Beispiele werden auch zeigen, daß diese Formel bereits ganz beträchtliche Fehler aufweist, wo die anderen ersten Näherungen noch recht gute Dienste leisten. Als Abschätzungsformel aber ist sie zu brauchen. Man sieht, die Mengenkorrektur ist für Düsen, auf welche unsere Theorie anwendbar ist, unbedeutend.

c) Lösung der Gleichung für u_0

Wir wollen nun sehen, wie wir am besten Gl. (16) lösen können. Nachdem $a_2 f^2$, $b_1 f$ und $a_1 f$ letzten Endes von u_0 und dessen Ableitungen abhängen, haben wir es mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung für u_0 zu tun. Mit Hilfe von Gl. (8a) und (8b) erhalten wir leicht

$$u_0 = u_s - \frac{1}{120} a_1 f^3 - \frac{1}{6} \left[\frac{G_0}{2} (u_0' f)^2 + u_0' f f'' - u_0 \frac{\Theta_{u_0}}{\Theta_0} f \frac{d}{dx} (u_0' f) \right] \quad (16b)$$

$a_1 f^3$ haben wir noch stehen gelassen, im übrigen stehen in dieser Gleichung lediglich Funktionen von u_0 , wie G_0 und Θ_{u_0} , Ableitungen von u_0 und Funktionen von r , wie f und u_s . Die größten vorkommenden Glieder sind dabei u_0 und u_s , während $\frac{1}{120} a_1 f^3$ das kleinste Glied darstellt, wenn wir den Klammerausdruck als ein Glied auffassen.

Bedenken wir, daß $\frac{1}{120} a_1 f^3$ nur $\frac{1}{3}$ des Wertes ist, den das letzte Glied in der Entwicklung von u (Gl. (1)) annehmen kann, so ist es klar, daß die Größe u_1 , welche durch folgende Gleichung gegeben ist

$$u_1 = u_0 - \frac{1}{120} a_1 f^3 \dots \quad (19)$$

sich von u_0 nur sehr wenig unterschieden wird, u_1 ist natürlich eine bedeutend bessere Näherung von u_0 als das, was wir als „erste Näherung“ von u_0 bezeichnet haben, auch die Ableitungen von u_0 werden daher durch die Ableitungen von u_1 noch sehr gut wiedergegeben und für die Berechnung der Größen $a_2 f^2$ und $b_1 f$, welche an und für sich ja nur Bruchteile von u_0 darstellen, reicht u_1 sicher vollkommen aus. Verwenden wir also diese Größe zur Berechnung der beiden obengenannten Koeffizienten, so können wir Gl. (16) in unserer Symbolik folgendermaßen schreiben:

$$6(u_s - u_1) = \frac{G_1}{2} (u_1' f)^2 + u_1' f f'' - \frac{\Theta_{u_1}}{\Theta_1} u_1 f \frac{d}{dx} (u_1' f) \quad (16c)$$

Wir haben eine Differentialgleichung zweiten Grades und zweiter Ordnung für u_1 vor uns mit ganz charakteristischen Eigenschaften, wie wir sehen werden.

Man kann u_1 nun mit Hilfe eines Iterationsverfahrens ermitteln, indem man auf der rechten Gleichungsseite zunächst Näherungswerte für u_1 und für dessen Ableitungen einsetzt und auf diese Weise ein neues $u_1(x)$ berechnet. Dieses Verfahren führt aber nicht immer sehr rasch zum Ziel. Es ist dabei weniger störend, daß man wegen des letzten Gliedes eine doppelte graphische Differentiation von u_1 durchzuführen hat. Wegen der Kleinheit des betreffenden Gliedes in der Nähe der Schallgeschwindigkeit ist der Fehler, den man hierbei macht, im allgemeinen unbedeutend. Viel störender ist es, daß der Fehler in $u_1' f$ bedeutend größer sein kann als in u_1 , wie wir bereits bei der ersten Näherung gesehen haben. Natürlich wird man bei diesem Iterationsverfahren am besten mit dem Einsetzen unserer ersten Näherung nach Formel (16a) und (18) beginnen, denn diese

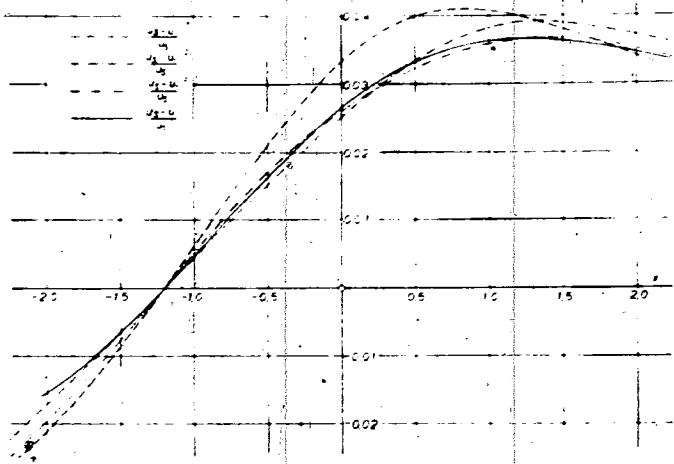


Bild 3. Konvergenz des Iterationsverfahrens.

Gleichungen kann man ebensogut als erste Näherungen für u_0 und $u_0' f$ wie für u_1 und $u_1' f$ ansehen. Bild 3 zeigt die Konvergenz dieses Verfahrens für die im Abschnitt IVc beschriebene Düse $\sigma = 0,20$. Diese hat an der engsten Stelle $\sigma = 0$ einen Wert $f'' = 0,20$.

Die x -Achse selbst stellt also das Resultat der Stromfadentheorie dar. Ein bei u_1 oben angefügter Index gibt die Anzahl der Iterationsschritte an. u' ist die erste Näherung. Diese bekommt man direkt aus den Formeln. Man sieht, die zweite Näherung ist hier noch nicht voll befriedigend. Immerhin liegt sie aber in der Nähe der engsten Stelle $x = 0$ sehr nahe an der ausgezogenen Kurve, welche die endgültige Lösung darstellt. Diese wurde mit Hilfe einer anschließend besprochenen Methode gewonnen, bei der sich allerdings im Unterschallgebiet $x < 0$ mehrere Lösungen ergeben. Die hier eingezeichnete Lösung hat die Eigenschaft, mit allen Näherungen bei x etwa gleich $-1,2$ einen gemeinsamen Schnittpunkt zu haben. Wie man sieht, muß man 3 oder 4 Schritte machen, um zu einem Resultat zu kommen, das der Genauigkeit des Verfahrens entspricht. Die Konvergenz dieser Iteration dürfte wesentlich von der Düsenform abhängen. In vielen Fällen, in denen die erste Näherung noch etwas zu ungenau ist, dürfte die zweite Näherung bereits ausreichende Dienste leisten.

Wir wollen nun ein anderes Lösungsverfahren der Gleichung (16c) kennenlernen, welches uns im allgemeinen schneller zum Ziele führt. Wie schon früher erwähnt, werden wir dabei sehen, daß uns außerdem beim Iterationsverfahren im Unterschallgebiet Lösungen verlorengehen. Wir wollen uns wieder mit jenen Fällen beschäftigen, bei denen die Strömung in der Nähe des engsten Düsenquerschnittes überall zu Überschallgeschwindigkeiten ansteigt. Nachdem beim Erreichen der Schallgeschwindigkeit $\Theta_{u1} = 0$ ist, spielt, wie schon früher bemerkt, das letzte Glied in der Gegend der engsten Stelle nur eine geringe Rolle. Es ist zweckmäßig, sich zunächst die erste Näherung von u_1 und $u_1' f$, die ja nichts anderes sind als die ersten Näherungen von u_0 und $u_0' f$, mit Hilfe von Gl. (16a) und (18) zu verschaffen. Man kann dann durch nochmalige Differentiation die Größe des letzten Gliedes leicht abschätzen, da ja die Funktionen G und $u \frac{\Theta_u}{\Theta}$ tabuliert sind. In der Gegend, in welcher das letzte Glied nur etwa 10% der rechten Gleichungsseite ausmacht, faßt man die Gleichung am besten als Differentialgleichung erster Ordnung in u_1 auf und löst sie nach $u_1' f$ auf. Man erhält

$$u_1' f = \left[2 G_1 \left\{ 6 \left(u_{*1} - u_1 \right) - f \frac{d}{dx} \left(u_1' f \right) u_1 \frac{\Theta_{u1}}{\Theta} \right\} - f^2 \right]^{1/2} \quad (16e)$$

Die Eigenschaften dieser Gleichung sehen wir am besten, wenn wir uns die kleinen Glieder f' und $u_1 \frac{\Theta_{u1}}{\Theta} f \frac{d}{dx} \left(u_1' f \right)$ überhaupt weggelassen denken. Haben wir u_1 zu klein gewählt, so erhalten wir für $u_1' f$ einen zu großen Wert. Führen wir also eine schrittweise Integration in positiver x -Richtung, also in der Strömungsrichtung, durch, so führen in der Gegend der engsten Stelle alle Integralkurven unabhängig von dem Anfangswert stark asymptotisch zur selben Endkurve. Wählen wir die Schrittgröße nicht klein genug, so zeigt es sich, daß wir anstatt eines einseitigen Annäherns an die Asymptote ein stark gedämpftes Pendeln der Werte um diese bekommen. Wir bekommen also eine Lösung der Gleichung (16e), indem wir zunächst möglichst gute Näherungswerte unter der Wurzel einsetzen und dann u_1 durch schrittweise Integration in der Strömungsrichtung ermitteln. Während wir für u_1 nur einen Anfangswert annehmen müssen, müssen wir $\frac{d}{dx} \left(u_1' f \right)$ so lange der ersten Näherung entnehmen, bis wir für $u_1' f$ einen so stetigen Verlauf bekommen, daß wir auch diese Kurve differenzieren können. Wir können dann zwar die Differentialquotienten von $u_1' f$ genau an der Stelle berechnen, wo wir $u_1' f$ selbst suchen, doch ist das bei der Kleinheit des betreffenden Gliedes unbedeutend. Es erweist sich als praktisch, bei der Auswertung von (16e) das Abweichen von der Stromfadengeschwindigkeit $u_{*1} - u_1$ und $u_1' f$ über x aufzutragen und hier vor Beginn der Rechnung die Kurven der Stromfadentheorie und der ersten Näherung einzuzichnen. Im ersten Fall gibt die Stromfadentheorie natürlich die x -Achse.

Hat man den Anfangswert von u_1 zu schlecht gewählt, was sich durch starkes Pendeln von $u_1' f$ während vieler Schritte kundgibt, so ist es besser, noch einmal zu beginnen, um möglichst bald vor der engsten Stelle eine glatte Kurve zu bekommen. Die Gl. (16e) zeigt sich in der angegebenen Art bei den von uns ausgerechneten Beispielen auch noch im ganzen Überschallgebiet als sehr gut anwendbar.

Das eben geschilderte Verhalten der Gl. (16e) zeigt also, daß man an der engsten Stelle zu Werten von u_1 und $u_1' f$ gelangt, die praktisch unabhängig von den gewählten Anfangsbedingungen sind. Physikalisch heißt das, es trächtet sich an der engsten Stelle immer ein ganz bestimmter Strömungszustand einzustellen.

In dem Bereich, in dem das letzte Glied in Gl. (16c) bereits eine wesentliche Rolle spielt, also etwa 10% der rechten Gleichungsseite überschreitet, wendet man besser eine Formel an, welche man durch Integration der eben genannten Gleichung erhält

$$u_1' f \int_{x_0}^x \frac{\Theta_u}{\Theta_{u1} u_1} \left[\frac{1}{2} G_1 (u_1' f)^2 - f u_1' f - 6 (u_{*1} - u_1) \right] dx = (u_1' f)_{x_0} \quad (16d)$$

Hat man mit Hilfe von Gl. (16e) das Kurvenstück von $u_1' f$ und u_1 in der Nähe der engsten Stelle der Düse ermittelt, so kann man mit Hilfe von Gl. (16d) die ganze Kurve im Unterschall- und im Überschallgebiet berechnen. x_0 ist die Stelle, bei welcher man mit der letzten Gleichung zu rechnen beginnt. Im Integral setzen wir dabei immer Näherungswerte von $u_1' f$ an der Stelle x ein, die man durch Extrapolation der $u_1' f$ -Kurve erhält. Für die Genauigkeit des Integrals ist es weiter nicht störend. Die Ermittlung von $u_1' f$ geht im Unterschallgebiet nun in der Richtung gegen die Strömung vor sich, und es zeigt sich, daß die Integralkurven in dieser Richtung auseinanderlaufen und wir bei einer praktisch unbedeutenden Änderung der Anfangswerte nach mehreren Schritten zu durchaus merklich verschiedenen Resultaten kommen. Es ergeben sich dabei Abweichungen von den durch Iteration gewonnenen Kurven in beiden Richtungen, während im Überschall-

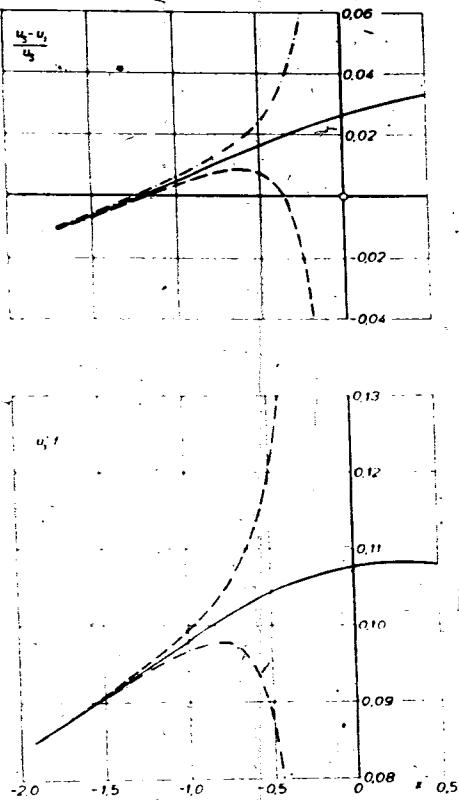


Bild 7. Integration in Strömungsrichtung bei Vorgabe von u_1 und $u_1 f$ in größerer Entfernung vor dem engsten Düsenquerschnitt.

gebiet und im Übergangsbereich alle von uns ausgerechneten Kurven zusammenfallen (siehe auch Bild 8). Die zunächst vielleicht überraschende Tatsache des Auseinanderlaufens der Integralkurven im Unterschallgebiet hat physikalisch einen sehr guten Sinn. Strömungen, welche im Unterschallgebiet beträchtliche Verschiedenheiten aufweisen, ergeben im Gebiet des engsten Düsenquerschnittes doch die gleiche Strömung. Dies stimmt mit der experimentell bekannten Tatsache überein, daß die Strömung in Überschalldüsen beinahe unabhängig davon ist, wie der Düsenanlauf gestaltet ist. Es trachtet sich wohl stets jener Strömungszustand einzustellen, bei dem die Durchflußmenge ein Maximum ist.

Versuche bei beliebig vorgegebenen Anfangswerten u_1 und $u_1 f$ im Unterschallgebiet mit der Integration in Strömungsrichtung zu beginnen, führen nicht zum gewünschten Erfolg. Ändert man nämlich in größerer Entfernung von der engsten Stelle bei gleichbleibendem $u_1 f$ das u_1 nur geringfügig ab, so hat dies ganz gewaltige Abweichungen vor der engsten Stelle zur Folge. Bild 7 zeigt zwei Beispiele. (Wir haben dieselbe Düse wie bei Bild 3.)

Die ausgezogene Linie ist Lösung bei allgemeinem Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit in der Nähe der engsten Stelle. Die Wahl eines etwas zu großen Wertes von u_1 (gestrichelte Kurve) an der Stelle $x = -1.5$ führt zu einem Ansteigen von $u_1 f$ über alle Grenzen. Die Strömung läßt sich durch den engsten Querschnitt hindurch gar nicht fortsetzen. Die Wahl eines etwas zu kleinen Wertes von u_1 (strichpunktierte Kurve) führt zu Lösungen, bei welchen die Schallgeschwindigkeit gar nicht erreicht wird. In der Nähe der engsten Stelle wird $u_1 f = 0$ und schließlich negativ.

Das früher erwähnte asymptotische Hinziehen der Werte zu ein und derselben Endkurve bezieht sich also nur auf einen ganz engen Bereich in der Nähe von $f' = 0$.

Wir sehen, daß es uns nun möglich ist, u_1 und $u_1 f$ als Funktionen von x zu ermitteln. Wir können nun mit Hilfe der Gl. (8) die Koeffizienten a_2, a_4, b_1 und b_2 berechnen, wobei wir hier mit genügender Genauigkeit anstatt u_0, u_1

verwenden. Gl. (19) gibt uns dann u_0 und Gl. (1) die Geschwindigkeitskomponenten u und v .

III. Ableitung der ersten Näherung für den Fall rotationssymmetrischer Strömung.

Wir wollen uns damit begnügen, das rotationssymmetrische Problem in erster Näherung zu lösen. Im allgemeinen kommen bei rotationssymmetrischen Düsen nicht so starke Wandkrümmungen und Wandneigungen vor wie beim ebenen Problem, daher interessiert vor allem hier die erste Näherung. Nach unseren Ausführungen über den zweidimensionalen Fall wird es im übrigen nicht schwer sein, bei Ansprüchen auf höhere Genauigkeit die geschilderte Lösungsmethode auf den hier besprochenen Fall zu übertragen.

Wir wollen hier unsere Ableitungen nicht wiederholen, sondern auf einem anderen Weg zur ersten Näherung gelangen. Wir bezeichnen wie früher die Düsenachse mit x , y sei die radiale Koordinate und f der Düsenradius. Die Kontinuitätsbedingung können wir in folgender Form schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial y} (q v y) - y \frac{\partial}{\partial x} (q u) = \dots \dots \dots (20)$$

u und v sind wieder die Geschwindigkeitskomponenten in der x - und y -Richtung, wobei wie früher die Beziehung $w^2 = u^2 + v^2$.

Um nun für v einen Näherungswert zu erhalten, muß es in der obigen Gleichung genügen, für qu einen angenäherten Wert einzusetzen, da v ja nur klein gegenüber u sein soll. Wir begnügen uns mit dem Stromfadenwert, den wir mit $q_s u_s$ bezeichnen wollen. Für diesen lautet die Kontinuitätsbedingung

$$f^2 \pi q_s u_s = M \dots \dots \dots (20a)$$

Wir denken uns genau so wie früher f durch den Radius an der engsten Stelle der Lavaldüse, q durch die Kesseldichte q_0 und u durch die Maximalgeschwindigkeit dimensionslos gemacht, dann ist M eine Durchflußmenge, welche genau auf dieselbe Weise wie in Gl. (12) dimensionslos gemacht ist.

Durch logarithmisches Differenzieren der Gl. (20a) erhalten wir nun leicht

$$1 \frac{d(q_s u_s)}{q_s u_s dx} = 2 \frac{f'}{f} \frac{\Theta_0}{\Theta_s} \frac{u_s'}{u_s} \dots \dots \dots (20b)$$

Hier sei noch besonders darauf hingewiesen, daß die Gleichungen (10a) und (10b) nur dann gelten, wenn f dem Querschnitt proportional ist. Ist der Querschnitt der Größe f^2 proportional wie im rotationssymmetrischen Fall, so tritt in Gl. (10a) zu f' und in Gl. (10b) zu ff'' der Faktor 2! Dies zeigt auch Gl. (20b).

Mit Hilfe der letzten Gleichung erhalten wir nun

$$\frac{\partial}{\partial y} (q v y) = 2 y q_s u_s \frac{f'}{f} \dots \dots \dots$$

Wir haben nun natürlich eine Näherungsgleichung vor uns, weil wir die Abhängigkeit des Produktes qu von y gar nicht beachtet, sondern dafür einen Näherungswert eingesetzt haben. In dieser Gleichung stehen auf der rechten Gleichungsseite neben y lediglich Funktionen von x . Wir können also integrieren und erhalten leicht unter Berücksichtigung der Randbedingung

$$y = 0; v = 0; v = b_1 y + u_s f' \frac{y}{f} \dots \dots \dots (21a)$$

Auf der rechten Gleichungsseite wurde folgerichtig zu unseren früheren Vernachlässigungen $\frac{q}{q_s} = 1$ gesetzt. Unter Berücksichtigung der Drehungsfreiheit erhalten wir nun sofort

$$u = u_0 + \frac{1}{2} a_2 y^2 = u_0 + \frac{1}{2} (u_s f f'' + u_s' f f' - u_s f'^2) \frac{y^2}{f^2} + \dots \dots \dots (21b)$$

Wir sehen, die Formel für u und v in erster Näherung stimmt mit den Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten im

zweidimensionalen Fall vollkommen überein. Zur Berechnung von u_0 verwenden wir genau wie früher die Kontinuitätsbedingung, die hier die Form hat

$$M = 2\pi \int_0^r y u \sqrt{1 - u^2 - v^2}^{-1/2} dy = 2\pi \int_0^r y \Theta(u, v^2) dy \quad (22)$$

Für $\Theta(u, v^2)$ können wir dieselbe Entwicklung wie früher verwenden (17b), erhalten aber nach Integration ein etwas anderes Resultat, nämlich

$$\frac{M}{f^2 \pi} = \Theta_{0,0} + \Theta_{0,0} \left\{ \frac{1}{4} a_2 f^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{u_0} b_1^2 f^2 - \frac{1}{8} \frac{u_0 f}{u_0} b_1 f + \dots \right\} + \Theta_{0,0} \left\{ \frac{1}{24} (a_2 f^2)^2 - \dots \right\} + \Theta(u_0) \left\{ \frac{1}{4} a_2 f^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{u_0} b_1^2 f^2 - \frac{1}{8} \frac{u_0 f}{u_0} b_1 f \right\} + \Theta_{0,0} \left\{ \frac{1}{96} (a_2 f^2)^3 - \dots \right\}$$

Die weggelassenen Glieder spielen bei der ersten Näherung keine Rolle. In der letzten Gleichung enthält die Klammer bei Θ das Argument, dies ist kein Produkt! Auf demselben Weg wie früher finden wir nun die Lösung

$$u = u_0 \left\{ \frac{1}{4} (a_2 f^2 - \frac{1}{u_0} b_1^2 f^2 - \frac{1}{2} \frac{u_0 f}{u_0} b_1 f + \dots) + \frac{1}{4} (u_0 f f'' - \frac{3}{2} u_0^2 f f''') + \dots \right\} \quad (23)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich also in einigen Faktoren von Gl. (16a), der entsprechenden ersten Näherung des zweidimensionalen Problems. Die erste Näherung für die relative Mengenkorrektur ergibt sich als zu

$$\frac{dM}{M_0} = \frac{1}{96} (f f'')^2 + \dots \quad (24)$$

Diese unterscheidet sich von Gl. (17a) außerordentlich wenig. Gerade so wie dort kann man Anforderungen an die Genauigkeit dieser letzten Formel aber nur bei sehr flachen Düsen stellen, und gerade bei diesen ist die Mengenkorrektur wieder verschwindend klein.

IV. Anwendungen und Beispiele.

a) Die zweidimensionale Quelle bei kompressibler Strömung.

Wir wollen zunächst an Hand einer exakten Lösung die Formeln der ersten Näherung bei zweidimensionaler Strömung nachprüfen. Hierzu wählen wir das Beispiel der kompressiblen Quellströmung, durch welche uns ja eine Strömung zwischen zwei zueinander unter dem Winkel 2α geneigten ebenen Wänden gegeben ist. Wir können die Aufgabe gleich allgemein lösen, wenn wir annehmen, daß der Winkel α klein sei. Wir betrachten die Strömung an einer Stelle unserer »Düse« vom Querschnitt f . Der Schnittpunkt des betrachteten Querschnittes mit der x -Achse habe vom Ursprung den Abstand x_0 . Ferner setzen wir $r^2 = f^2 - x^2$ (siehe Bild 5).

Es ist also $f = \sqrt{f^2 - x^2} = f_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{f_0^2}}$. Den Winkel α denken wir uns im Bogenmaß gemessen, dann ist die Stromfaden-geschwindigkeit am Orte des Querschnittes f durch folgende Gleichung gegeben:

$$f \Theta(u) = \alpha \cdot x_0 \cdot \Theta(u_0)$$

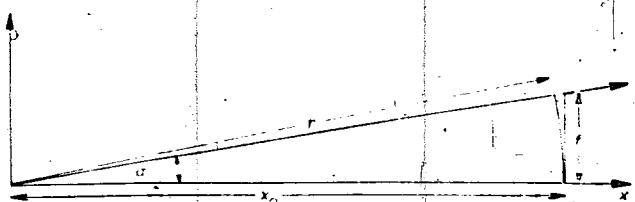


Bild 5. Bezeichnungsweise bei der zweidimensionalen Quelle.

Diese Gleichung können wir entwickeln. Setzen wir α bei $x = \frac{1}{3} \sqrt{f^2 - x^2}$, so erhalten wir

$$[\Theta_s - \Theta_{us}(u_0 - u_s)] \cdot \left[\sqrt{f^2 - x^2} - \frac{1}{3} \sqrt{f^2 - x^2} \right] = \sqrt{f^2 - x^2} \Theta_{us}$$

Mit Berücksichtigung von (10a) und unter Weglassung von Gliedern höherer Ordnung erhalten wir dann

$$u_0 - u_s = \frac{1}{3} \frac{\Theta_s}{\Theta_{us}} f^2 - u_0 - u_s = \frac{1}{3} u_0^2 f f'' = 0$$

Das ist aber gerade die Gl. (16a) für $f f'' = 0$.

Die Geschwindigkeit w_f im Punkte mit den Koordinaten $x = x_0$ und $y = f$ können wir in zweifacher Weise ausdrücken. Sie muß erstens gleich der Geschwindigkeit auf der x -Achse im Abstand r vom Ursprung sein. Wenn wir entwickeln, ergibt das

$$w_f = u_0 + u_0' (r - x_0)$$

Zweitens können wir w_f durch die x -Komponente der Geschwindigkeit in diesem Punkt u_f und dem Cosinus des Winkels ausdrücken, dann ist

$$w_f = u_f \frac{r}{x_0}$$

Entwickeln wir nun r , so können wir innerhalb unserer Genauigkeitsgrenzen schreiben

$$r = x_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{f^2} \right) \text{ und } \frac{r}{x_0} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{f^2}$$

Dies in den letzten beiden Gleichungen eingesetzt, ergibt nach Elimination von u_f mit genügender Genauigkeit

$$u_f = u_0 + \frac{1}{2} u_0' f^2 - \frac{1}{2} u_0^2 f f''$$

Dasselbe hatten wir mit Hilfe der Gleichungen (11b) und (1) für $f f'' = 0$ erhalten.

b) Vergleich von Theorie und Experiment bei einer rotationssymmetrischen Düse.

T. E. Stanton [4] hat die Geschwindigkeitsverteilung auf der Achse und auf einer Geraden parallel zur Achse, deren Abstand von der Wand an der engsten Stelle der Düse etwa 2,5 mm betrug, gemessen. An dieser Stelle war $f f'' = 0,210$. Wie wir im ebenen Fall auseinandergesetzt haben, können wir bei einem so großen Wert von $f f''$ nicht mehr vollkommene Übereinstimmung unserer ersten Näherung mit der wirklichen Strömung erwarten. Die von uns errechneten Werte müssen an der Achse etwas zu klein, an der Wand etwas zu groß sein, wie man in Analogie zu unserer Abschätzung des Fehlers der ersten Näherung beim zweidimensionalen Fall annehmen muß. Stanton hat bei verschiedenen Kesseldrücken gemessen (Bild 6, α^* ist die Schallgeschwindigkeit bei der Mächeschen Zahl 1). In den ersten drei Fällen A, B und C ist der Kesseldruck so niedrig, daß die Höchstgeschwindigkeit an der engsten Stelle der Düse erreicht wird, bei zunehmendem Querschnitt nimmt die Geschwindigkeit wieder ab. In der Nähe der Wand wird bei C die Schallgeschwindigkeit sogar gebietsweise überschritten. Hier handelt es sich also um eine Lösung, welche zur engsten Stelle der Düse symmetrisch ist. Diese Symmetrie wird allerdings durch Grenzschicht-einflüsse etwas gestört. Bei den symmetrischen Lösungen muß noch irgendeine Größe gegeben sein, um die theoretischen Kurven ermitteln zu können. Wir haben die Achsengeschwindigkeit an der engsten Stelle als vorgegeben angenommen. Daher stimmt an der Achse Theorie und Experiment fast vollkommen überein. Die errechnete Geschwindigkeit in der Nähe der Wand erweist sich allerdings wie auch im Falle E—F im allgemeinen als zu klein. Diese starke Abweichung ist aber jedenfalls der Meßmethode zuzuschreiben.

Im Falle E—F ist der Kesseldruck bereits groß genug, daß wir es mit einem allgemeinen Übergang in Überschall-geschwindigkeiten in der Gegend der engsten Stelle zu tun haben. Hier ist bei der Berechnung der Geschwindigkeit keine weitere Annahme mehr nötig. Die theoretischen Ge-

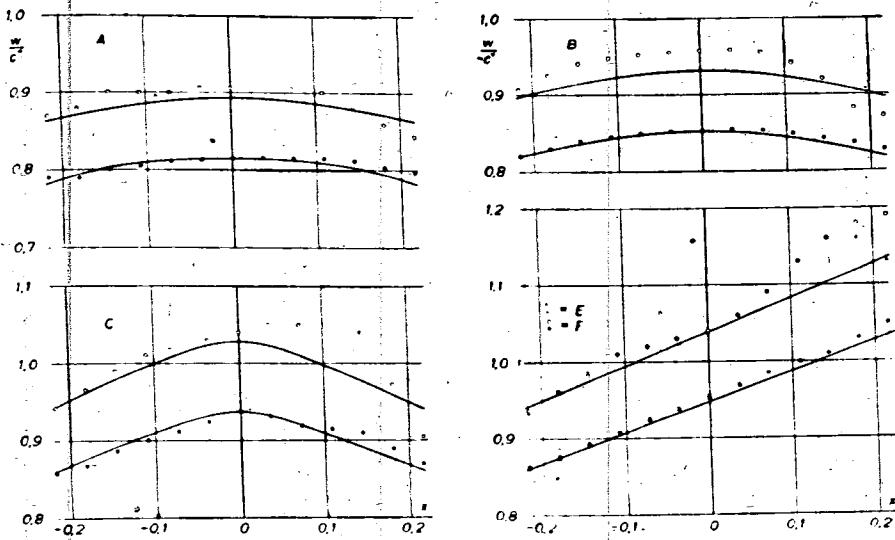


Bild 6. Vergleich von Versuch und Theorie (1. Näherung).

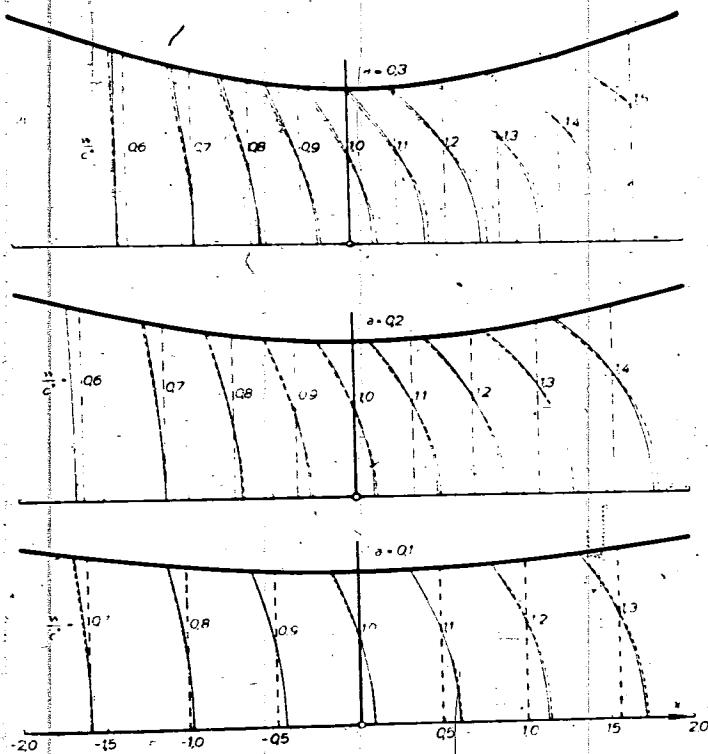


Bild 7. Isotachen der Stromfadentheorie, der 1. Näherung und endgültigen Lösung (ebenes Problem).

Schwindigkeitswerte an der Achse liegen etwas zu tief, genau so, wie wir es bei der ersten Näherung erwarten mußten. Die experimentellen Wandgeschwindigkeiten liegen im Überschallgebiet ganz eigentümlich hoch. Der Grund des Geschwindigkeitsabfalles in der Gegend von $x = 0,15$ ist zweifellos auf einen Verdichtungsstoß zurückzuführen. Stantons Versuchsreihe *D* ist hier nicht wiedergegeben, da sie ohne Zuziehung von Grenzschichtinflüssen nicht gedeutet werden kann.

c) Strömungen durch Hyperbeldüsen, zweidimensionales Problem.

Die Bildreihe, Bild 7, gibt den Übergang von Unterschall- in Überschallgeschwindigkeit bei drei Düsen wieder. Der Düsenrand ist durch folgende Funktion gegeben

$$f = 1 + a \cdot x^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel. Die halbe Düsenhöhe an der engsten Stelle ist dabei wie verabredet gleich Eins gesetzt. Der reziproke Krümmungsradius für $f' = 0$ ist

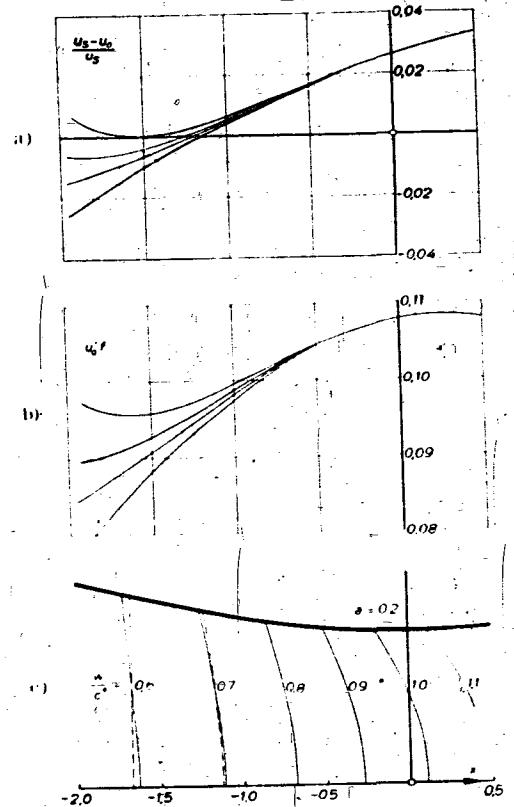


Bild 8. Mehrdeutigkeit der Lösung im Unterschallgebiet.

Die durch die oben angegebene Funktion dargestellten Düsenformen wurden derjenigen von Görtler und Taylor, welche Begrenzung durch Kreissegmente annehmen, vorgezogen, da sie wie die praktisch verwendeten Düsen die Eigenschaft haben, daß die Backenkrümmungen mit zunehmender Entfernung von der engsten Stelle abnehmen. Außerdem geht bei dieser Düsenform eine starke Krümmung des Düsenrandes für kleine x -Werte Hand in Hand mit einer starken Neigung der Düsenränder für große x -Werte. Dementsprechend ist um so größere Genauigkeit der Theorie zu erwarten, je kleiner das a ist.

Der ganzen Methode entsprechend erhält man zunächst nicht Linien konstanter Geschwindigkeit, sondern Geschwindigkeitsprofile. Von diesen kann man aber leicht zu Linien konstanter Geschwindigkeit, also zu Isotachen, übergehen. Diese sind für die Darstellung vorzuziehen.

Den drei Düsen kommen folgende Werte von a zu

$$a = 0,10; \quad a = 0,20; \quad a = 0,30.$$

Die Isotachen der endgültigen Lösung sind ausgezogen, diejenigen der ersten Näherung gestrichelt, die Isotachen der Stromfadenlösung, welche natürlich Gerade sind, sind strichpunktiert. Die dazugehörigen Geschwindigkeitszahlen, ausgedrückt in Vielfachen der Schallgeschwindigkeit c^* bei der Machschen Zahl 1, sind stets zum Kreuzungspunkt der zusammengehörigen Isotachen geschrieben.

Wir sehen, daß die erste Näherung bei allen drei Düsen noch recht brauchbare Werte liefert und auch im Falle $a = 0,30$ die Abweichungen im großen und ganzen recht gut wiedergibt. Nach den von uns gemachten Vernachlässigungen ist damit zu rechnen, daß der Fehler, welcher der endgültigen Lösung innerhalb des Gebietes, welches der Bedingung $f' < 0,10$ genügt, zukommt, etwa 10% des Abweichens dieser Lösung von der ersten Näherung ausmacht. Der Fehler der ersten Näherung an der Achse macht, wie bereits früher für $f' = 0$ abgeschätzt, etwa das a -fache des Abweichens vom Stromfadenwert an dieser Stelle aus. Das Resultat im Unterschallgebiet ist nicht eindeutig. In Bild 7 sind diejenigen Lösungen eingezeichnet, welche

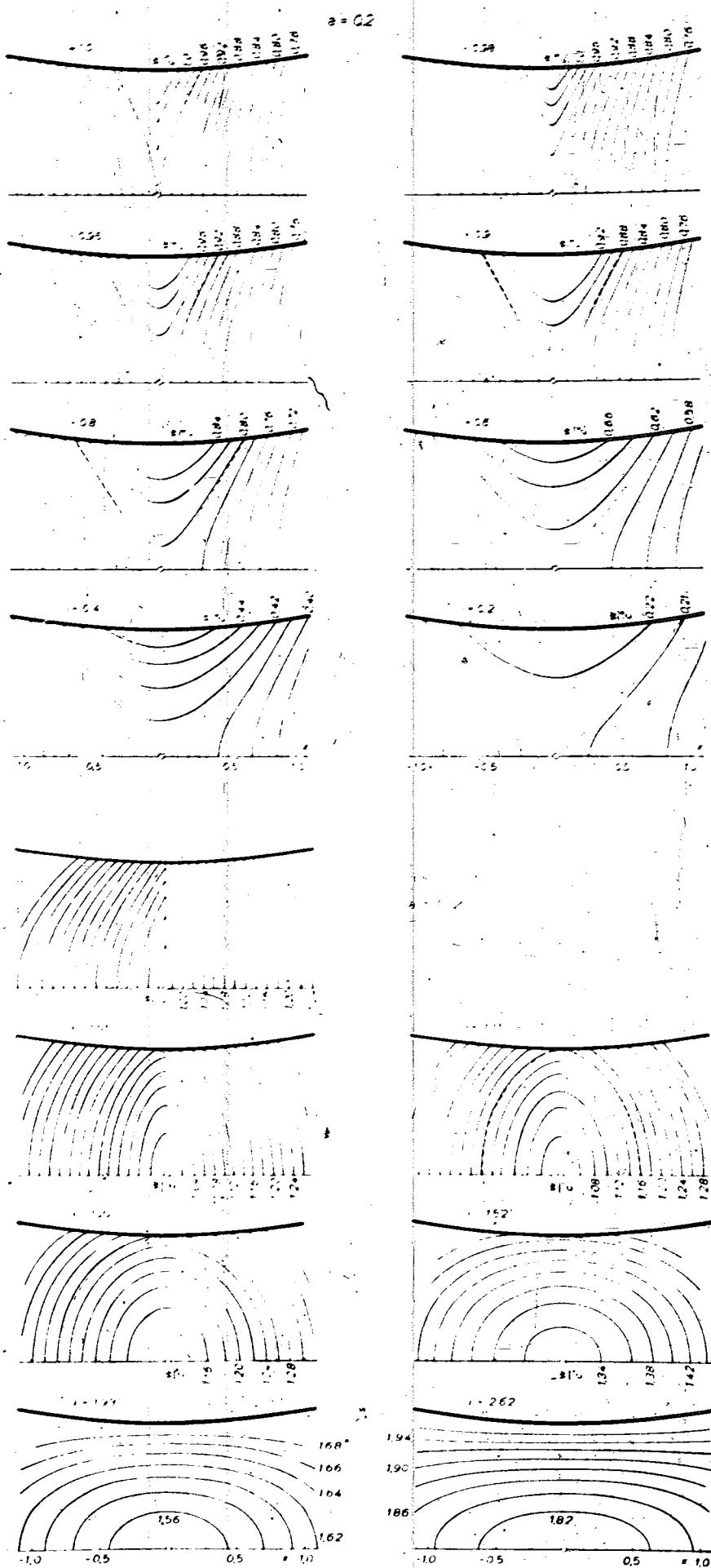


Bild 9a. Isotachen (1. Näherung) bei symmetrischer Unterschallströmung.

Man erhält, wenn man zur Bestimmung des u_0 das Iterationsverfahren anwendet. Dieses liefert stets nur eine Lösung.

Bild 8a, b, c zeigt diese Mehrdeutigkeit im Unterschallgebiet bei der Düse $a = 0,2$. In Bild 8a ist u_0 über r aufgetragen. Bild 8b zeigt die entsprechende Kurve für u_0 f. Bild 8c gibt Isotachen wieder, für die von uns gerechneten Extremfälle. Die ausgezogenen und die gestrichelten Kurven sind hier also innerhalb unserer Genauigkeit exakte Lösungen.

Bildreihe 9a gibt die erste Näherung für die Düse $a = 0,20$ wieder für den Fall, daß die Geschwindigkeit ihren Höchstwert an der engsten Stelle erreicht und dann wieder absinkt. Der Wert i bezeichnet dabei den Wert der Machschen Zahl an der engsten Stelle bei Zugrundelegung der Stromfadenlösung. Für $i = 1,0$ gibt es also Lösungen, welche zur engsten Stelle symmetrisch und welche asymmetrisch sind. Man sieht für Werte von i nahe an 1 wird die Machsche Zahl 1 im Wandnähe überschritten. Wir haben hier die bereits von G. I. Taylor berechnete Lösung vor uns.

Bildreihe 9b gibt die praktisch nicht so wichtigen Fälle der symmetrischen Überschallströmung wieder. Diese erreicht also im engsten Querschnitt ihre kleinsten Geschwindigkeiten. Die i -Werte sind hier so gewählt, daß in je einem Fall für $i < 1,0$ und $i > 1,0$ derselbe Wert von Θ , d. h. also dieselbe Durchflußmenge zukommt. Damit ist erreicht, daß unsere Bildreihen im wesentlichen alle möglichen Fälle von den kleinsten bis zu den größten Geschwindigkeiten wiedergeben. Die Bilder sind so geordnet, daß Strömungen mit gleichen Durchflußmengen entsprechend gleiche Plätze haben. Der zu $i = 0,98$ gehörige Fall im Überschallbereich ist nicht gezeichnet. Man sieht, die Isotachen im Überschallbereich sind grundlegend verschieden von jenen im Unterschallbereich. Interessant ist, daß bei ganz hohen Geschwindigkeiten die Geschwindigkeitsänderung hauptsächlich quer zur Strömungsrichtung stattfindet. Hier entsprechen übrigens kleinen Geschwindigkeitsänderungen bereits ganz beträchtliche Dichteänderungen.

10. Strömung durch Hyperbeldüsen, rotationssymmetrisches Problem.

Für den Abstand des Düsenrandes von der Achse f wurde hier die gleiche Funktion gewählt wie beim ebenen Problem. Die Düsenparameter wurden, um die Rotationssymmetrie anzudeuten, mit a_R bezeichnet. Berechnet wurde lediglich die erste Näherung, deren Isotachen hier also ausgezogen sind. Bildreihe 10 zeigt wieder die drei Fälle

$$a_R = 0,10; \quad a_R = 0,20 \quad \text{und} \quad a_R = 0,30.$$

Bild 9b. Isotachen (1. Näherung) bei symmetrischer Überschallströmung.

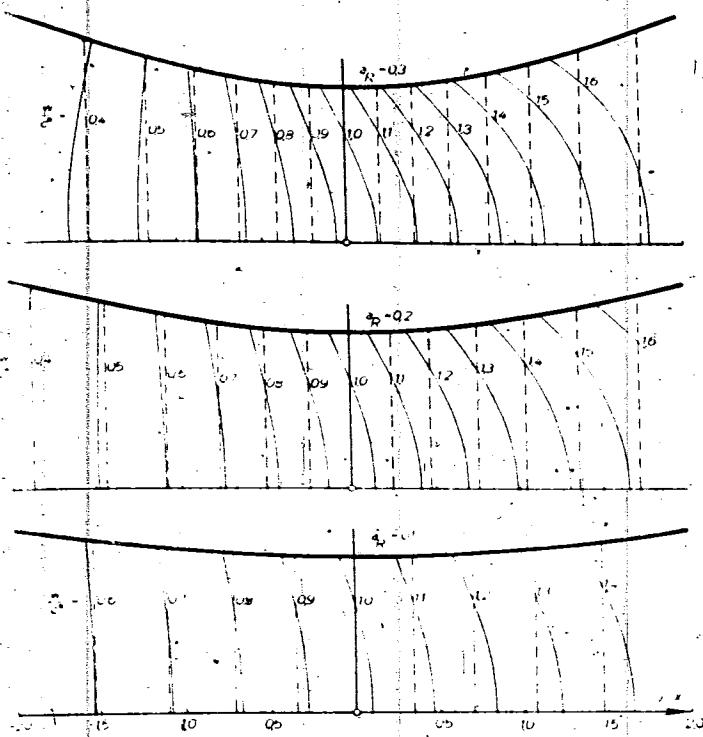


Bild 10. Isotachen der Stromfadentheorie und der 1. Näherung (rotationssymmetrisches Problem).

Nachdem die Geschwindigkeitsänderung hier mit dem Quadrat von f geht, also bedeutend größer ist als im ebenen Fall, sind die Isotachen näher aneinander gerückt. Eine Geschwindigkeitsänderung in der Nähe der Achse macht hier nicht soviel aus wie eine Geschwindigkeitsänderung in der Nähe der Wand, da die Strömungsmengen hier ja bedeutend größer sind. Dementsprechend sieht man, daß im rotationssymmetrischen Fall ein Abweichen der Geschwindigkeit vom Stromfadenwert an der Wand durch eine bedeutend größere Geschwindigkeitsabweichung an der Achse kompensiert wird. Im übrigen sind aber die totalen Geschwindigkeitsunterschiede auf einem Querschnitt geringer als im Falle der zweidimensionalen Strömung.

e) Mengenkorrekturen für Hyperbeldüsen.

Mit Formel (17) und (17a) können wir die Mengenkorrektur in erster Näherung von den in Abschnitt c beschriebenen Hyperbeldüsen berechnen. Wir erhalten folgende Resultate, wenn wir mit $\left(\frac{dM}{M_s}\right)_1$ die erste Näherung bezeichnen.

α	$\frac{dM}{M_s}$	$\left(\frac{dM}{M_s}\right)_1$
0.10	0.00018	0.00027
0.20	0.00053	0.00106
0.30	0.00083	0.0024

Wir sehen hier also an einem numerischen Beispiel, daß die Mengenkorrektur außerordentlich klein ist. Außerdem zeigt sich, daß die Formel (17a) lediglich für Abschätzungen brauchbar ist. Bei $\alpha = 0.30$ erhalten wir in erster Näherung sogar einen dreifach zu großen Wert.

f) Die Bedeutung der Wandkrümmung an der engsten Stelle bei der Konstruktion von Überschalldüsen mit Parallelstrahl.

Bei der Konstruktion von Überschalldüsen mit Parallelstrahl für Überschallwindkanäle nach dem Prandtl-Busemann-Verfahren wird im allgemeinen von der Annahme ausgegangen, daß man in diesem Falle mit genügender Genauigkeit an der engsten Stelle der Düse die Machsche Zahl über den ganzen Querschnitt gleich Eins setzen kann. Um den durch diese Annahme verursachten Fehler zu untersuchen, haben wir zwei Konstruktionen einer Überschalldüse mit einem Parallelstrahl mit einer Machschen Zahl Ma etwa gleich 2 durchgeführt, wobei einmal von der Annahme konstanter Geschwindigkeit über den Querschnitt an der engsten Stelle, das andere Mal von einer durch unser Verfahren gewonnenen Geschwindigkeitsverteilung ausgegangen wurde. Es war an der engsten Stelle $\alpha' = 0.30$ angenommen. Es wurde mit kleinsten Richtungsänderungen von einem Bogengrad gearbeitet. Die Mengenkorrektur der Düse beträgt, wie wir der Zahlentafel des letzten Abschnittes entnehmen können, etwa 0.8‰. Die Endquerschnitte, die wir bei den beiden Konstruktionen erhielten, dürften sich daher nicht mehr als um 0.8‰ unterscheiden. Der Unterschied der Endquerschnitte betrug hingegen 2.4‰ und wir können daher diese Größe als Maß für die Genauigkeit unserer Konstruktion ansehen. Der größte Querschnittunterschied, den wir bei den beiden Konstruktionen erhielten, betrug 3.3‰. Wir können daher sagen, daß die beiden Kurven innerhalb unserer Konstruktionsgenauigkeit sich nicht unterscheiden. Die Berechtigung von der Annahme $Ma = 1$ im ganzen engsten Düsenquerschnitt bei der Konstruktion von Überschalldüsen mit Parallelstrahl auszugehen, hat sich demnach nur bestätigt.

V. Schrifttum.

- [1] Th. Meyer, Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge eines Gases, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt, Dissertation 1907, erschienen in den Mitteilungen über Forsch. Arb. Ing.-Wes. Heft 62, Berlin 1908.
- [2] G. I. Taylor, The Flow of Air at High Speeds past Curved Surfaces, Aeron. Res. Comm. Rep. a. Mem. N. 1381, London 1930.
- [3] H. Görtler, Zum Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen, Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), Nr. 6.
- [4] T. E. Stanton, Velocity in a Wind Channel Throat, Aeron. Res. Comm. Rep. a. Mem. N. 1388, London 1931.

Die Flugpolarenmessung*).

Meßverfahren, Auswertung, Korrekturen und Umrechnung.

Von Rudolf Schmidt.

Versuchsabteilung der Dornier-Werke, Friedrichshafen/B.

Es werden die verschiedenen Verfahren der Flugpolarenmessung mit Vor- und Nachteilen beschrieben. Besonderer Wert wurde weiterhin auf die Korrektur der Messung infolge des Einflusses der Beschleunigungskräfte auf das Flugzeug gelegt, der bisher meist vernachlässigt wurde, was aber bei modernen Flugzeugen häufig nicht mehr zulässig ist. Ferner wird der Beschleunigungseinfluß auf das bei der Messung verwendete Pendel zur Neigungsmessung berechnet und in Form von Kurventafeln dargestellt. Verschiedene Gesichtspunkte, die bei der praktischen Durchführung der Flugpolarenmessung zu beachten sind, werden erläutert und Methoden zur Umrechnung der Meßwerte auf andere Betriebszustände angegeben.

Gliederung.

Einführung.

- A. Die verschiedenen Meßverfahren.
 1. Die Sinkgeschwindigkeits-Methode.
 2. Die Windfahnenmethode.
 3. Die Sondenmethode.
 4. Die Theodolithmethode.
 5. Die Beschleunigungsmesser-Methode.
 6. Die Auslaufmethode.
 7. Der Einfluß von atmosphärischen Vertikalströmungen.
- B. Die notwendigen Meßgeräte.
 1. Messung des atmosphärischen Luftzustandes.
 2. Messung des Bewegungszustandes.
- C. Die praktische Durchführung der Polarenmessung.
 1. Allgemeiner Bewegungszustand, Berücksichtigung der Beschleunigung b_x und b_y .
 2. Einfluß der Bahnbeschleunigung b_x auf den Widerstand beim Gleitflug mit Staudruck $q = \text{konst.}$
 3. Einfluß der Zentrifugalschleunigung b_y auf den Auftrieb beim Gleitflug mit $v = \text{konst.}$
 4. Die Korrekturfaktoren im Motorflug.
 5. Die Anwendung von Pendelneigungsmessern.
 - a) Der Fehlerwinkel β bei allgemeiner Beschleunigung.
 - b) Der Fehlerwinkel β beim Flug mit $q = \text{konst.}$
 - c) Der Fehlerwinkel β_x beim Flug mit $v = \text{konst.}$
 6. Der Einfluß der Luftschrauben.
- D. Die Umrechnung von Motorflugpolaren.
- E. Schlußwort.

Einführung.

Die »Polare« des Flugzeuges, die Abhängigkeit zwischen Anstellwinkel, Auftrieb und Widerstand, bildet das Rückgrat jeder Flugleistungsberechnung. Ihre Messung stellt einen wesentlichen Bestandteil eines jeden Flugzeug-Modellversuches dar, insbesondere beim Neuentwurf. Es erscheint beinahe selbstverständlich, daß nach Fertigstellung des Flugzeuges eine Messung der Polaren im Fluge durchgeführt wird, um die Genauigkeit des Modellversuches zu überprüfen und um weiterhin als neue Grundlage weiterer Flugleistungsberechnungen zu dienen. Daß diese Flugpolare bisher diese Bedeutung meist nicht erlangte, hat seinen Grund wohl hauptsächlich darin, daß das Vertrauen in ihre Genauigkeit nicht sehr groß war und der Aufwand zu ihrer Messung, namentlich hinsichtlich der Zahl und Dauer der Meßflüge, als zu groß erschien. Beides trifft allerdings zu, wenn man die bisher fast ausschließlich benutzte primitive Meßmethode anwendet. Jedoch konnte im Verlauf der neueren Zeit durch Entwicklung geeigneter Meßgeräte und z. T. neuartiger Meßmethoden die Flugpolarenmessung in ihrer Genauigkeit so weit gesteigert und trotz einer Vervielfachung der Einzelmessungen die Meßdauer so stark abgekürzt werden, daß sie in diesen Punkten einer Polarenmessung im Windkanal mindestens gleichwertig, z. T. sogar überlegen ist. Die Mög-

lichkeit, im Flugversuch bei den richtigen Re- und Mach-Zahlen den Einfluß von Kühlerklappen, Bombenklappen, Luftschrauben u. ä. einwandfrei messen zu können, birgt zudem so große Vorteile, daß sie zweifellos als Grundlage von Leistungsberechnungen der Modellpolaren weit überlegen ist.

Die Entwicklung dieser neuen Geräte und Verfahren ist noch nicht abgeschlossen. Jedoch können heute bereits die erreichten Verbesserungen an einer Reihe von Beispielen gezeigt und ein Überblick über die noch laufenden Entwicklungsarbeiten gegeben werden. Die Beschreibung der verschiedenen Meßverfahren, der Auswertung, Fehlerberücksichtigung und Umrechnung auf andere Betriebszustände bildet den Inhalt des vorliegenden Berichtes. Der Bericht kann gleichzeitig von jüngeren Flugversuchingenieuren als Anleitung zu einer Flugpolarenmessung benutzt werden, in der die Erfahrungen des Bearbeiters verwertet sind, und soll dadurch beitragen, der häufig stark vernachlässigten Flugmessung einen neuen Impuls zu geben.

Die im folgenden angewendeten Bezeichnungen und Vorzeichen entsprechen, falls nicht besonders angegeben, der Falu-Norm, DIN L 100.

A. Die verschiedenen Meßverfahren.

1. Die Sinkgeschwindigkeitsmethode.

Diese ist die bisher fast ausschließlich benutzte Meßmethode. Sie gründet sich auf folgenden Zusammenhängen (s. Bild 1):

Das Flugzeug bewege sich auf einer geradlinigen Bahn, die unter dem Bahnwinkel γ gegen die Horizontale geneigt ist. Dann greifen am Flugzeug-Schwerpunkt im unbeschleunigten Fluge das Fluggewicht G sowie Auftrieb A und Widerstand W an, die miteinander im Gleichgewicht stehen. Es ist also $A = G \cos \gamma$ und $S = W = G \sin \gamma$.

Das Geschwindigkeitsdreieck ist dem Kräfte Dreieck ähnlich. Es ist also die Sinkgeschwindigkeit $w = v \sin \gamma$. Mißt man v und w , dann ist γ und mit obigen Gleichungen auch Auftrieb und Widerstand bekannt.

Die Messung der Bahngeschwindigkeit v erfolgt meist über den geeichten Staudruckmesser. Unmittelbar kann auch mit dem Dornier-Schleppplog [1] sehr genau gemessen werden. Die Messung der Sinkgeschwindigkeit w erfolgt so, daß man im Verlauf einer längeren Zeitspanne den atmo-

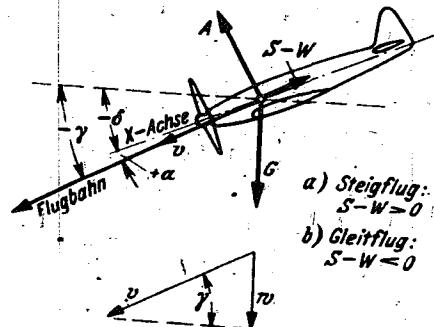


Bild 1. Kräfte und Winkel im unbeschleunigten Flug.

* P 314.

sphärischen Luftdruckunterschied Δb mit Hilfe des Höhenmessers oder eines besonderen Aneroid-Luftdruckmessers festgestellt. Mißt man gleichzeitig den Temperaturverlauf, dann kann man den Mittelwert aus Staudruck q , Bahngeschwindigkeit v , Luftdichte ρ während der Zeitspanne ΔT berechnen und erhält die mittlere Sinkgeschwindigkeit u_m

$$u_m = \frac{\Delta b}{\rho \cdot g \cdot \Delta T} \text{ und daraus den mittleren Bahnwinkel } \gamma_m$$

So primitiv dieses Meßverfahren an sich ist, so haftet ihm eine ganze Reihe schwerwiegender Mängel an, auf denen die bisher der Flugpolaren nachgesagte Unzuverlässigkeit beruht. Die Zeitmessung und gleichzeitige exakte Luftdruckmessung erfordert für jeden Meßpunkt eine längere Meßzeit. Nur bei genügender Länge der Meßzeit bleiben die Anfangs- und Endfehler gering. Bei hohen Geschwindigkeiten werden dabei sehr große Höhenunterschiede durchflogen. Die meist ungleichförmige Schichtung der Atmosphäre sowie die fliegerischen Schwierigkeiten, hohe Staudrücke längere Zeit genau zu halten, ergeben aber starke Streuungen der Meßpunkte. Es kommt noch hinzu, daß man fast zu jedem Meßpunkt wieder die Ausgangshöhe ansteigen muß, so daß die Flugdauer außerordentlich lang wird, wenn man etwa durch genügend häufige Punktzahl die Unsicherheit der Einzelmessung vermindern will.

Verfeinerungen dieser Methode wurden versucht, indem man mit einem optischen Schreiber den Luftdruckverlauf neben einer genau gesteuerten Zeitmarke aufzeichnet [2]. Dies ermöglicht eine Abkürzung der Meßzeiten, jedoch wird hierdurch die Streuung der Meßwerte nur wenig herabgesetzt.

Aus Bild 1 kann entnommen werden, daß man den Anstellwinkel α des Flugzeugs aus $\alpha = \delta - \gamma$ erhält. Den Längsneigungswinkel δ kann man mit einem Pendel oder einer Wasserwaage, ferner optisch durch Aufnehmen des Horizontes oder eines Kreiselhorizontes bestimmen. Bei hohen Geschwindigkeiten wird α sehr klein, d. h. es ist die Differenz zweier fast gleich großer Werte. Da dem einen hiervon γ aber die große Meßgenauigkeit anhaftet, wächst der Meßfehler von α in diesem Bereich der Polaren stark und kann leicht Beträge von 100% und mehr erreichen.

Man kann daher auf Grund der mit dieser Methode bei vielen Polarenmessungen gemachten Erfahrungen aussagen, daß sie im Bereich kleiner Geschwindigkeiten — also im oberen Teil der Polaren — und bei Verwendung genau arbeitender empfindlicher Luftdruck-, Meß- oder Registriergeräte brauchbar, dagegen bei großen Geschwindigkeiten also im c_v -Bereich des Schnell- und Sturzfluges — sowohl zur Widerstand-, als auch zur Anstellwinkelmessung ungeeignet ist.

2. Die Windfahnenmethode.

Die unsichere Messung der Sinkgeschwindigkeit wird umgangen, wenn man den Anstellwinkel α unmittelbar mißt. Eine Möglichkeit hierzu bietet sich durch die Schaffung der Dornier-Differentialwindfahne oder durch Anwendung der bekannten »Zweifinger-Winkel-Staurohres«. Man erhält dann den Bahnwinkel γ aus $\gamma = \delta - \alpha$. Den Längsneigungswinkel δ und den Anstellwinkel α mißt man gleichzeitig mit dem Staudruck, womit alle notwendigen Meßgrößen erfaßt sind. Zusätzlich notwendig ist lediglich eine Flugeichung der Windfahne, da an ihrem in unmittelbarer Nähe des Flugzeugs gelegenen Einbauort stets Abweichungen der Strömungsrichtung von der Richtung im ungestörten Gebiet vorhanden sind. Diese Flugeichung geschieht im exakten Horizontalflug, in dem $\alpha = \delta$ ist; man vergleicht also die Längsneigung δ mit der Windfahnenanzeige und erhält so deren Eichkurve. Die Durchführung exakter Horizontalflüge erfordert besonders im Bereich hoher Anstellwinkel eine große Konzentration des Flugzeugführers, da diese Zustände im Geschwindigkeitsverlauf meist instabil sind. Im Reynaud-Diagramm erkennt man, daß beim Flug mit kleinen Geschwindigkeiten der Schubüberschuß B bei Erhöhung von v wächst; dies bedeutet aber Instabilität der Geschwindig-

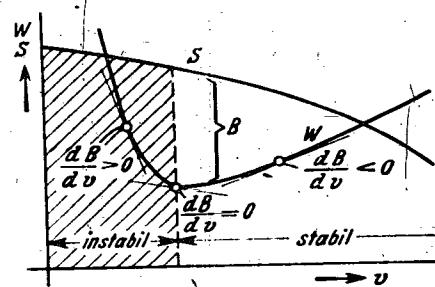


Bild 2. Verlauf der Bahnkräfte in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit (Reynaud-Diagramm).

keit. Bild 2. Ein geschickter Flugzeugführer vermag dies durch dauerndes Korrigieren mit dem Gashebel nach einiger Übung auszugleichen. Man bestimmt daher am besten den zeitlichen Mittelwert des Winkels δ und der Windfahnenanzeige aus einem längeren (> 2 min), nach Stoskop oder Feinhöhenmesser möglichst genau geflogenen Horizontalflug, so daß kleine Schwankungen keine Rolle mehr spielen. Bedingung für den Einbauort der Windfahne ist, daß die Strömungsrichtung durch den Schraubenstrahl einfluß nicht geändert wird. Vor und seitlich der Schraubenebene trifft dies in den meisten Fällen genügend genau zu.

Diese Methode hat sich bei den in der letzten Zeit mit ihr durchgeführten Polarenmessungen hervorragend bewährt. Zur Kennzeichnung des damit erzielten Fortschritts sei nur erwähnt, daß an einem Flugzeug mit fünf verschiedenen Landeklappenstellungen in zwei Meßflügen zu je 4,5 bis 2 h Dauer im ganzen 13 Meßpunkte für 14 Polaren gemessen werden konnten, und zwar herab bis zu c_v -Werten von 0,2. Nach der Sinkgeschwindigkeits-Methode wäre hierzu mindestens die fünffache Flugzeit erforderlich und die Genauigkeit bei kleinen c_v -Werten unbefriedigend gewesen.

Das Ergebnis dieser Polarenmessung ist in Bild 3 wieder gegeben.

3. Die Sondenmethode.

Läßt man aus einem Flugzeug an einem langen Kabel einen Schleppkörper herabhängen, dessen Aufhängepunkt mit seinem Schwerpunkt identisch ist, dann stellt sich der Schleppkörper, der durch ein Leitwerk stabilisiert sein muß, immer genau in Strömungsrichtung ein, Bild 4.

Er stellt gewissermaßen eine vom Flugzeug gelöste Windfahne dar. Man muß nun die Lage des Körpers gegenüber der Lotrichtung messen und durch das Kabel ins Flugzeug übertragen und erhält dann unmittelbar den Bahnwinkel γ . Die reichen Erfahrungen, die mit Schleppkörpern, insbesondere mit dem Dornier-Schlepppflug bis zu höchsten Fluggeschwindigkeiten gesammelt wurden sowie die neuen heute verfügbaren elektrischen Fernübertragungseinrichtungen für Winkelstellungen, lassen die Entwicklung dieses Verfahrens als sehr aussichtsreich erscheinen. Eine solche »Flugbahnsonde« ist augenblicklich bei uns im Entstehen. Sie wird einen durch ein Schwerependel elektrisch gestützten freien Kreisel enthalten, dessen Lage zum Sondenkörper auf elektrischem Wege ins Flugzeug übertragen wird. Sie stellt also eine nachgeschleppte Windfahne mit eingebauter Lotzentrale dar. Über Einzelheiten der Konstruktion werden wir zu gegebener Zeit berichten. Mit einer Schleppsonde wurden schon früher von den Engländern Jones und Stevens [3] derartige Messungen durchgeführt; ihre Sonde (flight-path-recorder) enthielt ein einfaches Pendel, dessen Stellung in

³⁾ Die Abwindkorrektur am Ort der Sonde kann genau genug berechnet werden.

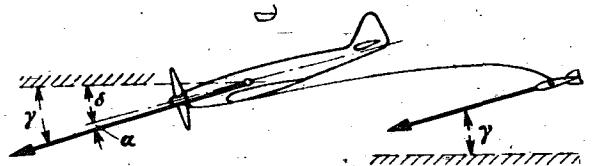


Bild 4. Schematische Darstellung der Sondenmethode.

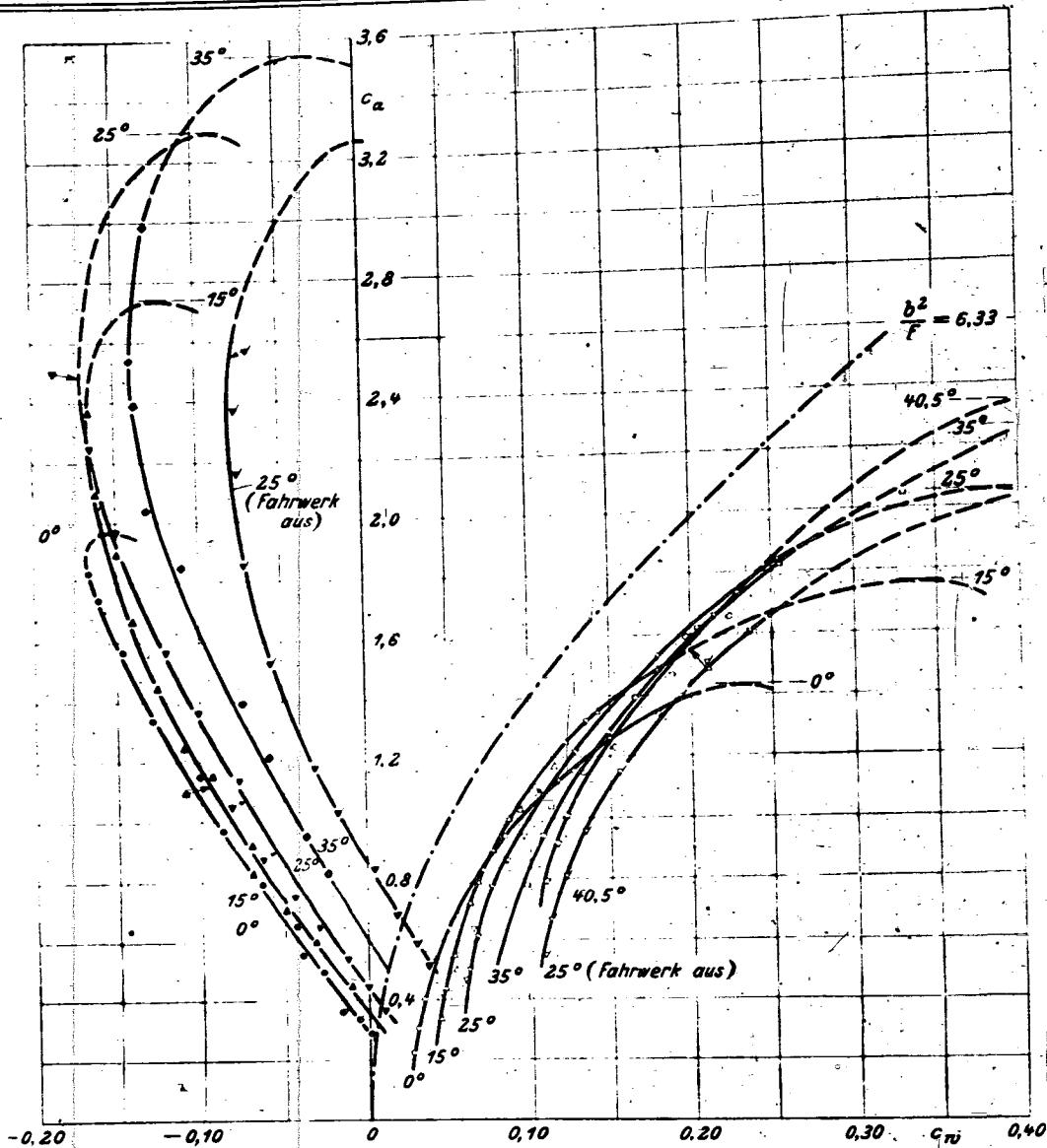


Bild 3. Ergebnis einer Flugpolarenmessung (Windfahnen-Methode).

der Sonde optisch registriert wurde; ein Verfahren, das uns allerdings für heutige Verhältnisse als zu ungenau erscheint.

Neben der Bedeutung der Flugbahnsonde als unmittelbares Meßgerät für die Bahnneigung ist noch der Vorteil ihrer Anwendung bei der Windfahnenrichtung erwähnenswert; diese braucht dann nicht mehr in schwierigen Horizontalflügen zu erfolgen.

4. Die Theodolitmethode.

Bestimmt man den Bewegungsverlauf des Flugzeugs vom Boden aus mit Hilfe zweier synchronisierter Theodolitstationen, dann kann ebenfalls aus der Bahnkurve die Fluggeschwindigkeit und der Bahnwinkel mit sehr großer Genauigkeit ermittelt und hieraus dann der Widerstand berechnet werden. Man wendet diese Methode an, um z. B. aus steilen Gleit- oder Sturzflügen den Widerstand zu ermitteln. Zur eigentlichen Polarenmessung ist sie nur selten verwendet worden [4], meist nur zur Bestimmung des Widerstandes bei kleinen c_w -Werten. Mehrere wesentliche Nachteile dieser Methode sind zu nennen: Ihr Gebundensein an einen festen, von der Lage der Theodolitstationen abhängigen Flugort, die Notwendigkeit guter Sichtverhältnisse und der Aufwand einer großen Anzahl gut geschulter Hilfskräfte. Meßfehler treten stark in Erscheinung, wenn der Wind ungenügend bekannt oder schwankend ist. Man versucht zwar durch Ballonaufstiege die Windverhältnisse unmittelbar vor der Flugvermessung festzustellen, aber dies verringert nur

die Meßfehler. Der Wind als unsichere Einflußgröße haftet dieser Methode an und bedingt ihre Genauigkeitsgrenzen wie bei allen anderen erdgebundenen Vermessungsmethoden fliegender Flugzeuge. Der Anstellwinkel kann hierbei nicht unmittelbar gemessen werden. Seine Berechnung erfordert die gleichzeitige Aufnahme des Verlaufes des Längsneigungswinkels vom Flugzeug aus und dessen exakte Synchronisierung mit der Registrierung der Theodolitstationen, eine Aufgabe, die zwar nicht unlösbar, aber immerhin mit gewissen versuchstechnischen Schwierigkeiten verbunden ist.

5. Die Auslaufmethode.

Eine Widerstandsmessung ist auch auf folgender Grundlage möglich: Das Flugzeug wird aus dem steilen Gleitflug scharf, abgefangen und dann unter Einhaltung des genauen Horizontalfluges ausschweben gelassen. Dieser Horizontalflug ist eine verzögerte Bewegung, bei der der Anstellwinkel laufend erhöht werden muß. Mißt man nun gleichzeitig fortlaufend Fluggeschwindigkeit v oder Staudruck q , Längsneigung δ und Bahnverzögerung b_t , dann erhält man den Widerstand $-W = (G/g) \cdot b_t$, den Auftrieb $A = G$ und den Anstellwinkel $\alpha = \delta$.

Leider hat diese einfache Methode einige Schwächen, deren wichtigste darin liegt, daß das genaue Einhalten konstanter Höhe während einer verzögerten Bewegung fliegerisch außerordentlich schwer ist. Nur lange Übung und Gewöhnung an die Steuereigenschaften des betreffenden Flug-

zungenmusters mögen brauchbare Ergebnisse zeitigen. Eine versuchstechnische Schwierigkeit bietet die genaue Messung der Verzögerung b_t . Man kann sie aus dem Staudruck- oder Geschwindigkeitsverlauf durch Differenzieren erhalten, was nur mit beschränkter Genauigkeit möglich ist. Die unmittelbare Messung mit Beschleunigungsmessern, z. B. einem Pendel, ist möglich, wenn man die Längsneigung optisch oder mit einem Kreiselhorizont mißt und die Verzögerung aus der Pendelstellung berechnet (s. Abschn. C 5).

Erfahrungen mit dieser Methode liegen bei uns noch nicht vor, es ist auch nicht bekannt, ob sie schon an anderer Stelle angewendet wurde. Interessant wäre es jedoch, vergleichsweise eine solche Messung durchzuführen, was bei passender Gelegenheit bei uns auch einmal geschehen soll.

6. Die Beschleunigungsmesser-Methode.

Wie wir im Abschnitt C 4 noch ableiten werden, können die Luftkräfte im allgemeinen, nicht-stationären Bewegungszustand als Funktion der am Flugzeug angreifenden Massenkraft in folgender Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned} L &= G \left(\cos \gamma \cdot \frac{b_n}{g} \right) \text{ und} \\ S &= W - G \left(\cos \gamma \cdot \frac{b_t}{g} \right). \end{aligned}$$

Den durch die Klammerausdrücke dargestellten resultierenden Beschleunigungskomponenten in Bahn- und Normalrichtung unterliegt nicht nur das Gesamtflugzeug, sondern auch jedes einzelne Massenteilchen des Flugzeugs. Es ist also naheliegend, die Größe dieser Beschleunigungskomponenten mit zwei Beschleunigungsmessern zu messen, deren Meßrichtungen senkrecht zueinander stehen, und aus ihren Meßwerten durch Drehung des Koordinatensystems in das flugbahnfeste System die Klammerausdrücke direkt zu bestimmen. Diese Methode hat den großen Vorzug, auch im nicht-stationären Fluge benutzbar zu sein, d. h. man kann die gesamte Flugpolare in einem einzigen Flugvorgang aufnehmen, wenn das Flugzeug z. B. aus dem Sturzflug langsam bis zum Erreichen des Höchstauftriebes hochgezogen wird. So bestehend einfach diese Methode an sich ist, so hat sie leider infolge gerätetechnischer Schwierigkeiten vor allem bei Motorflugzeugen bisher nicht zu befriedigenden Ergebnissen geführt. Die für diese Messung in Betracht kommenden Beschleunigungsmesser müssen mit Rücksicht auf die erforderliche Meßgenauigkeit mit kleinen Meßbereichen ($\sim \pm 2g$) ausgestattet sein. In Motorflugzeugen überlagern sich der eigentlichen Meßgröße, die von den Triebwerken herrührenden Schwingungen, deren Frequenz häufig nahe der Eigenfrequenz der Beschleunigungsmesser liegt und damit sehr große Stör-Amplituden ergibt. Dämpft man zu ihrer Bekämpfung die Geräte sehr stark, dann erhält man wieder andere Meßfehler. Wenn man bedenkt, daß die Größe der Beschleunigungskomponente $\sin \gamma \cdot b_t/g$ im Gebiet der besten Gleitzahl $\left(\frac{c_n}{c_a} \right)_{\min}$ von der Größenordnung 0.1 ist, dann erkennt man, daß zu einer Meßgenauigkeit von $\pm 2\%$ des Widerstandes eine Bestimmung der Beschleunigungskomponente auf $\pm 0,002g$ genau erforderlich wäre, ein Wert, der aber bei den nicht zu beseitigenden Schwierigkeiten der Beschleunigungsmessung im Motorflugzeug mit den heute zur Verfügung stehenden Mitteln nicht erreichbar ist. Es kann nicht gesagt werden, ob die Methode beim motorlosen Flug zu befriedigendem Ergebnis geführt werden kann, in jedem Falle ist es aber fraglich, ob eine solche Genauigkeit der Beschleunigungsmessung überhaupt möglich ist. Es ist daher richtiger, die resultierende Beschleunigungskomponente in Bahnrichtung in ihren beiden Teilen $\sin \gamma$ und b_t/g getrennt zu messen; damit kommt man aber wieder auf die schon erläuterten »Windfahnen«- oder »Sondene«-Methoden zurück.

7. Der Einfluß von atmosphärischen Vertikalströmungen.

Bei den sechs erläuterten Meßmethoden wird der Bahnwinkel γ auf zweierlei Weise bestimmt, und zwar aus der Höhenänderung gegenüber der Erdoberfläche oder aus der Bewegungsrichtung des Flugzeugs gegenüber der Luft. Hierauf wirkt sich der Einfluß atmosphärischer Vertikalbewegungen grundsätzlich in verschiedener Weise aus. Stellen wir uns vor, daß sich das Flugzeug z. B. in einem Aufwindfeld bewegt, dann mißt man im ersten Fall z. B. im Gleitflug einen Bahnneigungswinkel γ , der um den Aufwindwinkel $\Delta\gamma$ verkleinert ist. Die Messung des Widerstandes $W = G \sin \gamma$ wird daher um den Betrag $\frac{\sin \gamma - \sin(\gamma + \Delta\gamma)}{\sin \gamma}$ falsch. Man sieht leicht ein, daß unter diesem Einfluß besonders die Flugzustände leiden, bei denen die Bahnneigungen klein sind, also vor allem die Flugzustände mit Motorleistung. Nur bei großen Steig- und Sinkgeschwindigkeiten wird der Fehler klein genug, wenn man Wetterlagen bei der Messung ausschließt, bei denen $\Delta\gamma$ besonders groß ist (Föhn u. ä.). Anders ist es im zweiten Falle: Die Bewegungsrichtung des Flugzeugs gegenüber der Luft ändert sich nicht, wenn es sich im Auf- oder Abwindfeld bewegt; es behält seinen Anstell- und Längsneigungswinkel bei und bewegt sich nur relativ zur Erde auf geänderter Bahn, d. h. die Messung des Widerstandes erfolgt auch bei Vertikalströmungen der Atmosphäre richtig, wenn der Bahnwinkel aus der Bewegungsrichtung des Flugzeugs gegenüber Luft ermittelt wird. Dies ist aber abgesehen von der Beschleunigungsmesser-Methode nur bei der »Windfahnen«- und »Sondene«-methode der Fall. Diese Tatsache erhellt eindeutig die große Überlegenheit dieser beiden von uns benutzten bzw. in Entwicklung befindlichen Meßmethoden gegenüber den anderen, denn abgesehen von den anderen erläuterten Vorteilen, insbesondere gegenüber der »Sinkgeschwindigkeitsmethode« ist das Warten auf eine Wetterlage ohne Vertikalbewegungen langwierig und mangels geeigneter Kontrollmethoden über diese Vertikalbewegungen überdies immer unsicher. Windfahnen- und Sondenmethode sind daher geeignet, den größten Ungenauigkeitseinfluß der Flugpolarenmessung in Zukunft auszuschalten.

B. Die notwendigen Meßgeräte.

Bei sämtlichen sechs erläuterten Meßmethoden treten immer wieder dieselben Meßgrößen auf; es soll daher in kurzen Stichworten ein Überblick über die üblichen Meßgeräte, ihre Anwendung und ihre Meßfehler gegeben werden, die heute in Deutschland zu solchen Messungen zur Verfügung stehen. Die meisten Dinge gehören zwar zum täglichen Rüstzeug des Flugversuchs, jedoch ist auf einige Punkte besonders zu achten, soweit sie mit der Polarenmessung im Zusammenhang stehen.

1. Messung des atmosphärischen Luftzustandes.

a) Luftdruck b.

Absolutwert mit temperaturkompensiertem Aneroid (z. B. Fa. Fueß), Höhenschreiber (Barograph), Feinhöhenmesser, optischer Zweifach- (DVL-) oder Vierfachschreiber (Askania). Genaueste Messung mit Aneroid wegen großer Skala und geringster Reibung des Zeigerantriebes. Feinhöhenmesser als Bordgerät weniger genau. Als Registriergerät genaueste Messung mit optischem Schreiber, Genauigkeit wegen z. T. fehlender Temperaturkorrektur und geringer Schreibhöhe aber kleiner als beim Anzeigergerät. Zeitlicher Ablauf sehr genau feststellbar bei Verwendung einer guten Kontaktuhr (z. B. Wetzler, Pfronten). Höhenschreiber mit Tinte- oder Rußregistrierung ist als Meßgerät wenig geeignet.

Meßfehler treten auf durch falschen statischen Druck am Entnahmestaurohr durch die Störung der Strömung am Flugzeug. Abhilfe durch Verwendung einer statischen Schleppsonde nicht möglich, wegen zu großer Trägheit infolge der langen Schlauchleitung bei hohen Sinkgeschwindigkeiten (»Variometereffekt«). Genau genug ist die Berech-

nung der Korrektur aus der Flugeichung des Entnahmestauraohres durch Viereckflüge oder besser und schneller mit Schlepplog (Dornier) oder Schleppsonde (DVL). Differenzdruckmessung zur Sinkgeschwindigkeitsbestimmung mit denselben Meßgeräten oder mit optischem Differenzdruckschreiber (DVL, Askania).

b) Lufttemperatur t

Genauere Messung infolge Staueinfluß, Trägheit, Strahlung, sehr schwierig. Staueinfluß kann angenähert berechnet werden (s. u.). Trägheit kann durch Meßverfahren ausgeschaltet werden. Strahlung ist nicht korrigierbar. Am besten mißt man den Temperaturverlauf in der Atmosphäre durch 2 bis 3 min lange Horizontalflüge mit möglichst kleiner Geschwindigkeit in verschiedenen Höhenstufen. Ablesung des Thermometers am Schluß jeder Stufe. Dann ist die Anzeigetragheit praktisch beseitigt. Die Staukorrektur kann durch folgende einfache Formel [5] genügend genau berücksichtigt werden:

$$t \cong 4 \cdot 10^{-4} v^2 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

c) Luftwichte ρ

Aufstellung eines Diagramms $\rho = \frac{0,464 \cdot b}{g(t + 273)} = f(b)$ für

den Zeitpunkt der Polarenmessung ergibt praktisches Hilfsmittel für die Auswertung.

2. Messung des Bewegungszustandes.

a) Fluggeschwindigkeit.

Unmittelbar mit Schlepplog (Dornier) am genauesten. Starrlog (Junkers) erfordert Flugeichung. Theodolitmessung umständlich und wegen Windeinfluß ungenau.

b) Staudruck.

Aus Fluggeschwindigkeit und Luftwichte oder unmittelbar durch Druckmessung: Fahrtmesser, Fahrtsschreiber, optischer Zweifach- (DVL-) oder Vierfachschreiber (Askania).

Zeitlicher Verlauf und absolute Größe am genauesten mit optischen Schreibern. Weniger genau Fahrtsschreiber wegen Reibung. Guter Fahrtmesser eignet sich bei öfterem Nacheichen sehr gut bei möglichst voller Ausnutzung des Meßbereiches. Alle Geräte müssen im Flug geeicht werden, am besten mit Schlepplog oder Schleppsonde, umständlicher, ungenauer und zeitraubender durch Viereckflüge.

c) Beschleunigung.

Wichtig ist Bahn- (b_t) und Normalbeschleunigung (b_n). Erstere aus der Differentiation des Geschwindigkeitsverlaufes, relativ ungenau. Letztere aus der Flugbahnkrümmung, ebenfalls ungenau, da Krümmungsradius sehr groß und nicht konstant (keine Kreisbahn), daher graphische Auswertung unsicher.

Unmittelbare Messung mit zwei senkrecht zueinander angeordneten Beschleunigungsschreibern (DVL-, Glas- und Wachspapier-Ritzschreiber). Ablesegeräte ungeeignet wegen zeitlicher Schwankungen. Erforderlich hohe Empfindlichkeit, da Beschleunigung meist nur klein ist, und gute Dämpfung wegen Vibrationen wie schon unter A 6 erläutert, ist eine befriedigende Genauigkeit der Beschleunigungsmessung im Motorflug mit Beschleunigungsmessern nicht zu erzielen wegen der großen durch Triebwerk-Schwingungen erzeugten Störungen. Wenn die Schreiber flugeugfest angeordnet sind und die Beschleunigungskomponenten in X- und Z-Richtung messen, ist Komponenten-Transformation um den Anstellwinkel α notwendig. Es ist

$$b_n = b_z \cos \alpha + b_x \sin \alpha$$

und

$$b_t = b_z \sin \alpha - b_x \cos \alpha$$

Auswertung daher zeitraubend und umständlich.

d) Längsneigung δ .

Am einfachsten mit Pendel, gut bewährt Flüssigkeitspendel mit großer Basis, da gute Dämpfung und hohe Ablesegenauigkeit. Kenntnis der Beschleunigung notwendig.

Pendelkorrekturen sind in Abschnitt C 5 näher behandelt. Pendelneigungsschreiber (DVL) weniger genau. Beschleunigungseinfluß vermeidbar durch Kreiselnigungsmessung bei freiem ungestütztem Kreisel (DVL-Kreiselneigungsschreiber) ist Nullpunktbestimmung schwierig. Kreiselnigungsmessung mit Pendelstützung bei Dornier in Entwicklung. Ziel ist Notwendigkeit Umbau eines künstlichen Horizontes (Sperry, Askania) als Kreiselnigungsmesser möglich. Messung aber nicht sehr genau. Optische Messung mit Filmkammer oder Zielkamera durch Aufnahme des Horizontes (quer oder längs) oder des Sonnenbildes. Erforderlich: gute Sicht; langwierige Auswertung. Bewährt hat sich Aufnahme mit Robotkamera, deren Auslösung von einer Kontaktuhr genau gesteuert wird.

e) Anstellwinkel α .

Unmittelbare Messung durch Windfahne (Dornier) oder Winkelstauraohr, Flugeichung erforderlich. Mittelbar durch Differenzbildung aus Längs- und Bahnneigung.

f) Bahnneigung γ .

Unmittelbar mit Flugbahnsonde (bei Dornier in Entwicklung) und durch Theodolitvermessung vom Boden aus. Mittelbar aus Sink- und Bahngeschwindigkeit und aus Addition Anstellwinkel + Längsneigung.

C. Die praktische Durchführung der Polarenmessung.

Obwohl die physikalischen Zusammenhänge bei der Messung primitiv erscheinen, so ist doch eine genauere Untersuchung über die Fehlermöglichkeiten notwendig. Selbst dann, wenn man mangels geeigneter Beschleunigungsmesser sich mit Hilfe der Bordgeräte bemüht, im unbeschleunigten Zustand zu messen, ergeben sich u. U. bedeutende Fehler infolge der Luftwichteänderung beim Steig- und Gleitflug. Es zeigt sich nämlich, daß ein völlig beschleunigungsfreier Flug nur im Horizontalflug möglich ist. Bei allen Gleit- und Steigflügen tritt entweder eine Bahn- oder Normalbeschleunigung auf. Im folgenden sollen daher die Korrekturen hierfür berechnet und in handlicher Form dargestellt werden, ihre Anwendung läßt dann die Benutzung von besonderen Beschleunigungsmeßgeräten entbehrlich erscheinen. Diese Beschleunigungseinflüsse spielen natürlich auch eine Rolle, wenn man die Längsneigung mit einem Pendelneigungsmesser mißt. Auch hierfür sollen Korrekturtafeln abgeleitet werden.

1. Allgemeiner Bewegungszustand, Berücksichtigung der Beschleunigung b_t und b_n .

Im Flugzeugschwerpunkt greifen die Massenkräfte $G = M \cdot g$, $B_n = M \cdot b_n$ und $B_t = M \cdot b_t$ an und bilden die Resultierende R . Mit dieser stehen die Luftkräfte A und $S - W$ im Gleichgewicht, Bild 5. Im folgenden soll b_t positiv bei zunehmender und negativ bei abnehmender Geschwindigkeit gerechnet werden, ferner b_n positiv bei einer Abfangbewegung, negativ bei einer „Looping nach vorne“ Bewegung. Dann ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für A und W :

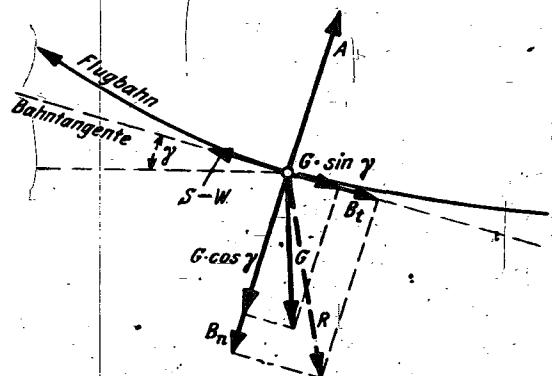


Bild 5. Kräfte am Flugzeug im allgemeinen, nicht-stationären Bewegungszustand.

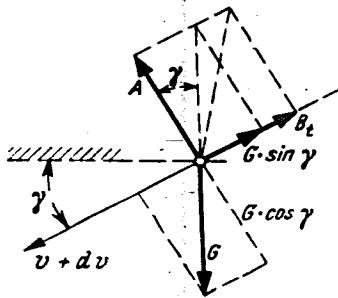


Bild 6. Kräfte am Flugzeug beim Gleitflug mit $q = \text{konst.}$

$$A = G \left(\cos \gamma + \frac{b_n}{g} \right)$$

$$W = G \left(\sin \gamma + \frac{b_t}{g} \right)$$

Mißt man b_n und b_t , dann ist die Berechnung von A und W ohne weiteres möglich.

2. Einfluß der Bahnbeschleunigung b_t auf den Widerstand beim Gleitflug mit Staudruck q konst.

Wir wollen zunächst die Verhältnisse beim Flug ohne Schraubenschub untersuchen, da sie einfacher zu behandeln sind. Die Verhältnisse im Motorflug können dann leicht durch Erweiterung der für motorlosen Flug abgeleiteten Formeln dargestellt werden, was im Abschnitt C 4 geschehen soll.

Der Gleitflug ohne Schraubenschub mit $q = \text{konst.}$ zeichnet sich dadurch aus, daß in allen Höhen die Bahnneigung $\gamma = \text{konst.}$ ist, d. h. die Flugbahn ist dabei geradlinig, es tritt keine Normalbeschleunigung b_n auf. Ferner ist der Flug mit $q = \text{konst.}$ einfach durchzuführen, da der normale Fahrtmesser in Wirklichkeit Staudruck anzeigt. Beim Gleitflug tritt nun infolge der Luftwichtezunahme mit fallender Flughöhe eine negative Bahnbeschleunigung b_t auf. Die Berechnung von Auftrieb A und Widerstand W muß also nach den Gleichungen erfolgen (Bild 6):

$$A = G \cos \gamma$$

$$W = G \sin \gamma + B_t = G \left(\sin \gamma + \frac{b_t}{g} \right)$$

Wir wollen nun die Größe der Bahnbeschleunigung b_t berechnen und in Form eines Korrekturgliedes darstellen, so daß sich der Widerstand W ergibt aus: $W = (q_0) G \sin \gamma$, wobei das Korrekturglied q_0 sich ergibt zu

$$q_0 = 1 + \frac{b_t}{g \sin \gamma}$$

Die Beschleunigung

$$b_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dq} \cdot \frac{dq}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

kann berechnet werden, wenn für $\frac{dq}{dh}$ eine Gesetzmäßigkeit bekannt ist. Diese liefert uns die Aufstellung der Normalatmosphäre. In allgemeiner Form ist die Luftdichte

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} h \right)^n$$

wobei am »INA«-Normaltag $\rho_0 = 0,125$, $a = 0,0065$, $T_0 = 288$ und $n = 4,255$ ist. Durch Differenzieren erhält man in allgemeiner Form

$$\frac{d\rho}{dh} = - \frac{a}{T_0} \cdot \rho_0^{1-n} \cdot n \cdot \rho^{1-n}$$

oder für den »INA«-Tag:

$$\frac{d\rho}{dh} = - 5,91 \cdot 10^{-5} \cdot \rho^{0,765}$$

Die Ableitung $\frac{dv}{dq}$ erhält man durch Differenzieren aus

der Gleichung:

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot q}$$

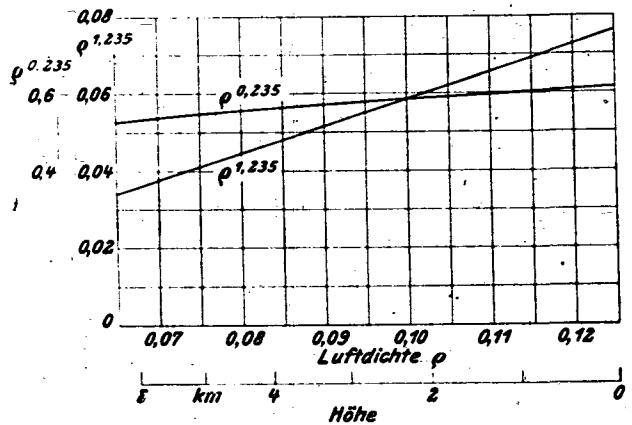


Bild 7. $q^{0,235}$ und $q^{0,235}$ als Funktion von Luftdichte ρ und Flughöhe H .

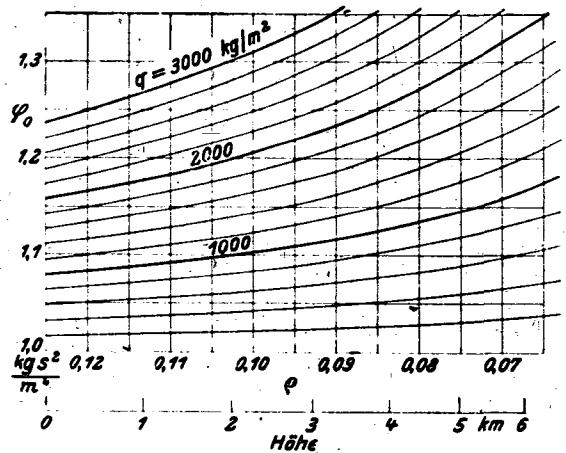


Bild 8. Der Korrekturfaktor q_0 für den Widerstand beim Flug mit $q = \text{konst.}$

$$\frac{dv}{dq} = \frac{v}{2q}$$

und die Sinkgeschwindigkeit $\frac{dh}{dt} = v \sin \gamma$.

Man erhält also

$$b_t = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{v}{2q} \right) \cdot \left(5,91 \cdot 10^{-5} \cdot \rho^{0,765} \right) \cdot v \sin \gamma$$

$$b_t = 5,91 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{q \cdot \sin \gamma}{\rho^{1,235}}$$

und daraus den Korrekturfaktor

$$q_0 = 1 + 6,02 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{q}{\rho^{1,235}}$$

q und ρ werden unmittelbar gemessen. Die Funktion $q^{1,235} = f(\rho)$ ist in Bild 7 zur Erleichterung der Korrekturrechnung aufgetragen. Der Korrekturfaktor q_0 ist in Bild 8 in Abhängigkeit von ρ mit q als Parameter dargestellt. Hieraus kann der Widerstand $W = q_0 \cdot G \sin \gamma$ unmittelbar berechnet werden. Aus der Auftragung ersieht man die große Bedeutung von q_0 bei hohen Geschwindigkeiten. Eine Vernachlässigung bedeutet Fehler bei der Widerstandsmessung, die leicht 20 bis 30% erreichen können.

Die Voraussetzung einer Normalatmosphäre bedeutet keine nennenswerte Ungenauigkeit, falls bei der Messung abweichende Lufttemperaturen vorliegen, sofern Flüge in Luftschichten vermieden werden, bei denen Inversionen vorhanden sind. Die Flugpolarenmessung erfordert ohnehin eine ruhige, stabile Wetterlage, bei der diese Voraussetzung zutrifft. Eine wesentliche Abweichung des Luftwichtegradienten $d\rho/dh$ ist zwischen Sommer und Winter nicht vorhanden, so daß das Rechnen mit konstantem Wert nur

Fehler 2. Ordnung ergibt, die in den meisten Fällen vernachlässigbar klein sind.

Die Flugpolarenmessung wurde bisher fast stets mit $q = \text{konst.}$, d. h. mit konstanter Fahrtmesseranzeige, durchgeführt, da dies den Einbau weiterer Geräte überflüssig machte. Aus der Darstellung von q sieht man aber, daß man bei einer Vernachlässigung des Beschleunigungseinflusses — und dieser wurde bisher meist übersehen, da $v_1 = \text{konst.}$ nicht $v = \text{konst.}$ ist — große Fehler bei der Widerstandsmessung macht. Setzt man als zulässige Fehlergröße 2% an, dann kann man nur bei $q < 200 \text{ kg m}^2$ die Beschleunigung vernachlässigen. In diesem Falle beschränkt sich also die Anwendbarkeit der Flugdurchführung mit $q = \text{konst.}$ nur auf den obersten Teil der Polaren.

3. Einfluß der Zentrifugalbeschleunigung b_n auf den Auftrieb beim Gleitflug mit $v = \text{konst.}$

Man kann die Korrektur des Widerstandes vermeiden, wenn man die Messung mit $v = \text{konst.}$ durchführt, was mit Hilfe eines höhenkompensierten Fahrtmessers, (Fueß) oder eines die momentane Fluggeschwindigkeit anzeigenden Luftloges möglich ist. Bei $v = \text{konst.}$ ist aber die Flugbahn nicht mehr geradlinig, sondern gekrümmt, z. B. muß im Gleitflug die Bahn immer steiler werden, je mehr man in dichtere Luftschichten kommt. Die infolge der Flugbahnkrümmung auftretende Zentrifugalbeschleunigung b_n ergibt eine Massenkraft B_n , die der Auftriebskomponente des Gewichtes entgegengesetzt gerichtet ist. Der Auftrieb wird daher verringert, Bild 9.

Die Berechnung von Auftrieb und Widerstand muß also nach folgenden Gleichungen erfolgen:

$$A = G \cos \gamma - B_n = G \cos \gamma - \frac{G}{g} b_n$$

$$W = G \sin \gamma$$

Wir wollen nun analog zum Vorgang bei $q = \text{konst.}$ das Beschleunigungsglied B_n in der Form eines Korrekturfaktors γ_0 darstellen und erhalten:

$$A = (\gamma_0) G \cos \gamma$$

wobei der Korrekturfaktor γ_0 sich zu

$$\gamma_0 = 1 - \frac{b_n}{g \cos \gamma}$$

ergibt.

Die Beschleunigung b_n erhält man auf folgendem Wege: Wir betrachten jeweils nur ein kleines Stückchen der Flugbahn als Kreisbogen dl mit dem Krümmungsradius R . Der zum Bogenelement dl gehörende Zentriwinkel ist $d\gamma$. Dann ist

$$b_n = \frac{v^2}{R} \text{ und } R = 57,3 \cdot \frac{dl}{d\gamma}$$

Bei $v = \text{konst.}$ muß sein:

$$v^2 \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dq} \frac{dq}{dv} \frac{dv}{dh} \frac{dh}{dt} = \text{konst.}$$

also

$$\frac{dl}{d\gamma} = \frac{v}{\frac{d\gamma}{dq} \frac{dq}{dv} \frac{dv}{dh} \frac{dh}{dt}}$$

und

$$R = \frac{57,3 \cdot v}{\frac{d\gamma}{dq} \frac{dq}{dv} \frac{dv}{dh} \frac{dh}{dt}}$$

$\frac{d\gamma}{dq}$ erhält man unter der Voraussetzung, daß die Änderung von e_w klein ist, aus $q = \frac{G \cdot \sin \gamma}{F \cdot c_w}$ durch Differenzieren:

$$\frac{dq}{d\gamma} = \frac{G \cos \gamma}{F \cdot c_w} = \frac{G \cos \gamma \cdot q}{G \sin \gamma} = q \cdot 2 \cdot \frac{v^2}{\text{tg } \gamma}$$

und

$$\frac{d\gamma}{dq} = \frac{\text{tg } \gamma}{q \cdot 2 \cdot v^2}$$

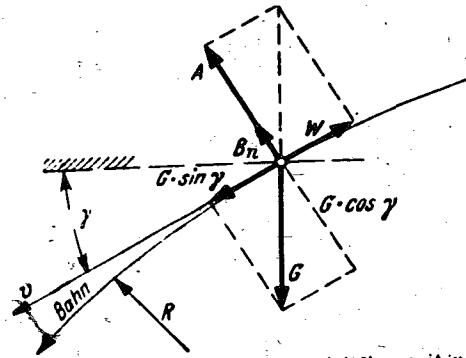


Bild 9. Kräfte am Flugzeug beim Gleitflug mit $v = \text{konst.}$

Ferner ist $\frac{dq}{dv} = \frac{v^2}{2}$ und, wie bereits im Abschnitt 2 berechnet, am »Normaltag«

$$\frac{dq}{dh} = 5,91 \cdot 10^{-5} \cdot q^{0,765}$$

und

$$\frac{dh}{dq} = v \cdot \sin \gamma$$

Daraus ergibt sich zusammengefaßt

$$R = 9,69 \cdot 10^{-5} \cdot q^{0,235} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma}$$

und

$$b_n = \frac{v^2 \cdot \sin \gamma \cdot \text{tg } \gamma}{9,69 \cdot 10^5 \cdot q^{0,235}}$$

und daraus der Korrekturfaktor:

$$\gamma_0 = 1 - \frac{v^2 \cdot \text{tg}^2 \gamma}{9,5 \cdot 10^6 \cdot q^{0,235}}$$

Der Korrekturfaktor γ_0 ist in Bild 10 in Abhängigkeit von γ mit $\frac{v^2}{q^{0,235}}$ als Parameter dargestellt und kann in dieser Form unmittelbar bei der Auswertung angewendet werden. Man sieht, daß γ_0 im allgemeinen nur wenig kleiner als 1 ist und erst bei großen Bahnwinkeln beachtliche Werte annimmt.

Zu bemerken ist hierbei, daß die Korrektur γ_0 natürlich ihren physikalischen Sinn beim senkrechten Sturzflug verliert, da hierbei $\text{tg}^2 \gamma = \infty$ wird, d. h. bei sehr steilen Sturzflügen kann $v = \text{konst.}$ eben nicht mehr erfüllt werden, da ein »Nachdrücken« beim Eintauchen in dichtere Luftschichten keine beschleunigende Wirkung mehr ausübt.

Bei der Messung mit $v = \text{konst.}$ wird die Fehlergrenze von 2% erst bei $v^2 \cdot \text{tg}^2 \gamma > \sim 10^8$ überschritten; womit also Messungen bis zu 70° Bahnneigung meist gedeckt sein dürften ($v < 170 \text{ m/s}$). Die zweckmäßigste Durch-

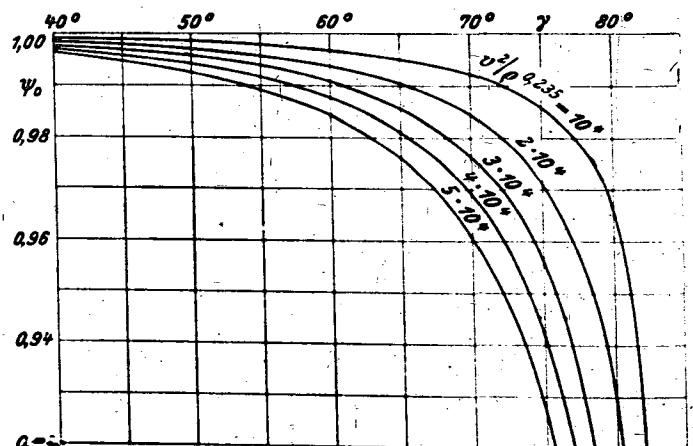


Bild 10. Der Korrekturfaktor γ_0 für den Auftrieb beim Gleitflug mit $v = \text{konst.}$

Führung der Flugpolarenmessung ohne Schub erfolgt also stets bei $v = \text{konst.}$, d. h. der Flugzeugführer hat die Aufgabe, das Flugzeug im Augenblick der Messung entweder nach der Anzeige eines Luftlogs oder eines höhenkompensierten Fahrtmessers in Bahnrichtung unbeschleunigt zu halten.

4. Die Korrekturfaktoren im Motorflug.

Im Motorflug liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter als im Gleitflug ohne Schraubenschub.

a) Steigt man mit $q = \text{konst.}$, dann ergibt sich eine positive Bahnbeschleunigung b_t von der gleichen absoluten Größe und damit der Korrekturfaktor φ für den Restschub $N - W$ in der gleichen Größe wie beim Gleitflug, es ist also

$$\varphi = \varphi_0$$

Jedoch ist hierbei die Flugbahn nicht mehr geradlinig, da sich mit der Änderung der Flughöhe auch die Motorleistung N und der Schraubenwirkungsgrad η ändern. Es tritt also hierbei im Gegensatz zum Gleitflug auch eine Normalbeschleunigung b_n auf, deren Größe im folgenden abgeleitet werden soll, um feststellen zu können, ob ihre Vernachlässigung statthaft ist.

Die Gleichung für den Krümmungsradius R der Flugbahn können wir gemäß der Ableitung (C.3) schreiben:

$$R = \frac{57,3 \cdot v}{\frac{d\gamma}{dq} \frac{dq}{dh} \frac{dh}{dv}} \quad (1)$$

Die Ableitung $\frac{d\gamma}{dq}$ müssen wir in drei Glieder aufspalten; es ist

$$\frac{d\gamma}{dq} = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial q} \right) + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial q} \right) + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial q} \right)_{N, \eta} \quad (2)$$

Den Zusammenhang zwischen γ , q , N und η erhalten wir aus der Gleichung

$$\sin \gamma = \frac{w}{v} = \frac{75 N \eta}{G} = \frac{c_w}{c_a^{0,735}} \left[\frac{2G}{\rho F} \right]^{0,5} = \frac{75 N \cdot \eta \cdot 1 q}{G \cdot 1 2 q} = \frac{c_w}{c_a} \quad (3a)$$

kürzen wir ab $\frac{75}{G \cdot 1 2 q}$ z. dann ist bei kleinen Bahnwinkeln

$$\gamma = \frac{57,3 \cdot (z \cdot N \cdot \eta \cdot 1 q)}{c_a} \quad (3b)$$

daraus erhalten wir die drei partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \gamma}{\partial N} = \frac{57,3 \cdot z \cdot \eta \cdot 1 q}{c_a} \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = \frac{57,3 \cdot z \cdot N \cdot 1 q}{c_a} \quad (4b)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial q} = \frac{57,3 \cdot z \cdot N \cdot \eta}{2 \cdot 1 q} \quad (4c)$$

Die Ableitung $\frac{\partial N}{\partial q}$ ist für Ladermotoren unterhalb der Volldruckhöhe ≈ 0 ; für Bodenmotoren und für Ladermotoren oberhalb der Volldruckhöhe erhalten wir aus der Gleichung für die Motorleistung

$$N_z = N_0 \frac{p_z}{p_0} \cdot \left(\frac{T_0}{T_z} \right)^{0,5}$$

und der Gleichung

$$q = \frac{C \cdot p}{g \cdot T}$$

ergibt sich auf einfache Weise:

$$\frac{\partial N}{\partial q} = \frac{3 N}{2 q} \quad (5)$$

Die Ableitung von $\frac{\partial \eta}{\partial q}$ ist sehr kompliziert, von dem Betriebszustand und den Abmessungen der jeweiligen Luftschraube abhängig, jedoch immer sehr klein, so daß eine Vernachlässigung des Gliedes

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial q}$$

in Gl. (2) zulässig ist. Damit erhalten wir schließlich durch Einsetzen der Ausdrücke (4a), (4c) und (5) in Gl. (2):

für Ladermotoren unterhalb der Volldruckhöhe:

$$\frac{d\gamma}{dq} = \frac{57,3 \cdot z \cdot N \cdot \eta}{2 \cdot 1 q} \quad (6a)$$

und für Bodenmotoren sowie Ladermotoren oberhalb der Volldruckhöhe:

$$\frac{d\gamma}{dq} = \frac{57,3 \cdot z \cdot \eta \cdot 1 q \cdot \frac{3 N}{2 q} + 57,3 \cdot z \cdot N \cdot \eta}{57,3 \cdot z \cdot N \cdot \eta \cdot \left(\frac{3 1 q}{q} - \frac{1}{1 q} \right)} = \frac{2 \cdot 57,3 \cdot z \cdot N \cdot \eta}{1 q} \quad (6b)$$

und nach Einsetzen von $\frac{dq}{dh}$ für den Normaltag

$$\frac{dq}{dh} = 5,91 \cdot 10^{-5} \cdot q^{0,735}$$

und

$$\frac{dh}{dt} = v \cdot \sin \gamma$$

die Normalbeschleunigung

$$b_n = \frac{v^2}{R}$$

für Ladermotoren unterhalb der Volldruckhöhe:

$$b_n = 3,135 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{N \cdot \eta \cdot \sin \gamma}{G} \cdot \frac{1 q}{q^{0,735}} \quad (7a)$$

für Bodenmotoren und Ladermotoren oberhalb der Volldruckhöhe:

$$b_n = 12,53 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{N \cdot \eta \cdot \sin \gamma}{G} \cdot \frac{1 q}{q^{0,735}} \quad (7b)$$

Das negative Vorzeichen zeigt die an sich bekannte Erscheinung, daß die Flugbahn bei $q = \text{konst.}$ im Steigflug mit zunehmender Höhe immer flacher wird, und zwar ist die Krümmung bei Bodenmotoren und oberhalb der Volldruckhöhe viermal so groß als unterhalb der Volldruckhöhe.

Man erhält schließlich für Ladermotoren unterhalb der Volldruckhöhe

$$\varphi_n' = 1 - \frac{3,2 \cdot 10^{-1} \cdot N \cdot \eta \cdot \lg \gamma \cdot 1 q}{G \cdot q^{0,735}}$$

und für Bodenmotoren- und oberhalb der Volldruckhöhe:

$$\varphi_n' = 1 - \frac{12,8 \cdot 10^{-1} \cdot N \cdot \eta \cdot \lg \gamma \cdot 1 q}{G \cdot q^{0,735}}$$

Großwerte für φ_n' erhält man bei schnellsteigenden Flugzeugen mit geringer Leistungsbelastung, etwa beim Jagdflugzeug, wie die Gleichungen erkennen lassen. Für

$$N = 2000 \text{ PS, } \eta = 0,8, \sin \gamma = 0,4, q = 400 \text{ kg/m}^2$$

$$G = 3000 \text{ kg, } q^{0,735} = 0,179 \text{ (} h = 4 \text{ km)}$$

erhält man z. B.

$$\varphi_n' = 0,9668$$

d. h. eine Auftriebskorrektur von $\approx 3,3\%$.

Trotz der extrem gewählten Daten ist also die Auftriebskorrektur sehr klein, so daß sie in Normalfällen stets vernachlässigbar ist.

b) Steigt man mit $v = \text{konst.}$, dann ist $b_t = 0$, aber die Normalbeschleunigung b_n infolge der Flugbahnkrümmung und damit φ erhalten eine andere Größe als im Gleitflug

mit $q = \text{konst.}$ Ihre Größe wollen wir im folgenden berechnen:

Durch entsprechende Umformung erhält man aus Gl. (3a):

$$\sin \gamma = \frac{75 \cdot N \cdot \eta}{v \cdot G} \cdot \frac{c_w}{c_u}$$

und für kleine Bahnneigungen

$$\gamma = 57,3 \left(\frac{75 \cdot N \cdot \eta}{v \cdot G} \cdot \frac{c_w}{c_u} \right) \quad (3c)$$

daraus die partiellen Differentiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial N} &= \frac{57,3 \cdot 75 \cdot \eta}{v \cdot G} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} &= \frac{57,3 \cdot 75 \cdot N}{v \cdot G} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial q} &= 0 \end{aligned}$$

Für Lademotoren ($\frac{\partial N}{\partial q} = 0$) unterhalb der Volldruckhöhe wird der gesamte Differentialquotient $\frac{d\gamma}{dq} = 0$ und damit

$$R = \frac{9,69 \cdot 10^5}{q^{0,765} \cdot \sin \gamma} \cdot b_n = \frac{v^2 \cdot \sin \gamma \cdot q^{0,765}}{9,69 \cdot 10^5}$$

und damit

$$\eta_n = 1 \cdot \frac{v^2 \cdot q^{0,765} \cdot \lg \gamma}{9,5 \cdot 10^6}$$

Für Bodenmotoren bzw. Lademotoren oberhalb der Volldruckhöhe wird

$$\frac{\partial \gamma}{\partial q} = \frac{\partial \gamma}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial q} = \frac{57,3 \cdot 75 \cdot \eta}{v \cdot G} \cdot \frac{3 \cdot N}{2 \cdot q} = 6450 \cdot \frac{N \cdot \eta}{v \cdot G \cdot q}$$

und damit

$$R = 150,3 \cdot \frac{v \cdot G \cdot q^{0,235}}{N \cdot \eta \cdot \sin \gamma}$$

und

$$b_n = \frac{v \cdot N \cdot \eta \cdot \sin \gamma}{150,3 \cdot G \cdot q^{0,235}}$$

und

$$\eta_n = 1 \cdot \frac{v \cdot N \cdot \eta \cdot \lg \gamma}{1,474 \cdot 10^8 \cdot G \cdot q^{0,235}}$$

Die Berechnung von $\eta_{L,n}$ für dieselben Zahlenwerte wie beim Flug mit $q = \text{konst.}$ (s. oben) zeigt, daß infolge der Kleinheit von v und $\lg \gamma$ im Steigflug η immer vernachlässigbar klein ist. Für den Fall des Zahlenbeispiels ergibt sich $\eta = 0,9724$, also eine Korrektur von 2,76% für den Auftrieb.

Es zeigt sich also auch beim Motorflug, daß die Flugpolarenmessung am einfachsten mit $v = \text{konst.}$ durchgeführt wird. Im Motorflug sind die Beschleunigungskorrekturen immer vernachlässigbar.

5. Die Anwendung von Pendel-Neigungsmessern.

Das einfachste Gerät zur Messung des Längsneigungswinkels δ und damit der Winkel α und γ ist ein physikalisches Schwerpendel. Sehr bewährt hat sich hierbei das Flüssigkeitspendel, bestehend aus einem U-Rohr, dessen einer Schenkel topfartig erweitert ist, und dessen anderer Schenkel als Meßrohr verwendet wird. Man kann ohne viel Mühe die Ablesegenauigkeit eines solchen U-Rohres durch genügend großen Abstand beider Schenkel sehr hoch treiben und durch Zwischenschaltung einer Drosselstelle die Dämpfung der Anzeige bei Vibrationen beliebig einstellen. Bahn- und Normalbeschleunigung üben nun ebenfalls auf das Pendel ihre Wirkung aus und ergeben Anzeigefehler, die aber bei Kenntnis der Beschleunigungsgröße und -richtung leicht berechnet und genau so wie bei der Flugbewegung selbst in Form von Korrekturfaktoren darstellbar sind. Die Aufstellung dieser Korrekturfaktoren für die Pendelfehl-anzeige soll im folgenden geschehen:

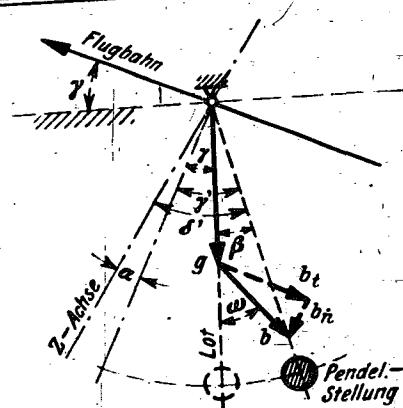


Bild 11. Die Lage des Schwerpendels unter Wirkung einer Beschleunigung b .

a) Der Fehlerwinkel β bei allgemeiner Beschleunigung. Wirkt am Schwerpendel eine resultierende Beschleunigung b unter dem Winkel ω zur Schwererichtung, dann lautet die Gleichung für die Pendelfehl-anzeige:

$$\lg \beta = \frac{b \sin \omega}{g + b \cos \omega}$$

oder bei Messung der beiden senkrecht zueinander gerichteten Komponenten b_t und b_n

$$\lg \beta = \frac{b_t \cos \gamma + b_n \sin \gamma}{g + b_n \cos \gamma + b_t \sin \gamma}$$

wobei

$$\lg(\gamma + \omega) = \frac{b}{b_n}$$

und

$$b = \sqrt{b_n^2 + b_t^2}$$

ist.

In Bild 11 sind alle Größen mit positivem Vorzeichen dargestellt, man erhält also eine positive Fehl-anzeige β , wenn das Pendel sich im gezeichneten Sinne einstellt. Es ist also die wahre Längsneigung

$$\delta = \delta' - \beta$$

und die wahre Bahnneigung

$$\gamma = \gamma' - \beta$$

Für verschiedene Verhältnisse $\frac{b}{g}$ ist der Fehlerwinkel β in Bild 12 in Abhängigkeit von ω dargestellt.

b) Der Fehlerwinkel β_t beim Flug mit $q = \text{konst.}$

Wir haben im Abschnitt C 2 und 4 gesehen, daß beim Flug mit $q = \text{konst.}$ sowohl mit, als auch ohne Schub lediglich eine Bahnbeschleunigung b_t auftritt, da die Normalbeschleunigung im Motorflug vernachlässigbar klein ist. Wir können nun für diesen Fall auch den Fehlerwinkel β_t unmittelbar in Abhängigkeit von den flugmechanischen Größen q , η und γ darstellen, so daß er in dieser Form bei der Auswertung genau so wie der Korrekturfaktor η anzuwenden ist.

Die Gleichung für β vereinfacht sich zu

$$\lg \beta_t = \frac{b_t \cdot \cos \gamma}{g + b_t \cdot \sin \gamma}$$

für die Bahnbeschleunigung b_t setzen wir II. Abschn. C 2 ein:

$$b_t = 5,91 \cdot 10^5 \cdot \frac{q \cdot \sin \gamma}{q^{1,235}}$$

und erhalten

$$\lg \beta_t = \frac{\cos \gamma}{1,66 \cdot 10^5 \cdot \frac{q^{1,235}}{q \cdot \sin \gamma} + \sin \gamma}$$

Dieser Fehlerwinkel wurde für verschiedene Werte $\frac{q}{q^{1,235}}$ berechnet und in Abhängigkeit von dem scheinbaren Bahnwinkel $\gamma' = \gamma + \beta$ in Bild 13 dargestellt. Man kann

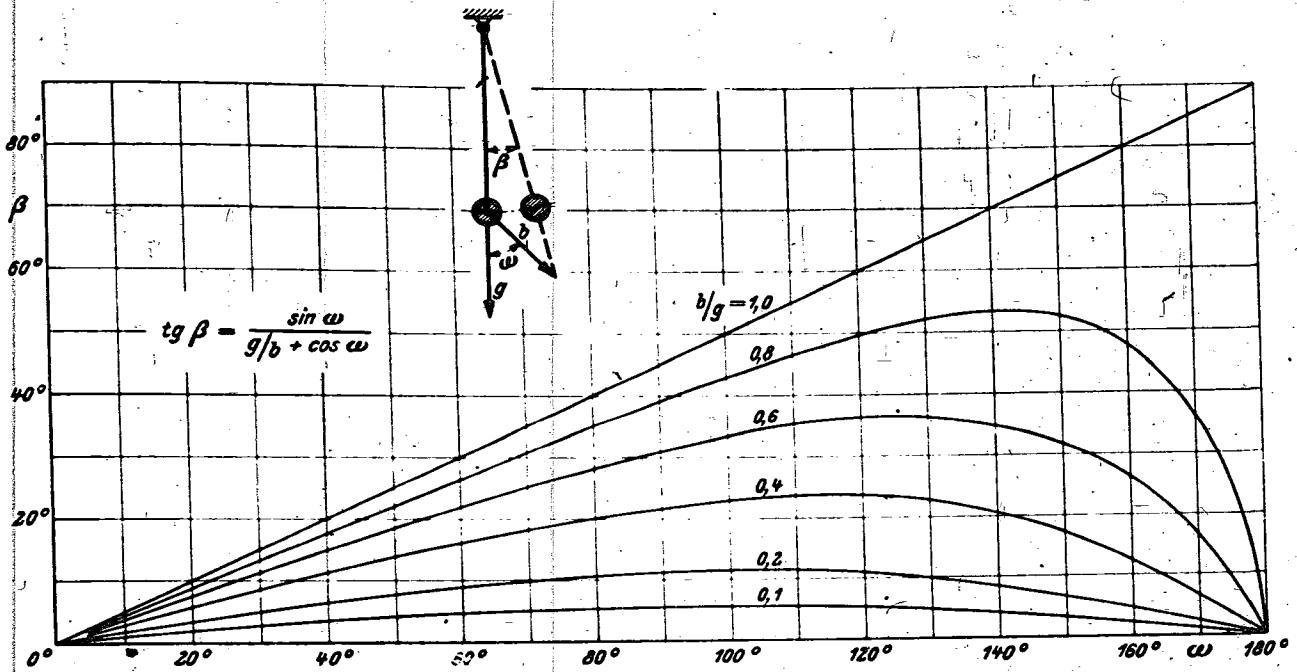


Bild 12. Die Pendel-Fehleranzeige als Funktion von b/g und ω .

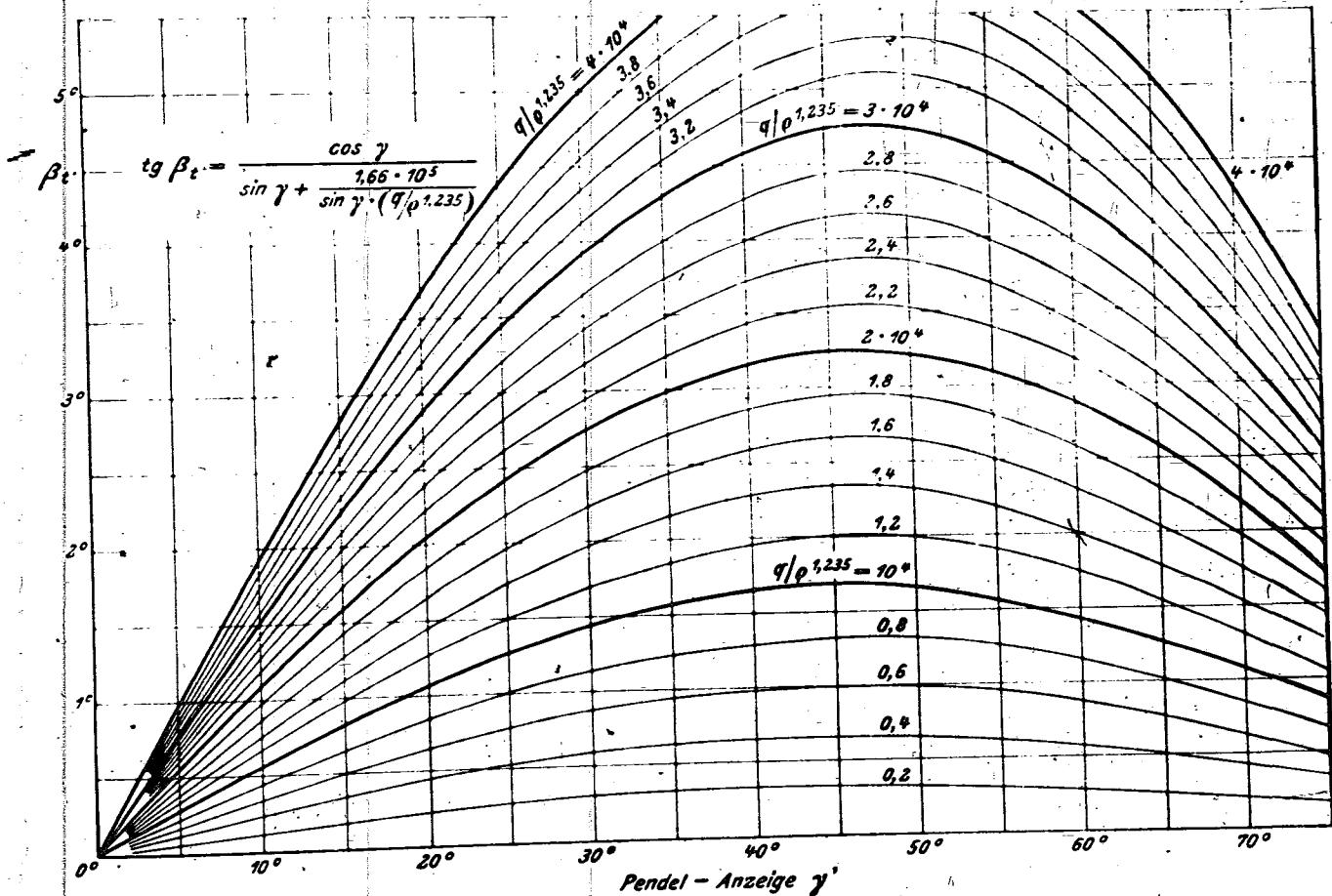


Bild 13. Der Pendel-Fehlerwinkel β_t beim Flug mit $q = \text{konst.}$

aus dieser Darstellung mit den unmittelbaren Meßgrößen γ , q und ρ den Fehlerwinkel β_t unmittelbar entnehmen. Zur Berechnung von $\rho^{1,235}$ wird auf Bild 7 verwiesen.

Der Fehlerwinkel β_n beim Flug mit $v = \text{konst.}$
 Aus Abschnitt C 3 und 4 geht hervor, daß die Normalbeschleunigung b_n beim Flug mit $v = \text{konst.}$ nur im steilen Gleitflug beträchtliche Werte erreicht. Im Motorflug bleibt

sie aber immer so klein, daß auch ihre Auswirkung auf die Pendelanzeige vernachlässigbar ist.
 Wir erhalten im Gleitflug

$$\text{tg } \beta_n = \frac{b_n \cdot \sin \gamma}{g + b_n \cdot \cos \gamma}$$

und lt. Abschn. C 3 für

$$b_n = \frac{v^2 \sin \gamma \cdot \text{tg } \gamma}{9,69 \cdot 10^5 \cdot \rho^{0,235}}$$

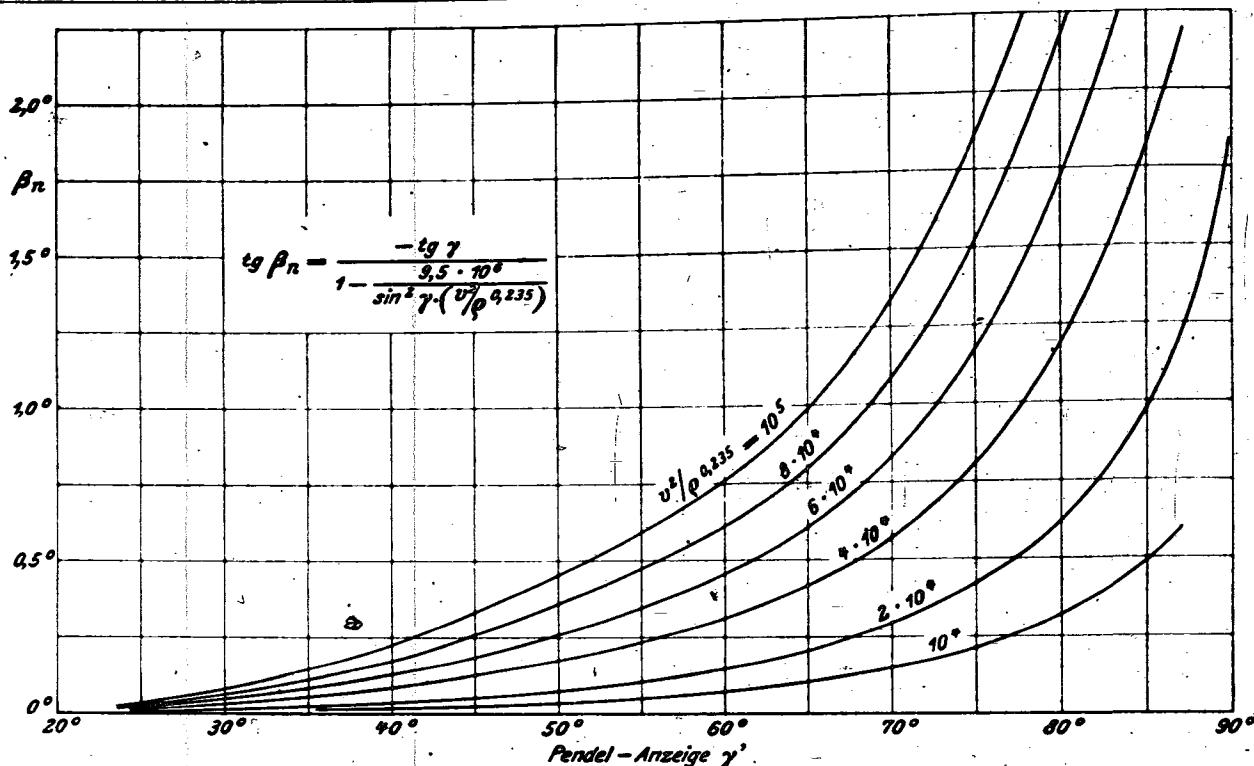


Bild 13. Der Pendel-Fehlerwinkel β_n beim Gleitflug mit v konst.

und daraus

$$\tan \beta_n = \frac{\tan \gamma}{1 - \frac{9,5 \cdot 10^6 \cdot v^{0,235}}{\sin^2 \gamma \cdot v^2}}$$

Dieser Fehlerwinkel wurde für verschiedene Werte $\frac{v^2}{\rho^{0,235}}$ berechnet und in Abhängigkeit vom unmittelbar gemessenen scheinbaren Bahnwinkel $\gamma' = \gamma + \beta$ in Bild 14 aufgetragen.

6. Der Einfluß der Luftschrauben.

Die wichtigste Flugzeugpolare ist diejenige bei fehlendem Schraubenstrahl, da sie die aerodynamischen Beiwerte der Flugzeugzelle unmittelbar angibt. Die Messung der Nullschubpolaren beim Motorflugzeug erfordert entweder eine Ausschaltung der Schraubeneinflüsse bei der Messung selbst, oder eine nachträgliche Berechnung. Ersteres ist bei Verstell-schrauben weitgehend möglich, bei festen Schrauben bleibt aber im allgemeinen nur der zweite Weg. Die verschiedenen Methoden sollen im folgenden kurz erläutert werden:

a) Flug bei abgenommener Luftschraube.

Diese an sich ideale Methode wurde früher einmal an einer FW 56 durchgeführt [6]. Das Flugzeug wurde hochgeschleppt. Diese Methode bleibt selbstverständlich auf kleine Flugzeuge beschränkt.

b) Luftschrauben in Segelstellung.

Bei Verstell-schrauben ist dies die beste Methode. Um einen Einfluß der Stellung der Blätter vor dem Flügel aus-

zuschalten, empfiehlt es sich, die Schrauben so zu verstellen, daß sie ganz langsam drehen (~ 30 U/min). Man erhält dann den zeitlichen Mittelwert der Beeinflussung. Der relative Luftschraubenwiderstandsbeiwert c_w^{**} ist für stehende Luftschrauben in Abhängigkeit von der Blattstellung $\beta_{0,7}$ (Winkel zwischen Luftschrauben-Druckseite bei $0,7 R$ gegen Schraubenebene) in untenstehender Zahlentafel angegeben.

Die Meßwerte zwischen den einzelnen Messungen zeigen gewisse Unterschiede, die von den Abweichungen der einzelnen Luftschraubenmodelle hinsichtlich Profildicke, Steigungsverlauf und Nabenform herrühren. Der Einfluß von Blattzahl z und Blattbreite $t_{0,7}/D$ ist in der Darstellung bereits dadurch ausgeschaltet, daß die Meßwerte durch das Blattbreitenverhältnis $z t_{0,7}/D$ dividiert wurden. Man erhält also für eine gegebene Luftschraube den Widerstand aus

$$W_s = c_w^* \cdot \left(\frac{z t}{D} \right)_{0,7} \cdot F_v \cdot q$$

Der Mittelwert von c_w^* ergibt sich aus den Meßwerten zu etwa $c_{wm}^* = 0,06$. Im allgemeinen dürfte das Rechnen mit diesem Mittelwert genau genug sein, da die in Segelstellung stehende Schraube an sich nur einen anteilmäßig geringen Betrag zum Gesamtwiderstand liefert. Man macht also nur einen Fehler untergeordneter Bedeutung, wenn der wahre Widerstand der Schraube vom Mittelwert der Messungen etwas abweicht.

^{a)} Unter relativer Widerstandsbeiwert c_w^{**} sei hier der auf das Blattbreitenverhältnis $\frac{z t}{D} = 1$ bezogene Widerstandsbeiwert der Luftschraube verstanden.

Tafel der Meßwerte.

Literaturstelle	Versuchsanstalt	Luftschraubendaten					Widerstand c_w	Relativer Widerstand c_w^*
		D (m)	H_0/D	z	$(z t/D)_0$	$(z t/D)_0$		
FB 1 085	Aachen	0,80	1,045	2	0,14	0,10	0,011	0,079
		0,80	1,045	4	0,28	0,10	0,018	0,064
		0,80	0,523	2	0,105	0,10	0,005	0,048
FB 1 179 J. Aer. Sc. 36 NACA-Rep. 641	Göttingen NACA NACA	0,45		3	0,170	0,08	0,011	0,065
					0,165		0,007	0,043
		3,05	0,476	3	0,198	0,093	0,0102	0,052

c) Luftschrauben im Nullschubzustand.

Man kann auch die Luftschraubenblätter so einstellen, daß sie gerade keinen Schub erzeugen. In diesem Zustand benötigt die Luftschraube aber Motorleistung, um ihre inneren Verluste zu decken. Bei hohen Geschwindigkeiten reicht man die vom Motor bei Leerlauf-Drosselstellung abgegebene Leistung meist nicht mehr aus, so daß man Gas geben muß, um den Nullschubzustand überhaupt zu erreichen. Das Luftschrauben-Drehmoment hat aber eine Erzeugung von Drall im Schraubenstrahl zur Folge, der die Auftriebsverteilung am Tragflügel stört und dadurch die Polare beeinflusst. Diese Methode birgt daher Meßfehler und sollte nur auf feste Schrauben angewendet werden, die nicht in Segelstellung gebracht werden können. Man muß sich dann von vornherein darüber im klaren sein, daß die Flugpolare zwar für Schub = 0 gilt, jedoch mit einem restlichen Strahleneinfluß behaftet ist. Den Nullschubzustand drehender Luftschrauben kann man auf zwei Methoden einstellen:

1. Man mißt unmittelbar hinter der Luftschraubenebene das zeitliche Integral des Gesamtdruckes über den gesamten Schraubenkreis und schaltet diesen Gesamtdruck über ein Differenzdruck-Meßgerät gegen den Gesamtdruck der Strömung. Wenn beide Drücke gleich groß sind, ist der Schraubenschub = 0. Ein solches Gerät wurde erstmals von W. Stieß [7] angewendet. Seine Eignung hat sich bei mehreren Versuchen erwiesen. Hierbei wurde das Integral des Gesamtdruckes längs eines Radius des Strahles gemessen.

Die Schub = 0-Bestimmung stellt mit diesem Gerät natürlich nur eine Näherung dar, da vorausgesetzt wird, daß der Schraubenstrahl rotations-symmetrisch ist, was natürlich nicht immer der Fall ist.

2. Ohne die Notwendigkeit, zusätzliche Meßgeräte anzubauen, hat sich folgende einfache Methode zur Nullschubbestimmung ergeben:

Der Fortschrittsgrad λ_0 , bei dem der Schub = 0 ist, ist für alle Schrauben fast nur eine Funktion des Blattwinkels β bei $0,7 R$. In Bild 15 wurde für eine gleichwertige Tragflügelpolare nach v. Doepp [8] der Verlauf von $\lambda_0 = f(\beta_{0,7})$ berechnet und dazu die unmittelbaren Meßwerte verschiedener Luftschraubenversuche eingetragen. Es ist also beim Flugversuch nur erforderlich, gerade so viel Gas zu geben, daß die Luftschraube mit ihrem λ_0 dreht. An Hand eines höhenkompensierten Fahrtmessers und eines guten Drehzählers ist dies leicht möglich.

Es gibt noch mehrere Möglichkeiten, z. B. das Einstellen der Luftschraube auf Drehmoment = 0, um den Dralleinfluß auszuschalten, und die Ermittlung des Widerstandes der Luftschraube aus entsprechenden Modellversuchen; jedoch haben die Methoden der Messung mit laufender Schraube sämtlich den Nachteil, daß immer nur das Integral des Schubes bzw. Drehmomentes = 0 ist, aber örtlich am Luftschraubenblatt Schub oder Widerstand erzeugt wird und somit ein restlicher Strahleneinfluß auf die Polare verbleibt. Man sollte diese Methoden daher nur im Notfall anwenden, wenn die Segelstellung mit stehender Schraube nicht möglich ist.

D. Die Umrechnung von Motorfluggpolaren.

Die Änderung des Fluggewichtes während der Messung sowie die atmosphärischen Einflüsse erfordern meistens eine Umrechnung der Meßwerte auf Einheitsverhältnisse, genau so, wie sie bei Flugleistungsmessungen allgemein üblich ist. Man kann daher für den Einfluß der Lufttemperatur auf die Motorleistung dieselben Umrechnungsformeln wie dort anwenden. Wichtig ist jedoch außerdem eine Umrechnung auf andere Motorleistung oder anderen Luftschraubenwirkungsgrad sowie auf andere Gewichte, z. B. zur Untersuchung der Flugleistung bei anderen Motoren. Im folgenden soll daher gezeigt werden, auf welche Weise solche Umrechnungen der Flugpolare einwandfrei durchführbar sind.

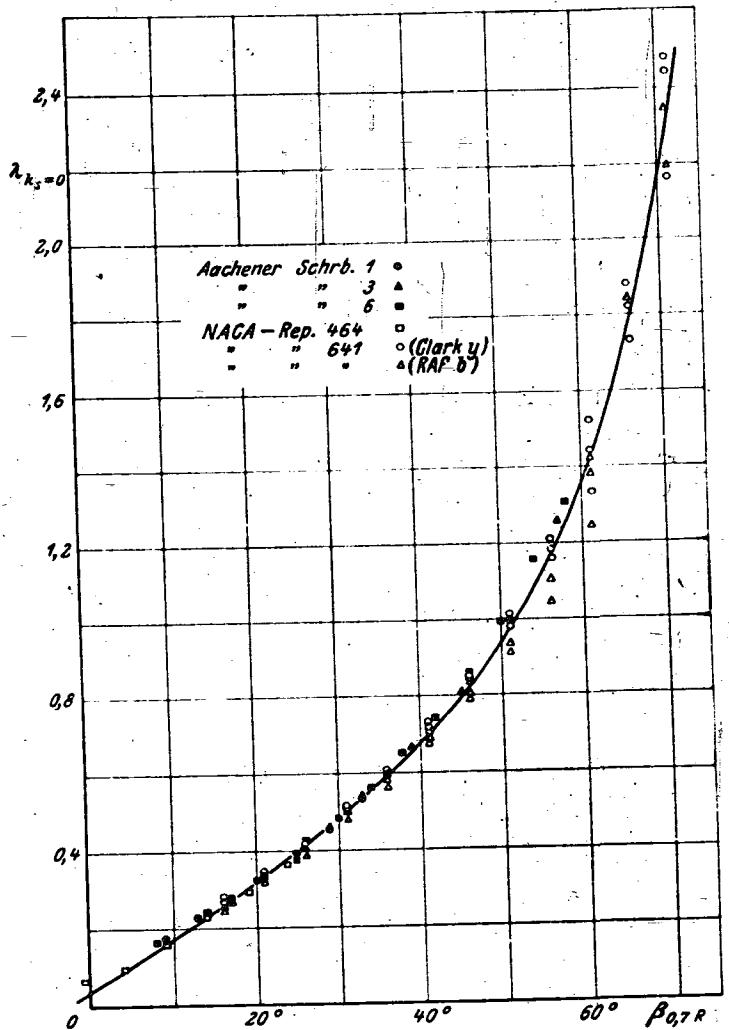


Bild 15. Der Nullschub-Fortschrittsgrad λ_0 in Abhängigkeit vom Blattwinkel $\beta_{0,7}$.

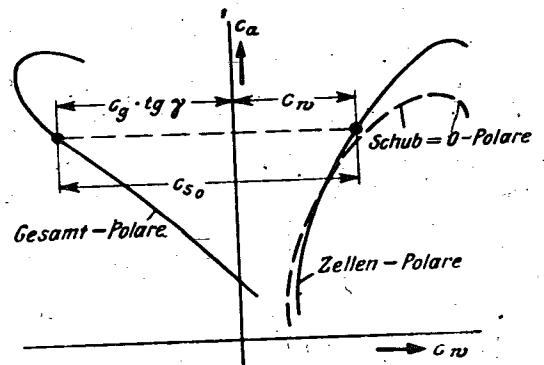


Bild 16. Darstellung der Flugzeugpolaren im Motorflug.

In Bild 16 sind die Motorfluggpolaren als Gesamtpolare und als »Zellenpolare« dargestellt, wobei letztere sich von der Schub = 0-Polaren durch den Strahleneinfluß unterscheidet. Die Zellenpolare kann aus der gemessenen Gesamtpolare angenähert richtig berechnet werden, wenn man den Luftschraubenwirkungsgrad η abschätzt. Dies ist hinreichend genau bei Verwendung z. B. der Aachener Luftschraubenmessungen [9] möglich. Meßbar ist die Zellenpolare nur unter Verwendung einer Schubmeßnabe [10], wie es Ebert (DVL) vor mehreren Jahren mit Erfolg durchgeführt hat. Bei zwei Punkten gleichen c_a -Wertes auf beiden Polaren herrscht also zwischen Schraube und Flugzeugzelle der Schraubenschub $S = c_s \cdot F \cdot q$, wobei man der Einfachheit halber den Schraubensog — die innere Kraft zwischen Schraube und Flugzeug — vernachlässigen und für η einfach

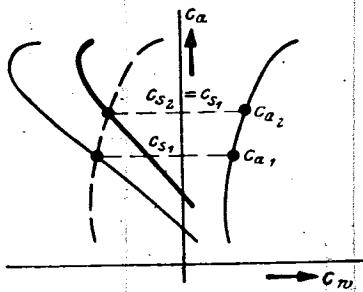


Bild 17. Zur Ermittlung des Einflusses einer Gewichtsänderung.

den Freifahrtwirkungsgrad η_0 einsetzen kann³⁾. Zur Überwindung des Flugzeug-Widerstandes wird von der Schubkraft der Betrag $c_w \cdot F \cdot q$ verbraucht, während zum Steigen die Schubkraft $c_g \cdot \lg \gamma = c_s - c_w$ übrigbleibt, aus der unmittelbar die Bahneigung berechnet werden kann.

1. Änderung des Fluggewichtes.

Wir wollen davon ausgehen, daß das Flugzeug nach der Gewichtsänderung gleich schnell fliegt. Dann bleibt der Wirkungsgrad η und c_s konst. und der Punkt der Polaren verschiebt sich nach anderem c_w , jedoch parallel zur »Zellenpolare«. Bild 17. Es wird also

$$c_{a2} = \frac{G_2}{G_1} \cdot c_{a1}$$

und

$$c_g \cdot \lg \gamma_2 = c_{s1} - c_{w2}$$

c_{w2} entnimmt man der aus der Flugpolarenmessung errechneten Zellenpolaren an der Stelle c_{a2} . Auf diese Weise kann durch punktweises Umrechnen die Polare für anderes Fluggewicht erhalten werden.

2. Änderung von N oder η .

Der Schubbeiwert c_s ist direkt proportional der nutzbaren Leistung $N \cdot \eta$. Eine Umrechnung ist daher ohne weiteres möglich.

3. Änderung der Luftdichte ρ .

Durch eine Luftdichteänderung ändert sich die Motorleistung, der Wirkungsgrad und der Flugzustand. Man geht zweckmäßigerweise davon aus, daß der Staudruck q nach der Änderung erhalten bleibt; dann wird

$$\frac{c_{a2}}{c_{a1}} \text{ und } \frac{c_{w2}}{c_{w1}}$$

jedoch wird die Fluggeschwindigkeit

$$v^2 = \frac{q_1}{q_2} \cdot v_1^2$$

Die daraus entstehende η -Änderung muß man wieder unter Zuhilfenahme von Luftschraubenwerten, zweckmäßigerweise durch Anwendung der übersichtlichen Methode der »gleichwertigen Tragflügelpolaren« [8] abschätzen und

³⁾ Dies ist für den hier vorliegenden Zweck bei Zugschrauben vor schlanken Motorgondeln und Rumpfen wohl immer zulässig. Bei dicken Rumpfen muß man gegebenenfalls eine Abschätzung des Soges vornehmen, wie es z. B. nach Weinig [12] möglich ist.

die Motorleistungsänderung aus Angaben für das betrachtete Motormuster entnehmen. Dann wird also

$$c_{s2} = c_{s1} \cdot \frac{N_2 \cdot \eta_2}{N_1 \cdot \eta_1}$$

und

$$c_g \cdot \lg \gamma_2 = \frac{N_2 \cdot \eta_2}{N_1 \cdot \eta_1} \cdot (c_g \cdot \lg \gamma_1 + c_{w1}) - c_{w1}$$

Hierbei begeht man eine kleine Unkorrektheit, da die Zellenpolare an jedem Punkt nur für das bei der Messung vorhandene c_w gilt. Wenn aber z. B. infolge der Änderung von N auch c_s geändert wird, ändert sich der Strahlfluß auf die Zelle und damit ihre Polare. Bei nur kleinen Änderungen wird man dies vernachlässigen können, bei großen Änderungen muß man diesen Einfluß von Fall zu Fall schätzen, wenn man größere Umrechnungsfehler vermeiden will.

Zum Schluß sei hier auf die handlichen Kurvenblätter von Göthert [11] verwiesen, mit deren Hilfe Änderungseinflüsse auf die Flugleistungen rasch und genau berechnet werden können. Die hierzu notwendigen Parameter können aus einer Flugpolarenmessung genau entnommen werden, so daß sie auch hierfür eine wertvolle Unterlage bildet.

E. Schrifttum.

- [1] Schmidt, Das Dornier-Luftlog, ein neues Meßgerät für Flugversuche. Jahrbuch 1938 d. Deutschen Luftf.-Forschg., S. 1, 583.
- [2] Danielzig, Steig- und Sinkgeschwindigkeitsschreiber. Luftwissen Bd. 4 (1937) Nr. 5.
- [3] Jones u. Stevens, The direct measurement of the angle of flight path of an aeroplane. ARC. Rep. and Mem. No. 1049.
- [4] Schieferdecker u. Gebhardt, Ergebnisse von Flugmessungen mit der Kino-Theodolitanlage. System Raethjen der DFS. Jahrb. 1938 d. Deutschen Luftf.-Forschg. S. 1, 611.
- [5] Stieß, Der Einfluß des Staudruckes auf die Anzeige von Außenluftthermometern. Bericht der Dornier-Werke (unveröffentlicht).
- [6] Spilger, Flugleistungsmessungen an dem Flugzeug FW 56 Stöber bei abgenommener Schraube. Jahrb. 1938 d. Deutschen Luftf.-Forschg. S. 1, 303.
- [7] Stieß, Nullschub-Anzeigegerät und Ruderblockierung zwei neue Hilfsmittel bei Flugversuchen. Luftf.-Forschg. Bd. 17 (1940), Lfg. 8, S. 236.
- [8] v. Doepp, Luftschraubenrechnungen nach dem Verfahren der gleichwertigen Tragflügelpolare. Luftf.-Forschg. Bd. 13 (1936), S. 46.
- [9] Dirksen, Systematische Windkanalmessungen an einer Modell-Luftschraubenserie. Jahrb. 1938 d. Deutschen Luftf.-Forschg. S. 1, 371.
- [10] Ebert, Über Flugversuche zur Messung der Flugzeugpolaren und den Einfluß des Schraubenstrahls. Jahrb. d. DVL 1932.
- [11] Göthert, Einfluß von Änderungen des Fluggewichtes, des Widerstandes, der Motorleistung usw. auf die Flugleistungen. Nichtveröffentlichter DVL-Bericht.
- [12] Weinig, Aerodynamik der Luftschraube. S. 198 u. 323.

Umschlagbeginn und Absaugung*).

Ein Beitrag zur Grenzschichttheorie.

Von J. Pretsch.

Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen e. V., Institut für Forschungsflugbetrieb und Flugwesen.

Für das Geschwindigkeitsprofil in der Reibungsschicht, das sich an einer längsangeströmten ebenen Platte asymptotisch einstellt, wenn überall mit konstanter Geschwindigkeit abgesaugt wird, werden exakt ohne Zuhilfenahme einer näherungsweise Geschwindigkeitsverteilung nach der Methode der kleinen Schwingungen sowohl die Stabilitätsgrenze wie die Anfachung der überlagerten Störungen berechnet und mit den Ergebnissen an der undurchlässigen Platte verglichen.

Gliederung.

- I. Aufgabenstellung.
- II. Die indifferenten Störungen für das asymptotische Absaugeprofil an der ebenen Platte.
 - a) Die reibungslosen Lösungen q_1, q_2 der Störungsgleichung in Wandnähe.
 - b) Die reibungslosen Lösungen q_1, q_2 der Störungsgleichung bei großem Wandabstand.
- III. Die angefachten Störungen für das asymptotische Absaugeprofil an der ebenen Platte.
 - a) Die reibungslosen Lösungen q_1^*, q_2^* der Störungsgleichung in Wandnähe.
 - b) Die reibungslosen Lösungen q_1^*, q_2^* der Störungsgleichung bei großem Wandabstand.
- IV. Vergleich der Stabilität der Plattenreibungsschicht mit und ohne Absaugung.
- V. Zusammenfassung.
- VI. Schrifttum.

I. Aufgabenstellung.

Der Widerstand eines umströmten Körpers läßt sich, wie Messungen [1] ergeben haben, durch Absaugung der wandnahen Teile des strömenden Mediums erheblich vermindern. Dies kann man dadurch erklären, daß die Geschwindigkeitsverteilungen in der Reibungsschicht unmittelbar nach der Absaugung völliger werden und damit die Gefahr der Ablösung zunächst aufgeschoben wird. Ist die Reibungsschicht laminar, so kann man auch sagen, daß die Stabilität des Geschwindigkeitsprofils gegenüber kleinen Störungen unmittelbar nach der Absaugung größer wird und damit die Gefahr des Umschlags in die turbulente Strömungsform stromabwärts verschoben wird, wobei eine Tendenz zur Ablösung der Laminarschicht gar nicht zu bestehen braucht.

In der vorliegenden Mitteilung soll nun an dem einfachen Beispiel der ebenen längsangeströmten Platte nachgewiesen werden, in welchem Maße die Stabilität der Reibungsschicht wächst, wenn längs der ganzen Wand mit konstanter Geschwindigkeit abgesaugt wird.

Für die undurchlässige Platte sind die Stabilitätseigenschaften bekannt. W. Tollmien [10] berechnete die Stabilitätsgrenze, die als niedrigste Reynoldszahl definiert wird, unterhalb deren keine Strömung angefacht wird. H. Schlichting [7] und J. Pretsch [6] haben später auch die Stärke der Anfachung bestimmt, die die Störungsamplituden erhöhen, wenn diese Stabilitätsgrenze überschritten wird.

Diese Rechnungen sollen nunmehr für dasjenige asymptotische Geschwindigkeitsprofil fortgesetzt werden, das sich in einiger Entfernung von der Plattenvorderkante einstellt, in einiger Entfernung von der Plattenvorderkante einstellt, wenn man längs der ganzen Platte mit konstanter Geschwindigkeit absaugt. Dieses Geschwindigkeitsprofil haben A. Betz und H. Schlichting [9] vor kurzem angegeben; es läßt unmittelbar, durch Integration der Grenzschicht-

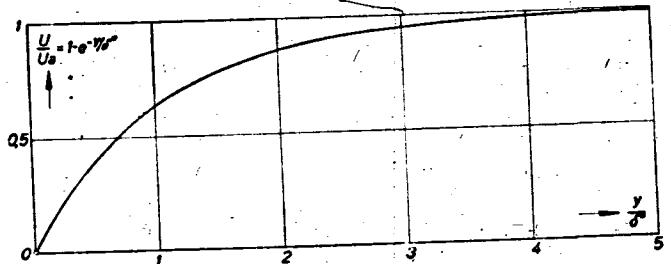


Bild 1. Das asymptotische Geschwindigkeitsprofil bei konstanter Absaugung an der längsangeströmten Platte; zugleich die reibungslose Lösung q_{10} , wenn als Abszisse y/d [Gl. (8)] genommen wird.

gleichung, wenn man die Normalgeschwindigkeit v gleich der konstanten Absaugegeschwindigkeit v_0 setzt, zu:

$$\frac{U}{U_0} = 1 - e^{-y/\delta^*}; \delta^* = \frac{v}{v_0}, \dots \dots (1)$$

wobei δ^* die Verdrängungsdicke bezeichnet (Bild 1).

Ani unströmten Körper ist diese exakte Geschwindigkeitsverteilung die einzige bislang bekannte; die sich in einem geschlossenen analytischen Ausdruck darstellen läßt.

Aus diesem Grunde lag der Gedanke nahe, die Stabilitätsuntersuchung unmittelbar für dieses exakt gegebene Profil durchzuführen, ohne es erst durch eine andere analytische Form anzunähern, für die die Lösungen der Störungsdifferentialgleichung schon bekannt sind [4].

Bisher war man zu diesen Näherungsdarstellungen deswegen gezwungen, weil die strengen Lösungen der Grenzschichtgleichung nie durch einfache analytische Ausdrücke gegeben waren. Dabei soll von dem linearen Profil bei der Couetteströmung zwischen zwei ebenen Wänden und dem Parabelprofil der Hagen-Poiseuilleströmung im Rohr abgesehen werden, die sich als stets stabil erwiesen [2, 3, 5].

Überraschenderweise verläuft die exakte Stabilitätsuntersuchung des asymptotischen Absaugeprofils insofern wesentlich einfacher als in den bisherigen Untersuchungen mit Näherungsverteilungen, als man die Lösungen der Störungsdifferentialgleichung nur noch in Wandnähe, nicht aber mehr im Anschlußbereich an die Potentialströmung zu kennen braucht.

II. Die indifferenten Störungen für das asymptotische Absaugeprofil an der ebenen Platte.

Um die Stabilität der durch (1) gegebenen Geschwindigkeitsverteilung in der Plattenreibungsschicht zu untersuchen, überlagern wir in bekannter Weise [4] eine ebene Störungsbewegung mit der Stromfunktion:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(x, y) e^{i\alpha(x-ct)}, \dots \dots (2)$$

hier bezeichnet x die Koordinate in Anströmrichtung, t die Zeit, α die räumliche Kreisfrequenz der Störung und der Realteil von $c = c_r + ic_i$ ihre Phasengeschwindigkeit. Der Imaginärteil c_i entscheidet über Anfachung ($c_i > 0$) oder Dämpfung ($c_i < 0$).

Wir betrachten in diesem Abschnitt zunächst den Fall indifferenten Schwingungen ($c_i = 0$) und fragen insbesondere

nach der sog. Indifferenzkurve, die in der λ, Re^* -Ebene ($Re^* = \frac{U_a \cdot \delta^*}{\nu}$) die stabilen und instabilen Zustände trennt.

Wie in einer früheren Arbeit [4] im einzelnen nachgewiesen wurde, erhält man aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für die Störungsamplitude φ auch in dem allgemeinen Falle, daß die Normalkomponente V nicht verschwindet, die lineare Differentialgleichung 4. Ordnung:

(U - c)(q'' - \lambda^2 q) - U'' q - \lambda Re^* [q^{IV} - 2\lambda^2 q'' + \lambda^4 q]; (3)

die Längen sind auf die Verdrängungsdicke δ^* und die Geschwindigkeiten auf die Potentialgeschwindigkeit U_a bezogen und die Differentiationen nach dem Wandabstand y ausgeführt.

Die allgemeine Lösung von (3) läßt sich in der Form ansetzen:

q = C_1 q_1 + C_2 q_2 + C_3 q_3 + C_4 q_4 + ... (4)

W. Tollmien und H. Schlichting haben nun gezeigt, daß das Integral q_4 für große y so stark wächst, daß es mit Rücksicht auf die Randbedingungen in der allgemeinen Lösung nicht enthalten sein kann; man hat also $C_4 = 0$ zu setzen. Die Lösung q_3 ist unabhängig von der speziellen Geschwindigkeitsverteilung und ein für allemal tabuliert [8, 4]. Die Konstanten C_1, C_2 und C_3 lassen sich aus dem linearen homogenen Gleichungssystem berechnen, das die drei Randbedingungen $q = q' = 0$ an der Wand ($y = 0$) und $q' = -\lambda q$ im Anschlußbereich ($y = a$) an das Gebiet konstanter Geschwindigkeit darstellt. Die letzte Randbedingung folgt daraus, daß im Anschlußbereich $U'' \approx 0$ und die Reibungswirkung vernachlässigbar ist, so daß nach (3) dort $q'' - \lambda^2 q = 0$, d.h. $q = e^{-\lambda y}$ wird. Die Determinante dieses Systems muß also verschwinden:

Matrix of coefficients for q_1, q_2, q_3 at y=0 and y=a. (5)

with \Phi_{3a} = q'_{3a} - \lambda q_{3a} (v = 1, 2) ... (6)

Ein Glied Φ_{3a} tritt in der Determinante nicht auf, weil die Partikularlösung q_3 im Anschlußbereich bereits abgeklingen ist.

Die komplexe Gleichung (5) ist mit zwei reellen Gleichungen äquivalent, in denen die Veränderlichen λ, Re^*, c_r und c_i enthalten sind. Beschränken wir uns zunächst auf den Fall indifferenten Störungen ($c_i = 0$), so erhält man aus ihnen nach Elimination von c_r eine Beziehung zwischen der Reynoldszahl Re^* und der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{\lambda}$ der Störung. Das ist die Gleichung der gesuchten Indifferenzkurve.

Wir wenden uns zunächst der Berechnung der Integrale q_1, q_2 zu, für die wir wegen der Konvergenzeigenschaften zwei verschiedene Entwicklungen angeben, eine in Wandnähe ($q_{1w}, q'_{1w}, q_{2w}, q'_{2w}$) und eine im Anschlußbereich an die konstante Potentialgeschwindigkeit (Φ_{1a}, Φ_{2a}).

a) Die reibungslosen Lösungen q_1, q_2 der Störungsgleichung in Wandnähe.

Nehmen wir λRe^* als groß an, so vereinfacht sich (3) zu der sog. reibungslosen Störungsgleichung:

(U - c)(q'' - \lambda^2 q) - U'' q = 0 ... (7)

Diese Differentialgleichung hat einen Pol erster Ordnung an der Stelle $U = c = c_r$, der wir den «kritischen» Punkt $y = y_c$ zuordnen.

Wir wollen nun die Konstruktion der Lösungen q_1, q_2 von (7) für die spezielle Geschwindigkeitsverteilung (1) angeben.

Wir führen dazu die neue Veränderliche:

y_1 = y - y_c ... (8)

ein, dann lautet die Störungsgleichung (7):

(e^{y_1} - 1) (\frac{d^2 \varphi}{d y_1^2} - \lambda^2 \varphi) + \varphi = 0 ... (9)

Schreibt man (9) nach Multiplikation mit e^{y_1} und Ausdividieren in der Form:

y_1^2 \frac{d^2 \varphi}{d y_1^2} + \varphi \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i y_1^i = 0 ... (10)

so ist die erste Lösung φ_1 gegeben durch:

\varphi_1 = y_1 \sum_{r=0}^{\infty} c_r y_1^r ... (11)

wobei die c_r aus den β_r durch das Gleichungssystem

c_r (r+1)r + \sum_{\mu=0}^{r-1} \beta_{r-\mu} c_{\mu} = 0; c_0 = 1 ... (12)

gewonnen werden.

Die Lösung q_2 ist gegeben durch:

q_2 = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} b_r y_1^r - q_1 \ln y_1 für y_1 > 0 ... (13)

q_2 = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} b_r y_1^r - q_1 (\ln |y_1| - i\pi) für y_1 < 0 ... (14)

Das imaginäre Glied in (14) erhielt W. Tollmien durch eine Diskussion der allgemeinen Störungsgleichung (3) in der Nähe von $U = c$, in der sog. «kritischen» Schicht.

Die Koeffizienten der Reihenentwicklungen, die für alle Werte y_1 konvergieren, sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt.

Da die Konvergenz dieser Reihenentwicklungen nur in Wandnähe (kleine y_1) gut ist, schlecht dagegen für den Anschlußbereich an die konstante Potentialgeschwindigkeit U_a (große y_1), wurde versucht, die Lösungsaggregate Φ_{1a}, Φ_{2a} auf eine andere Weise zu gewinnen.

b) Die reibungslosen Lösungen q_1, q_2 bei großem Wandabstand.

Man kann die reibungslosen Lösungen q_1, q_2 statt als Potenzreihen in y mit Koeffizienten, die von λ abhängen, auch umgekehrt nach einem Vorschlag von W. Tollmien als Potenzreihen in λ mit Koeffizienten, die von y abhängen, darstellen, also:

q_1 = q_{10} + \lambda^2 q_{11} + \lambda^4 q_{12} + \lambda^6 q_{13} + ... q_2 = q_{20} + \lambda^2 q_{21} + \lambda^4 q_{22} + \lambda^6 q_{23} + ... (15)

Zahlentafel 1. Reihenoeffizienten der Lösungen q_1, q_2 für die Grundströmung: U = 1 - e^{-y} \delta^*

Table with 2 columns for q1 and q2 coefficients, and rows for beta, c, e, b, b coefficients. Includes Bernoulli numbers and factorial terms.

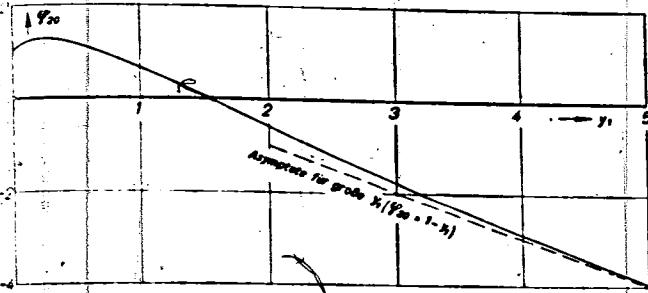


Bild 2. Die reibungslose Lösung q_{20} .

Wir schreiben zur Gewinnung der $q_{r,v}$ ($v = 1, 2$) die reibungslose Störungsgleichung (7) in der Form:

$$(U' - c) q'' - U'' q = \lambda^2 q \quad (16)$$

Die nullte Näherung q_{10}, q_{20} erhalten wir als Lösungen der homogenen Differentialgleichung:

$$(U' - c) q'' - U'' q = 0 \quad (17)$$

zu

$$\left. \begin{aligned} q_{10} &= U' - c \\ q_{20} &= (U' - c) \int \frac{dy}{(U' - c)^2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Für die nächsten Näherungen erhalten wir die Differentialgleichungen:

$$(U' - c) q''_{r,n} - U'' q_{r,n} - q_{r,n-1} \lambda^2 = 0 \quad (r = 1, 2) \quad (19)$$

deren Lösungen sich nach der Methode der Variation der Konstanten in der Form darstellen lassen:

$$q_{r,n} = q_{10} \int q_{r,n-1} q_{20} dy - q_{20} \int q_{r,n-1} q_{10} dy \quad (20)$$

Nun ist für das asymptotische Absaugeprofil (1) an der ebenen Platte (Bild 1 und 2):

$$q_{10} = 1 - e^{-\lambda y_1} \quad (21)$$

$$q_{20} = 1 - (e^{-\lambda y_1} - 1) [y_1 - \ln(1 - e^{-\lambda y_1})] \quad (22)$$

Die Gleichungen (21), (22) sind identisch mit den Reihenentwicklungen (11), (13), wenn man in den Reihenkoeffizienten $\lambda = 0$ setzt.

Für große Werte y_1 , für die wir ja eine Darstellung der Lösungen q_1, q_2 suchen, ist

$$q_{10} \sim 1 \quad (23)$$

$$q_{20} \sim 1 - y_1 \quad (24)$$

Setzen wir (23), (24) in (20) ein, so erhalten wir nach (15):

$$q_1 = \cos(\lambda y_1) \quad (25)$$

$$q_2 = \cos(\lambda y_1) - \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda y_1) \quad (26)$$

und damit die bemerkenswerte Beziehung:

$$\Phi_{2,u} = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \Phi_{1,u} \quad (27)$$

Damit reduziert sich die aus (5) folgende Beziehung des Randwertproblems:

$$\frac{q_{3,w}}{q'_{3,w}} = \frac{q_{2,w} \Phi_{2,u}}{q'_{2,w} \Phi_{1,u}} = \frac{q_{1,w} \Phi_{2,u}}{q'_{1,w} \Phi_{2,u}} \quad (28)$$

auf die einfache Gleichung:

$$\frac{q_{3,w}}{q'_{3,w}} = \frac{q_{2,w}}{q'_{2,w}} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{q_{1,w}}{q'_{1,w}} \quad (29)$$

die die Lösungsaggregate $\Phi_{1,u}, \Phi_{2,u}$ überhaupt nicht mehr enthält.

Die Lösung der Gleichung (29) geschieht in bekannter Weise, indem man den Imaginärteil der tabuliert vorliegenden Funktion

$$\left. \begin{aligned} F(\eta_0) &= \frac{D(\eta_0)}{\eta_0} = \frac{1}{\varepsilon \eta_0} \frac{q_{3,w}}{q'_{3,w}} \\ \eta_0 &= \frac{y_c}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = (\lambda Re^* U_0') \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

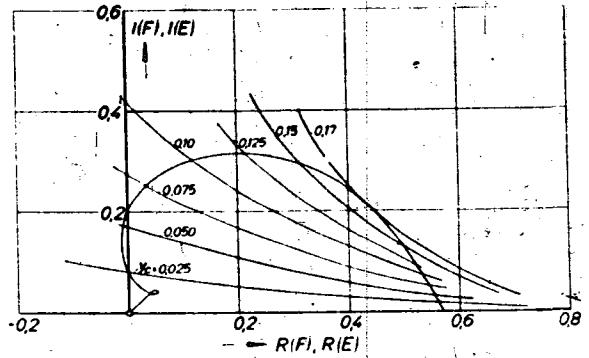


Bild 3. Polardiagramm zur Ermittlung der Indifferenzkurve.

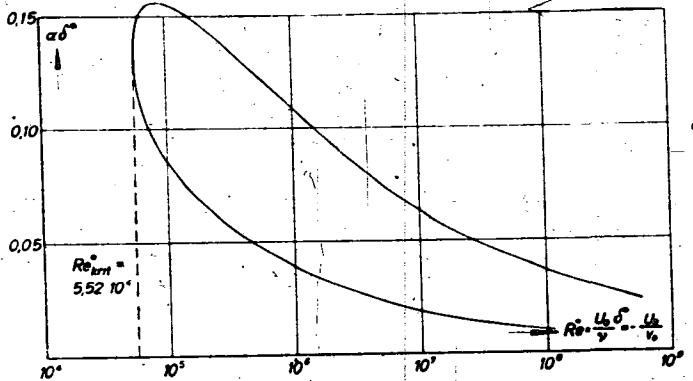


Bild 4. Indifferenzkurve des asymptotischen Absaugeprofils.

über dem Realteil von $F(\eta_0)$ aufträgt und in dieses Polardiagramm zu vorgegebenem c_r die Funktion

$$E(\lambda, c_r) = \frac{1}{y_c} \frac{q_{2,w}}{q'_{2,w}} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{q_{1,w}}{q'_{1,w}} \quad (31)$$

einzeichnet (Bild 3). Die Schnittpunkte $F(\eta_0) = E(\lambda, c_r)$ geben zunächst das zu einem bestimmten λ gehörende η_0 und dann mit (30) die gesuchte Indifferenzkurve $\lambda(Re^*)$ (Bild 4). Die Stabilitätsgrenze liegt bei der Reynoldszahl $Re^* = 5.52 \cdot 10^4$ und ist damit etwa achtzigmal größer als bei der Plattenströmung ohne Absaugung. Die Absaugung hat also eine außerordentlich stark stabilisierende Wirkung.

Im folgenden Abschnitt wollen wir nun noch für den von der Indifferenzkurve umschlossenen Bereich der instabilen Störungszustände das Maß der Anfachung berechnen, das die Störungen nach Überschreiten der Indifferenzkurve erfahren.

III. Die angefachten Störungen für das asymptotische Absaugeprofil an der ebenen Platte.

Wir beschränken uns auf kleine Werte der Anfachungsgröße c_r , so daß die allgemeine Lösung der Störungsdifferentialgleichung (3) in der Form darstellbar ist:

$$q^* = \sum_{r=1}^4 C_r^* q_r^* = \sum_{r=1}^4 C_r^* \left(q_r - \frac{i c_r}{U_0'} \omega_r \right) \quad (32)$$

wo mit q_r die in Abschnitt II besprochenen Partikularlösungen für $c_r = 0$ und mit ω_r Zusatzfunktionen für $c_r > 0$ bezeichnet werden.

Wir berechnen zunächst die Integrale q_1^*, q_2^* bzw. die Zusatzfunktionen ω_1, ω_2 .

a) Die reibungslosen Lösungen q_1^*, q_2^* der Störungsgleichung in Wandnähe.

Die reibungslose Störungsgleichung (7) hat jetzt einen Pol erster Ordnung an der Stelle $U = c = c_r + i c_i$, der wir nunmehr den Punkt y_c^* der komplexen y -Ebene zuordnen. In der Umgebung dieser Singularität kann man

leicht ein Fundamentalsystem durch Reihenentwicklung angeben. Um den Zusammenhang mit dem oben behandelten Fall des rein reellen c herzustellen, geben wir zunächst die Beziehung zwischen dem komplexen y_c^* und dem Wandabstand y_c der kritischen Schicht $U = c_r$ an.

Aus $U(y_c) = c_r \dots \dots \dots (33)$

und $U(y_c^*) = c_r + i c_i \dots \dots \dots (34)$

folgt $U(y_c^*) - U(y_c) = i c_i = (y_c^* - y_c) U_0' + \dots \dots \dots (35)$

und unter Beschränkung auf die in c_i linearen Glieder somit:

$$y_c^* - y_c \approx - \frac{i c_i}{U_0'} \dots \dots \dots (36)$$

Führen wir noch die neue Veränderliche

$$y_1^* = y - y_c^* = y - y_c + y_c - y_c^* = y_1 - \frac{i c_i}{U_0'} \dots \dots \dots (37)$$

ein, so erhalten wir nach (1) unter Benutzung von (36):

$$U - c = e^{-y_1^* \delta^*} - e^{-y_1 \delta^*} = [e^{-y_1 \delta^*} - i c_i] [1 - e^{-y_1^* \delta^*}] \dots \dots \dots (38)$$

Für nicht verschwindende Anfachung lautet die reibungslose Störungsgleichung für das asymptotische Absaugeprofil an der ebenen Platte somit:

$$(e^{y_1^*} - 1) \left(\frac{d^2 q^*}{d y_1^{*2}} - \lambda^2 q^* \right) - q^* = 0, \dots \dots \dots (39)$$

sie ist bemerkenswerterweise genau so aufgebaut wie die Gleichung (9) für $c_i = 0$, nur werden die Veränderlichen q_1, y_1 durch q_1^*, y_1^* ersetzt. Es tritt jedoch c_i selbst in diesem besonderen Falle explizit nicht in (39) auf. Infolgedessen sind die Koeffizienten der Reihenentwicklungen:

$$\left. \begin{aligned} q_1^* &= y_1^* \sum_{r=0}^{\infty} c_r^* y_1^{*r} \\ q_2^* &= 1 + \sum_{r=2}^{\infty} b_r^* y_1^{*r} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & q_1^* (\ln y_1^* - i \arg y_1^*) \\ & \text{für } R(y_1^*) < 0 \end{aligned} \dots \dots \dots (40)$$

dieselben wie in den Reihenentwicklungen (11), (14), d. h. es ist:

$$c_r^* = c_r; b_r^* = b_r \dots \dots \dots (41)$$

Wir geben die Lösung q_2^* im folgenden nur für $R(y_1^*) < 0$ an, da wir sie, wie unten gezeigt wird, nur an der Wand, nicht aber im Anschlußgebiet an die Potentialströmung zu berechnen brauchen. Da allgemein für jede analytische Funktion f

$$f(y_1^*) = f\left(y_1 - \frac{i c_i}{U_0'}\right) = f(y_1) - \frac{i c_i}{U_0'} \frac{df}{dy_1} \dots \dots \dots (42)$$

ist, erhalten wir nach (32)

$$\omega_r = \frac{d q_r}{d y_1} = q_r' \dots \dots \dots (43)$$

also nach (11) und (14)

$$\omega_1 = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) c_r y_1^r \dots \dots \dots (44)$$

$$\omega_2 = \sum_{r=2}^{\infty} r b_r y_1^{r-1} - \ln |y_1| q_1' - \frac{q_1}{y_1} + i \pi q_1' \text{ für } R(y_1^*) < 0 \dots \dots \dots (45)$$

Da wir an der Wand ($y = 0; y_1 = y_{1w} = R(y_{1w}^*) < 0$) auch die ersten Ableitungen q_1^*, q_2^* benötigen, seien auch für sie die Formeln angegeben:

$$q_1^* = q_1' - \frac{i c_i}{U_0'} \omega_1' \dots \dots \dots (46)$$

mit $\omega_1' = q_1'' \dots \dots \dots (47)$

also $\omega_1 = \sum_{r=1}^{\infty} (r+1) r c_r y_1^{r-1} \dots \dots \dots (48)$

$$\omega_2 = \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) b_r y_1^{r-2} + \frac{q_1}{y_1^2} - \frac{2 q_1}{y_1} - \ln |y_1| q_1'' + i \pi q_1' \text{ für } R(y_1^*) < 0 \dots \dots \dots (49)$$

Für spätere Umformungen zerlegen wir q_{2w}, q_{2w}' noch in ihren Real- und Imaginärteil:

$$\left. \begin{aligned} q_{2w} &= A_1 + i B_1 \\ q_{2w}' &= q_{2w}' = A_2 + i B_2 \\ q_{2w}'' &= A_3 + i B_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

b) Die reibungslosen Lösungen q_1^*, q_2^* der Störungsgleichung bei großem Wandabstand.

In Analogie zu dem in 1b geschilderten Verfahren konstruieren wir auch für $c_i > 0$ die Lösungen q_1^*, q_2^* für großen Wandabstand, indem wir von der Reihenentwicklung nach Potenzen von λ^2 ausgehen. Wegen der Analogie der Differentialgleichungen (9) und (39) erhalten wir nämlich:

$$\left. \begin{aligned} q_1^* &= \cos(\lambda y_1^*) \\ q_2^* &= \cos(\lambda y_1^*) + i \sin(\lambda y_1^*) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

und

$$\Phi_{2w}^* = \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \Phi_{1w}^* \dots \dots \dots (52)$$

Somit reduziert sich die Gleichung des Eigenwertproblems entsprechend Gl. (29) auf die Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} q_{1w}^* &= q_{2w}^* \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) q_{1w}^* \\ q_{1w}^* &= q_{2w}^* \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) q_{1w}^* \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

Wir betrachten zunächst die Funktion:

$$E^* = \frac{q_{2w}^*}{y_c^* q_{2w}^*} - \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{q_{1w}^*}{q_{1w}^*} \dots \dots \dots (54)$$

die sich mit den Beziehungen (36), (50) unter Beschränkung auf die in c_i linearen Glieder nach kurzer Zwischenrechnung auf die Form bringen läßt:

$$E^*(\lambda, c_r, c_i) = E(\lambda, c_r) [1 - \frac{c_i}{c_r} (\varepsilon_1 + i \varepsilon_2)], \dots \dots \dots (55)$$

wo E durch (31) bestimmt ist und für $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ die Formeln gelten:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{U_0'} \left[\frac{B_2 C_1 - B_1 C_2}{B_1^2 + C_1^2} - \frac{B_3 C_2 - B_2 C_3}{B_2^2 + C_2^2} \right] \dots \dots \dots (56)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{U_0' y_c} - \frac{1}{U_0'} \left[\frac{B_1 B_2}{B_1^2 + C_1^2} - \frac{B_2 B_3 + C_2 C_3}{B_2^2 + C_2^2} \right] \dots \dots \dots (57)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= A_1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) q_{1w}^* \\ C_2 &= A_2 - \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) q_{1w}^* \\ C_3 &= A_3 - \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) q_{1w}^* \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (58)$$

Anschließend betrachten wir die auf der linken Seite von (53) stehende Funktion:

$$F(\eta_0^*) = \frac{1}{\varepsilon^*} \frac{q_{1w}^*}{q_{2w}^*} - \frac{D(\eta_0^*)}{\eta_0^*} \dots \dots \dots (59)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^* &= \left[\lambda \operatorname{Re}^* \left(U_0' + i c_i \frac{U_0''}{U_0'} \right) \right]^{-1/2} \\ \eta_0^* &= y_c \left(1 + \frac{i c_i}{U_0' y_c} \right) \left[\lambda \operatorname{Re}^* U_0' \left(1 + i c_i \frac{U_0''}{U_0'^2} \right) \right]^{1/2} \\ &\sim \eta_0 \left[1 + \frac{i c_i}{U_0' y_c} \left(1 - \frac{y_c}{3 \delta^*} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (60)$$

Da wir uns auf kleine Werte der Anfachung beschränken wollen, entwickeln wir $F(\eta_0^*)$ in der Form:

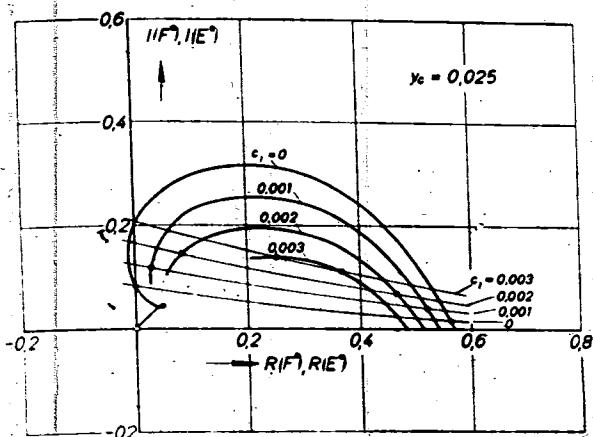


Bild 5.

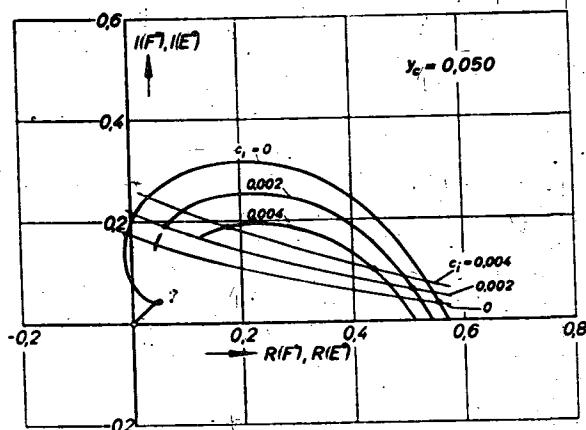


Bild 6.

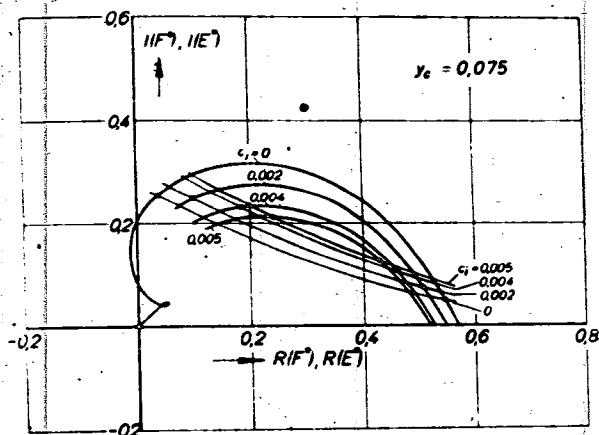


Bild 7.

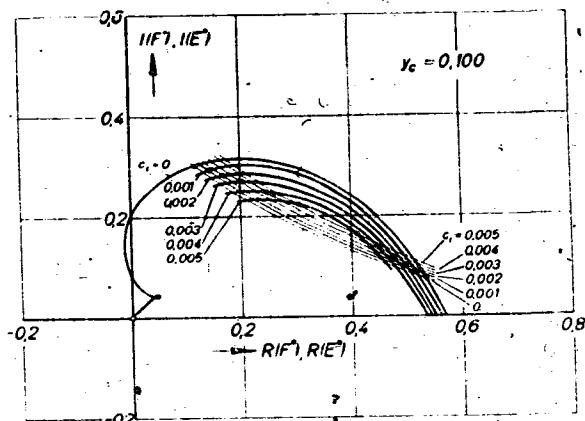


Bild 8.

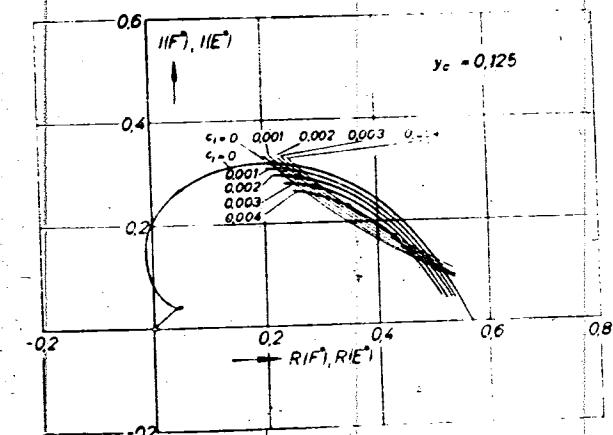


Bild 9.

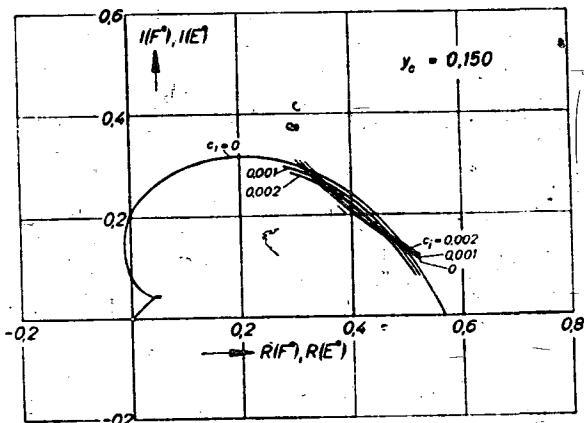


Bild 10.

Bild 5 bis 10. Polardiagramme zur Ermittlung der Linien konstanter Anfachung.

Zahlentafel 2. Werte der Differentialquotienten des Real- und Imaginärteiles der Funktion $F(\eta_0)$ nach η_0 .

η_0	$\frac{\partial F_r}{\partial \eta_0}$	$\frac{\partial F_i}{\partial \eta_0}$	η_0	$\frac{\partial F_r}{\partial \eta_0}$	$\frac{\partial F_i}{\partial \eta_0}$
2,1	0,135	-0,226	3,6	0,396	-0,066
2,2	0,121	-0,230	3,7	0,399	-0,030
2,3	0,117	-0,235	3,8	0,395	0,010
2,4	0,118	-0,239	3,9	0,379	0,055
2,5	0,121	-0,242	4,0	0,360	0,100
2,6	0,128	-0,245	4,1	0,330	0,155
2,7	0,135	-0,246	4,2	0,297	0,205
2,8	0,145	-0,246	4,3	0,250	0,270
2,9	0,157	-0,243	4,4	0,180	0,338
3,0	0,172	-0,237	4,5	0,080	0,341
3,1	0,191	-0,226	4,6	0,020	0,282
3,2	0,219	-0,210	4,7	-0,026	0,226
3,3	0,256	-0,188	4,8	-0,045	0,182
3,4	0,296	-0,162	4,9	-0,057	0,150
3,5	0,340	-0,133	5,0	0,062	0,118
3,5	0,380	-0,102			

$$F(\eta_0^*) = F(\eta_0) + (\eta_0^* - \eta_0) \left(\frac{dF}{d\eta_0^*} \right)^* \dots \dots \dots (61)$$

wo $F(\eta_0)$ und η_0 durch (30) bestimmt sind. Mit (60) wird somit:

$$F(\eta_0^*) = F(\eta_0) + \frac{i c_i}{1 - \eta_c^*} \left(1 - \frac{\eta_c}{3 \delta^*} \right) \eta_0 \left(\frac{\partial F_r}{\partial \eta_0} + i \frac{\partial F_i}{\partial \eta_0} \right) \dots \dots \dots (62)$$

Die Differentialquotienten des Real- und Imaginärteiles F_r und F_i der Funktion $F(\eta_0)$ nach η_0 bestimmten wir graphisch. Die Zahlenwerte sind in Zahlentafel 2 angegeben.

Um nun in dem von der Indifferenzkurve umschlossenen Instabilitätsbereich Aussagen über die Anfachung zu erhalten, bestimmen wir die Kurven konstanter Anfachung, indem wir zu konstantem c_i für mehrere Werte c_r den Imaginärteil F_i^* der Funktion $F(\eta_0^*)$ über ihrem Realteil F_r^* aufzeichnen und in dieses Polardiagramm zu denselben Werten c_i und c_r den Imaginärteil der Funktion $E^*(\lambda, c_r, c_i)$ über deren Realteil auftragen, Bild 5 bis 10.

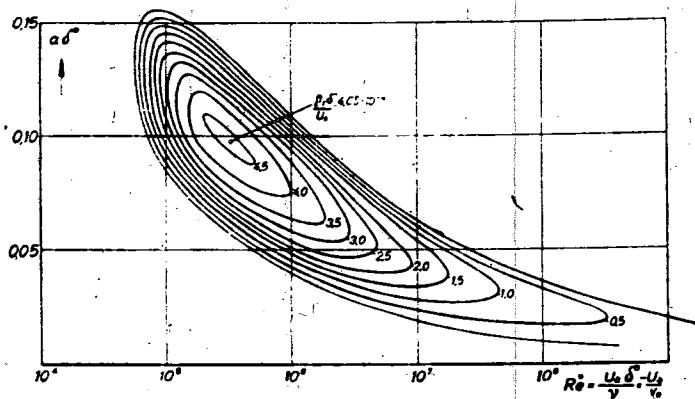


Bild 11. Linien konstanter Anfachung für die asymptotische Plattengrenzschicht mit konstanter Absaugung.

Die Schnittpunkte der durch dasselbe Wertepaar c_p, c_f einander zugeordneten Funktionen $F(\eta_0^*)$ und $E^*(x, c_p, c_f)$ geben zunächst die zu den entsprechenden x -Werten gehörenden Werte η_0 und dann mit (60) die gesuchte Kurve der konstanten Anfachung c_f . Diese Auftragung und Rechnung wird dann für andere Werte c_p wiederholt. In Bild 11 sind die Linien konstanter Anfachung $(\beta_i, c_f(x) \delta^*)$ eingezeichnet; das Zeitintegral $\int_{t_1}^{t_2} \beta_i dt$ bezeichnet das logarithmische Inkrement der Störungsanfachung. Der Maximalbetrag der Anfachung beträgt etwa $(\beta_i \delta^*)_{\max} = 4,65 \cdot 10^{-4}$ und damit nur 13,5% des Maximalbetrags der Anfachung bei der ebenen Platte ohne Absaugung [6]. Die stabilisierende Wirkung der Anfachung besteht also in einer starken Erhöhung der Stabilitätsgrenze einerseits und in einer Verminderung der Anfachung der instabilen Störungen andererseits.

IV. Vergleich der Stabilität der Plattengrenzschicht mit und ohne Absaugung.

Wenn man den Verlauf der instabilen Störungen in der Plattengrenzschicht mit und ohne Absaugung im einzelnen vergleicht, so ergibt sich neben dem bereits herausgestellten Ergebnis, daß bei Absaugung die Stabilitätsgrenze achtzigmal größer und die maximale örtliche Anfachung etwa siebenmal kleiner wird, ein ganz verschiedenes Verhalten.

In der Plattengrenzschicht ohne Absaugung durchläuft die Störung einer bestimmten zeitlichen Kreisfrequenz

$$\frac{\beta_r \cdot v}{U_a^2} = \frac{c_f}{U_a} \frac{x \delta^*}{Re^*} = \text{konst.}$$

zunächst ein stabiles Gebiet, Bild 12, tritt dann bei einer bestimmten Reynoldszahl Re_1^* (Entfernung x_1 von der Vorderkante: $Re_1^* = 1,73 \sqrt{\frac{v \cdot x}{U_a}}$) in den Instabilitätsbereich ein, wird in zunächst steigendem, dann abfallendem Maße angefacht und verläßt den Instabilitätsbereich bei der Reynoldszahl Re_2^* (Entfernung x_2 von der Vorderkante) und wird wieder gedämpft. In der Plattengrenzschicht ohne Absaugung gibt es also, wenn überhaupt, immer nur eine vorübergehende Anfachung, die indes natürlich genügen kann, um den Umschlag der laminarströmung herbeizuführen.

Beim asymptotischen Absaugeprofil dagegen ist die Störung einer bestimmten Frequenz β_r bei einer bestimmten Absaugegeschwindigkeit v_0 entweder auf ihrem ganzen Wege stromab immer stabil oder immer instabil, weil die Reynoldszahl $Re^* = \frac{U_a \cdot \delta^*}{\nu} = \frac{U_a}{v_0} = \frac{1}{c_f}$ ja konstant bleibt und den gesamten Strömungsbereich der asymptotischen Reibungsschicht kennzeichnet. Am gefährlichsten ist offenbar, Bild 11, die Störung mit der Wellenlänge

$$\frac{1}{\delta^*} = \frac{2,7}{x \delta^*} = \frac{2,7}{0,975} = 6,45$$

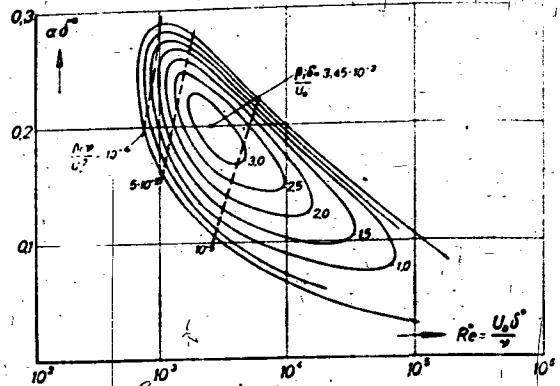


Bild 12. Linien konstanter Anfachung für die Plattengrenzschicht ohne Absaugung (Blasius-Profil).

bei dem Mengenbeiwert

$$c_p = \frac{1}{Re^*} = \frac{1}{3,24 \cdot 10^5} = 3,09 \cdot 10^{-6}$$

weil dort die Anfachung ihren Höchstwert von

$$(\beta_i \delta^*)_{\max} = 4,65 \cdot 10^{-4}$$

erreicht. Dagegen sind für das asymptotische Absaugeprofil unterhalb der Stabilitätsgrenze

$$Re^*_{\text{krit}} = 5,52 \cdot 10^3$$

d. h. bei Absaugemengen

$$c_p \geq 1,82 \cdot 10^{-5}$$

die Störungen aller Frequenzen stabil.

Hieraus ist indessen noch nicht zu schließen, daß an der Saugplatte für $c_p > 1,82 \cdot 10^{-5}$ überhaupt kein Umschlag eintreten kann. Denn es besteht immerhin die Möglichkeit, daß die Geschwindigkeitsprofile in der Anlaufstrecke zwischen Vorderkante und asymptotischer Grenzschicht bereits bei größeren c_p instabil werden.

Es muß dem Experiment überlassen werden, nachzuweisen, ob so niedrige Absaugemengen tatsächlich zur Laminarhaltung der Reibungsschicht an der ebenen Platte ausreichen.

In diesem Zusammenhang sei noch eine kurze Bemerkung über die örtlichen Widerstände der Platten mit und ohne Absaugung gestattet.

Für die Platte ohne Absaugung (Blasius-Profil) ist die Wandschubspannung:

$$\frac{\tau_0}{\rho U_a^2} = \frac{\mu}{\rho U_a^2} \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} = 0,332 \sqrt{\frac{\nu}{U_a x}} = 0,332 \cdot 1,72 \frac{\nu}{U_a \cdot \delta^*} = \frac{0,571}{Re^*} \quad (63)$$

Für die Platte mit konstanter Absaugung erhält man aus (1) den asymptotischen Wert

$$\frac{\tau_0}{\rho U_a^2} = \frac{\mu \cdot U_a}{\delta^* \rho U_a^2} = \frac{1}{Re^*} \quad (64)$$

Bei gleicher Verdünnungsdicke und unter sonst gleichen Umständen hat also die asymptotische Wandschubspannung an der Platte mit konstanter Absaugung etwa den 1,75fachen Betrag der örtlichen Schubspannung an der Platte ohne Absaugung. Das ist ohne weiteres aus dem völligeren Charakter des Absaugeprofils gegenüber dem Blasius-Profil zu verstehen.

Der Gesamtwiderstand der Platte mit Absaugung hängt natürlich auch von dem Verlauf der Schubspannung in der Anlaufstrecke ab, die sicher größer ist als im asymptotischen Zustand. Da die Geschwindigkeitsprofile in dieser Anlaufstrecke noch nicht bekannt sind, kann man einen integralen Widerstandsbeiwert der Platte mit konstanter Absaugung noch nicht aufstellen.

V. Zusammenfassung.

Um auf theoretischem Wege zur Klärung beizutragen, in welchem Maße durch Absaugung der Reibungsschicht

Umschlagbeginn verzögert werden kann, wurde nach der Methode der kleinen Schwingungen die Stabilität desjenigen Geschwindigkeitsprofils untersucht, das sich an einer längsangeströmten Platte asymptotisch einstellt, wenn über deren ganze Fläche mit konstanter Geschwindigkeit abgesaugt wird. Die Stabilitätsuntersuchung erfolgte erstmalig ohne Inanspruchnahme eines Näherungsprofils, indem zwei verschiedene exakte Lösungspaare der reibungslosen Störungsgleichung für die Wandnähe und für den Anschlußbereich an die Potentialgeschwindigkeit aufgestellt wurden. Die kritische Reynoldszahl $Re_{krit}^* = \frac{U_{\infty} \delta^*}{\nu}$, unterhalb deren alle Störungen gedämpft werden, ergibt sich zu $5,52 \cdot 10^4$ (an der Platte ohne Absaugung ist $Re_{krit}^* = 680$); umgerechnet heißt das, daß diese asymptotische Reibungsschicht für Mengenbeiwerte $c_q = 1,82 \cdot 10^{-5}$ stets stabil ist. Die maximale örtliche Anfachung der instabilen Störungen ist etwa siebenmal kleiner als der entsprechende Wert für die Platte ohne Absaugung, so daß die Absaugung insgesamt eine stark stabilisierende und damit den Umschlag aufschiebende Wirkung auf die Plattengrenzschicht ausübt.

VI. Schrifttum.

[1] H. Holstein, Messungen zur Laminarhaltung der Grenzschicht durch Absaugung an einem Tragflügel. (Preisausschreiben 1940 der Lilienthal-Ges. für Luftfahrtforschung.)

- [2] L. Hopf, Der Verlauf kleiner Schwingungen in einer Strömung reibender Flüssigkeit. Ann. d. Phys. Bd. 44 (1914), S. 1.
- [3] R. v. Mises, Zur Turbulenztheorie. Jahresber. d. Deutschen Mathem. Vereinig. 1912.
- [4] J. Pretsch, Die Stabilität einer ebenen Laminarströmung bei Druckgefälle und Druckanstieg. (Preis-ausschreiben 1940 der Lilienthal-Ges. für Luftfahrtforschung.) Jahrbuch 1941 der deutschen Luftfahrtforschung, S. 158.
- [5] J. Pretsch, Über die Stabilität einer Laminarströmung in einem geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt. Z. angew. Math. Mech. (1941), S. 204.
- [6] J. Pretsch, Die Anfachung instabiler Störungen in einer laminaren Reibungsschicht. (Erscheint demnächst.)
- [7] H. Schlichting, Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1933, S. 181.
- [8] H. Schlichting, Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Störungen bei der Plattenströmung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1935, S. 47.
- [9] H. Schlichting, Die Grenzschicht mit Absaugung und Ausblasen. Luftf.-Forsch. Bd. 19 (1942) Lfg. 5.
- [10] W. Tollmien, Über die Entstehung der Turbulenz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1929, S. 21.

Die Stabilitätsgrenze der Kreiszylinderschale bei Beanspruchung durch Schub- und Längskräfte*).

Von A. Kromm.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Institut für Festigkeit, Berlin-Adlershof.

Die Arbeit ist ein Gegenstück zu der Untersuchung der Beulung des gekrümmten Plattenstreifens und behandelt mit den gleichen Methoden die Stabilität von kreiszylindrischen Schalen beliebiger Länge mit Schub- und Längsbelastung. Sie stellt die Erweiterung einer früheren Veröffentlichung über die Stabilität von kurzen Zylinderschalen (gekrümmten Querstreifen) dar, wo, im wesentlichen nur Rechenergebnisse mitgeteilt wurden. Die allgemeine Knickbedingung, aus deren Diskussion sich die Abgrenzung in kurze und lange Schalen ergibt, wird hier ausführlich hergeleitet und für beide Bereiche ausgewertet.

Gliederung.

- I. Einleitung.
- II. Grundgleichungen.
- III. Aufstellung der Knickbedingung.
- IV. Diskussion der Knickbedingung.
- V. Auswertung der Knickbedingung.
 - 1. Reine Druckbelastung.
 - 2. Reine Schubbelastung.
 - 3. Zusammengesetzte Belastung.
- VI. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

Diese Arbeit schließt sich an eine frühere an¹⁾, in der das Stabilitätsproblem des unendlich langen, kreiszylindrisch gekrümmten Plattenstreifens für kombinierte Druck- und Schubbelastung gelöst wurde. Die dort entwickelte Methode läßt sich, wie schon an anderer Stelle für sehr kurze Zylinder gezeigt wurde²⁾, auch für die Lösung des Stabilitätsproblems der geschlossenen Kreiszylinderschale endlicher Länge nutzbar machen, wenn man die Rolle der beiden Koordinaten auf der Zylinderfläche miteinander vertauscht. Diesen Gedanken wollen wir hier für Zylinderschalen beliebiger Länge durchführen. Dabei müssen wir allerdings auf einen Ausnahmefall verzichten, den sog. Greenhillfall³⁾, bei dem das durch Schubkräfte auf Torsion belastete Rohr ohne Verzerrung seines Kreisquerschnittes wie ein tordierter Stab schraubenförmig ausknickt. Da dieser Fall mit elementaren Mitteln aus der Stabilitätstheorie der Stäbe lösbar ist, bedeutet das keinen wesentlichen Mangel. Der entsprechende Sonderfall für reine Druckbeanspruchung (Eulerknicken) wird übrigens durch unsere Rechnung miteinfaßt.

Zusammen mit der Greenhill-Lösung wird die Stabilitätsaufgabe der tordierten und gedrückten (oder auch gezogenen) Kreiszylinderschale, deren Wandungen an den Querschnitten biegefrei gelagert sind, durch die vorliegende Rechnung erschöpfend gelöst. In den Sonderfällen des reinen Druckes und der reinen Torsion schließt sie sich an bekannte Ergebnisse an. So liefert sie für reine Druckbelastung dieselbe (exakte) Knickbedingung, die von W. Flügge⁴⁾ aufgestellt wurde. Desgleichen erhält man für

den Fall eines sehr langen tordierten Zylinders, der mit zwei Wellen in der Umfangersichtung ausknickt, den exakten kritischen Wert, den ebenfalls Flügge⁵⁾ (auf ganz anderem Wege) gefunden hat. Für eine tordierte kürzere Kreiszylinderschale, die mit mehreren Wellen in der Umfangersichtung ausknickt, ist die hier durchgeführte Rechnung genauer als die von Donnell⁶⁾.

II. Grundgleichungen.

Bezeichnungen.

l, r, t	Länge, Halbmesser und Wanddicke der Kreiszylinderschale!
x, y, z	Koordinaten in Richtung der Erzeugenden, des Umfangs- und des Radius.
u, v, w	Verschiebungen in Richtung der Koordinaten x, y, z .
j	Wellenzahl in der Umfangersichtung.
σ_x	Längsspannung, als Zug positiv.
σ_z	Längsspannung, als Druck positiv.
τ	Schubspannung.
E	Elastizitätsmodul.
ν	Querkontraktionszahl.
$D = \frac{Et}{1-\nu^2}$	Dehnungssteifigkeit.
$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	Biegesteifigkeit.
$\omega = \frac{K}{Dr^2} = \frac{t^2}{12r^2}$	
$q_1 = \frac{\tau t}{D} = \frac{\tau}{E} (1-\nu^2)$	
$q_2 = \frac{\sigma_x t}{D} = \frac{\sigma_x}{E} (1-\nu^2)$	
$\sigma^* = \frac{\tau^2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t^2}{r^2}$	Bezugsspannung.
$\omega = \frac{1}{3} \frac{12(1-\nu^2)}{\tau} \frac{l}{r} \frac{t}{r}$	erste Formkennzahl.
$\omega = \frac{1}{3} \frac{12(1-\nu^2)}{\sigma_x} \frac{l}{r} \frac{t}{r}$	zweite Formkennzahl.
$\mu = \frac{\sigma_x}{\sigma^*} \frac{4}{12\omega} = \frac{\sigma_x}{E} \frac{1-\nu^2}{t} \frac{r}{l}$	Beiwert für die Längsspannung.
$\lambda = \frac{\tau}{\sigma^*} \frac{1}{3} \left(\frac{12}{\omega} \right)^2 = \frac{\tau}{E} \frac{1-\nu^2}{t} \frac{r^2}{l^2}$	Beiwert für die Schubspannung.

Wir betrachten eine Kreiszylinderschale nach Bild 1. An ihren Rändern sollen die gleichmäßig verteilten Schubspannungen τ und Längsspannungen σ_x (als Zug positiv) oder σ_z (als Druck positiv) angreifen.

Die Grundgleichungen zur Bestimmung der Stabilitätsgrenze einer kreiszylindrischen Schale wurden in den

¹⁾ A. Kromm, Die Stabilitätsgrenze eines gekrümmten Plattenstreifens bei Beanspruchung durch Schub- und Längskräfte. Luftforschungsber. 15 (1938), S. 517.

²⁾ A. Kromm, Knickfestigkeit gekrümmter Plattenstreifen unter Schub- und Längskräften. Jahrbuch 1939 der deutschen Luftfahrtforschung S. 1-807.

³⁾ A. G. Greenhill, Proc. Inst. Mech. Eng. London 1883, Abh. auch S. Timoshenko, Theory of elastic stability, New York and London 1936, S. 2108, oder C. B. Biezeno und R. Ghemmel, Technische Dynamik, Berlin 1929, S. 538.

⁴⁾ W. Flügge, Die Stabilität der Kreiszylinderschale. Ing.-Arch. Bd. 3 (1932), S. 363.

⁵⁾ W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen, Berlin 1934, S. 209.

⁶⁾ L. H. Donnell, Stability of thin-walled tubes under torsion. NACA Techn. Report 479 (1933).

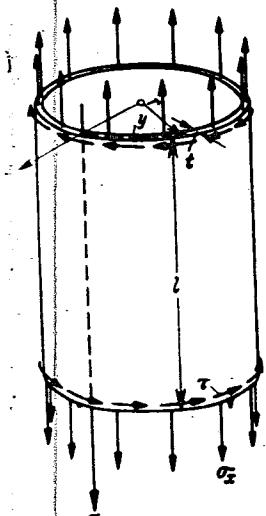


Bild 1. Kreiszylinder mit Längs- und Schubbelastung.

früheren Arbeiten^{1), 4) 5)} ausführlich hergeleitet und sollen hier nur kurz zusammengestellt werden.

Die Verschiebung eines Punktes der Schalenmittelfläche, die beim Ausbeulen die ursprüngliche Gleichgewichtslage in die benachbarte überführt, wird in die Komponenten u, v, w nach den Achsen x, y, z zerlegt. Der durch die Verschiebungen u, v, w hervorgerufene zusätzliche Spannungszustand läßt sich nach einer Integration über die Schalendicke t durch Schnittkräfte und -momente beschreiben (Bild 2), die in der unter 1) zitierten Arbeit ausführlich angegeben sind. Wir wiederholen hier nur die für die Aufstellung der Randbedingungen wesentlichen Schnittkräfte:

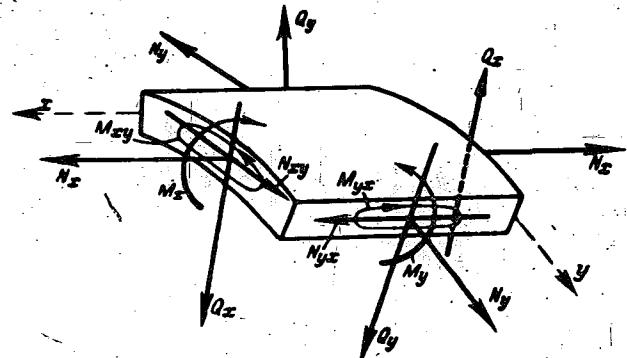


Bild 2. Schnittkräfte am Plattenelement.

$$\left. \begin{aligned} N_x &= D(u_{xx} + \nu v_{yy} + \frac{w}{r}) & K &= w_{xx} \\ M_x &= K(w_{xx} + \nu w_{yy} + \frac{u_x}{r} + \frac{v_y}{r}) \end{aligned} \right\} \quad (1.1-2)$$

Die Indizes x, y geben, wie allgemein üblich, bei den Schnittkräften ihre Richtung an, bei den Verschiebungen ihre Ableitungen, so z. B. $u_x = \partial u / \partial x$ usw.

Die Stabilitätsgrenze wird hier mit Hilfe der Energiemethode berechnet⁵⁾. Diese fordert, daß der in den Verschiebungen u, v, w quadratische Anteil $\delta H^{(2)}$ in der Änderung der potentiellen Energie⁶⁾:

$$\begin{aligned} \delta H^{(2)} &= \frac{D}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi r} \left\{ (u_x + \nu v_y + \frac{w}{r})^2 - 2(1-\nu) \left[u_x v_y + u_y v_x \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (u_y + \nu v_x)^2 + u_x \frac{w}{r} \right\} dx dy \\ &\quad + \frac{K}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi r} \left\{ (w_{xx} + \nu w_{yy} + \frac{w}{r^2})^2 - 2(u_x + \nu v_x) \frac{w_x}{r} \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) (w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (v_x - u_y) \frac{w_{xy}}{r} + \nu \frac{w_x}{r} \left[v_y \frac{w_{xx}}{r} - u_x^2 \frac{3w_x^2}{4r^2} \right] \right\} dx dy \\ &\quad + \tau t \int_0^l \int_0^{2\pi r} \left\{ u_x u_y + \nu (v_y + \frac{w}{r}) - w_x (w_x + \frac{v}{r}) \right\} dx dy \\ &\quad + \frac{\sigma_x t}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi r} (w_x^2 + w_y^2) dx dy \quad (2) \end{aligned}$$

an der Stabilitätsgrenze verschwindet und daß er außerdem der Minimalbedingung

$$\delta H^{(2)} = 0 \quad (3)$$

für alle zulässigen Variationen $\delta u, \delta v, \delta w$ genügt. Die letzte Bedingung bringt zum Ausdruck, daß die benachbarte Lage der Schale ebenfalls eine Gleichgewichtslage ist und liefert die Gleichungen zur Bestimmung der Knickgrenze. Die Bedingung $\delta H^{(2)} = 0$ ist in Gl. (3) eingeschlossen, denn diese für alle zulässigen Variationen $\delta u, \delta v, \delta w$ gelten

muß, gilt sie auch für $\delta u = u, \delta v = v$ und $\delta w = w$. Dann geht sie aber in die Gleichung $\delta H^{(2)} = 0$ über.

Wir wollen hier die Stabilität einer Kreiszylinderschale mit momentenfrei gelagerten Querrändern untersuchen, d. h. bei $x = 0$ und $x = l$ sei $v = w = M_x = 0$. Mit $v = w = 0$ längs des ganzen Querrandes ist auch $v_y = w_{yy} = 0$ und aus $M_x = 0$ (s. Gl. (1.2)) folgt $w_{xx} = u_x/r = 0$. Unter Beachtung dieser drei Randbedingungen erhält man aus (3) nach Durchführung der üblichen Teilintegrationen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \delta H^{(2)} &= \int_0^l \int_0^{2\pi r} \left\{ u_{xx} + \frac{1}{2} \frac{v}{r} u_{yy} + \frac{1}{2} \frac{v}{r} v_{xy} \right. \\ &\quad \left. + \frac{v}{r} \frac{w_x}{r} + k \left[r^2 \frac{v}{2} w_{xy} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r w_{xx} + \frac{1}{2} \frac{v}{r} u_{yy} \right] + 2 q_1 u_y \right\} \delta u dx dy \\ &\quad + \int_0^l \int_0^{2\pi r} \left\{ (u_x - k r w_{xx} + q_1 u_y) \delta u \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \delta H^{(2)} = \int_0^l \int_0^{2\pi r} \left\{ v_{yy} + \frac{v}{2} v_{xx} + \frac{1}{2} \frac{v}{r} u_{xy} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{w_y}{r} + k \left[-r^3 \frac{v}{2} w_{xy} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3(1-\nu) v_{xx} + 2 q_1 (v_{xy} + \frac{w_x}{r}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q_2 v_x \right\} \delta v dx dy = 0 \quad (4.2) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^l \int_0^{2\pi r} \left\{ r u_x + v_y + \frac{w}{r} + \frac{k}{r} (r^3 + 1) w + 2 r^2 w_{yy} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r^3 \frac{1}{2} u_{xy} + r^3 u_{xx} + r^3 \frac{3}{2} v_{xy} \right\} \right. \\ &\quad \left. + 2 q_1 (v_x + r w_{xy}) + q_2 r w_{xx} \right\} \delta w dx dy = 0 \quad (4.3) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} k &= \frac{K}{D r^2} = \frac{t^2}{2 r^2} \left[\frac{\tau t}{D} - \frac{\tau}{E} (1-\nu^2) \right], \\ q_2 &= \frac{\sigma_x t}{D} = \frac{\sigma_x}{E} (1-\nu^2) \quad (5) \end{aligned}$$

Als vierte Randbedingung wollen wir unbehinderte Verwölbung der Zylinderränder senkrecht zu ihrer Ebene fordern. Dann ist also δu beliebig, und damit das noch verbliebene Randintegral in (4.1) verschwindet, muß

$$u_x - k r w_{xx} + q_1 u_y = 0 \quad (6)$$

sein, also mit

$$\begin{aligned} w_{xx} - u_x/r = 0 \text{ aus } M_x = 0; \\ u_x (1-k) + q_1 u_y = 0 \text{ bei } x = 0 \text{ und } x = l \quad (6a) \end{aligned}$$

Diese Gleichung bringt zum Ausdruck, daß die zusätzliche Längskraft $N_x = D u_x (1-k)$ (bei $v_y = w = w_{xx} - u_x/r = 0$ s. Gl. (1.1)) der durch Schiefstellung des Randes entstehenden x -Komponente $\tau t u_y$ der Schubkraft τt das Gleich-

⁵⁾ Siehe E. Trefftz, Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts. Z. angew. Math. Mech. Bd. 12 (1933), S. 160 und E. Marguerre, Über die Anwendung der energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung S. 1-433.

⁶⁾ Dieser Ausdruck stimmt bis auf die sinngemäß geänderten Integrationsgrenzen mit dem in der unter Fußnote 1 genannten Arbeit als Formel (14) angegebenen überein.

gewicht halten muß. In unserer Arbeit werden wir $q_1 u_y$ vernachlässigen, d. h. wir setzen die Schnittkraft N_x selbst gleich Null und gelangen somit zu folgenden vereinfachten Randbedingungen für die Verschiebungen

$$u_x = v = w = w_{,xx} = 0 \text{ bei } x = 0 \text{ und } x = l \quad (7)$$

Wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, ist der Unterschied der beiden Ansätze für u , mit denen man die Bedingungen (6a) oder (7) erfüllen kann, von der Größenordnung l/r , d. h. im Rahmen der Theorie der dünnen Schalen vernachlässigbar klein. Nur im Falle des Stabknickens mit Schublast (Greenhill-Fall) ist das Glied $q_1 u_y$ in (6a) wesentlich. Daraus folgt, daß mit einem Ritz-Ansatz, welcher der Randbedingung (6a) genügen würde, eine allgemeine Lösung zu finden wäre. Da aber das zu einer Verwicklung des Rechnens führt, verzichten wir auf die Miterfassung der Greenhill-Falles, der auf andere Weise einfacher zu lösen ist, und bleiben bei der angenäherten Randbedingung $\kappa_x = 0$.

III. Aufstellung der Knickbedingung.

Die Verschiebungen u, v, w , deren Knotenlinien bei Anwesenheit von Schub schräg zur Zylindererzeugenden verlaufen, werden durch einen Ritz-Ansatz approximiert, der aus zwei um eine halbe Halbwellenlänge in der Umfangsrichtung phasenverschobenen Teilansätzen besteht, wobei jedes Glied der Randbedingungen (7) genügt:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sin \frac{jy}{r} \sum_m A_{1m} \cos \frac{m\pi x}{l} + \cos \frac{jy}{r} \sum_m A_{2m} \cos \frac{m\pi x}{l} \\ v &= \cos \frac{jy}{r} \sum_m B_{1m} \sin \frac{m\pi x}{l} - \sin \frac{jy}{r} \sum_m B_{2m} \sin \frac{m\pi x}{l} \\ w &= \sin \frac{jy}{r} \sum_m C_{1m} \sin \frac{m\pi x}{l} + \cos \frac{jy}{r} \sum_m C_{2m} \sin \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \right\} (8)$$

Hier ist $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ die Wellenzahl in der Umfangsrichtung.

Bevor wir die eigentliche Rechnung weiterführen, gehen wir auf die am Schluß des vorigen Abschnittes erwähnte Frage ein. Um die exakte Randbedingung (6a) zu erfüllen, müßten wir jedes Glied im Ansatz für u etwa folgendermaßen ergänzen:

$$A_{1m} \sin \frac{jy}{r} \cos \frac{m\pi x}{l} - A_{1m} \frac{q_1}{1-k} \frac{l}{r} \frac{1}{m\pi} \cos \frac{jy}{r} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (9)$$

Die Größenordnung der durch das zweite Glied dargestellten Korrektur können wir abschätzen, wenn wir die bekannten Ergebnisse für reinen Schub benutzen und einige Ergebnisse unserer Rechnung vorwegnehmen: Für einen sehr langen Zylinder, der mit zwei Wellen in der Umfangsrichtung ausknickt⁵⁾ ($j = 2$), ist die kritische Schubspannung

$$q_1 = \frac{\tau}{E} (1 - \nu^2) = c_1 \left(\frac{l}{r} \right)^2 \quad (10)$$

Außerdem ist in diesem Falle das Verhältnis $l/m\pi r$ für die wesentlichen Anteile im u -Ansatz, d. h. für Anteile mit großen Freiwerten A_m , nach Gleichung (70) von der Größenordnung

$$l/m\pi r = c_2 \left(\frac{r}{l} \right)^2, \quad (11)$$

da dort die kleine Zahl n_1 bei der Abschätzung weggelassen werden kann. Die Konstanten c_1, c_2 sind endliche Zahlen, deren genauer Wert uns hier nicht interessiert. Setzt man die Gleichung (10) und (11) in das Korrekturglied von (9) ein, so ersieht man, daß dieses sich von dem ersten Glied um den kleinen Faktor l/r unterscheidet, d. h. vernachlässigbar klein ist. Dieses Ergebnis könnten wir auch für kürzere Zylinder wiederfinden, die mit mehreren Wellen in der Umfangsrichtung ausbeulen ($j > 2$).

Für sehr lange Zylinder dagegen, die bei Schubbelastung als Stab mit einer Welle in der Umfangsrichtung ausknicken ($j = 1$, Greenhill-Fall), ist das Korrekturglied wesentlich. Denn dort ist die kritische Schubspannung⁵⁾

$$q_1 = \frac{\tau}{E} (1 - \nu^2) = \frac{\tau r}{l} (1 - \nu^2)$$

und die Wellenzahl $m = 1, 2, 3$ für die wesentlichen Teile im Ritz-Ansatz, da der Zylinder mit einer Welle in Umfangsrichtung ausknickt. Führt man diese Größen in (9) ein, so findet man, daß das Korrekturglied von derselben Größenordnung ist wie das ursprüngliche.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zur Aufstellung der Knickbedingung über. Die Freiwerte A_{1m}, A_{2m}, B_{1m} usw. in (8) werden so bestimmt, daß sie die potentielle Energie nach Gl. (2) zum Minimum machen. Werden die Minimalforderungen vor der Integration aufgestellt (Verfahren von Galerkin), so erhält man wieder das Gleichungssystem (4),

wobei jetzt $\delta u = \sum_m \frac{\delta A_m}{\delta A_m} \delta A_m$ zu setzen ist. Damit erhält man Polynome in den Variationen δA_m usw. der Freiwerte, wobei die Koeffizienten dieser Variationen lineare und homogene Funktionen der Freiwerte selbst sind. Da die Gleichungen (4) für jedes Wertesystem von δA_m erfüllt sein müssen, müssen diese Funktionen einzeln verschwinden, und das gibt gerade ein für die Berechnung der Freiwerte ausreichendes, in A_m usw. homogenes Gleichungssystem. Aus dem Verschwinden seiner Koeffizientendeterminante folgt die Bedingung für das Erreichen der Stabilitätsgrenze.

Man führt nun den Ansatz (8) in die Gl. (4) ein. Bei den Integrationen, die für die Aufstellung dieses Gleichungssystems ausgeführt werden müssen, macht man Gebrauch von den Orthogonalitätsbedingungen für die Kreisfunktionen und von folgenden Beziehungen:

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{l}{\pi} \frac{2n}{n^2 - m^2} & \text{für } n \neq m \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \neq m \text{ gerade} \end{cases} \quad (12)$$

Damit erhält man:

$$\left. \begin{aligned} A_{1n} a_n + B_{1n} f_n - C_{1n} \frac{l}{\pi r} g_n \\ + q_1 \beta \frac{8}{\pi} \sum_m A_{2m} \frac{1}{2} \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} = 0 \\ A_{2n} a_n + B_{2n} f_n - C_{2n} \frac{l}{\pi r} g_n \\ - q_1 \beta \frac{8}{\pi} \sum_m A_{1m} \frac{1}{2} \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} = 0 \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{1n} f_n + B_{1n} b_n - C_{1n} \frac{l}{\pi r} h_n + q_1 \beta \frac{8}{\pi} \sum_m B_{2m} \frac{n m}{n^2 - m^2} \\ - q_1 \frac{8}{\pi} \frac{l}{\pi r} \sum_m C_{2m} \frac{n m}{n^2 - m^2} = 0 \\ A_{2n} f_n + B_{2n} b_n - C_{2n} \frac{l}{\pi r} h_n - q_1 \beta \frac{8}{\pi} \sum_m B_{1m} \frac{n m}{n^2 - m^2} \\ + q_1 \frac{8}{\pi} \frac{l}{\pi r} \sum_m C_{1m} \frac{n m}{n^2 - m^2} = 0 \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\left. \begin{aligned} -A_{1n} \frac{l}{\pi r} g_n - B_{1n} \frac{l}{\pi r} h_n + C_{1n} \frac{l^2}{\pi^2 r^2} c_n \\ + q_1 \frac{8}{\pi} \frac{l}{\pi r} \sum_m B_{2m} \frac{n m}{n^2 - m^2} \\ + q_1 \beta \frac{8}{\pi} \sum_m C_{2m} \frac{n m}{n^2 - m^2} = 0 \\ A_{2n} \frac{l}{\pi r} g_n - B_{2n} \frac{l}{\pi r} h_n + C_{2n} \frac{l^2}{\pi^2 r^2} c_n \\ + q_1 \frac{8}{\pi} \frac{l}{\pi r} \sum_m B_{1m} \frac{n m}{n^2 - m^2} \\ - q_1 \beta \frac{8}{\pi} \sum_m C_{1m} \frac{n m}{n^2 - m^2} = 0 \end{aligned} \right\} (15)$$

mit

$$a_n = n^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta^2 (1+k),$$

$$b_n = \beta^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 (1+3k) + q_2 n^2,$$

$$\begin{aligned}
 & -1 - k \frac{\pi^4 r^4}{l^4} \left[(n^2 + \beta^2)^2 - 2 \frac{l^2}{\pi^2 r^2} \beta^2 + \frac{l^4}{\pi^4 r^4} \right] + q_2 \frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2, \\
 & 1 - \frac{r}{2} n \beta, \\
 & n \left[r - k \frac{\pi^2 r^2}{l^2} (n^2 - 1) \frac{r}{2} \beta^2 \right], \\
 & \beta \left[1 - k \frac{\pi^2 r^2}{l^2} \frac{3-r}{2} n^2 \right], \\
 & \frac{q_1}{\pi r} n \quad m \text{ ungerade.}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Mit n ist die Gleichungsnummer, mit m der Summationsindex bezeichnet. In den Summiengliedern ist nur über diejenigen m zu summieren, für die $n + m$ ungerade ist (vgl. Gl. (12)). Die Größe β ist das Reziproke der auf die Zylinderlänge l bezogenen Halbwellenlänge (in der Umfangsrichtung) der Baulfigur.

Das Gleichungssystem (13) bis (15) hat einen ähnlichen Bau wie das für den gekrümmten Plattenstreifen früher gefundene¹⁾. Da $n \pm m$ ungerade sein muß, so ist die Summe der beiden Indizes der unbekanntenen Freiwerte, z. B. $1 + n$ und $2 + m$, in jeder Gleichung entweder nur gerade oder nur ungerade. Daraus folgt, daß die Gleichungen (13) bis (15) in zwei völlig voneinander unabhängige Gleichungssysteme für je die Hälfte aller Unbekannten zerfallen. In der zitierten Arbeit wurde gezeigt, daß in Beziehung auf die kritischen Spannungen beide Gleichungssysteme gleichwertig sind, und es genügt daher, eine von ihnen weiter zu verfolgen, z. B. dasjenige, bei dem die Summe der beiden Indizes der Unbekannten ungerade ist. Die Gleichungspaare (13), (14), (15) können dann in folgender Weise je in eine Gleichung zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned}
 & A_n a_n - B_n f_n - C_n \frac{l}{\pi r} g_n - q_1 \sum_m A_m a_{mn} = 0 \\
 & A_n f_n - B_n b_n - C_n \frac{l}{\pi r} h_n - q_1 \sum_m B_m b_{mn} \\
 & q_1 \frac{l}{\pi r} \sum_m C_m h_{mn} = 0 \\
 & A_n \frac{l}{\pi r} g_n - B_n \frac{l}{\pi r} h_n - C_n \frac{l^2}{\pi^2 r^2} C_n - q_1 \frac{l}{\pi r} \sum_m B_m h_{mn} \\
 & q_1 \sum_m C_m c_{mn} = 0
 \end{aligned} \tag{17}$$

mit

$$\begin{aligned}
 a_{mn} &= \beta \frac{8}{7} \frac{1}{n^2} \frac{m^2}{m^2} (1)^m \\
 b_{mn} &= \beta \frac{8}{7} \frac{nm}{n^2} \frac{m^2}{m^2} (1)^m \\
 c_{mn} &= \beta \frac{8}{7} \frac{nm}{n^2} \frac{m^2}{m^2} (1)^m \\
 h_{mn} &= \frac{8}{7} \frac{nm}{n^2} \frac{m^2}{m^2} (1)^m
 \end{aligned} \tag{18}$$

wo n jetzt alle geraden und ungeraden Zahlen durchläuft, und m in jeder Gleichung alle die Werte annimmt, für die $m + n$ ungerade ist.

$$\begin{aligned}
 A_n^{(2)} &= A_n^{(1)} - q_1 \frac{l}{\pi r} a_n b_n - \frac{1}{f_n^2} \sum_m C_m \left[f_n h_{mn} - b_n \frac{g_m b_m - h_m f_m}{a_m b_m - f_m^2} a_{mn} - f_n \frac{a_m h_m - f_m g_m}{a_m b_m - f_m^2} b_{mn} \right] \\
 B_n^{(2)} &= B_n^{(1)} - q_1 \frac{l}{\pi r} a_n b_n - \frac{1}{f_n^2} \sum_m C_m \left[a_n h_{mn} - a_n \frac{a_m h_m - f_m g_m}{a_m b_m - f_m^2} b_{mn} - f_n \frac{g_m b_m - h_m f_m}{a_m b_m - f_m^2} a_{mn} \right]
 \end{aligned} \tag{21}$$

Es sei nun wir so fort, so erhalten wir für $A_n^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
 A_n^{(3)} &= A_n^{(2)} + q_1^2 \frac{l}{\pi r} \frac{1}{a_n b_n - f_n^2} \sum_j C_j \sum_x \left[b_n \frac{f_x}{a_x b_x - f_x^2} h_{jx} a_{xn} + f_n \frac{a_x}{a_x b_x - f_x^2} h_{jx} b_{xn} \right] \\
 &+ q_1^2 \frac{1}{a_n b_n - f_n^2} \sum_j A_j^{(1)} \sum_x \left[b_n \frac{b_x}{a_x b_x - f_x^2} a_{jx} a_{xn} + f_n \frac{f_x}{a_x b_x - f_x^2} a_{jx} b_{xn} \right] \\
 &- q_1^2 \frac{1}{a_n b_n - f_n^2} \sum_j B_j^{(1)} \sum_x \left[b_n \frac{f_x}{a_x b_x - f_x^2} b_{jx} a_{xn} + f_n \frac{a_x}{a_x b_x - f_x^2} b_{jx} b_{xn} \right]
 \end{aligned} \tag{22}$$

Für $n = 1, 2 \dots p$ erhält man aus (17) $3p$ -Gleichungen, die sich auf p -Gleichungen reduzieren lassen, wenn man in jedem Tripel zwei der Unbekannten eliminiert, und wählt man dafür zweckmäßig A_n und B_n , da man dann den Grenzfall eines kurzen Zylinders mit $r \rightarrow \infty$ miteinfaßt, für den bekanntlich nur die Freiwerte C_n übrigbleiben und die anderen gegen Null gehen.

Die Reduktion auf p -Gleichungen geschieht hier dadurch, daß man das Gleichungssystem (17₁₋₂) mit Hilfe eines Iterationsverfahrens nach den Freiwerten A_n, B_n auflöst und diese in (17₃) einsetzt. Wir berechnen die μ -te Näherung $A_n^{(\mu)}, B_n^{(\mu)}$ der Freiwerte A_n, B_n , indem wir in (17₁₋₂) in den mit $q_1 \ll 1$ multiplizierten Summiengliedern die schon als bekannt vorausgesetzte $(\mu - 1)$ -te Näherung einsetzen:

$$\begin{aligned}
 A_n^{(\mu)} &= \frac{l}{\pi r} \frac{g_n b_n - h_n f_n}{a_n b_n - f_n^2} C_n - q_1 \frac{l}{\pi r} \frac{f_n}{a_n b_n - f_n^2} \sum_m C_m h_{mn} \\
 &+ q_1 \frac{b_n}{a_n b_n - f_n^2} \sum_m A_m^{(\mu-1)} a_{mn} \\
 &+ q_1 \frac{f_n}{a_n b_n - f_n^2} \sum_m B_m^{(\mu-1)} b_{mn} \\
 B_n^{(\mu)} &= \frac{l}{\pi r} \frac{a_n h_n - f_n g_n}{a_n b_n - f_n^2} C_n - q_1 \frac{l}{\pi r} \frac{a_n}{a_n b_n - f_n^2} \sum_m C_m h_{mn} \\
 &+ q_1 \frac{a_n}{a_n b_n - f_n^2} \sum_m B_m^{(\mu-1)} b_{mn} \\
 &+ q_1 \frac{f_n}{a_n b_n - f_n^2} \sum_m A_m^{(\mu-1)} a_{mn}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Gelingt es, die ersten Näherungen für $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}$ nur durch die Freiwerte C auszudrücken, so werden nach (19) auch alle weiteren Näherungen nur diese enthalten.

Wir wir aus dem Iterationsansatz (19) sehen, müssen aus einer Iterationsfolge Polynome mit ansteigenden Potenzen von q_1 entstehen. Wir definieren die erste Näherung als solche von nullter Ordnung in q_1 , durch Streichung der Glieder mit q_1 als Faktor in (19). Dann drücken sich $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}$ auf einfache Weise tatsächlich nur durch C_n aus:

$$\begin{aligned}
 A_n^{(1)} &= \frac{l}{\pi r} \frac{g_n b_n - h_n f_n}{a_n b_n - f_n^2} C_n \\
 B_n^{(1)} &= \frac{l}{\pi r} \frac{a_n h_n - f_n g_n}{a_n b_n - f_n^2} C_n
 \end{aligned} \tag{20}$$

Vernachlässigen wir in $a_n, b_n \dots$ die kleinen Größen k und q_2 (s. Gl. (16)), so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 A_n^{(1)} &= \frac{l}{\pi r} n \frac{r n^2 - \beta^2}{(n^2 + \beta^2)^2} C_n \\
 B_n^{(1)} &= \frac{l}{\pi r} \beta \frac{(2 + r) n^2 + \beta^2}{(n^2 + \beta^2)^2} C_n
 \end{aligned} \tag{20a}$$

Mit (20) ergeben sich aus (19) für die zweiten Näherungen in q_1 lineare Ausdrücke:

mit $\left. \begin{matrix} n+m \\ n+z \\ j+z \end{matrix} \right\}$ ungerade, $\left. \begin{matrix} z+m \\ j+n \end{matrix} \right\}$ gerade.

Jede Näherung unterscheidet sich also von der vorhergehenden nur durch das Hinzutreten von Gliedern der nächst höheren Ordnung in q_1 . Das rührt davon her, daß wir als erste Näherung den von q_1 unabhängigen Teil auf der rechten Seite von (19) benützt haben.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Glieder mit q_1^2 in (22) wegen $q_1 \ll 1$ vernachlässigbar klein sind, daß also die zweite Näherung schon endgültig ausreicht. Dazu vergleichen wir die Summe über C_j mit der in $A_n^{(2)}$ enthaltenen über C_m und zeigen gliedweise, daß die erste nicht von höherer Größenordnung ist als die zweite. Dabei können wir immer nur Glieder vergleichen, für die $m \approx j$ ist. Wenn wir die plausible Annahme machen, daß dabei C_m und C_j nicht verschiedener Größenordnung sind, was durch alle Zahlenrechnungen bestätigt wird, so haben wir die Koeffizienten der C zu vergleichen. Wir schreiben die Größenordnung der unter den Summenzeichen stehenden Koeffizienten von C_m und C_j mit Hilfe der Gl. (16) und (18) in Form einer Tabelle auf. Sie enthält in der zweiten Spalte die zur Beurteilung der Größenordnung maßgebenden Potenzen von β, n, m oder j . Die folgenden Spalten geben für die am Kopf gemachten Annahmen die Größenordnung der Koeffizienten an, wobei 0 die Größenordnung der Einheit, positive Zahlen große und negative Zahlen kleine Werte bedeuten. Für m und j sind am Kopf der Tabelle stets gleiche Größenordnungen angenommen, d. h. es werden die Koeffizienten von benachbarten Werten m und j verglichen.

$$I_a = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2(x^2+n^2)}{(x^2+\beta^2)^2(x^2-j^2)(x^2-n^2)} dx \quad (23)$$

$$I_b = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2(x^2+\frac{1-v}{2}\beta^2)}{(x^2+\beta^2)^2(x^2-j^2)(x^2-n^2)} dx$$

Wir vereinfachen noch die Rechnung, indem wir einführen

$$I_{a1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2(x^2+n^2)}{(x^2+\beta^2)(x^2-j^2)(x^2-n^2)} dx \quad (24)$$

$$I_{b1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta^2}{(x^2+\beta^2)(x^2-j^2)(x^2-n^2)} dx$$

wobei I_{b1} aus I_b entsteht, wenn man im Zähler β^2 statt $\frac{1-v}{2}\beta^2$ setzt, wodurch sich die Größenordnung des Integrals nicht ändert. Mit (24) haben wir dann:

$$I_a = \frac{1}{2\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (I_{a1}), \quad I_b < I_{b1} \quad (25)$$

Man berechnet die Integrale I_{a1} und I_{b1} am einfachsten mit Hilfe des Residuensatzes in einer komplexen z -Ebene ($z = x + iy$), wobei wir den Integrationsweg durch einen großen Kreisbogen vom Radius $R \rightarrow \infty$ schließen (siehe Bild 3). Das Integral über den Kreis verschwindet mit $R \rightarrow \infty$. Die Pole der Integranden liegen bei $x_1 = \pm \beta, x_{2,3,4} = \pm n, x_5 = \pm j$. Wenn wir den Integrationsweg

Freiwert	wesentliche Summanden des Koeffizienten.	$\beta \ll 1$				$\beta \approx 1$				$\beta \gg 1$			
		$n \approx 1$	$n \gg 1$	$n \approx 1$	$n \gg 1$	$n \approx 1$	$n \gg 1$	$n \approx 1$	$n \gg 1$	$n \approx 1$	$n \gg 1$	$n \approx 1$	$n \gg 1$
		$m \approx 1$	$m \approx 1$	$m \gg 1$	$m \gg 1$	$m \approx 1$	$m \approx 1$	$m \gg 1$	$m \gg 1$	$m \approx 1$	$m \approx 1$	$m \gg 1$	$m \gg 1$
$n\beta \frac{nm}{n^2-m^2}$		-1	-1	-2	0	0	0	1	1	1	0	2	
$C_m \left(\frac{1-v}{2} n^2 + \beta^2 \right) m \frac{vm^2 - \beta^2}{(m^2 - \beta^2)^2} \beta \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}$		-1	1	2	0	0	2	1	-1	1	1	2	
$n\beta \cdot \beta \frac{(2+v)m^2 + \beta^2}{(m^2 + \beta^2)^2} \beta \frac{nm}{n^2 - m^2}$		3	3	6	-4	0	0	3	1	1	1	0	
$C_j \left(\frac{1-v}{2} n^2 + \beta^2 \right) \sum_z \frac{z\beta}{(z^2 + \beta^2)^2} \frac{zj}{z^2} \beta \frac{n^2 + z^2}{z^2 - n^2}$		1	-1	-2	0	0	2	1	1	1	1	2	
$n\beta \sum_z \frac{z^2 + \frac{1-v}{2}\beta^2}{(z^2 + \beta^2)^2} \frac{zj}{z^2 - j^2} \beta \frac{nz}{z^2 - n^2}$		3	-3	4	-1	0	0	-1	-1	1	1	0	

Einige Schwierigkeiten bereiten bei der Bestimmung der Größenordnung die Koeffizienten von C_j , da sie noch Summen über z sind. Um diesen Schwierigkeiten zu entgehen, ersetzen wir die Summen über z durch Integrale über $z = x$, was an der Größenordnung der Koeffizienten nichts ändert. Wir haben somit folgende Ausdrücke als Funktionen von n, j, β zu bestimmen:

a) $\left(\frac{1-v}{2} n^2 + \beta^2 \right) \beta^2 j \int_0^{\infty} \frac{x^2(x^2+n^2)}{(x^2+\beta^2)^2(x^2-j^2)(x^2-n^2)} dx$
 $= \left(\frac{1-v}{2} n^2 + \beta^2 \right) \beta^2 j I_a$

b) $n^2 \beta^2 j \int_0^{\infty} \frac{x^2(x^2+\frac{1-v}{2}\beta^2)}{(x^2+\beta^2)^2(x^2-j^2)(x^2-n^2)} dx = n^2 \beta^2 j I_b$

Da die Integranden der beiden Integrale gerade Funktionen von x sind, so kann man die Integration auch von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken:

nach Bild 3 wählen, interessiert uns davon nur x_1 , und wir erhalten

$$I_{a1} = \text{Re } 2\pi i \text{ Res}(x_1)$$

$$I_{b1} = \text{Re } 2\pi i \text{ Res}(x_1)$$

Da die Residuen der beiden Integranden in (24) für x_1 rein imaginär sind, so ergibt sich:

$$I_{a1} = 2\pi i \text{ Res}(x_1) = \frac{\pi}{2} \frac{\beta(\beta^2 - n^2)}{(\beta^2 + j^2)(\beta^2 + n^2)}$$

$$I_{b1} = 2\pi i \text{ Res}(x_1) = \frac{\pi}{2} \frac{\beta}{(\beta^2 + j^2)(\beta^2 + n^2)}$$

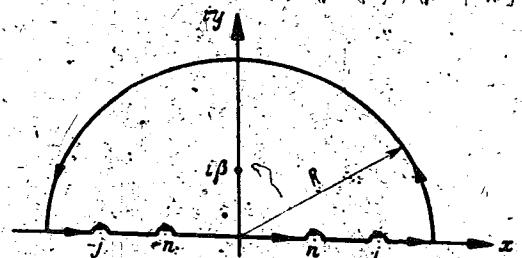


Bild 3. Zur Integration der Integrale I_{a1} und I_{b1} .

Mit (25) erhält man endlich den Ausdruck a) und näherungsweise den Ausdruck b) zu

$$\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{r}{2} n^2 + \beta^2 \right) \beta j \frac{\beta^6 - \beta^4 (4n^2 + j^2) - \beta^2 n^2 (n^2 + 4j^2) + n^4 j^2}{(\beta^2 + j^2)^2 (\beta^2 + n^2)^2} \approx \left(1 - \frac{r}{2} n^2 + \beta^2 \right) \beta^2 j \sum_x \frac{x^2 (n^2 + x^2)}{(x^2 + \beta^2)^2 (x^2 - j^2) (x^2 - n^2)}$$

$$\frac{\pi}{2} n^2 \beta^2 j \frac{\beta}{(\beta^2 + j^2) (\beta^2 + n^2)} \approx n^2 \beta^2 j \sum_x \frac{x^2 \left(x^2 + \frac{1}{2} r \beta^2 \right)}{(x^2 + \beta^2)^2 (x^2 - j^2) (x^2 - n^2)}$$

woraus sich die Größenordnungen, die in der Tabelle eingefragt sind, für verschiedene β , n und j leicht ermitteln lassen.

Jetzt kehren wir zur Betrachtung der Größenordnungen der unter den Summenzeichen stehenden Koeffizienten von C_m und C_j zurück. Wir wir aus der Tabelle sehen, sind die letzteren tatsächlich niemals größer als die von C_m . Da aber die Summe über C_j mit q_1^2 , die Summe über C_m nur mit q_1 multipliziert ist, so ist die erste gegenüber der letzteren wegzulassen.

Durch ähnliche Betrachtungen läßt sich zeigen, daß alle in q_1 quadratischen Glieder von $A_n^{(3)}$ und auch die von $B_n^{(3)}$ vernachlässigbar klein sind. Im Rahmen der dadurch gegebenen Genauigkeit, die wegen der Kleinheit von q_1 ($\approx 10^{-3}$) für uns immer ausreicht, kommt daher das Iterationsverfahren mit $A_n^{(2)}$, $B_n^{(2)}$ zum Stehen, da ja jeder weitere Schritt nur immer wieder dieselben vernachlässigbaren Korrekturen liefern würde⁹⁾.

Nun gehen wir mit den $A_n^{(2)}$ und $B_n^{(2)}$ nach Gl. (21) in die dritte Gleichung eines jeden Tripels (17) ein. Aus dem gleichen Grund wie bei der Iteration kann man wieder die Glieder mit q_1^2 vernachlässigen. Für reinen Druck wurde schon früher von Flügge³⁾ nachgewiesen, daß die in k und q_2 quadratischen Glieder ebenfalls klein von höherer Ordnung sind. Läßt man noch die ebenfalls kleinen Größen mit $q_1 k$ und $q_1 q_2$ als Faktor weg, so kommt man endlich nach einigen Umformungen auf folgendes System homogener Gleichungen für die Freiwerte C_n :

$$C_n \left\{ \begin{aligned} & \left(1 - r^2 \right) \frac{l^4}{\pi^4 r^4} n^4 \dots k \left[(n^2 + \beta^2)^4 - 2 \frac{l^2}{\pi^2 r^2} (\beta^6 + (4-r)\beta^4 n^2 + 3\beta^2 n^4 + n^6) + \frac{l^4}{\pi^4 r^4} (\beta^4 + 2(2-r)\beta^2 n^2 + (4-3r^2)n^4) \right] \\ & q_2 \frac{l^2}{\pi^2 r^2} n^2 \left[(n^2 + \beta^2)^2 - \frac{l^2}{\pi^2 r^2} (\beta^2 + 2(1-r)n^2) \right] \left(n^2 + \beta^2 \right) \\ & q_1 \frac{l^2}{\pi^2 r^2} \frac{8}{\pi} \beta \sum_m C_m \frac{n^m}{n^2} \frac{m^m}{m^2} (1)^m \left\{ 1 - \frac{l^2}{\pi^2 r^2} \frac{1}{(m^2 + \beta^2)^2 (n^2 + \beta^2)^2} \right. \\ & \left. \left[\beta^6 - \beta^4 \frac{3}{2} (n^2 + m^2) + \beta^2 \left(\frac{2-r}{2} (n^4 + m^4) + (4-r-r^2)n^2 m^2 \right) + n^2 m^2 (n^2 + m^2) \frac{4+2r-r^2}{2} \right] \right\} = 0, n+m \text{ ungerade} \end{aligned} \right. \quad (26)$$

Wir schreiben die geschweifte Klammer bei q_1 noch für den Sonderfall auf, daß $\beta = 0$ ist. Sie heißt dann:

$$\left\{ 1 - \frac{l^2}{\pi^2 r^2} \frac{4-2r-r^2}{2} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) \right\} \dots \quad (27)$$

Wie die Auswertungen zeigen werden, tritt dieser Fall ein bei sehr kurzen Zylindern mit vorwiegender Druckbelastung. Für die späteren Betrachtungen ist es zweckmäßiger, das Gleichungssystem (26) unter expliziter Einführung der Wellenzahl j aufzuschreiben:

$$C_n \left\{ \begin{aligned} & \left(1 - r^2 \right) \frac{\pi^4 r^4}{l^4} n^4 \dots k \left[\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 - 2j^6 - j^4 - 2r \frac{\pi^2 r^6}{l^6} n^6 - \frac{\pi^4 r^4}{l^4} n^4 (6j^2 + (4-3r^2)) - 2 \frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 j^2 ((4-r)j^2 - (2-r)) \right] \\ & q_2 \frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 \left[\left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 \right)^2 - j^2 - 2(1-r) \frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 \right] \left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 \right) \\ & q_1 \frac{\pi r}{l} \frac{8}{\pi} j \sum_m C_m \frac{n^m}{n^2} \frac{m^m}{m^2} (1)^m \left\{ 1 - \frac{1}{\left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} m^2 + j^2 \right)^2 \left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 \right)^2} \left[j^6 + j^4 \frac{3}{2} \frac{\pi^2 r^2}{l^2} (n^2 + m^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + j^2 \frac{\pi^4 r^4}{l^4} \left(\frac{2-r}{2} (n^4 + m^4) + (4-r-r^2)n^2 m^2 \right) + \frac{\pi^6 r^6}{l^6} n^2 m^2 (n^2 + m^2) \frac{4+2r-r^2}{2} \right] \right\} = 0, n+m \text{ ungerade} \end{aligned} \right. \quad (28)$$

Die Knickbedingung erhält man aus dem Gleichungssystem (26) oder (28) durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante. Ihre Konvergenz läßt sich wie folgt nachweisen: Betrachtet man als unbekannte Größen nicht C_n und C_m , sondern $(C_n n)$ und $(C_m m)$ und dividiert man z. B. die Koeffizienten des Gleichungssystems (26) mit diesen neuen Unbekannten durch $k n^3$, so wird die Knickdeterminante in die Form einer Normaldeterminante gebracht

$$\begin{vmatrix} 1 + c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots \\ c_{21} & 1 + c_{22} & c_{23} & \dots \\ c_{31} & c_{32} & 1 + c_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (29)$$

wo die unendliche Reihe

$$c_{11} + c_{12} + c_{21} + c_{13} + c_{22} + c_{31} + \dots$$

absolut konvergiert, da n^{-2} oder m^{-2} die höchste in c_{np} vorkommende Potenz von n oder m ist. Das ist aber eine ausreichende Konvergenzbedingung für die Koeffizientendeterminante (29).

Wir bemerken noch, daß die Knickbedingung für reinen Druck ($q_1 = 0$), die sich einfach aus dem Verschwinden des Koeffizienten von C_n ergibt, mit der früher von Flügge⁴⁾ abgeleiteten übereinstimmt. Das ist darauf zurückzuführen, daß der Koeffizient von C_n aus je einem Glied im Lösungsansatz (8), z. B. aus dem mit dem Index $1n$ entsteht, und dieser Teilansatz ist mit dem von Flügge benutzten Lösungsansatz identisch.

IV. Diskussion der Knickbedingung.

Die Knickbedingung, die sich aus dem Gleichungssystem (26) oder (28) ergibt, enthält außer den beiden Lastparametern q_1 und q_2 noch zwei Abmessungsparameter, und zwar k und $l/\pi r$. Für reine Druckbelastung oder reine Schubbelastung würden wir aus ihr eine einfache unendliche Kurvenschar und für zusammengesetzte Belastung eine zweifach unendliche Kurvenschar erhalten. Wie wir gleich zeigen werden, gelingt es, durch Vernachlässigung einiger

kleiner Größen in den Koeffizienten der Gleichungssysteme, die beiden Abmessungsparameter auf einen zu reduzieren und damit auch den Unendlichkeitsgrad der Kurvenschar für die genannten Belastungsfälle je um eins zu verringern.

⁹⁾ Daß das Iterationsverfahren zum Stehen kommt, ist natürlich noch kein ganz schlüssiger Beweis für seine Konvergenz. Ein solcher läßt sich im Anschluß an eine Arbeit von R. v. Mises und H. Pollaczek-Geringer, Praktische Verfahren der Gleichungslösung, Z. angew. Math. Mech. Bd. 9 (1929), S. 70, erbringen, wenn man von der Tatsache ausgeht, daß die Gl. (17.1-3) aus einer Minimalbedingung hervorgegangen sind.

Anhaltspunkte für die Vereinfachung des Gleichungssystems erhalten wir aus dem physikalischen Verhalten der gedrückten und tordierten Zylinder an der Stabilitätsgrenze. Es ist bekannt, daß kurze Zylinder im allgemeinen mit mehreren Wellen ($j \gg 1$) in der Umfangsrichtung, lange Zylinder dagegen mit wenigen und steilen Wellen ($j = 1, 2, 3 \dots; l/\pi r \gg 1$, s. Gl. (11)) ausknicken. Nur die sehr kurzen Zylinder ($l/\pi r \ll 1$) mit Druckbelastung knicken drehsymmetrisch, d. h. mit $j = 0$ aus. Dieses Verhalten der Zylinderschale legt es nahe, die Vereinfachungen in den Gleichungssystemen getrennt für kurze und lange Zylinder vorzunehmen.

a) Das Gleichungssystem für kurze Zylinder. Wir betrachten zunächst den Koeffizienten von C_n in Gl. (28). Er besteht in der geschweiften Klammer aus drei Summanden, deren zwei die kleinen Größen k und q_2 , die höchstens von der Größenordnung 10^{-3} sind (s. Gl. (5)), als Faktor haben. Wir befassen uns ausführlich nur mit dem Glied mit k , da die Schlussfolgerungen, die wir dafür ziehen werden, sich leicht auch auf das Glied mit q_2 übertragen lassen. Für kurze Zylinder ($j^2 \gg 1$) sind in Gl. (28) in der mit k multiplizierten eckigen Klammer die drei letzten Glieder vernachlässigbar klein, da in der Klammer $\left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2\right)$ dieselben Potenzen von $\pi r n/l$ vorkommen, aber mit einem in der Wellenzahl j um j^2 größeren Faktor. Auch die Glieder $-2j^6$ und j^4 werden dann gegen j^8 im ersten Glied sehr klein und es bleibt nur der Ausdruck

$$k \left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 \right)^4$$

dessen Genauigkeit mit abnehmender Zylinderlänge zunimmt. Für $\pi r/l \rightarrow \infty$ ist er exakt. Auch für den Fall des drehsymmetrischen Knickes ($j = 0$) kommt man auf dasselbe Ergebnis, da dann $\pi r/l \gg 1$ ist und nur die höchste Potenz von $\pi r/l$ genommen zu werden braucht.

Die Genauigkeit des vereinfachten Ausdruckes ist mit Ausnahme des drehsymmetrischen Knickens an die Bedingung gebunden, daß j^2 groß ist. Wie wir aus Bild 4 sehen, ist das für den größten praktisch interessierenden Wert $l/r = 1/100$ noch ungefähr bis $l/\pi r = 1$ der Fall, denn dann ist $\omega^2 = 18,2$ und für reinen Druck oder für vorwiegende Druckbelastung $\beta \approx 4$, d. h. $j \approx 4$ (bei Schubbelastung ist j noch größer). Mit abnehmender Wanddicke kann der Zylinder sogar noch länger sein.

Dieselben Überlegungen liefern, auf das Glied mit q_2 übertragen, den Ausdruck

$$q_2 \frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 \left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 \right)^2$$

Zusammenfassend erhalten wir also für den Koeffizienten von C_n :

$$\frac{1}{\left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 \right)^2} \left\{ (1 - \nu^2) \frac{\pi^4 r^4}{l^4} n^4 + k \left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 \right)^4 + q_2 \frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 \left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 \right)^2 \right\} \quad (30)$$

Multiplizieren wir das mit $l^3/\pi^4 r^4$ und führen wieder $\beta = j l/\pi r$ ein, so erhalten wir für den Koeffizienten, den C_n in Gl. (26) hat, die folgende vereinfachte Form:

$$\frac{1}{(n^2 + \beta^2)^2} \left\{ (1 - \nu^2) \frac{l^3}{\pi^4 r^4} n^4 + k (n^2 + \beta^2)^4 + q_2 \frac{l^2}{\pi^2 r^2} n^2 (n^2 + \beta^2)^2 \right\} \quad (30a)$$

Wir betrachten nun in den Gleichungen (26), (27), (28) den Koeffizienten von C_m in den dort vorkommenden Summen. Für $l/\pi r \ll 1$ erkennt man sofort, daß in (26) die geschweifte Klammer ≈ 1 ist; denn der von 1 abziehende Term besteht aus dem kleinen Faktor $(l/\pi r)^2$ und einem Faktor, der für keine Wertezusammenstellung β , m, n groß gegen 1 sein kann, da sein Zähler keine dieser Größen in höherer Potenz enthält als der Nenner. Das

Gleichungssystem nimmt dann mit (30a) die einfache Form an

$$(C_n n) \frac{\tau}{32 \beta} \left[\omega \frac{n^2}{(n^2 + \beta^2)^2} + \frac{(n^2 + \beta^2)^2}{n^2} + 4 \frac{\sigma_x}{\sigma^*} \right] - \frac{\tau}{\sigma^*} \sum_m (C_m m) \frac{1^m}{n^2 m^2} = 0 \quad (31)$$

n, m ungerade

Die Abkürzungen

$$\omega = \frac{12(1 - \nu^2)}{\pi^4} \frac{l^3}{r^2 l^2} \quad \text{und} \quad \sigma^* = \frac{\tau^2}{3} \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{l^2}{r^2} \quad (32)$$

wollen wir als erste Formkennzahl und als Spannungsbezugsgröße bezeichnen. σ^* ist die Knickspannung des unendlich langen ebenen Plattenstreifens von der Höhe l und Dicke t .

Um den Anschluß an die Ergebnisse für lange Zylinder zu gewinnen, ist es wichtig, die Frage aufzuwerfen, wie groß $l/\pi r$ noch werden darf, ohne daß diese Gleichungen unbrauchbar werden. Für den Koeffizienten von C_n nach Gl. (30) oder (31) haben wir den Gültigkeitsbereich schon oben abgeschätzt. Um auch für den Koeffizienten von C_m in der Summe diese Frage zu beantworten, gehen wir wieder aus von dem Fall $l/\pi r = 1$, $l/r = 0,01$, $\omega^2 = 18,2$, $\beta \approx 4$, $j \approx 4$. Der Fehler in dem Koeffizienten von C_m nach (31) beträgt dann, wie man aus der Form (26) leicht ausrechnet, für das ungünstigste Wertepaar m, n ($m = 1, n = 2$ oder umgekehrt) etwa 5,8%. Halten wir einmal an $j = 4$ fest, so gehören zu kleineren l/r (größere als 0,01 sind praktisch bedeutungslos) größere $l/\pi r$, und für $l/r \rightarrow 0$ geht $l/\pi r \rightarrow \infty$. Für diesen Grenzfall geht die Klammer, wie man aus (28) sieht, über in $\{1 - 1/j^2\}$, und der Fehler wird dann 6%. Eine genauere Überlegung zeigt, daß auch für Zwischenwerte von $l/\pi r$ keine wesentlichen Überraschungen zu erwarten sind.

Wenn wir uns auf Zylinder beschränken, für die $l/r < 0,01$ ist, so können wir also feststellen, daß die Form (31) unseres Gleichungssystems für $l/\pi r = 1$ immer brauchbar ist, und dünnwandige Zylinder dürfen sogar noch länger sein, wie lang, das werden wir im einzelnen besser bei der Untersuchung des langen Zylinders feststellen; denn dahin gehören diese Fälle ja eigentlich. Es deutet sich hier schon das angenehme Ergebnis an, daß die beiden Bereiche des kurzen und des langen Zylinders, für die wir in dieser Arbeit Ergebnisse gewinnen, sich überschneiden, so daß man damit die Lösung für beliebige Zylinderlängen in der Hand hat.

Nun kehren wir zu dem Gleichungssystem (31) zurück. In dieser Form ist es am bequemsten für kleine ω (kurze, nicht sehr dünnwandige Zylinder). Für größere ω erscheint es zweckmäßiger, das Gleichungssystem in einer anderen Form zu schreiben, die sich aus (31) ergibt, wenn man mit $\frac{3}{17} \left(\frac{\omega}{12} \right)^4$ durchdividiert und ω^2 aus der Klammer bei C_n herauszieht:

$$(C_n n) \frac{\tau^2 \omega^2}{8 \cdot 12^2 \beta} \left[\frac{1}{(n^2 + \beta^2)^2} + \frac{(n^2 + \beta^2)^2}{1 \omega n^2} + 12 \mu \right] - \lambda \sum_m (C_m m) \frac{1^m}{n^2 m^2} = 0 \quad (31a)$$

n, j, m ungerade

mit den Beiwerten für die Längs- und Schubspannung

$$\mu = \frac{\sigma_x}{\sigma^*} \frac{4}{12 \omega} = \frac{\sigma_x}{E} \frac{1 - \nu^2}{l} \frac{r}{t} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\tau}{\sigma^*} \frac{1}{3} \left(\frac{12}{\omega} \right)^4 = \frac{\tau}{E} (1 - \nu^2)^2 \frac{l^2 r^2}{t^4} \quad (33)$$

Diese Form des Gleichungssystems für kurze Zylinder schließt sich, wie wir gleich sehen werden, unmittelbar an das für lange Zylinder an. Bevor wir aber zu diesem übergehen, schalten wir einige Betrachtungen über die Anzahl der Formparameter in (31) oder (31a) ein. Außer in σ_x, τ^*

mit τ/σ^* oder μ und λ sind die Formparameter in ω und β in $l/\pi r$ enthalten. Dabei muß die Wellenzahl j so gewählt werden, daß sich die kleinsten kritischen Spannungen ergeben. Man kann statt dessen die Größe β selbst, unter Verzicht auf die Ganzwelligkeit der Beulfigur in der Umfangsrichtung so wählen, daß diese Forderung erfüllt ist. Damit kann man nur eine kleinere kritische Spannung ermitteln, als die, die einem physikalisch möglichen ganzzahligen j entspricht. Der Unterschied kann aber nicht groß sein, denn das Minimum bei einer stetigen Veränderlichkeit von β ist, wie die rechnerischen Auswertungen gezeigt haben, sehr flach. Außerdem ist bei kürzeren Zylindern die Wellenzahl j im allgemeinen groß, so daß ein Übergang von j zu $j+1$ nur eine kleine Änderung in β entspricht. In scheinbarem Widerspruch dazu steht das Ergebnis für reinen Druck und $\omega' \approx 1$ (s. Bild 4). Für $\omega' < 1$ ist $\beta = j = 0$ und für $\omega' > 1$ ist β von Null verschieden. Da aber bei $\omega' = 1$ das Verhältnis $l/\pi r$ sehr klein ist ($l/\pi r \approx 0,05$ für $l/r \approx 1,5$ und $\omega' \approx 1$), so entspricht auch hier einem Übergang von $j = 0$ auf eine endliche Wellenzahl nur eine gegen Eins kleine Änderung in β , die nur einen geringen Einfluß auf die kritische Spannung haben kann, da in der Knickformel für reinen Druck β nur in der Kombination $(n^2 + \beta^2)$, $n = 1, 2, \dots$ steht (s. Gl. (11)). Somit ist eine stetige Veränderung von β bei allen ω -Werten gerechtfertigt. Dann hängt aber das Gleichungssystem (31) oder (31a) außer von σ/σ^* , τ/σ^* oder μ , λ tatsächlich nur noch von einem Abmessungsparameter, und zwar vom Formparameter ω ab. Für reinen Schub oder reinen Druck ist also der einzige dann vorkommende Spannungsparameter durch eine einfache Kurve in Abhängigkeit von ω darstellbar, und für zusammengesetzte Beanspruchung erhält man eine einfach unendliche Kurvenschar.

b) Das Gleichungssystem für lange Zylinder. Wir betrachten wieder getrennt die Koeffizienten von C_n und C_m in Gl. (28) und fangen mit C_n an. Bei großen Zylinderlängen ($\pi r/l \ll 1$) sind in der mit k multiplizierten eckigen Klammer alle Größen, die $\pi r/l$ zum Faktor haben, vernachlässigbar klein, da nach Gl. (11) auch $\pi r n/l$ klein ist, und es bleibt der Ausdruck übrig:

$$k j^4 (j^2 - 1)^2.$$

Obwohl für $j = 1$ (Eulerfall bei reinem Druck; bei Schubbelastung haben wir diesen Fall aus unserem Betrachtungskreis ausgeschlossen) dieser Ausdruck verschwindet, sind auch dann die Vernachlässigungen zulässig; denn das größte Glied in $\pi r/l$, nämlich das mit $\pi^2 r^2/l^2$ als Faktor verschwindet für $j = 1$ in der Klammer von k glücklicherweise ebenfalls, wovon man sich durch Zusammenfassen aller Glieder mit diesem Faktor überzeugen kann. Die in $\pi r/l$ höheren Glieder (mit $\pi^2 r^4/l^4$ usw. als Faktor) verschwinden für $j = 1$ allerdings nicht, sind aber gegen das erste Glied $(1 - r^2) \pi^2 r^2/l^2$ in der Klammer von C_n zu vernachlässigen, da sie ihm gegenüber noch die sehr kleine Zahl k als Faktor haben.

Entsprechend bekommt man für das Glied mit q_2 :

$$q_2 \frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 j^2 (j^2 - 1).$$

Auch in der Klammer $(\pi^2 r^2 n^2/l^2 + j^2)^2$, die im Nenner des Koeffizienten von C_n steht, ist der erste Anteil wegzulassen und der Koeffizient erhält endgültig die Form:

$$\left\{ 1 + \frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + k j^4 (j^2 - 1)^2 + q_2 \frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 j^2 (j^2 - 1) \right\} \quad (34)$$

Auch in den Koeffizienten von C_m (s. Gl. (28)) sind in der geweihten Klammer alle Glieder mit $\pi r/l$ als Faktor wegzulassen und es bleibt für die Klammer der Ausdruck übrig:

$$1 - 1/j^2, \dots \quad (35)$$

Wir haben auch bei der Diskussion des Gleichungssystems für kurze Zylinder gehabt; nur darf hier der zweite Term nicht weggelassen werden, da die Wellenzahl j für lange Zylinder klein ist.

Schließlich erhalten wir aus (28) mit (34) und (35) das Gleichungssystem für lange Zylinder in der Form:

$$\begin{aligned} (C_n)_{nn} &= \frac{\pi^2 r^2}{8 \cdot 12 \pi^4 j \omega'^4} \left\{ \frac{n^2}{\omega'^2 j^2 (j^2 - 1)} + \sqrt{12 \mu \frac{j^2 + 1}{j^2 - 1}} \right\} \\ \lambda \sum_m (C_m)_{mn} \frac{(1 - 1/m^2)^m}{n^2 m^2} &= 0 \quad (36) \end{aligned}$$

n, m ungerade

Die Abkürzung

$$\bar{\omega} = \frac{1}{12 \pi^4 (1 - r^2)} \mu \mu^2 \quad (37)$$

wird als zweite Formkennzahl bezeichnet. Sie ist wieder so eingeführt, daß sie mit wachsender Länge l zunimmt. Die Lastglieder μ und λ sind erfreulicherweise dieselben wie auch im umgeformten Gleichungssystem für den kurzen Zylinder (vgl. Gl. (31a) und (36)). Aus (32) und (37) erhält man für die beiden Formkennzahlen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \omega' \bar{\omega}' &= (l/\pi r)^2 \\ \omega' \bar{\omega}' &= \left[12 (1 - r^2) \frac{r}{l} \right] \quad (38_{1-2}) \end{aligned}$$

Die Gleichungssysteme (31a) und (36) unterscheiden sich nur in dem Koeffizienten von C_n . Führt man $j/l/\pi r$ statt β in (31a) ein und dividiert Zähler und Nenner durch geeignete Potenzen von $l/\pi r$, so erhält der Koeffizient von C_n für kurze Zylinder in (31a) folgende Form:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 12 \pi^4 j \omega'^4 & \left\{ \frac{n^2}{\bar{\omega}} \left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{\bar{\omega}} \left(\frac{\pi^2 r^2}{l^2} n^2 + j^2 \right)^2 + 12 \mu \right\} \quad (39) \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich zwischen (36) und (39) sieht man, wie die Gleichungssysteme für kurze und lange Zylinder ineinander übergehen: In (36) ist wegen $\pi r/l \ll 1$ das Glied $\pi^2 r^2/l^2 n^2$ gegen j^2 vernachlässigt, dagegen ist dort ± 1 gegen j^2 wegen der kleineren Wellenzahl j berücksichtigt. Bei welchem Formparameter $\bar{\omega}$ die beiden Gleichungssysteme praktisch ineinander übergehen, werden die rechnerischen Auswertungen zeigen.

Im Gleichungssystem (36) für lange Zylinder ist die Wellenzahl wieder so zu wählen, daß sich die kleinsten kritischen Spannungen ergeben. Für reinen Druck und reinen Schub erhält man die kritischen Werte μ und λ wie bei kurzen Zylindern aus je einer einzelnen Kurve jetzt in Abhängigkeit von $\bar{\omega}$ und für die zusammengesetzte Belastung aus einer einfach unendlichen Kurvenschar.

c) Knickdeterminante. Die kritischen Spannungen ergeben sich aus den Gleichungssystemen (31) und (36) durch Nullsetzen ihrer Koeffizientendeterminanten. Bezeichnet man den Koeffizienten von C_{nn} jedesmal mit T_n (entsprechend der Ordnungszahl n) und die bezogene Schublast mit λ (oder $\lambda' = \tau/\sigma^*$ in Gl. (31)), so erhält die Knickdeterminante für kurze und lange Zylinder folgende Form:

T_1	$\frac{\lambda}{3}$	0	$\frac{\lambda}{15}$	0	
λ	T_2	λ	0	λ	
3	5	5	0	21	
0	λ	T_3	$\frac{\lambda}{7}$	0	
15	5	7	7	0	= 0, (40)
λ	0	$\frac{\lambda}{7}$	T_4	$\frac{\lambda}{9}$	
15	0	$\frac{\lambda}{7}$	9	9	
0	λ	0	λ	λ	
	21	0	9	9	

wobei T_n von σ_x und τ abhängig ist und für kurze und lange Zylinder verschiedene Bedeutung hat.

V. Auswertung der Knickbedingung.

1. Reine Druckbelastung.

Wir betrachten zunächst den Sonderfall reinen Druckes ($\tau = 0$) und bezeichnen dann die kritische Spannung σ_1 mit σ_{10} . Wie man aus (31) und (36) sieht, fallen mit $\tau = 0$, d. h. auch $\lambda = 0$ die Summen fort, und die Gleichungsdeterminante (40) hat nur noch in der Diagonale von Null verschiedene Glieder. Die Knickbedingung ergibt sich also durch Nullsetzen des Koeffizienten bei einem geeigneten C_n in den Gleichungssystemen (31) und (36) für kurze und lange Zylinder.

a) Knickbedingung für kurze Zylinder. Aus dem Verschwinden des Koeffizienten von C_n im Gleichungssystem (31) erhält man mit $\sigma_x = -\sigma_{10}$, wie schon früher²⁾ gezeigt:

$$\frac{\sigma_{10}}{\sigma^*} = \frac{1}{4} \left(\omega \frac{n^2}{(n^2 - \beta^2)^2} + \frac{(n^2 + \beta^2)^2}{n^2} \right) \dots (41)$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$ gleich Wellenzahl in der Längsrichtung.

Aus der Minimalbedingung $\frac{d\sigma_{10}}{d\beta} = 0$ folgt:

$$\beta = 0 \text{ oder } \beta = \sqrt{(\omega^2 - 1)n} \dots (42)$$

Die zweite dieser Gleichungen liefert nur für $\omega^2 > n$ reelle Werte β . Setzt man Gl. (42) in (41) ein, so findet man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{10}}{\sigma^*} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{n^2} + n^2 \right) \\ \frac{\sigma_{10}}{\sigma^*} &= \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2} \text{ für } \omega^2 > n \end{aligned} \right\} \dots (43_{1-2})$$

Hier ist noch die Wellenzahl n in der Längsrichtung so zu bestimmen, daß sich die kleinste kritische Druckspannung ergibt. Gl. (43₂) liefert einen an sich von n unabhängigen Wert, nur ist ihre Gültigkeit durch die Bedingung $\omega^2 \geq n$ begrenzt. Mit $n = 1$ gilt sie für alle $\omega \geq 1$ und ist dann auch maßgebend, da (43₁) keine kleineren Werte gibt.

Dagegen ist für $\omega \leq 1$ nur (43₁) gültig und gibt in diesem Bereich mit $n = 1$ die kleinste Knickspannung. Aus (42) und (43) erhalten wir dann endgültig für β und für die kritische Druckspannung eines kurzen Zylinders folgende Formeln

$$\beta = 0 \text{ für } \omega \leq 1, \beta = \sqrt{\omega^2 - 1} \text{ für } \omega \geq 1 \dots (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{10}}{\sigma^*} &= \frac{1}{4} (\omega + 1) \text{ für } \omega \leq 1 \\ \frac{\sigma_{10}}{\sigma^*} &= \frac{1}{2} \sqrt{\omega} \end{aligned} \right\} \dots (45)$$

oder

$$\frac{\sigma_{10}}{\sigma^*} = \frac{E}{3(1-\nu^2)} \frac{l}{r} \text{ für } \omega \geq 1$$

Bei $\omega = 0$ geht der Zylinder in einen ebenen quergedrückten Plattenstreifen von der Höhe l über. Dieser Plattenstreifen knickt dann in einer einzigen Welle ohne Knotenlinien mit der Eulerspannung eines in Krafrichtung herausgeschnittenen Streifens

$$\sigma_{10} = \frac{1}{4} \sigma^* = \frac{\pi^2}{12} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{l^2}{r^2}$$

aus.

Im Bild 4 ist die Größe β in Abhängigkeit von ω^2 aufgetragen. Die Ergebnisse für die kritische Druckspannung selbst aus Gl. (45) sind im Bild 5a in Abhängigkeit von ω^2

$\frac{1}{\pi} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{l}{r}$, d. h. abgesehen vom Zahlenfaktor, in Abhängigkeit von der auf l/r bezogenen Zylinderlänge l dargestellt. Als Ordinate wurde

$$\mu = \frac{\sigma_{10}}{E} (1-\nu^2)^{1/2} \frac{r}{l} = \frac{\sigma_{10}}{\sigma^*} \frac{4}{12\omega}$$

gewählt, da diese Form des Lastbeiwertes sich sowohl für den kurzen als auch für den langen Zylinder ergeben hat

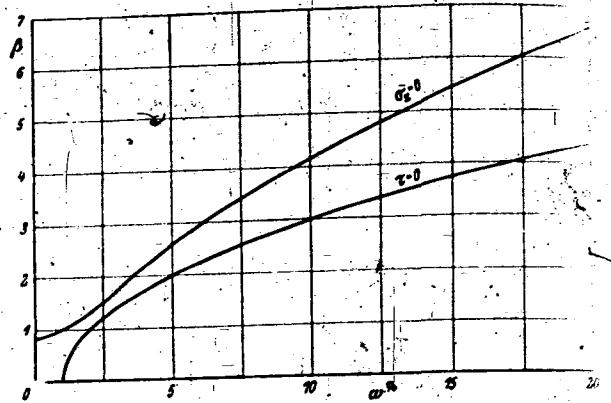


Bild 4. Wellenzahl j am Umfang von Kreiszylinderschalen bei reinem Druck $\beta = 0$ und reinem Schub $\omega = 0$; $\beta = j \frac{l}{r}$

$$\frac{\sigma_{10}}{E} = \frac{1}{12} \frac{r}{l} \frac{1}{1-\nu^2} \dots$$

(s. die Diskussion der Knickbedingung, Gl. (31 a) und (36)). Durch Multiplikation der Knickbedingungen (45) mit $\frac{4}{12\omega}$ erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{10}}{E} \left| 1 - \nu^2 \frac{r}{l} \right| &= \frac{1}{12} \left(\sqrt{\omega} + \frac{1}{\omega} \right) \text{ für } \omega \leq 1 \\ \frac{\sigma_{10}}{E} \left| 1 - \nu^2 \frac{r}{l} \right| &= \frac{1}{3} \text{ für } \omega \geq 1 \end{aligned} \right\} (45a)$$

b) Die Knickbedingung für lange Zylinder erhält man aus dem Nullsetzen des Koeffizienten von C_n in Gl. (36):

$$\mu = \frac{\sigma_{10}}{E} \sqrt{1 - \nu^2} \frac{r}{l} \left[\frac{1}{12} \frac{n^2 - 1}{\omega \sqrt{j^2(j^2 + 1)}} + \frac{1}{n^2} \frac{j^2(j^2 - 1)^2}{j^2 + 1} \right] \dots (46)$$

Darin sind n und j wieder so zu wählen, daß sich die kleinste kritische Spannung ergibt. Die Rechenergebnisse aus dieser Formel sind im Bild 5b über

$$\frac{\sigma_{10}}{E} = \frac{1}{\pi} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{l}{r} \dots$$

d. h. wieder in Abhängigkeit von der Zylinderlänge l aufgetragen, welche jetzt, abgesehen vom Zahlenfaktor, auf r/l bezogen ist. Jedes Wertepaar j, n liefert eine Kurve, aus denen in bekannter Weise ein Girlandenzug zu bilden ist. Um einen genaueren Überblick zu bekommen, konstruieren wir uns zunächst einmal den einfachen Girlandenzug, den die Kurven $j = 1, 2, 3, \dots$ zu einem festen n bilden. Der Übergang von j zu $j + 1$ -Wellen in der Umfangsrichtung findet dann statt, wenn die rechte Seite in Gl. (46) bei der Vertauschung von j mit $j + 1$ ihren Wert nicht ändert, d. h. bei

$$\frac{\sigma_{10}}{E} \frac{1}{n} = \frac{1}{j(j+1)} \dots (47)$$

Die kritische Spannung selbst ergibt sich für diese Übergangsstellen nach Einsetzen von (47) in (46) unabhängig von der Wellenzahl j zu:

$$\frac{\sigma_{10}}{E} \left| 1 - \nu^2 \frac{r}{l} \right| = \frac{1}{3}$$

Das ist genau dieselbe Spannung, die wir nach (45a) für kurze Zylinder mit $\omega \geq 1$ ermittelt haben.

Der Wert von ω^2/n , für den die kritische Spannung bei einer gegebenen Wellenzahl j ein Minimum hat, ergibt sich aus der Minimalbedingung $\partial \sigma_{10} / \partial \left(\frac{1}{n^2} \right) = 0$ zu:

$$\frac{\omega^2/n}{n} = \frac{1}{j \sqrt{j^2 - 1}} \dots (48)$$

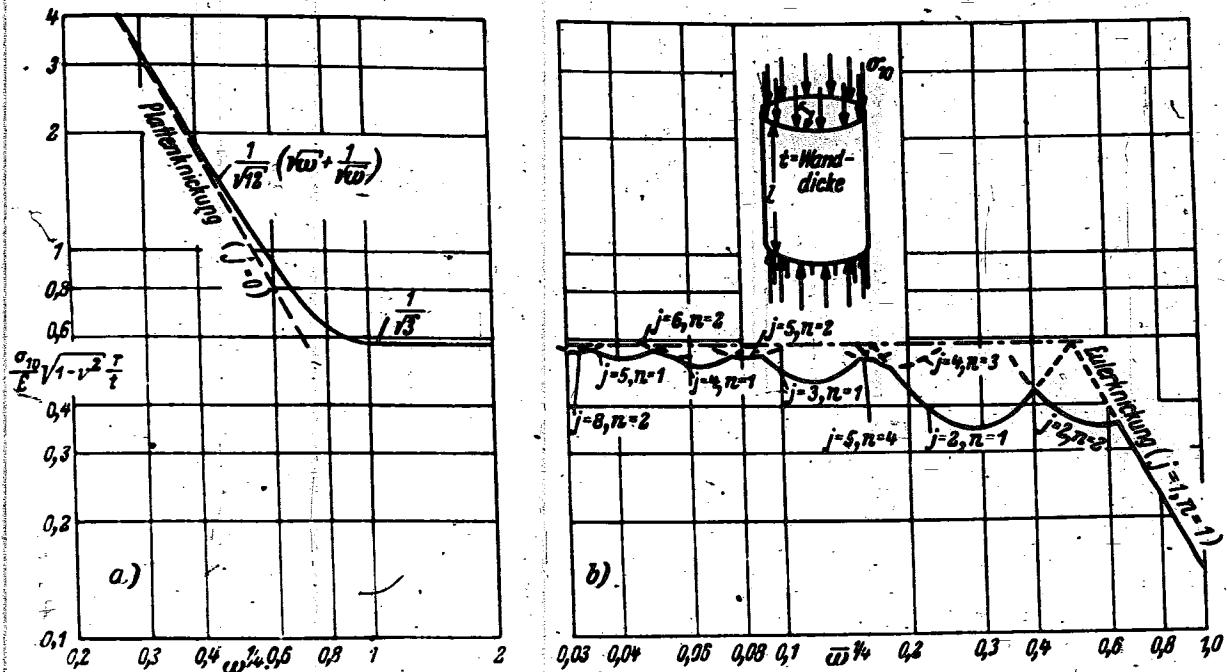


Bild 5. Die kritische Spannung σ_{10} einer Kreiszylinderschale bei reinem Druck in Abhängigkeit von den Formkennzahlen \bar{m} und $\bar{m} \cdot j$ - Wellenzahl in der Umfangsrichtung, n - Wellenzahl in der Längsrichtung.

a) Kurzer Zylinder $\bar{m} < 12$ $\sigma_{10} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{l}{r} \sqrt{1-\nu^2} \frac{r}{l}$

b) langer Zylinder $\bar{m} > 12$ $\sigma_{10} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{r} \sqrt{1-\nu^2} \frac{r}{l}$

und das Minimum selbst¹⁰⁾ durch Einsetzen in (46) zu

$$\frac{\sigma_{10}}{E} \left| 1 - \nu^2 \frac{r}{l} = \frac{1}{3} \frac{j^2 - 1}{j^2 + 1} \right. \quad (49)$$

Man hat sich nun diesen Girlandenzug für jeden Wert $n = 1, 2, 3, \dots$ aufzuzeichnen, was bei logarithmischer Auftragung der Abszisse \bar{m}^2 auf eine Wiederholung des parallel verschobenen Girlandenzuges $n - 1$ hinausläuft, und von jedem nur die Teile beizubehalten, in denen er eine kleinere Ordinate hat als alle anderen. So kommt man zu der zusammengesetzten Girlande, die in Bild 5b stark ausgezogen ist.

Wie Bild 5b zeigt, liegt die Ordinate am linken Rande nur noch wenig unter $1/\sqrt{3}$. Bei $\bar{m}^2 \approx 0,03$ ist nach (48), (49) mit $j = 6, n = 1$ die Abweichung nur noch 5,5%, Zylinder mit $\bar{m}^2 \approx 0,03$ können also praktisch nach Bild 5a als kurze Zylinder behandelt werden, falls nicht $\bar{m}^2 > 1$ ist. Das ist nicht zu befürchten, solange entsprechend der Gl. (38.2)

$$\left| 12(1-\nu^2) \frac{r}{l} \bar{m}^2 > 1, \right.$$

oder mit $\nu = 0,3$

$$\frac{l}{r} < 3,3 \bar{m}^2$$

Diese Bedingung ist z. B. bei $\bar{m}^2 = 0,03$, d. h. $l/r = 0,1$ in den praktischen Fällen bei weitem erfüllt.

Wir bemerken noch, daß der Kurvenast mit $j = 1$ in Bild 5b der Bereich des Eulerknickens ist. Aus Gl. (46) ergibt sich mit $j = 1$ und $n = 1$ die zugehörige kritische Spannung zu:

$$\mu = \frac{\sigma_{10}}{E} \left| 1 - \nu^2 \frac{r}{l} = \frac{1}{2} \left| 12 \bar{m}^2 \right. \right. \quad (50)$$

$$\sigma_{10} = \frac{\pi^2 E}{2} \frac{I^2}{l^2}$$

und das ist genau die Eulersche Knickspannung für einen beidseitig eingespannten zylindrischen Stab mit einem Halbmesser r und einer Länge l .

Die kritischen Druckspannungen von Flügge¹⁾ aus der exakten Stabilitätsgleichung wurden bereits früher von Flügge¹⁾ aus der exakten Knickbedingung, die sich aus Gl. (28) mit $q_1 = 0$ ergibt, gefunden.

¹⁰⁾ Diese Beziehung ist auch bei Timoshenko zu finden, s. sein Buch: Theory of elastic stability. New York and London 1936, S. 9.

in Abhängigkeit von l/r berechnet. Die Rechenergebnisse aus der exakten Knickbedingung lassen sich, wie in Abschnitt IV erwähnt wurde, bereits bei einfacher Belastung nur mit Hilfe einer Kurvenschar darstellen. Bei Flügge ist $k = l^2/12r^2$ als Kurvenparameter gewählt und in den Grenzen von 10^{-5} bis 10^{-6} variiert. Wie eine Umrechnung auf die Koordinaten im Bild 5 zeigt, reduzieren sich die Kurvenscharen aus der exakten Rechnung tatsächlich mit großer Genauigkeit auf die eine hier ermittelte Kurve. Die größten Abweichungen betragen etwa 2,5% bei $k = 10^{-5}$.

2. Reine Schubbelastung.

Wir bestimmen die kritische Schubspannung $\tau = \tau_0$ für reine Schubbelastung ($\sigma_x = 0$). Da aber die Aufstellung der Knickbedingungen für den kombinierten Fall methodisch genau so vor sich geht wie die für den Fall des reinen Schubes, so ist schon hier der Fall der zusammengesetzten Belastung in den Formeln miterfaßt; nur seine Diskussion wird dem nächsten Absatz vorbehalten.

Eine Folge von Näherungen für die kritische Schubspannung ergibt sich aus (40), wenn man die unendliche Determinante durch einen zweireihigen, dreireihigen usw. Ausschnitt annähert. Fängt man mit $n = 1$ an, so ergeben sich folgende Näherungen:

erste Näherung: $\lambda^2 = 9 T_1 T_2 \dots (51)$

zweite Näherung: $\lambda^2 = \frac{T_1 T_2 T_3}{\frac{1}{5^2} T_1 + \frac{1}{3^2} T_3} \dots (52)$

dritte Näherung:

$$\lambda^2 \left(\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 15} \right)^2 - \lambda^2 \left(\frac{T_3 T_4}{3^2} + \frac{T_1 T_2}{5^2} + \frac{T_1 T_2}{7^2} + \frac{T_2 T_3}{15^2} \right) + T_1 T_2 T_3 T_4 = 0 \quad (53)$$

usw. Aus der m -ten Näherung erhält man die $(m-1)$ -te, indem man nur die Glieder mit T_m heraussticht.

Für lange Zylinder hat die Auswertung gezeigt, daß die wesentlichen Glieder im Reihenansatz (8) nicht die ersten sind. Deshalb benutzt man dann zur Annäherung der Determinante zweckmäßig nicht ihren Anfang, sondern einen Ausschnitt, der bei denjenigen n liegt, zu denen die größten C_n gehören. Man erkennt diese Stelle auch, ohne die C_n auszurechnen, da sich dann bei festgehaltener Ordnung

des benutzten Ausschnitts die Knicklast am kleinsten ergibt. Da außerdem für lange Zylinder eine dritte Näherung noch nicht ausreichend ist, so geben wir im folgenden eine vierte Näherung an, die von einem beliebigen n anfangen soll.

$$\lambda^4 \left[T_{n+4} \left(\frac{1}{(2n+1)(2n+5)} + \frac{1}{3(2n+3)^2} \right)^2 \right. \\ \left. T_{n+2} \left(\frac{1}{(2n+1)(2n+7)} - \frac{1}{9(2n+3)(2n+5)} \right)^2 \right. \\ \left. T_n \left(\frac{1}{(2n+3)(2n+7)} + \frac{1}{3(2n+5)^2} \right)^2 \right] \\ - \lambda^2 \left[\frac{T_{n+2} T_{n+3} T_{n+4}}{(2n+1)^2} + \frac{T_n T_{n+3} T_{n+4}}{(2n+3)^2} \right. \\ \left. + \frac{T_n T_{n+1} T_{n+4}}{(2n+5)^2} + \frac{T_{n+1} T_{n+2} T_{n+4}}{9(2n+3)^2} \right. \\ \left. + \frac{T_n T_{n+1} T_{n+2}}{(2n+7)^2} + \frac{T_n T_{n+2} T_{n+3}}{9(2n+5)^2} \right] \\ - T_n T_{n+1} T_{n+2} T_{n+3} T_{n+4} = 0 \quad (54)$$

a) Knickbedingung für kurze Zylinder. In diesem Fall hat sich erwiesen, daß die ersten Glieder im Ansatz (8) die wesentlichen sind und daß schon die dritte Näherung ausreicht. Entsprechend dem Gleichungssystem (31) für kurze Zylinder ist in der Knickdeterminante (40) oder in ihre Entwicklungen (51) bis (53) λ durch die Größe $\lambda' = \tau/\sigma^*$ zu ersetzen und

$$T_n = \frac{7}{32 \beta^2} \left[\omega \frac{h^2}{(n^2 + \beta^2)^2} + \frac{(n^2 + \beta^2)^2}{n^2} - 4 \frac{\sigma_x}{\sigma^*} \right] \quad (55)$$

einzuführen, wobei für reinen Schub $\sigma_x = 0$ ist. In die Diagonalglieder T_n der Knickdeterminante geht noch die Größe β ein, die durch Probieren so bestimmt werden muß, daß sich die kleinste kritische Spannung ergibt.

Die Rechenergebnisse für $\beta = j l / \pi r$ sind im Bild 4 über ω^2 aufgetragen. Die reziproke Halbwellenlänge hat bei $\omega = 0$ (ebener Plattenstreifen von der Höhe l) den Wert $\beta = 0,8$ und nimmt mit größer werdendem ω zu. Die Ergebnisse für die kritische Spannung τ_0 bei reinem Schub finden sich in Bild 6 und 7. Wir betrachten zuerst das Bild 6.

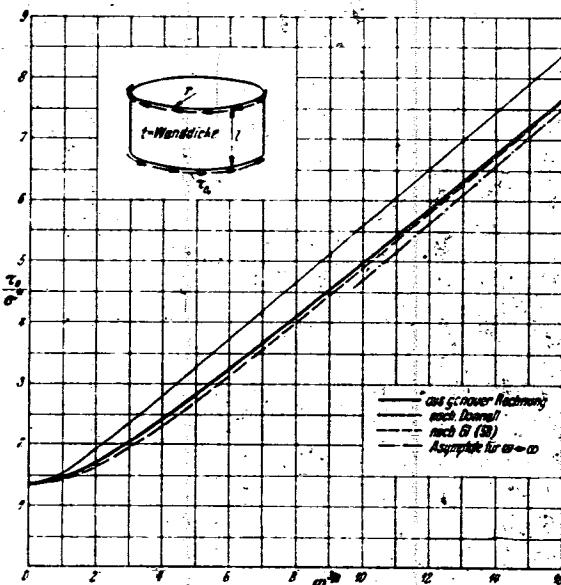


Bild 6. Die kritische Spannung τ_0 einer Kreiszylinderschale bei reiner Schubbelastung in Abhängigkeit von der Formkennzahl $\omega = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2} \frac{l^2}{r^2} \frac{\sigma^*}{E} \frac{1}{t^2}$

wo τ_0/σ^* über ω^2 aufgetragen ist. Für $\omega = 0$ erhält man den von Southwell und Skan¹¹⁾ exakt gerechneten Wert $\tau_0/\sigma^* = 1,334$ des Plattenstreifens. Bei großen ω -Werten nähert sich der Verlauf der Kurve asymptotisch einer Geraden. Die Gleichung dieser Asymptote findet man am

¹¹⁾ R. N. Southwell and S. W. Skan, On the stability under shearing forces of a flat elastic strip. Proc. Roy. Soc. London Ser. A., 105 (1924), S. 582.

bequemsten, wenn man das Gleichungssystem (31) verwendet. Danach ist

$$T_n = \frac{\pi^{3/2} \omega^{1/2}}{8 \cdot 12^2 \beta} \left[\frac{1}{(n^2 + \beta^2)^2} + \frac{(n^2 + \beta^2)^2}{\omega n^2} + \sqrt{12} \right] \quad (56)$$

wobei für reinen Schub $\mu = 0$ (s. Gl. (33)) zu setzen ist. Damit bei $\omega \rightarrow \infty$ das Diagonalglied T_n endlich bleibt, muß β mit $\omega^{1/2}$ nach unendlich gehen. Wir setzen

$$\beta = z \omega^{1/2},$$

worin jetzt die Zahl z durch Probieren so bestimmt werden muß, daß λ am kleinsten wird. Da die Glieder mit $n = 1$ bis 4 im Reihenansatz (8) wieder die wesentlichen sind, so kann n^2 gegen β^2 in T_n weggelassen werden. Die Rechnung ergibt

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 1,6 \omega^{1/2} \\ \lambda &= \frac{\tau_0}{E} (1 - \nu^2)^{1/2} \frac{l^2 r^2}{l^2} = 0,703 \end{aligned} \right\} \text{für } \omega \rightarrow \infty \quad (57)$$

oder $\tau_0/\sigma^* = 0,469 \omega^{1/2}$.

Wir geben noch eine Näherungsformel für alle ω an, die dem genauen Kurvenverlauf (s. Bild 6) ziemlich gut angepaßt ist und die den Grenzwert $\tau_0/\sigma^* = 1,334$ für $\omega = 0$ und den asymptotischen Wert $\tau_0/\sigma^* = 0,469 \omega^{1/2}$ für $\omega \rightarrow \infty$ exakt wiedergibt:

$$\frac{\tau_0}{\sigma^*} = \sqrt{1,78 + 0,22 \omega^2}$$

$$\text{oder } \tau_0 = 4,39 \frac{E r^2}{l^2} \left[1 + 0,0257 (1 - \nu^2)^{1/2} \left(\frac{l}{r t} \right)^3 \right. \\ \left. - 0,703 (1 - \nu^2)^{1/2} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \left(\frac{l}{r t} \right)^3 + 38,9 (1 - \nu^2)^{1/2} \left(\frac{l r t}{l} \right)^3 \right] \quad (58)$$

also mit $\nu = 0,3$

$$\tau_0 = 4,82 E \frac{r^2}{l^2} \left[1 + 0,0240 \left(\frac{l}{r t} \right)^3 \right. \\ \left. - 0,746 E \left(\frac{l}{l} \right)^2 \left(\frac{l}{r} \right)^3 + 41,7 \left(\frac{l r t}{l} \right)^3 \right] \quad (59)$$

Der erste Ausdruck für τ_0 ist bei kleinem $\frac{l}{r t}$, der zweite bei größerem $\frac{l}{r t}$ bequemer. Im Bereich von $\omega^2 = 1$ gibt die Näherungsformel etwa um 4% zu kleine Werte (s. Bild 6).

Die Gleichung von Donnell, der die Kreiszylinderschale endlicher Länge mit reiner Schubbelastung näherungsweise untersucht hat¹²⁾, ist der Gl. (58) ähnlich gebaut und unterscheidet sich von ihr in den Konstanten. Sie lautet in unserer Bezeichnungsweise:

$$\frac{\tau_0}{\sigma^*} = 0,85 + \sqrt{0,24 + 0,22 \omega^2}$$

Die Rechenergebnisse aus dieser Formel sind im Bild 6 ebenfalls eingetragen. Aus dem Vergleich mit unseren Ergebnissen ersieht man, daß die Donnell'sche Formel bei $\omega = 0$ denselben Wert und bei $\omega^2 = 5$ einen etwa um 16% zu hohen Wert liefert. Die asymptotische Gerade für $\omega \rightarrow \infty$ liegt bei Donnell um 0,85 höher als in unserem Fall. Die große Abweichung in der Gegend von $\omega^2 = 5$ ist darauf zurückzuführen, daß hier die Randbedingungen in der Donnell'schen Rechnung nur sehr ungenau erfüllt sind.

Um einen Anseh B an das Knicken von langen Zylindern zu bekommen, ist im Bild 7a die dimensionslos gemachte kritische Schubspannung von kurzen Zylindern (s. die stärker ausgezogene Kurve für reinen Schub) in der Form λ nach Gl. (33) aufgetragen, welche sich auch für lange Zylinder ergeben hat (s. Gl. (36)).

b) Knickbedingung für lange Zylinder. Für die Koeffizienten der Knickdeterminante (40) erhält man aus dem Gleichungssystem (36) für lange Zylinder:

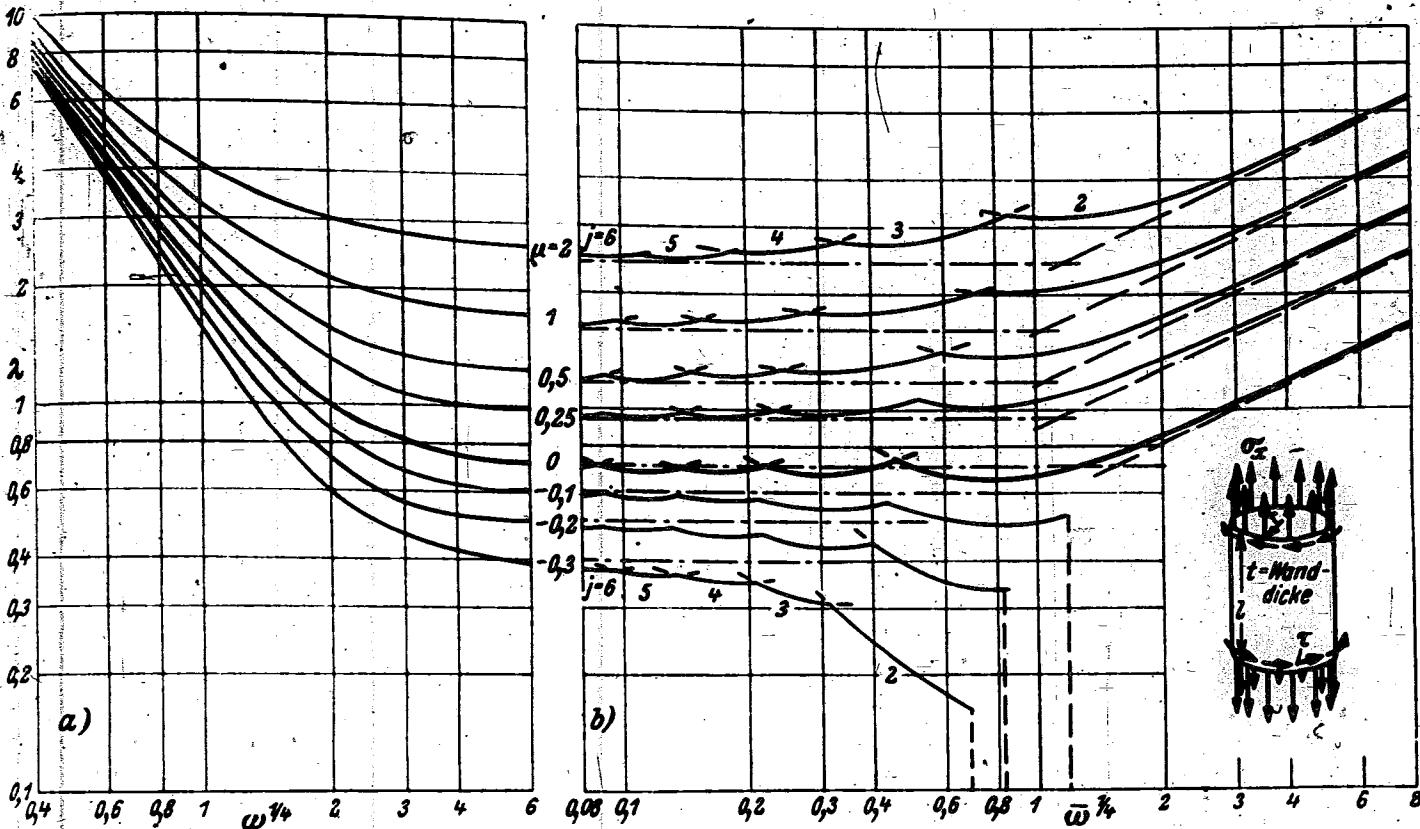


Bild 7. Die kritischen Spannungen τ und σ_z einer Kreiszyinderschale mit Schub- und Längsbelastung.

$$\frac{\tau}{E} (1 - \nu^2)^{3/2} \left(\frac{r}{t} \right)^2 = \frac{\sigma_z}{E} (1 - \nu^2)^{3/2} \frac{r}{t}$$

a) Kurzer Zylinder, $\bar{\omega} = \frac{l}{\pi} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{1}{r}$

b) langer Zylinder, $\bar{\omega} = \frac{l}{\pi} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{1}{r} \frac{1}{r}$

$$T_n = \frac{\pi^2}{8 \cdot 12^2 \cdot j \bar{\omega}^2} \left[\frac{n^2}{\bar{\omega}^2 (j^2 - 1)} + \frac{1}{12 \mu^2 \frac{j^2 - 1}{n^2}} \right] \quad (60)$$

$$n = \alpha \bar{\omega}^{1/4} + n_1, \quad m = \alpha \bar{\omega}^{1/4} + m_1, \quad \dots \quad (61)$$

wo n_1 und m_1 ganze Zahlen ($n_1 \pm m_1$ ungerade) sind und α der Bedingung genügen muß, daß $\alpha \bar{\omega}^{1/4}$ eine ganze Zahl ist, was bei $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ nicht viel zu bedeuten hat. Gehen wir zur Grenze über, so erhalten wir aus (36) mit $j=2$ nach Division durch $\frac{1}{2} (12 \pi^4 \bar{\omega})^{3/2}$ folgendes Gleichungssystem:

$$C_{n,q}(\nu, \mu) = \frac{\tau}{E} (1 - \nu^2)^{3/2} \left(\frac{r}{t} \right)^2 \sum_{m_1} C_{m_1} \frac{(-1)^{m_1}}{n_1 - m_1} = 0 \quad (62)$$

mit

$$q(\nu, \mu) = \frac{\pi}{8 \cdot 12^2} \sqrt{\left[\frac{\nu^2}{12} + \frac{12}{\nu^2} + \frac{5}{3} \right] \frac{12}{\nu} \mu} \quad (63)$$

Der Koeffizient $q(\nu, \mu)$ von $T_{n,q}$ ist von der Ordnungszahl n_1 unabhängig. Dividiert man (62) durch $q(\nu, \mu)$ und führt die Bezeichnung ein:

$$\frac{\tau}{E} (1 - \nu^2)^{3/2} \left(\frac{r}{t} \right)^2 \frac{1}{q(\nu, \mu)} = A_1, \dots \quad (64)$$

so ergibt sich die kritische Spannung aus dem Nullsetzen folgender Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & \dots \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{3} & 0 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (65)$$

Aus ihrer ersten bis vierten Näherung findet man $A = 1; 0,707; 0,651; 0,639$. Wie begnügen uns mit der vierten und erhalten

mit $\mu = 0$ (s. Gl. (33)) bei reinem Schub. Die Wellenzahl j muß wie immer so gewählt werden, daß die kritische Schubspannung möglichst klein wird. Im Bild 7 b sind die Rechenergebnisse für λ über $\bar{\omega}$ (s. Gl. (37)) aufgetragen (s. die stark ausgezogene Linie für reinen Schub). Man erhält wie bei reinem Druck für die Grenzkurve eine Wellenlinie, die bis $\bar{\omega} \approx 1,5$ nur wenig von dem asymptotischen Wert $\lambda = 0,703$ (s. Gl. (57)) des kurzen Zylinders abweicht. Der Wert $\bar{\omega} = 1,5$ gibt somit die ungefähre Gültigkeitsgrenze für die Formeln des kurzen Zylinders.

Der Kurvenast mit $j = 2$ steigt nach einem Minimum mit wachsendem $\bar{\omega}$ wieder an und nähert sich in der logarithmischen Auftragung einer Geraden. Dabei zeigt die Rechnung, daß die Ordnungszahlen n der wesentlichen Glieder im Reihenansatz (8) ebenfalls zunehmen. Somit mußte bei großem $\bar{\omega}$ von der Teilauflösung (54) der Kurvendeterminante Gebrauch gemacht werden.

Beim Grenzübergang $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ wird sich auch das Gebiet der wesentlichen n nach unendlich verlagern. Dann ist es zweckmäßiger, statt in (54) schon im Gleichungssystem (36) den Grenzübergang vorzunehmen. Wir erinnern uns daran, daß

$$\bar{\omega} = \frac{l}{\pi} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{1}{r}$$

eine bezogene Zylinderlänge ist. Die Größe $\bar{\omega}$ geht dann nach unendlich, wenn die Zylinderlänge es tut und mit ihr auch die Wellenzahl in der Längsrichtung. D. h. im Reihenansatz (8) wächst die Ordnungszahl der wesentlichen Anteile mit $\bar{\omega}$ an. Wir setzen:

$$\frac{\tau}{E} (1 - \nu^2)^2 \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2 = 0,639 \varphi(\nu, \mu) \quad (66)$$

Die Größe ν ergibt sich aus der Minimalbedingung $\partial \varphi / \partial \nu = 0$ zu:

$$\nu = 48^{1/4} \sqrt[4]{1 + \left(\frac{5}{3} \mu\right)^2 - \frac{5}{3} \mu} \quad (67)$$

und für die kleinste kritische Schubspannung folgt daraus:

$$\frac{\tau}{E} (1 - \nu^2)^2 \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2 = 0,639 \sqrt[6]{2 \left| 1 + \frac{5}{3} \mu \right| \left| 1 + \left(\frac{5}{3} \mu\right)^2 - \left(\frac{5}{3} \mu\right)^2 \right| \left| 1 + \left(\frac{5}{3} \mu\right)^2 - \frac{5}{3} \mu \right|} \quad (68)$$

mit der bezogenen Längsspannung μ nach Gl. (33). Für reinen Schub ($\mu = 0$) erhält man:

$$\frac{\tau}{E} (1 - \nu^2)^2 \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2 = 0,236 \quad (69)$$

d. h. genau denselben Wert, den Flügge¹²⁾ früher auf einem ganz anderen Wege für diesen Fall gefunden hat.

Um unsere Voraussetzungen bei der Wahl des Lösungsansatzes (8) zu verifizieren (s. Gl. (11)), schreiben wir noch den Ausdruck (61) für die Ordnungszahl der wesentlichen Glieder des Reihenansatzes (8) für reinen Schub explizit auf:

$$n = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \nu^2)^2} \cdot \left(\frac{l}{r}\right)^{1/2} \cdot l \cdot \mu \quad (70)$$

d. h. die Gl. (11) wird tatsächlich bestätigt.

Endlich finden wir die Gleichung der Asymptote im Bild 7b, wenn wir die Gl. (68) mit $(12 \pi^{1/2} \bar{\omega})^{-1}$ multiplizieren. Wir erhalten:

$$\lambda = \frac{\tau}{E} (1 - \nu^2)^2 \cdot \frac{l^2 r^3}{l^4} = 0,571 \sqrt[6]{2 \left| 1 + \frac{5}{3} \mu \right| \left| 1 + \left(\frac{5}{3} \mu\right)^2 - \left(\frac{5}{3} \mu\right)^2 \right| \left| 1 + \left(\frac{5}{3} \mu\right)^2 - \frac{5}{3} \mu \right|} \omega^3 \quad (71)$$

Die asymptotische Gerade ist in Bild 7b gestrichelt eingetragen. Wie man sieht, sind die Abweichungen der genauen Kurve von der Asymptote für $\bar{\omega} > 1,5$ gering, und daher kann für solche Formparameter die Gl. (71) als Näherungslösung verwendet werden.

Das Beulen mit zwei Wellen in der Umfangsrichtung wird bei noch größeren Zylinderlängen durch das mit einer Welle (Greenhill-Fall) abgelöst. Da dieser Fall nur bei gleichzeitiger Wirkung von Druck und Schub von Interesse sein kann, so bringen wir die Greenhill-Lösung im Anschluß an den nächsten Absatz.

3. Zusammengesetzte Belastung.

Wir gehen zum letzten Fall über, der zusammengesetzten Belastung durch Schub- und Längskräfte. Die kritischen Spannungen werden ebenso wie im Falle des reinen Schubes berechnet, nur ist in den Koeffizienten T_n oder $\varphi(\nu, \mu)$ (s. Gl. (55), (56), (60) und (63)) die Längsspannung σ_x von Null verschieden. Zu der Kurve für τ nach Abschnitt 2 erhält man jetzt eine Kurvenschar mit σ_x oder μ als Parameter.

a) Das Knicken von kurzen Zylindern. Die Rechenergebnisse für den kurzen Zylinder sind im Bild 7a und 8 aufgetragen. Wir betrachten zuerst Bild 8, wo die kritische Schubspannung τ als Funktion der Längsspannung σ_x mit der Formkennzahl ω als Parameter dargestellt ist. Als Bezugsgrößen für σ_x und τ wurden die kritischen Spannungen σ_{10} und τ_0 für reinen Druck und reinen Schub genommen, die aus den Formeln (45) und (58) zu berechnen sind.

Bei $\omega = 0$ (ebener Plattenstreifen von der Höhe l) tritt der Fall ein, daß zu einer Druckspannung, die beliebig wenig kleiner ist als die Eulerspannung $\sigma_{10} = \frac{1}{4} \sigma^*$, ein endlicher Schub $\tau = 0,538 \tau_0 = 0,719 \sigma^*$ nötig ist, um den Streifen zum Ausknicken zu bringen. Das ist darauf zurückzuführen, daß bei Druck allein die Platte als Ganzes ohne Wellenbildung (als Eulerstab) ausknickt, während bei kombinierter Belastung eine Wellenbildung eintritt und die potentiellen Energien unterscheiden sich in beiden Zuständen um einen endlichen Betrag. Diese Erscheinung findet man für alle ω -Werte zwischen 0 und 1 (sehr niedrige Zylinder vom großen Durchmesser), da diese Zylinder bei reiner Druckbelastung ebenfalls ohne Knotenlinien in Richtung der Erzeugenden drehsymmetrisch ausbeulen ($\beta = 0$ für $\omega \leq 1$ bei reinem Druck). Das hat zur Folge, daß die zugehörigen Kurven im Bild 8 einen ganz anderen Verlauf haben als für Zylinder mit größeren ω , da die letzteren auch bei reinem Druck mit mehreren Wellen in Umfangsrichtung ausknicken.

Am Beispiel $\omega = 0$ zeigen wir, wie sich diese Erscheinung in der Rechnung äußert. Wir denken uns die Koeffizienten der Freiwerte C in Gl. (31) für kurze Zylinder mit β multipliziert. Für reinen Druck $\tau/\sigma^* = 0$ fanden wir in (44), (45): $\beta = 0$ und $\sigma_x = -\sigma_{10} = -\frac{1}{4} \sigma^*$ bei $\omega = 0$. Mit $\beta = 0$ sind aber die Koeffizienten der Summenglieder auch bei $\tau/\sigma^* \neq 0$ gleich Null. Um diese Unbestimmtheit aufzuheben, denken wir uns zunächst $\beta \neq 0$ und setzen in den Koeffizienten der Diagonalglieder den kritischen Wert $\sigma_x \sigma^* = -\frac{1}{4}$ ein. Nach Gl. (55) erhalten wir für $\omega = 0$:

$$T_1 = \frac{\tau}{32} \beta (2 + \beta^2), \quad T_2 = \frac{\tau}{32} \frac{1}{\beta} (3 + 2\beta^2 + \frac{\beta^4}{4}),$$

$$T_3 = \frac{\tau}{32} \frac{1}{\beta} (8 + 2\beta^2 + \frac{\beta^4}{9}) \text{ usw.}$$

Das Bemerkenswerte ist, daß in T_1 die Größe β vor der Klammer im Zähler und nicht im Nenner steht. Aus der ersten Näherung nach Gl. (51) erhält man:

$$(\tau \sigma^*)^2 = \left(\frac{3,7}{32}\right)^2 (2 + \beta^2) (3 + 2\beta^2 + \frac{\beta^4}{4})$$

Daraus ergibt sich mit $\beta' \rightarrow 0$ die kritische Schubspannung $\tau/\sigma^* = 0,721$. Die zweite Näherung ergibt dasselbe und die dritte beim Grenzübergang $\beta \rightarrow 0$ den Wert $\tau/\sigma^* = 0,719$. Zu derselben Lösung ist auch Schmieden¹³⁾ gekommen, der das Knicken eines ebenen Plattenstreifens mit der Southwellschen Methode untersucht hat.

Im Bild 8 sind noch die Ergebnisse für den Grenzfall $\omega \rightarrow \infty$ enthalten, die man ebenso bekommt wie bei reinem Schub (s. Gl. (56)).

Endlich ist die kritische Schubspannung für kurze Zylinder noch im Bild 7a über $\omega^{1/2}$ mit μ (s. Gl. (33)) als Parameter aufgetragen. Für sie ist dort die dimensionslose Darstellung nach Gl. (33) gewählt, die einen Übergang von kurzen zu langen Zylindern gestattet. Die Ergebnisse für $\omega \rightarrow \infty$ sind in Bild 7b strichpunktiert angegeben.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Ergebnisse für den kurzen Zylinder auch auf die Stabilitätsberechnung einer tragenden Flügelhaut übertragen werden können, die nur durch Querrippen ausgesteift ist. Sie ist dadurch in Plattenstreifen unterteilt, die in Richtung des Umfangs aus einer Kreiszyklerschale herausgeschnitten sind (siehe Bild 9). Da bei größerem Verhältnis der Breite (in der Umfangsrichtung) zu der Länge (in Richtung der Erzeugenden) und außerdem bei einer großen Anzahl der Wellen in der Umfangsrichtung der Einfluß der Längsränder nur gering sein kann, so kann man bei Berechnung der kritischen Lasten diese Schalen zu Kreiszyklern ergänzen denken.

b) Das Knicken von langen Zylindern. Die kritischen Spannungen erhält man aus der Knickdeterminante (40) mit T_n nach Gl. (60). Die Rechenergebnisse sind im Bild 7b über $\bar{\omega}^{1/2}$ mit μ (d. h. σ_x) als Parameter aufgetragen. Die Knickgrenzen bestehen wieder aus Wellen-

¹²⁾ Siehe W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen, Berlin 1934, S. 206.

¹³⁾ C. Schmieden, Das Ausknicken eines Plattenstreifens unter Schub- und Druckkräften, Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935) S. 278.

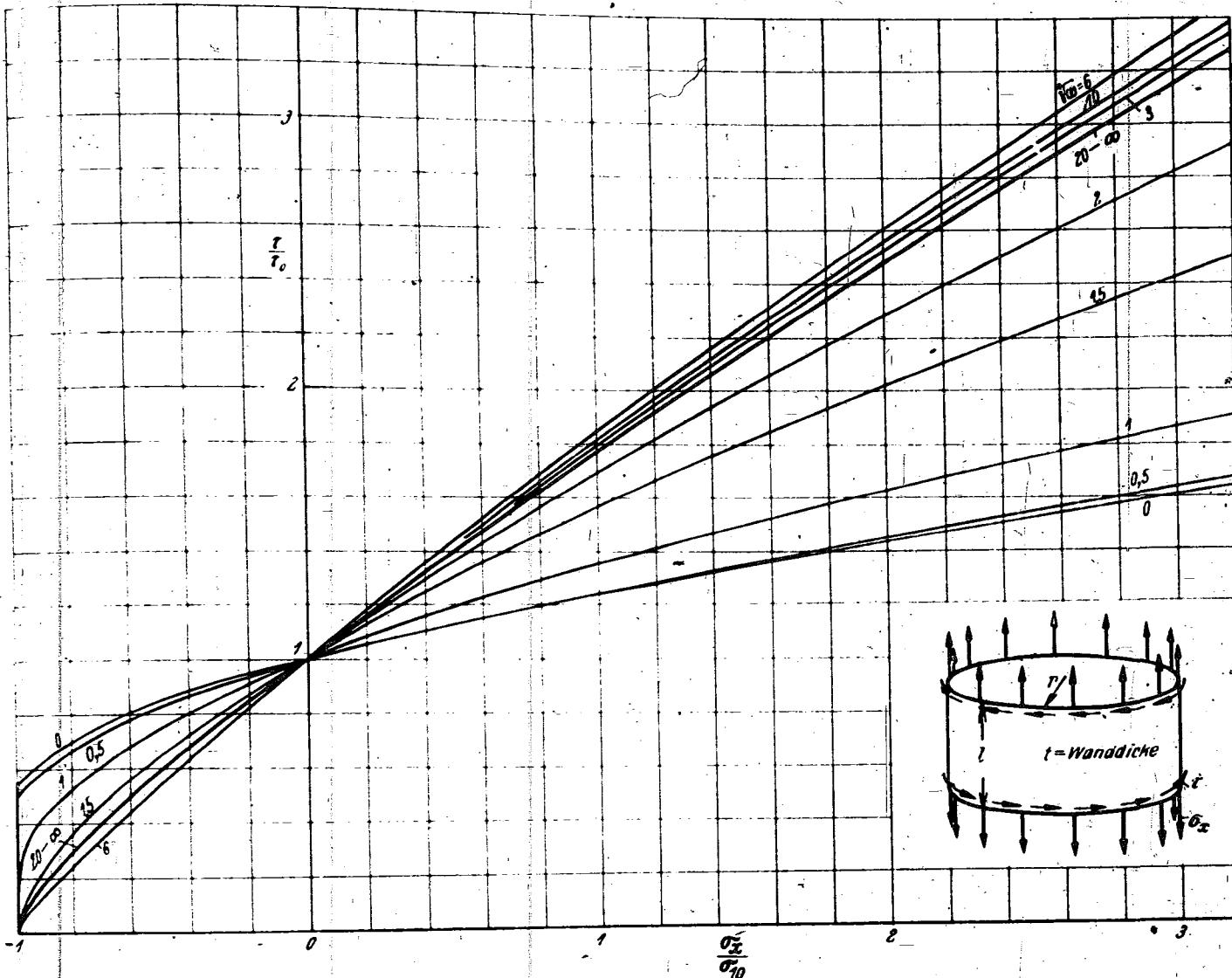


Bild 8. Die kritischen Spannungen τ und σ_x einer kurzen Kreiszyklinderschale mit Längs- und Schubbelastung.

$$\sigma_{x0} \text{ und } \tau_0 \text{ nach den Gln. (45) und (48): } \sigma_{x0} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{t}{r}, \quad \tau_0 = \frac{1}{\lambda} \frac{t}{r}$$

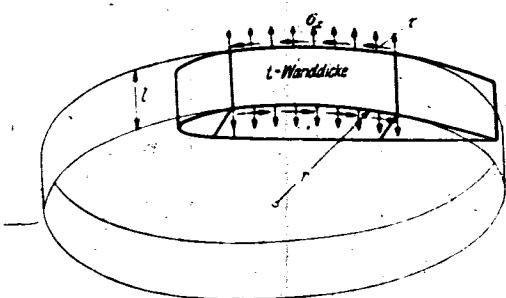


Bild 9. Schalenflügel mit Längs- und Schubbelastung.

aber wertlos, da schon bei kleineren $\bar{\omega}$ der Greenhill-Fall eintritt, bei dem der Zylinder mit einer Welle in der Umfangsrichtung ($j = 1$) ausknickt. Die hierzu gehörende kritische Last läßt sich, wie schon am Anfang dargelegt, aus unseren Formeln nicht ableiten. Für kreiszylindrische Schalen heißt sie³⁾

$$\frac{\tau_{\tau}}{E} \frac{1}{\pi r} \Big| 1 + \frac{\sigma_x}{E} \frac{2}{\pi^2} \frac{l^2}{r^2} \quad (72)$$

Führen wir in (72) λ , μ und $\bar{\omega}$ ein, so erhalten wir

$$\lambda = \frac{l^2}{\pi^2 r^2} \sqrt{12 \mu \bar{\omega}^2} \sqrt{1 + 2 \frac{\sigma_x}{E} \frac{l^2}{\pi^2 r^2}} \quad (72a)$$

oder in einer anderen Form

$$\lambda = \frac{r}{l} \frac{1}{\pi} \sqrt{12 \mu \bar{\omega}^2} \sqrt{1 + 2 \frac{\sigma_x}{E} \frac{l^2}{\pi^2 r^2}} \quad (72b)$$

linien, die bei kleineren $\bar{\omega}$ -Werten nur wenig von der asymptotischen Geraden des kurzen Zylinders für $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ abweichen. Diejenigen $\bar{\omega}$ -Werte, bis zu welchen die Abweichungen vernachlässigbar klein sind, geben die Grenze für die Anwendbarkeit der Rechenergebnisse für den kurzen Zylinder.

Bei größeren $\bar{\omega}$ -Werten knicken die Zylinder mit zwei Wellen in der Umfangsrichtung. Für $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ nähern sich die Kurven bei $\mu > 0$ asymptotisch an Gerade (im Bild 7b gestrichelt eingetragen), deren Gleichung sich aus der Formel (71) ergibt. Wie diese Formel zeigt, erhält man auch für negative μ -Werte asymptotische Geraden, diese sind

Aus dem Auftauch des neuen Abmessungsparameters $l/\pi r$ oder r/l in den Gleichungen sieht man, daß eine Darstellung der Greenhill-Spannung mit den Parametern von Bild 7b nicht immer möglich ist. Gl. (72a) oder (72b) gibt zu einem annehmlichen $\mu < 0$ denjenigen Wert $\bar{\omega}$, bei dem der Schub $\tau_0 = 0$ wird, wenn man die letzte Wurzel null setzt. Bis diesem $\bar{\omega}$ sind die Kurven in Bild 7b gezeichnet. Ihre Gültigkeit hört aber schon früher auf,

da sich dann eine außer von μ noch vom Parameter r/t abhängige Kurve an den Girlandenzug anschließt, die steil nach unten geht und bei dem $\bar{\omega}$, mit dem unsere Kurven enden, schon $\lambda = 0$ erreicht haben muß.

Daß diese Kurve tatsächlich sehr steil verläuft, daß also die in Bild 7b gezeichneten Kurven bis ziemlich an ihr Ende benutzbar sind, kann man sich wie folgt überlegen: Ist $\mu < -0,1$, so zeigt das Bild, daß $\bar{\omega}$ und λ keine großen Werte annehmen. Dann folgt aus (72b), da r/t eine große Zahl ist, daß die letzte Wurzel immer $\ll 1$ sein muß. Dann kann $\bar{\omega}^2$ bei gegebenem μ nur in einem schmalen Wertebereich bei $-\frac{1}{2} \pm 12\mu$ liegen.

Für $\mu > -0,1$ wachsen $\bar{\omega}$ und λ an der Übergangsgrenze zu $j = 1$ mit μ an. Da dort die Kurven für $j = 2$ in die Asymptote (71) übergehen, kann der Beginn des Greenhill-Knickens hier leicht durch Gleichsetzen des λ -Wertes für $j = 1$ nach (72, a, b) mit dem asymptotischen Wert für $j = 2$ nach (71) ermittelt werden. Für reinen Schub ergibt sich daraus wie bei Flügel die Übergangslänge zu:

$$\frac{l}{r} = 13,3 \left(1 - \mu^2 \right)^{1/2} \left(\frac{r}{t} \right)^{1/2}$$

VI. Zusammenfassung.

Die Untersuchung der Stabilität von kreiszylindrischen Vollschalen geht von dem Ansatz nach Ritz (8) für die Verschiebungen u, v, w der Mittelfläche aus, der so gewählt ist, daß jedes Glied den Randbedingungen für momentenfreie Lagerung genügt. Damit erhält man nach der Ritz-Galerkinschen Methode das Gleichungssystem (17), das durch ein Iterationsverfahren auf das einfachere System (26) zurückgeführt wird. Durch Nullsetzen seiner Koeffizientendeterminante ergibt sich eine Knickbedingung, die neben den beiden Lastparametern σ_x und τ noch zwei Abmessungsparameter enthält. In der Diskussion dieser Knickbedingung (Abschn. IV) wird gezeigt, daß sich durch Unterdrücken kleiner Glieder aus ihr getrennte Knickbedingungen für kurze und lange Zylinder ergeben mit nur je einem Abmessungsparameter ω und $\bar{\omega}$. Ihre Gültigkeitsbereiche überschneiden sich, so daß damit die Lösung für Zylinder beliebiger Länge gewonnen ist. Für kurze und lange Zylinder sind die kritischen Spannungen bei reiner Druck- oder Schubbelastung und bei zusammengesetzter Belastung berechnet und in Bild 5 bis 8 in Kurvenform angegeben. Für reine Druck- oder Schubbelastung an kurzen Zylindern werden außerdem Näherungsformeln (55), (58) mitgeteilt.

Vorabdrucke
aus
Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung

Inhalt:

Die konforme Abbildung von Tragflügelprofilen mit Krümmungssingularitäten. Von G. Schmieden	2
Über Abreißerscheinungen am Höhenleitwerk eines Flugzeugs mit Hochauftriebs-Landehilfen. Von F. Staufer	7
Schwingungsversuche im Windkanal an einem Flügel mit Ruder und Hilfsrudder. Von A. Dimpker	13
Ein Trägerfrequenzmeßgerät für Schwingungsmessungen, insbesondere für Flugversuche. Von G. de Vries	22
Bouffestigkeit von versteiften Zylinderschalen mit Schub und Innendruck. Von A. Kromm	32
Prüfung von Laboratoriumsverfahren zur Bestimmung des Bleigehaltes von Kraftstoffen. Von O. Widmaier	38
Metalllichtbogenschweißung vergütbarer Stähle. Von W. Hummitzsch	46

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof

Die konforme Abbildung von Tragflügelprofilen mit Krümmungssingularitäten*).

Von C. Schmieden, Darmstadt¹⁾.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Direktion Flugwerk.

Es ist bekannt, daß Profile mit Krümmungssprüngen in der Umgebung der Nase in der Druckverteilung an dieser Stelle eine senkrechte Tangente besitzen [1, 2]. In der vorliegenden Arbeit wird an einer Reihe von Profilen die Auswirkung eines solchen Krümmungssprunges auf die weitere Umgebung dieser Stelle in der Druckverteilung untersucht, ebenso auch die Auswirkung der nächst höheren Singularität eines Krümmungsknickes, d. h. eines Sprunges in der Ableitung der Krümmung nach der Bogenlänge. Darüber hinaus gibt das entwickelte Abbildungsverfahren die Möglichkeit, allgemein Profile mit gegebenem Krümmungsverlauf konform abzubilden.

Gliederung.

1. Einleitung.
2. Die Abbildungsfunktion.
3. Profile mit Krümmungssprung.
4. Ein Profil mit Krümmungsknick.
5. Berechnung der Druckverteilung bei anderen Anstellwinkeln.
6. Der Ansatz für Halbkörper.
7. Zusammenfassung.
8. Schrifttum.

I. Einleitung.

Tragflügelprofile mit Krümmungssprüngen sind öfter benutzt worden, wobei sich gezeigt hat, daß eine solche Singularität in der Umgebung der Nase sich aerodynamisch ungünstig auswirkt. Die Ursache dafür ist, wie W. v. Koppfels [1] gezeigt hat, darin zu finden, daß die Druckverteilung an einer solchen Stelle eine senkrechte Tangente aufweist, die im Sinne der Grenzschichttheorie eine erhebliche Ablösungsfahr bedeutet. Ist der Krümmungssprung bei stetig durchlaufender Tangente — unendlich groß, besitzt also das Profil an dieser Stelle unendlich große Krümmung, so besitzt die Druckverteilung dort sogar einen Knick. Derartige Druckverteilungen treten z. B. bei Profilen auf, bei denen der Druck auf einem Stück der Kontur konstant gehalten wird, um bei gegebenem Auftrieb eine möglichst kleine Übergeschwindigkeit zu erzielen [2]. Da W. v. Koppfels gezeigt hat, daß — abgesehen von der senkrechten Wendetangente in der Druckverteilung — sich allgemeine Aussagen, z. B. über die mit einem gegebenen Krümmungssprünge verbundene Druckabsenkung nicht machen lassen, da diese Druckabsenkung nicht vom Krümmungssprung allein, sondern auch vom Gesamtverlauf des Profils abhängt, erschien es zweckmäßig, einmal eine ganze Serie von nah verwandten Profilen durchzurechnen, um einen tieferen Einblick in die Verhältnisse zu gewinnen. Darüber hinaus sollte versucht werden, gewisse Anomalien theoretisch zu klären, die sich bei der experimentellen Untersuchung eines Profils mit Krümmungsknick ergeben hatten. Zu diesem Zweck wurde ein Abbildungsverfahren entwickelt, das als Ausgangsmaterial nicht wie die bekannten Abbildungsverfahren die Koordinaten des Profils benutzt, sondern von dem Krümmungsverlauf ausgeht und unter Zurückführung der Abbildungsaufgabe auf die Lösung einer nicht-linearen Integralgleichung in ganz allgemeiner Weise gestattet, ein

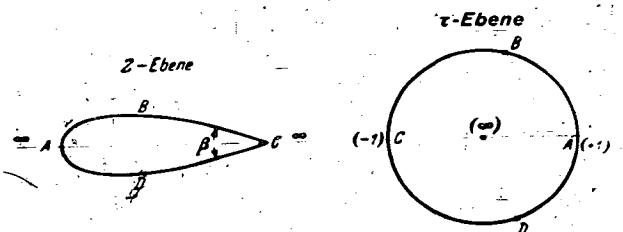


Bild 1. Zusammenhang zwischen Strömungsebene und Bildebene.

Profil mit gegebenem Krümmungsverlauf auf den Kreis abzubilden.

2. Die Abbildungsfunktion.

In der z-Ebene sei ein symmetrisches Profil gegeben mit dem Hinterkantenwinkel $\beta = \frac{\pi}{m}$. Das Profil (Bild 1) soll so auf den Einheitskreis der tau-Ebene abgebildet werden, daß der Außenraum des Profils ins Innere des Einheitskreises fällt. Dabei soll die Abbildung so normiert werden, daß die Bildpunkte der Profilmase und der Hinterkante die Punkte $\tau = -1$ bzw. $\tau = +1$ werden und das Unendliche der z-Ebene in den Nullpunkt der tau-Ebene fällt. Betrachten wir zunächst nur den Fall der symmetrischen Anströmung, so lautet das komplexe Potential der Bildströmung einfach

$$w = q \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right) \dots \dots \dots (1)$$

Weiter untersuchen wir den Logarithmus der reziproken komplexen Geschwindigkeit der Profilebene in der Bildebene:

$$\zeta = \ln \frac{dz}{dw} = \zeta(\tau) \dots \dots \dots (2)$$

Diese Funktion muß an den Punkten $\tau = +1$ und $\tau = -1$ den Bildern der beiden Staupunkte, jeweils eine logarithmische Singularität mit den Faktoren -1 und $-\frac{1}{m}$ besitzen und im übrigen in und auf dem Einheitskreis regulär sein. Ferner muß sie, da der reelle Durchmesser des Einheitskreises das Bild der reellen Achse außerhalb des Profils darstellt, für reelle tau zwischen -1 und $+1$ reelle Werte annehmen. Durch diese Bedingungen ist $\zeta(\tau)$ vollständig bestimmt. Verstehen wir unter $Z(\tau)$ eine in und auf dem Einheitskreis reguläre Funktion, so gilt

$$\zeta = \ln \frac{dz}{dw} = \ln(1 - \tau) - \frac{1}{m} \ln(1 + \tau) + Z(\tau) \dots (3)$$

$Z(\tau)$ kann dabei als in und auf dem Einheitskreis konvergente Potenzreihe mit reellen Koeffizienten angesetzt werden:

$$Z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau^n \dots \dots \dots$$

Für eine Anströmungsgeschwindigkeit $u_{\infty} = 1$ tritt ein absolutes Glied nicht auf, die Summation in (3) muß also mit Ein-

*) P 31 13.
 1) Z. Z. Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

Aus (1) und (3) gewinnt man sofort die Ableitung der Abbildungsfunktion

$$\frac{dz}{d\tau} = q \frac{(1+\tau)^{m-1}}{\tau^2} e^{z(\tau)} \quad (5)$$

Setzt man ferner auf dem Einheitskreis $\tau = e^{i\theta}$ und

$$z = \omega + i\Theta; \omega = \ln \left| \frac{dz}{d\omega} \right|; \Theta = \text{Richtung der wahren Geschwindigkeit} \quad (6)$$

so erhält man aus (3) und (4)

$$\omega = \ln 2 \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{m} \ln 2 \cos \frac{\theta}{2} + \sum a_n \cos n\theta \quad (7a)$$

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \cdot \frac{m+1}{m} + \sum a_n \sin n\theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (7b)$$

Für die Krümmung der Profilkontur (τ auf dem Einheitskreis) gilt

$$\frac{d\Theta}{dS} = \frac{d\Theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dq} \cdot \frac{dq}{dS} = e^{-m}; \quad q = \text{Geschwindigkeitspotential} \quad (8)$$

oder mit Rücksicht auf (7) und (1)

$$z = \frac{1}{q} \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^{m-1} e^{-\sum a_n \cos n\theta} \left\{ \frac{m-1}{2m} \sum a_n n \cos n\theta \right\} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (9)$$

Da z als Funktion von Θ gegeben ist, so hat man in (7b) und (9) die Gleichungen zur Bestimmung der a_n vorliegen. In dieser Form sind sie aber für die praktische Rechnung nicht brauchbar. Wir schreiben daher (9) in der folgenden Form

$$\frac{m-1}{2m} \sum n a_n \cos n\theta = qz(\theta) \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^{m-1} e^{\sum a_n \cos n\theta} \quad (9a)$$

Setzen wir noch

$$Z(\tau) = \Phi + i\Psi; \Phi = \sum a_n \cos n\theta; \Psi = \sum a_n \sin n\theta \quad (10)$$

so folgt aus (9a) in leicht ersichtlicher Weise durch Integration

$$\frac{m-1}{2m} \pi = q \int_0^\pi z \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^{m-1} e^{i\theta} d\theta \quad (11)$$

$$a_n = \frac{2q}{n\pi} \int_0^\pi z \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^{m-1} e^{i\theta} \cos n\theta d\theta \quad (11a)$$

Multipliziert man (11a) mit $e^{in\theta}$ (q Winkel) und summiert von 1 bis ∞ , so bekommt man

$$\Phi(q) = i\Psi(q) = \frac{2q}{\pi} \int_0^\pi z \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^{m-1} e^{i\theta} \left(\sum_1^\infty \frac{\cos n\theta e^{in\theta}}{n} \right) d\theta \quad (12)$$

Nun gilt aber

$$-2 \sum_1^\infty \frac{\cos n\theta e^{in\theta}}{n} = \ln 2 |\cos \theta - \cos q| \quad \begin{cases} q & \theta < q \\ q & \theta > q \end{cases} \quad (13)$$

Damit gewinnt man die Darstellungen

$$\Phi(q) = \frac{q}{\pi} \int_0^\pi z(\theta) \cdot \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^{m-1} e^{i\theta} \ln 2 |\cos \theta - \cos q| d\theta \quad (14)$$

$$\Psi(q) = \frac{q}{\pi} \left\{ (q-\pi) \int_0^q z(\theta) \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^{m-1} e^{i\theta} d\theta + q \int_q^\pi z(\theta) \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^{m-1} e^{i\theta} d\theta \right\} \quad (14a)$$

Die letzte Gleichung kann man mit Rücksicht auf (7b) und (11) noch vereinfachen zu

$$\Theta(q) = \frac{\pi}{2} - q \int_0^q z(\theta) \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right)^{m-1} e^{i\theta} d\theta; \quad z = z(\Theta) \text{ gegeben} \quad (15)$$

In (11), (14) und (15) haben wir nun ein System nicht-linearer Integralgleichungen zur Bestimmung der Funktion $\Phi(q)$, nach deren Berechnung die Abbildungsfunktion nach (5) bestimmt werden kann. Um die Druckverteilung am Profil, auch für beliebige Anstellwinkel, zu berechnen, genügt aber bereits die Kenntnis von Φ (s. Abschn. 5). Die Gl. (11) dient im wesentlichen zur Festlegung des Eigenwertes q , in den man sich den willkürlichen Maßstabfaktor der z -Ebene, der noch in der Krümmung z steckt, einbezogen denken kann. Allgemeine Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des Systems (14), (15) bei beliebig vorgegebener Funktion $z(\Theta)$ kann man kaum machen, ebensowenig über die Konvergenz des Verfahrens der sukzessiven Approximation. Nur im Falle eines stückweise konstanten z dürfte ein solcher Konvergenz- und Eindeutigkeitsbeweis mit erträglichem Arbeitsaufwand durchführbar sein. (Vgl. die entsprechenden Beweise für die ganz analog gebauten Integralgleichungen in der Theorie der unstetigen Strömungen.) Auf Grund des physikalischen Sinngehaltes dieser Integralgleichungen erscheint aber die Möglichkeit einer eindeutigen Auflösbarkeit jedenfalls sicher, und es wird daher weitgehend von der Geschicklichkeit des praktischen Rechners abhängen, ob und vor allem wie schnell die Kette der sukzessiven Approximationen konvergiert. Bei der Durchrechnung einzelner Profile hat sich gezeigt, daß für stückweise konstantes z (s. Abschn. 3 und 6) die Konvergenz sehr gut ist, auch noch bei einer ausgesprochen schlechten Ausgangsnäherung. Bei dem in Abschn. 4 behandelten Profil mit Krümmungsknick und starker Krümmungsänderung an der Nase ist die Konvergenz trotz der recht guten Ausgangsnäherung dagegen so schlecht, daß der nötige Rechenaufwand bereits an der Grenze des noch Tragbaren lag. Darüber hinaus können Fälle auftreten, wo bei schlechter Ausgangsnäherung sich sogar Divergenz des Approximationsverfahrens ergibt.

3. Profile mit Krümmungssprung.

Um den Einfluß eines Krümmungssprunges auf die Druckverteilung in Abhängigkeit vom Profilverlauf in der weiteren Umgebung des Krümmungssprunges zu verfolgen, wurde eine Serie von doppelt-symmetrischen Profilen untersucht, die bei einem aus je einem Halbkreis bestehenden Kopf- und Schwanzstück einen geradlinigen Mittelteil besitzen. Es handelt sich also um Kreisbogenvierecke, deren sämtliche Winkel den Betrag π haben. Von diesen Profilen wurde eine ganze Reihe mit verschieden langem Mittelstück gerechnet, wobei jeweils der Krümmungsradius an Nase und Ende gleich eins gesetzt wurde. Hierdurch ist es möglich, an Hand der gerechneten Druckverteilungen den Einfluß des Krümmungssprunges in Abhängigkeit vom Dickenverhältnis zu verfolgen.

Wegen der doppelten Symmetrie der Profile und des »Hinterkantenwinkels« π vereinfacht sich (14) noch etwas; ist der Bildpunkt des Ortes des Krümmungssprunges gleich θ_0 , so gilt

$$z = 1 \text{ für } \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi \end{matrix}; \quad z = 0 \text{ für } \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0$$

und

$$\Phi(q) = \frac{q}{\pi} \int_0^{\theta_0} e^{i\theta} \ln 2 |\cos 2\theta - \cos 2q| d\theta; \quad \frac{2q}{\pi} \int_0^{\theta_0} e^{i\theta} d\theta = 1.$$

Die Auflösung durch Iteration ist nur mit numerischer Integration möglich. Dazu beseitigen wir die logarithmische Singularität des Integrals, indem wir schreiben

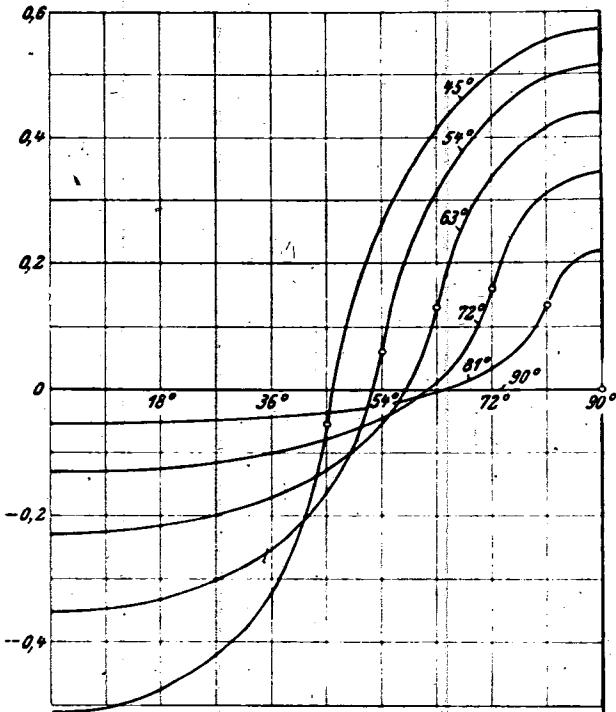


Bild 2. Verlauf von Φ über θ mit θ_0 als Parameter für die Schar der Kreisbogenvierecke.

$$\Phi(\varphi) = \frac{q}{\pi} \int_0^{\theta_0} [e^{\Phi(\theta)} - e^{\Phi(\varphi)}] \ln 2 |\cos 2\theta - \cos 2\varphi| d\theta + e^{\Phi(\varphi)} \int_0^{\theta_0} \ln 2 |\cos 2\theta - \cos 2\varphi| d\theta.$$

Diese Zerlegung ist natürlich nur für den Bereich $0 < \varphi < \theta_0$ nötig. Das erste Integral ist nun klein gegen das zweite, so daß man als erste Näherung ansetzen kann

$$\Phi_1(\varphi) = \frac{q}{\pi} e^{\Phi_1(\varphi)} \int_0^{\theta_0} \ln 2 |\cos 2\theta - \cos 2\varphi| d\theta; \quad \frac{2q}{\pi} \int_0^{\theta_0} e^{\Phi_1(\theta)} d\theta = 1.$$

Diese Integralgleichung ist numerisch einfach zu behandeln; die weiteren Näherungen berechnet man dann aus der vollständigen Gleichung durch Iteration. Die Konvergenz ist in diesem Falle gut, meist sichert bereits die vierte Näherung die dritte Dezimale. Die Werte von Φ für $\theta_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ sind anschließend durch eine einfache Quadratur zu berechnen.

Auf diese Weise wurde die Lösung für die fünf Werte $\theta_0 = 81^\circ, 72^\circ, 63^\circ, 54^\circ$ und 45° bestimmt und unter Hinzunahme der in Abschn. 5 angegebenen Lösung für den Halbkörper mit Halbkreisbogen ein Überblick über die Lösungen bei beliebigem Dickenverhältnis gewonnen, vgl. Bild 2 bis 4.

4. Ein Profil mit Krümmungsknick.

Die nächst höhere Krümmungssingularität bei einem Profil ist ein Sprung in der Ableitung der Krümmung nach der Bogenlänge, kurz als Krümmungsknick bezeichnet. Auch diese Singularität wirkt sich noch in der Druckverteilung aus, die dort eine Einbeulung bekommt. Für die Rechnung wurde ein bereits eingehend experimentell untersuchtes Profil gewählt, dessen Kopf aus einer Parabel besteht, an den als Schwanzstück ein Kreisbogenzweieck mit solchem Krümmungsradius angesetzt ist, daß an der Übergangsstelle von

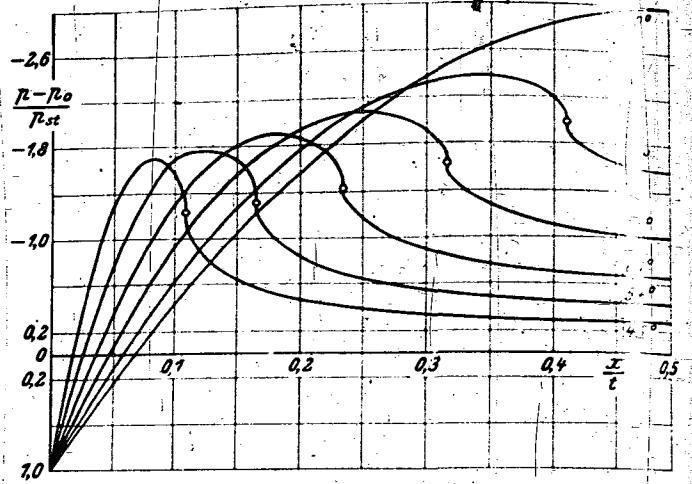


Bild 3. Druckverteilungen bei Nullanströmung für die Schar der Kreisbogenvierecke. Der Ort des Krümmungssprunges (Übergang des Halbkreisbogens in den Parallelstreifen) ist durch einen Nullkreis markiert. Sämtliche Druckverteilungen besitzen hier jeweils eine senkrechte Tangente. Die Kurven sind nur für die vordere Hälfte der Konturen gezeichnet, als Parameter ist der Wert von θ_0 bei jeder Kurve angegeben. $\theta_0 = 90^\circ$ entspricht dem Vollkreis.

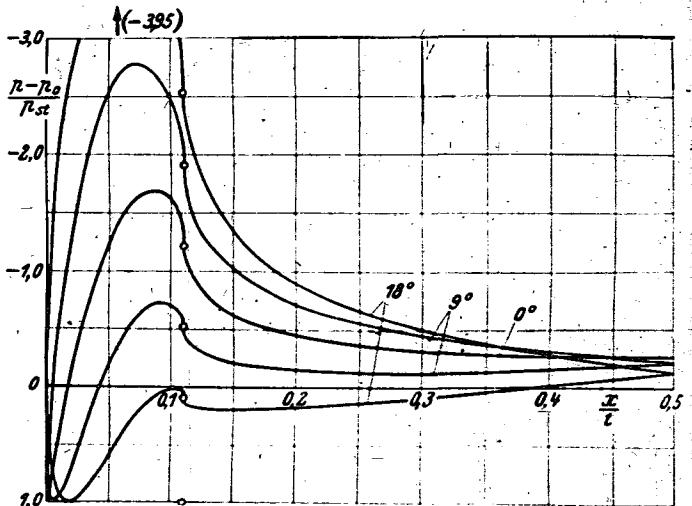


Bild 4. Druckverteilungen für das Profil $\theta_0 = 45^\circ$ für die Anstellwinkel $0^\circ, 9^\circ, 18^\circ$ ohne Zirkulation (vgl. Bild 3).

Parabel in Kreisbogen die Werte der Krümmungen übereinstimmen.

Ist der Krümmungsradius an der Nase gleich eins, so gilt für die Krümmung einer Parabel als Funktion der Tangentenneigung

$$\kappa = \cos^3 \Theta.$$

Die Übergangsstelle liegt bei dem untersuchten Profil bei $\Theta = 0,11534$, so daß sich als Krümmung des Kreisbogens

$$\kappa_{\text{Kreis}} = 0,001524$$

und als Hinterkantenwinkel

$$\frac{\beta}{\pi} = \frac{1}{m} = 0,12690$$

ergibt.

Bei der numerischen Rechnung zeigte sich bei diesem Profil wegen der an der Nase sehr raschen und starken Krümmungsveränderlichkeit, daß es zur Beschleunigung der Konvergenz der Iteration zweckmäßig war, an Stelle der oben benutzten Abhängigkeit der Krümmung von der Tangentenneigung die Abhängigkeit von der Bogenlänge des Profils einzuführen. Mit (15) gewinnt man nämlich sofort

$$\kappa = \frac{d\Theta}{dS} = \frac{d\Theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dS} = \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\theta}{d\theta} = q \cdot \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right)^{m-1} e^{\Phi_1}$$

$$q \int_0^{\pi} \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right)^{m-1} e^{i\phi(\theta)} d\theta \text{ mit } \alpha \equiv \alpha(S) \text{ gegeben.} \quad (15a)$$

Da der Integrand von (15a) wesentlich weniger stark veränderlich ist als der Integrand von (15), ist $S(\varphi)$ gegenüber kleinen Fehlern der numerischen Integration nicht so empfindlich wie $\Theta(\varphi)$, was sich bei der Rechnung als sehr angenehm erwies. Als Ausgangsnäherung wurde die Joukowski-Abbildung des Profils in eine kreisähnliche Kontur benutzt, die die Ausgangswerte von $\alpha(\theta)$ und von $\phi(\theta)$ liefert. Trotz dieser relativ günstigen Anfangsnäherung mußten insgesamt zehn Iterationsschritte gerechnet werden, bis sich die Werte von zwei aufeinanderfolgenden Näherungen von ϕ im Rahmen der erreichbaren Genauigkeit — ungefähr eine Einheit der dritten Dezimale — nicht mehr änderten. Die erforderlichen Integrationen wurden dabei durchweg mit der Simpsonregel durchgeführt, bei einer Unterteilung des Integrationsbereiches mit einer Schrittbreite von $4^{\circ}30'$ am Parabelkopf und 9° für den Rest des Profils, also im Bereich der konstanten Krümmung. Diese ausgesprochen schlechte Konvergenz hat natürlich ihren Grund darin, daß bei unserem Verfahren nicht die Koordinaten, sondern die Krümmung, also zweite Ableitungen der Koordinaten, approximiert werden: denkt man sich die Abbildungsfunktion als Potenzreihe angeschrieben, so hat man es jetzt im wesentlichen mit der zweiten Ableitung dieser Potenzreihe zu tun, die natürlich wesentlich schlechter konvergiert als die Reihe selbst. Als Abbildungsverfahren kann also das hier entwickelte nicht mit den auf Koordinatenübereinstimmung basierenden Verfahren, insbesondere dem nach Theodorsen arbeitenden, konkurrieren; das ist auch gar nicht seine Absicht. Es ist speziell auf die Berücksichtigung von Krümmungssingularitäten zugeschnitten, über die die Koordinatenverfahren nichts aussagen können, da die mit ihrer Hilfe gewonnenen Abbildungsfunktionen niemals Krümmungssingularitäten aufweisen.

Das zeigt sich besonders klar bei dem hier behandelten Profil: keins der üblichen Abbildungsverfahren liefert bei der gerechneten Druckverteilung auch nur eine Andeutung von der Einbeulung der experimentellen Druckverteilung an der Übergangsstelle des Parabelkopfes in das Kreishogenzweck. Dagegen zeigt die nach unserem Verfahren gerechnete Druckverteilung nicht nur diese Einbeulung, sondern deckt sich auch sonst bis zur Profilmitte hin völlig mit der experimentellen. Nur nach dem Profilende hin treten kleine Abweichungen auf, die ohne Schwierigkeit auf die Fehlerhäufung der numerischen Rechnung zurückgeführt werden können, da am Profilende die Breite des Integrationssschrittes doppelt so groß war wie an der Profilmase, Bild 5.

5. Berechnung der Druckverteilung bei anderen Anstellwinkeln.

Wird das Profil unter dem Anstellwinkel α angeströmt, so hat man in der Bildebene den der Parallelströmung zugeordneten Dipol um denselben Winkel zu drehen und außerdem in θ einen Wirbel hinzuzufügen, dessen Zirkulation in der üblichen Weise so zu bestimmen ist, daß der Staupunkt bei $\tau = -1$ liegen bleibt. Damit wird das neue komplexe Potential

$$w = q \left[\tau e^{-\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{\tau} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \tau \right]; \Gamma = 4\pi \sin \alpha \quad (16)$$

und die zugeordnete komplexe Geschwindigkeit auf dem Bildkreis

$$\frac{dw}{d\tau} = 2i e^{-i\theta} q (\sin(\theta - \alpha) - \sin \alpha) \quad (17)$$

demit erhält man für den Betrag der Geschwindigkeit am Profil

$$\frac{w}{z} = \frac{\frac{dw}{d\tau}}{\frac{dz}{d\tau}} = \frac{e^{-i\phi(\theta)}}{\left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right)^{m-1}} (\sin(\theta - \alpha) - \sin \alpha) \quad (18)$$

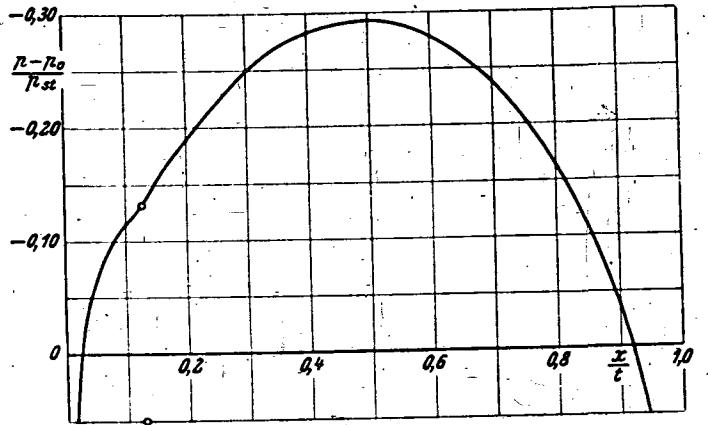


Bild 5. Druckverteilung des Profils mit Krümmungsknick bei Nullanströmung. Der Nullkreis markiert die Übergangsstelle vom Parabelkopf in das Kreishogenzweck.

Man braucht also zur Berechnung der Druckverteilung nur die Kenntnis von $\phi(\theta)$, wie oben bereits gesagt wurde.

6. Der Ansatz für Halbkörper.

Für einen Halbkörper tritt nur noch der vordere Staupunkt auf, während der hintere Staupunkt ins Unendliche rückt. Betrachten wir wieder nur symmetrische Körper und symmetrische Anströmung, so ist bei der Abbildung zu beachten, daß jetzt das Bild des Unendlichen auf den Einheitskreis in den Punkt $\tau = -1$ hineinfällt. An die Stelle von (1) und (3) treten daher jetzt die folgenden Formeln, Bild 6,

$$w = \frac{q\tau}{(1+\tau)^2}; \quad \frac{dz}{d\tau} = \ln(1-\tau) + Z(\tau); \quad Z(\tau) = \sum_1^{\infty} a_n \tau^n \quad (19)$$

Um nicht eine unwesentliche Konstante mitschleppen zu müssen, normieren wir hier die Anströmungsgeschwindigkeit nicht auf eins, sondern lassen sie frei. Als Ableitung der Abbildungsfunktion bekommt man aus (19)

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{q}{(1+\tau)^2} e^{Z(\tau)} \quad (20)$$

Genau wie oben gewinnen wir daraus die (9) entsprechende Gleichung für die Krümmung

$$\alpha = \frac{8}{q} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-\sum a_n \cos n\theta} \left(\frac{1}{2} - \sum n a_n \sin n\theta \right) \quad (21)$$

Die Integralgleichungen (11), (14) und (15a) sind zu ersetzen durch

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\varphi) &= \frac{q}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\alpha(\theta)}{\cos^3 \frac{\theta}{2}} e^{i\phi(\theta)} \ln 2 |\cos \theta - \cos \varphi| d\theta; \\ \frac{\pi}{2} &= q \int_0^{\pi} \frac{\alpha(\theta)}{\cos^3 \frac{\theta}{2}} e^{i\phi(\theta)} d\theta \\ \Theta(\varphi) &= \frac{\pi}{2} - q \int_0^{\pi} \frac{\alpha(\theta)}{\cos^3 \frac{\theta}{2}} e^{i\phi(\theta)} d\theta \end{aligned} \right\} \text{ mit } \alpha = \alpha(\Theta) \text{ gegeben} \quad (22)$$

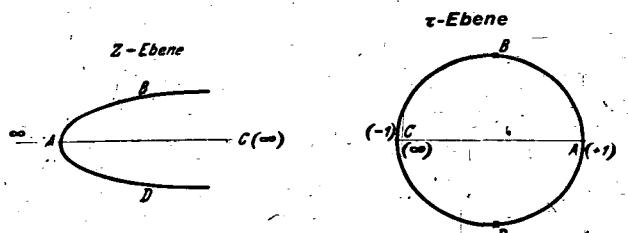


Bild 6. Zusammenhang zwischen Strömungsebene und Bildebene bei der Halbkörperströmung.

Während bei der allgemeinen Theorie der Spezialfall $Z(\tau) \equiv 0$ keinen besonders einfachen Körper liefert, erhält man hier in diesem Falle die Strömung um eine Parabel, worauf kurz eingegangen sei.

Für $Z(\tau) \equiv 0$ folgt aus (19) und (20) sofort

$$w = \frac{q\tau}{(1+\tau)^2}; \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{q}{(1+\tau)^3}; \quad z = \frac{q}{2(1+\tau)^2}$$

Die Elimination von τ liefert mit $z = r e^{i\theta}$

$$w = 2z - \sqrt{-2qz}; \quad \Psi = \sqrt{2r} \cos \frac{\theta}{2} \left[2\sqrt{2r} \sin \frac{\theta}{2} - |q| \right],$$

also als Stromlinie $\Psi = 0$ die negative x -Achse und die Kontur

$$r = \frac{q}{4(1 - \cos \theta)}$$

Das ist eine Parabel mit dem Scheitel im Abstände $-\frac{q}{8}$ vom Ursprung.

Für einen Halbkörper, der aus einem Halbkreisbogen mit angesetztem Parallelstreifen besteht, also für den Grenzfall der oben behandelten Kreisbogenvierecke, ist die Wahl des Bildpunktes der Übergangsstelle von Kreisbogen in Gerade völlig willkürlich; wir legen daher diesen Punkt in den Scheitel des Bildkreises nach $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dann wird mit $\alpha = 1$

für $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = 0$ für $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$$\Phi(q) = \frac{q}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\theta} d\theta}{\cos^3 \frac{\theta}{2}} \ln 2 |\cos \theta - \cos \varphi| d\theta;$$

$$\frac{\pi}{2} = q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\theta} d\theta}{\cos^3 \frac{\theta}{2}} d\theta \quad \dots \quad (23)$$

Diese Integralgleichung wurde genau so behandelt, wie oben bereits bei endlichen Profilen ausführlich geschildert. Die zugehörige Druckverteilung bei Nullanströmung zeigt Bild 7.

7. Zusammenfassung.

Es wird ein Verfahren entwickelt, das ein symmetrisches Profil mit gegebenem Krümmungsverlauf auf den Einheits-

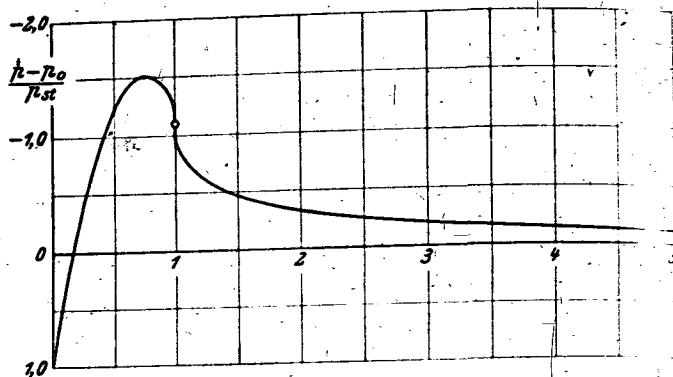


Bild 7. Druckverteilung des Halbkörpers bei Nullanströmung. Der Nullkreis markiert den Ort des Krümmungssprunges (Übergang des Halbkreisbogens in den Parallelstreifen). Die gestrichelte Gerade ist Asymptote der Druckverteilungskurve.

kreis abzubilden gestattet. Dazu muß eine nichtlineare Integralgleichung gelöst werden, was durch sukzessive Approximation gelingt. Die durchgerechneten Beispiele sollen insbesondere die Auswirkung von Krümmungssingularitäten auf den Druckverlauf an der Kontur klären.

Als Ergebnis ist festzustellen:

1. Ein Krümmungssprung liefert in der Druckverteilung eine senkrechte Tangente, so daß sich in der Umgebung dieser Stelle eine sehr rasche Druckänderung vollzieht. Liegt diese Stelle hinter dem Druckminimum, so bedeutet das für die Grenzschicht eine erhöhte Ablösungsgefahr.

2. Ein Sprung in der Ableitung der Krümmung, kurz als Krümmungsknick bezeichnet, liefert in der Druckverteilung eine Einbeulung, also eine Abweichung von der normalen Druckverteilung, die im allgemeinen für die Grenzschicht keine Gefahr bedeutet, zumal — wie es auch bei dem durchgerechneten Beispiel der Fall ist — eine solche Stelle wohl meist vor dem Druckminimum liegen wird.

8. Schrifttum.

- [1] W. v. Koppensfels, Ebene Potentialströmung längs einer glatten Wand mit stückweise stetiger Krümmung. Luftf.-Forsch. Bd. 17 (1940).
- [2] C. Schmieden, Die Berechnung kavitationssicherer Tragflügelprofile. Z. angew. Math. u. Mech. Bd. 10 (1930).

Über Abreißerscheinungen am Höhenleitwerk eines Flugzeugs mit Hochauftriebs-Landehilfen*).

Von F. Staufer.

Bericht aus dem Windkanal der Dornier-Werke G. m. b. H., Friedrichshafen a. B.

Es wird über — den Schwerpunktsbereich einschränkende — Abreißerscheinungen berichtet, die am Höhenleitwerk von mit Hochauftriebslandehilfen ausgestatteten Flugzeugen auftreten können, und es werden an Hand von Windkanalmessungen Mittel zur Vermeidung der damit verbundenen Nachteile angegeben.

Gliederung.

- I. Einleitung.
- II. Bezeichnungen und Definitionen.
- III. Modellbeschreibung.
- IV. Versuchsarrangierungen und Versuchsdurchführung.
- V. Darstellung und Besprechung der Versuchsergebnisse.
- VI. Einige wichtige Ergebnisse der Auswertung.
- VII. Schlußfolgerungen und Zusammenfassung.
- VIII. Schlußbemerkung.

I. Einleitung.

In den Jahren 1938/39 wurde bei den Dornier-Werken in Friedrichshafen eine neuartige Hochauftriebslandehilfe entwickelt, die wie eine Spaltklappe üblicher Bauart durch Drehung um eine flügel feste Achse in ihre Wirklage gebracht wird, die aber im Gegensatz zu dieser bei ihrer Betätigung zwei Spalte freigibt. Es lag daher die Bezeichnung Doppelspaltklappe nahe. Windkanalmessungen an einem Rechteckflügel mit einer Doppelspaltklappe Bauart Dornier wurden bereits veröffentlicht¹⁾.

Um die auftriebs erhöhende Wirkung der Landehilfe möglichst vollständig zur Geltung zu bringen, hat man von jeher nach Konstruktionen und aerodynamischen Lösungen gesucht, die es erlauben, die Landehilfe über die ganze Spannweite zu erstrecken. Dies ist nun bei der DW-Doppelspaltklappe verhältnismäßig leicht möglich, wenn man den Landeklappenteil hinter dem zweiten Spalt als Querruder ausbildet, das auf einem mit den verbleibenden Resten der Landeklappe fest verbundenen Querruderträger gelagert ist und außerdem so betätigbar ist, daß es sich einerseits bei Anstellung der Landehilfe mit dieser mitbewegt, als ob eine feste Verbindung mit ihr vorhanden wäre, und es sich andererseits unabhängig von der Bewegung und Stellung der Landeklappe als Querruder nach oben und unten ausschlagen läßt²⁾.

Um noch eine genügende Querruderwirkung zu erhalten, wird man die Landehilfe im Querruderbereich im allgemeinen nicht so weit ausschlagen dürfen wie im Landeklappenbereich, so daß es meist zweckmäßig ist, die Klappen voneinander zu trennen. Man unterscheidet daher auch in der Bezeichnung zwischen der im inneren Teil des Flügels angeordneten Doppelspalt-Landeklappen und der im normalen Querruderbereich des Flügels verwendeten Doppelspalt-Querruderklappen.

Schon bald nach Vorliegen der ersten Windkanalversuchsergebnisse hat die Betriebsführung der Dornier-Werke die Erprobung der neuen Landehilfe an einem Versuchsflyer angeordnet. Vorbedingung war, daß der Flyer mit geringstem Aufwand an Konstruktions- und

Werkstattarbeiten durchgeführt werden sollte. Aus diesem Grunde hatten sich die Arbeiten auf den Bau eines neuen Flügels für ein im übrigen serienmäßiges Flugzeug zu beschränken. An den restlichen Flugzeugteilen durfte nichts geändert werden, vor allem mußte auch das gesamte Leitwerk mit dem für Spreizklappen vorgesehenen Verstellbereich der Höhenflosse aus der Serie übernommen werden.

Bei den Flugversuchen mit diesem Versuchsflugzeug zeigte sich nun bei bestimmten Flugzuständen ein eigenartiges Verhalten. Bei ganz ausgefahrenen Landehilfen und vordersten Schwerpunktslagen trat nämlich mit nach unten getrimmter Flossennase jeweils bei bestimmten Geschwindigkeiten, besonders beim Nachdrücken, eine plötzliche Änderung im Längsmomentenhaushalt des Flugzeugs auf. Das Flugzeug ging unter Schüttelerscheinungen am Höhenruder auf den Kopf. Die dieses überraschende und untragbare Verhalten verursachenden äußeren Vorgänge am Höhenleitwerk wurden von der DW-Versuchsabteilung sehr rasch geklärt. Von der gleichen Seite wurden Abhilfen vorgeschlagen, die sich im Flugversuch bewährt haben und die, wie die späteren Windkanalversuche zeigten, auf richtiger Erkenntnis der Strömungsvorgänge am Höhenleitwerk beruhten.

Der wichtigste Teil der in diesem Zusammenhang durchgeführten Windkanalmessungen wird nachfolgend mitgeteilt.

II. Bezeichnungen und Definitionen.

Die Bezeichnungen und Definitionen wurden aus DIN 1.100 entnommen, soweit sie allgemein gebräuchlich sind, bzw. in Anlehnung an DIN 1.100 gewählt, soweit dies durch die Neuartigkeit der beschriebenen Anordnungen notwendig wurde. Die Kräfte werden flugwindfest angegeben, das Längsmoment am die Flugzeugquerachse durch den vordersten Punkt der Profilschne des Flügelschnittes in Flugzeugmitte. Es ist positiv bei Schwanzlastigkeit.

- v Anströmgeschwindigkeit,
- q Staudruck der Anströmgeschwindigkeit,
- F Flügelfläche einschließlich des im Rumpf liegenden Flügelteils,
- l_0 Flügeltiefe in Flügelmitte = Bezugslänge für das Längsmoment,
- A Auftrieb,
- M Längsmoment,
- $c_u = \frac{A}{qF}$ Auftriebsbeizahl,
- $c_M = \frac{M}{qFl_0}$ Längsmomentenbeizahl,
- α Anstellwinkel bei unbegrenztem Strahlquerschnitt, bezogen auf Profilschne in Flügelmitte,
- η Winkel des Höhenruderausschlags, positiv bei Ausschlag nach unten,
- η_1 Winkel der Höhenflosseneinstellung gegenüber Rumpfbezugsebene (WE), positiv bei Verstellung der Flossennase nach oben,
- η_K Ausschlagwinkel der Hauptklappe der Doppelspalt-Landeklappen,

¹⁾ P 312. F. Staufer, Windkanalmessungen an einem Tragflügel mit Doppelspaltklappen. Jahrbuch 1940 der deutschen Luftfahrt S. 1 245. ²⁾ DRP. Nr. 698767, Zusatz zu DRP. Nr. 688358.

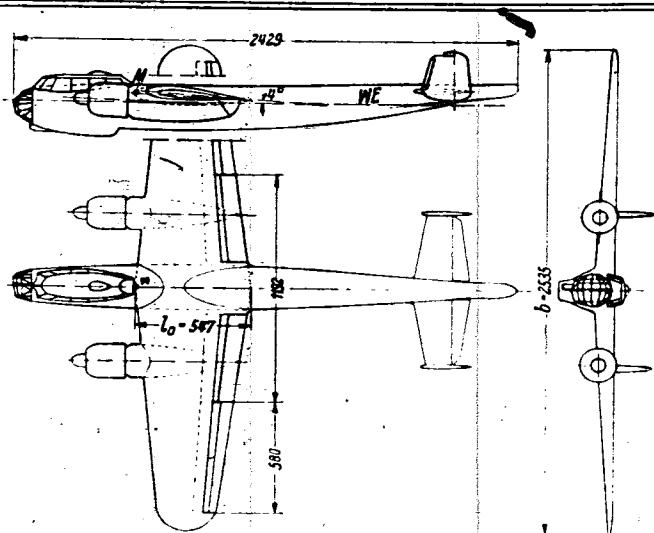


Bild 1. Gesamtplan des für die Windkanalversuche verwendeten Flugzeugmodells.

- η_{ZK} Winkel des zugehörigen Zungenausschlags,
 η_{AK} Ausschlagwinkel der Doppelspalt-Querruder-Vor-
 klappe,
 η_{ZQ} Ausschlagwinkel der zugehörigen Zunge,
 η_Q Winkel des gleichsinnigen Querruderausschlags
 im Landehilfensinn.

III. Modellbeschreibung und Versuchsdurchführung.

Das in Bild 1 dargestellte, bei den Versuchen verwendete Flugzeugmodell hatte einschließlich des im Rumpf liegenden Flügelteils eine Flügelfläche von $1,013 \text{ m}^2$ bei einer Spannweite von $2,535 \text{ m}$. Das Flügelprofil war NACA 230 mit 10 bis 18% Dickenverhältnis. Der Flügel mit Klappen, das Höhenleitwerk und die Seitenleitwerke waren mit ihren Rudern in der bekannten Stahlbauweise mit polierter Gips-
 haut, der Rumpf und die Motorgondeln aus Holz; die Motorhauben in Blech hergestellt. Alle Klappen und Ruder waren innerhalb des erforderlichen Bereiches beliebig einstellbar. Die innere Landehilfe erstreckte sich einschließlich Rumpfaussparung über eine Spannweite von $1,192 \text{ m}$, die äußere Landehilfe mit Querruder war je Seite $0,58 \text{ m}$ lang.

Die Form der verwendeten Doppelspalt-Landeklappen geht aus Bild 2, die der verwendeten Doppelspalt-Querruderklappen aus Bild 3 hervor. Die Doppelspalt-Landeklappen besteht aus einer Hauptklappe mit Schlitz, die wie eine normale Spaltklappe um hauptflügelfeste Punkte D nach unten ausschwenkbar ist und an deren Kopf in den Gelenkpunkten G eine als Zunge bezeichnete zweite Klappe gelagert ist. Die Hauptklappe selbst zerfällt durch den Spalt in den Hauptklappen-Vorflügel und den Hauptklappen-hinterteil, beide durch Stegbleche starr miteinander verbunden. Die Verdrehungsrichtung der Zunge ist entgegengesetzt jener der Hauptklappe. Der hintere Teil der Zunge trägt ein über ihren Drehpunkt hinausstehendes, in Schlußstellung den Hauptklappenspalt verschließendes Abdeckblech, so daß bei Schnellflug auf der Flügelunterseite keine Spalten offen stehen (Bild 2). Die hier verwendete Doppelspalt-Landeklappen weicht mit Rücksicht auf die Konstruktion des Flügels der Großausführung in ihren auf die Flügel-tiefe bezogenen Abmessungen und auch in ihren sonstigen Formen etwas von der früher beschriebenen Klappe¹⁾ ab. Außer der Anpassung der Klappenabmessungen an die verschiedenen Dickenverhältnisse des Flügels besteht die Hauptschwierigkeit beim Übergang vom Normalflügel zum zweimotorigen Flugzeug in der Erzielung einer aerodynamisch möglichst günstigen Durchführung der Klappen hinter den Motorgondeln. Diese Aufgabe wurde in dem vorliegenden Falle so gelöst, daß sowohl die Hauptklappe als auch die Zunge über dem Heck der Motorgondel ohne Unterbrechung durchlaufen. Um den Ausschlag der Zunge und einen einigermaßen ungestörten Luftzutritt in den vorderen Spalt auch

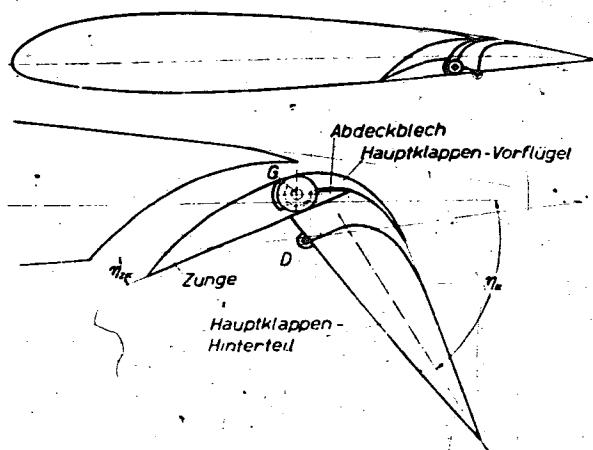


Bild 2. Doppelspalt-Landeklappen, Rippe am Stoß zwischen Landehilfe und Querruder.

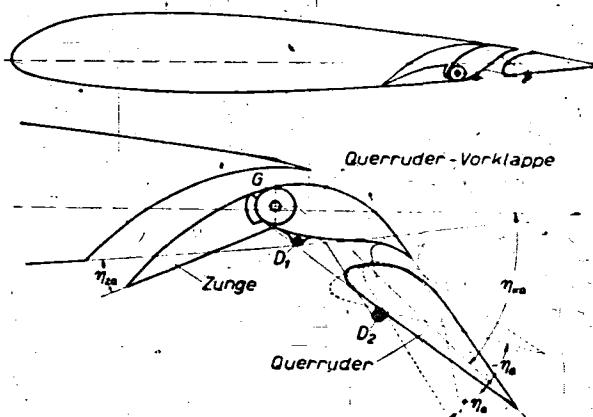


Bild 3. Doppelspalt-Querruderklappen, Rippe am Stoß zwischen Landehilfe und Querruder.

hinter den Motorgondeln zu gewährleisten, wurden diese am Übergang vom Gondelheck zum Flügel in der Seitenansicht etwa dreieckig durchbrochen, Bild 4. Die vorderen Ränder dieser Durchbrechung waren gut abgerundet. Der hinterste Teil des Motorgondelhecks war auf der Unterseite des Hauptklappen-Hinterteils befestigt und in den stehenbleibenden Teil der Motorgondel einschwenkbar. Auf diese Weise konnte der zweite Spalt in der Hauptklappe auch hinter der Motorgondel voll beaufschlagt werden.

Die Doppelspalt-Querruderklappen ist durch sinngemäße Abwandlung der Landeklappen entstanden. Während die Zunge nach Form und Größe nahezu ungeändert geblieben ist, ist die Hauptklappe auf die Querruder-Vorklappen (Bild 3) zusammenschumpft, die einerseits um flügelfeste Punkte D_1 zusammen mit der an ihrem Kopf bei G angelenkten Zunge verdrehbar ist und mit der andererseits die Quer-

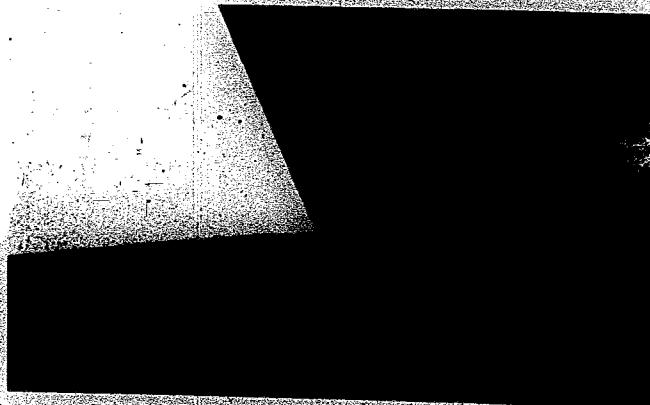


Bild 4. Spaltführung hinter der Motorgondel.

Zahlentafel 1.

Anordnung	Tragflügel-Klappenausschläge					Höhenleitwerks-Form und -Einstellung			Ergebnisse Bild
	η_A°	η_{ZA}°	η_{KQ}°	η_{ZQ}°	η_Q°	Profil	η	η_L	
1	0	0	0	0	0	Gö 409	0°	8°; 4° 0°; -4°; -8°	7
						ohne Leitwerk			
2	45°	20,5	38	17,5	0	Gö 409	0°	12°; 8°; 4° 0°; -4°; -8°	8
						ohne Leitwerk			
3	59	17,3	40,5	17	0	Gö 409	0°	12°; 8°; 4° 0°; -4°; -8°	9
						ohne Leitwerk			
4	45	20,5	38	17,5	0	23 012	0°	8°; 4° 0°; -4°	10
						ohne Leitwerk			
5	45	20,5	38	17,5	0	Gö 409	-10°	8°; 4° 0°; 4°	11
						ohne Leitwerk			
6	45	20,5	38	17,5	0	Gö 409	0°; -10°; 20°; -30° 40°	0°	12
						ohne Leitwerk			
7	45	20,5	38	17,5	0	Gö 409 mit Vorflügel	0°	12°; 8° 0°; 4°	

runderträger fest verbunden sind. In den Augen D_2 der Träger war das Querruder gelagert. Der Spalt zwischen Vorklappe und Querruder blieb bei der hier beschriebenen Klappenform auch im Schnellflug offen. Er wurde ebenso wie die Querruderform nach bewährten Vorbildern ausgeführt.

Der Größtausschlag der Landehilfe im Querruderbereich war so bemessen worden, daß er ungefähr um den größten Querruderausschlag nach unten kleiner ist als der dem größten Auftriebswert entsprechende Klappenausschlag.

Das gesamte Leitwerk (Bild 5) war um eine zur Flugsymmetrieebene senkrechte Achse schwenkbar, so daß der Anstellwinkel der Höhenflosse um reichlich 20° verändert werden konnte. Die Leitwerks- und Ruderumrisse und ihre Hauptabmessungen sind aus Bild 6 zu entnehmen. Bei einer Spannweite von 0,8 m betrug die Höhenleitwerksfläche bis zur Mittelebene der Seitenleitwerke einschließlich des im Rumpf liegenden Höhenruderteiles 0,172 m², die gesamte Höhenruderteilfläche 0,045 m². Bei $\eta_L = 0^\circ$ war die Höhenflossensehnenstellung parallel zur Waagrechtenebene WE (vgl. Bild 1) des Flugzeugs.

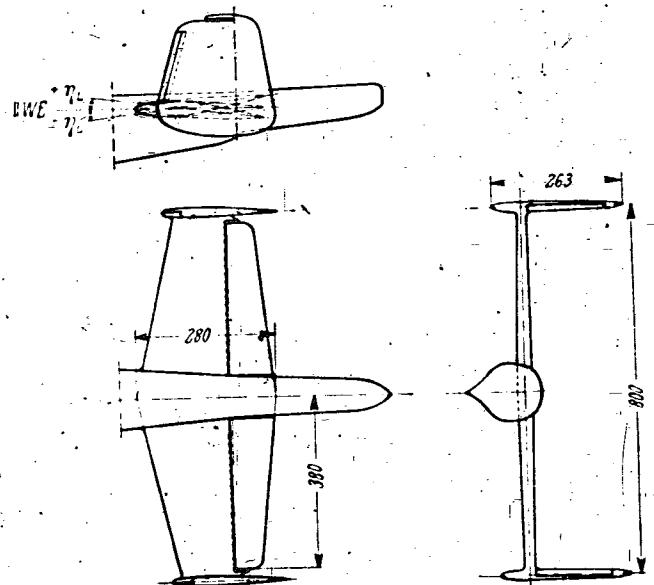


Bild 6. Plan des Gesamtleitwerks.

Das normale Höhenleitwerksprofil war — mit einem Dickenverhältnis von etwa 12% — affin zu dem Göttinger Profil 409. Dieses Höhenleitwerk wurde auch mit Vorflügel untersucht. Ferner wurde noch ein unsymmetrisches Höhenleitwerk mit Profil 23012 benutzt. Die Druckseite dieses Profils war Oberseite des Höhenleitwerks. Die Höhenrunder waren in diesem Falle nicht verstellbar, sondern mit der Höhenflosse in einem Stück angefertigt. Im übrigen waren die Abmessungen aller verwendeten Höhenleitwerke dieselben.

IV. Versuchsanordnungen und Versuchsdurchführung.

Mit dem beschriebenen Flugzeugmodell wurden u. a. bei den in Zahlentafel 1 zusammengestellten verschiedenen Zu-



Bild 5. Gesamtansicht des Leitwerks mit symmetrischem Höhenleitwerksprofil.

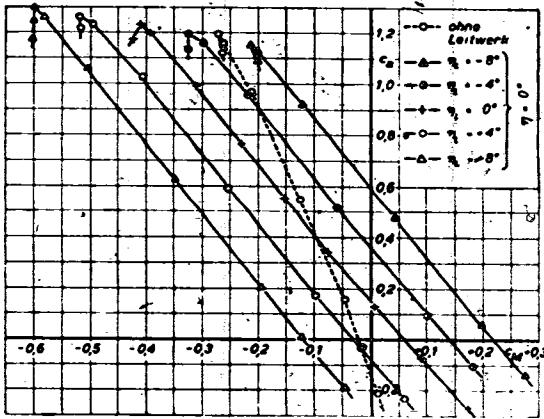


Bild 7. Symmetrisches Höhenleitwerksprofil, $\eta = 0^\circ$, Längsmomente c_M (c_a) bei verschiedenen Höhenflossenstellungen η_L , mit eingezogener Landehilfe: $\eta_K = \eta_{ZK} = \eta_{KQ} = \eta_{ZQ} = \eta_Q = 0^\circ$.

ordnungen von Landeklappen-, Höhenflossen- und Höhenruderausschlagwinkeln, zum Teil auch mit verschiedenen Höhenleitwerksprofilformen. Dreikomponentenmessungen durchgeführt. Für die beiden verschiedenen Landeklappenstellungen wurden auch noch die Messungen für »Flugzeug ohne Leitwerk« angeschlossen.

Da im Rahmen dieser Arbeit nur die Einflüsse auf den Längsmomentenhaushalt des Flugzeugs behandelt werden sollen, werden die Meßergebnisse nur soweit mitgeteilt, als sie in diesem Zusammenhang interessieren. In Bild 7 bis 12 sind daher nur die Linien c_M (c_a) wiedergegeben.

V. Darstellung und Besprechung der Versuchsergebnisse.

In jedem der Bilder 7 bis 12 sind für jeweils gleichbleibende Landeklappenausschläge die bei verschiedenen Höhenleitwerksanordnungen gemessenen c_M -(c_a)-Linien zusammengetragen. Während man bei nicht ausgefahrenen Landehilfen (Bild 7) keine Besonderheiten oder gar Unstetigkeiten im c_M -(c_a)-Verlauf feststellen kann und das gleiche auch noch bei den hier fortgelassenen Meßergebnissen für 30° Doppelspalt-Landeklappenausschlag gilt, ergibt sich bei Klappenausschlägen von 45° und darüber ein wesentlich anderes Verhalten.

Betrachtet man in Bild 8 und 9 den Momentenverlauf, so findet man, daß die Linien für gleichbleibende Höhenflosseinstellung $\eta_L = \text{konst.}$ bei Ausschlägen der Flossen-nase nach oben ($\eta_L > 0^\circ$) ebenso stetig verlaufen wie in Bild 7. Dies ändert sich aber bei Ausschlägen der Flossen-nase nach unten ($\eta_L < 0^\circ$). Man sieht, daß bei negativen Flosseinstellungen von $c_{a \text{ max}}$ zu den kleineren c_a -Werten die Linien $\eta_L = \text{konst.}$ zunächst zwar auch normal verlaufen, daß sie dann aber plötzlich unstetig abbrechen. Dies erfolgt bei um so größeren c_a -Werten, je stärker die Flossen-nase negativ ausgeschlagen wird. Vom Knickpunkt nach unten wird der Momentenhaushalt des Flugzeugs plötzlich geändert, das Flugzeug wird stark kopflastig und verliert seine Steuerfähigkeit um die Querachse, das Höhenleitwerk wird offenbar völlig unwirksam. Ein Abtasten mit der Faden-sonde zeigt, daß die Strömung auf der Unterseite des Höhenleitwerks abgerissen ist. Das Abreißen beginnt etwa bei der Flossenstellung 0° in den äußeren Teilen der Höhenleitwerksspannweite und schreitet mit zunehmenden negativen Flossen-ausschlägen sehr rasch nach innen fort. Das gleiche Bild konnte schon vor den Windkanalversuchen bei den Flugversuchen der DW-Versuchsabteilung mit dem Versuchsflyer festgestellt werden.

Wird der Längsmomentenhaushalt des Flugzeugs bei verschiedenen Schwerpunktslagen nur durch Flossen-trimmung bei gleichbleibendem Höhenruderausschlag $\eta = 0$ aufrecht erhalten, so dürfen vorderste Schwerpunktslagen, die ungefähr durch die Werte c_M/c_a der Abreißpunkte definiert werden können, nicht unterschritten werden, wenn das Flugzeug um die Querachse steuerfähig bleiben soll.

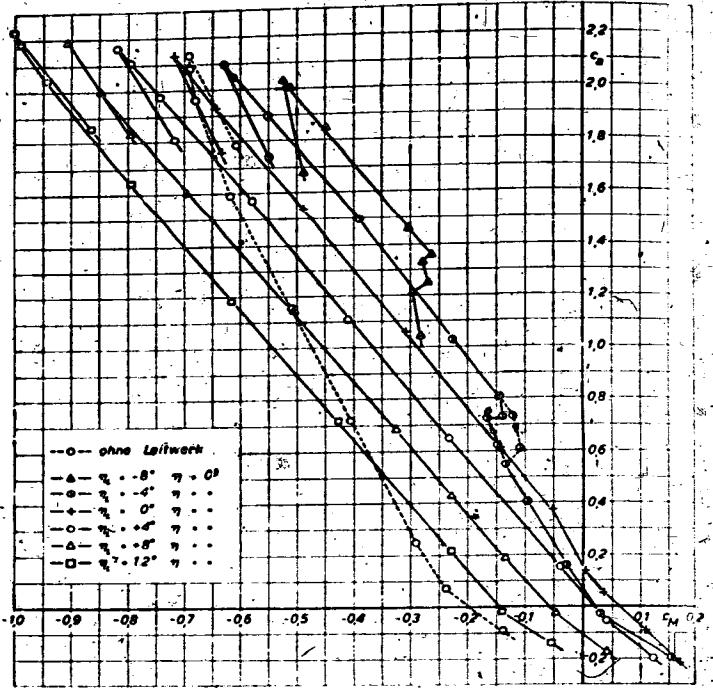


Bild 8. Symmetrisches Höhenleitwerksprofil, $\eta = 0^\circ$, Längsmomente c_M (c_a) bei verschiedenen Höhenflossenstellungen η_L , mit 45° ausgefahrter Landehilfe: $\eta_K = 45^\circ$, $\eta_{ZK} = 20,5^\circ$, $\eta_{KQ} = 38^\circ$, $\eta_{ZQ} = 17,5^\circ$, $\eta_Q = 0^\circ$.

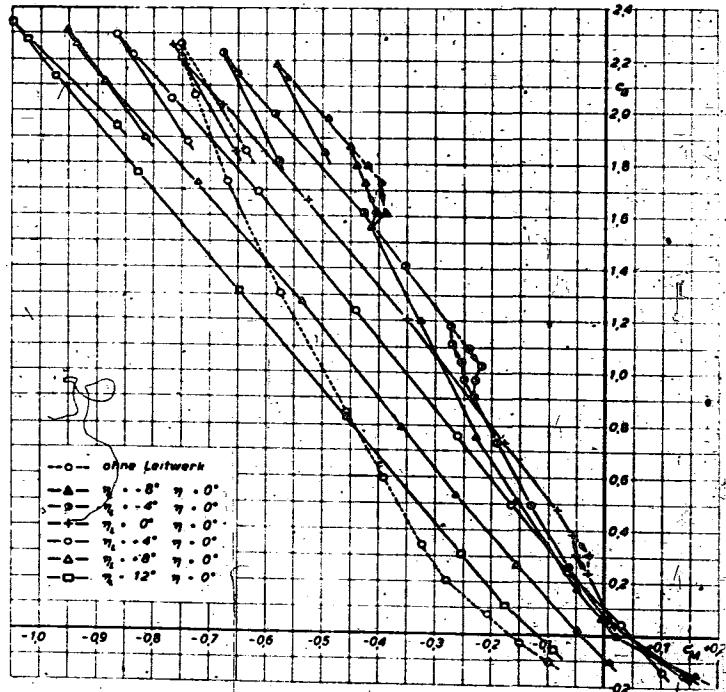


Bild 9. Symmetrisches Höhenleitwerksprofil, $\eta = 0^\circ$, Längsmomente c_M (c_a) bei verschiedenen Höhenflossenstellungen η_L , mit etwa 60° ausgefahrter Landehilfe: $\eta_K = 59^\circ$, $\eta_{ZK} = 17,3^\circ$, $\eta_{KQ} = 40,5^\circ$, $\eta_{ZQ} = 17^\circ$, $\eta_Q = 0^\circ$.

Bei den weiteren Windkanalversuchen wurde nach Höhenleitwerksformen und Anordnungen gesucht, die den Abreißvorgang entweder ganz unterdrücken oder zu möglichst weit vorne liegenden Schwerpunktslagen verschieben. Da das Abreißen offenbar durch zu große Anströmwinkel an der Höhenflosse verursacht wurde, bedingt durch den gegenüber normalen Landehilfen stark erhöhten Abwind der verwendeten Hochauftriebslandehilfe, lag es nahe, zunächst an die Anbringung eines Vorflügels an der Höhenflosse oder an eine Wölbung des Höhenflossenprofils nach unten zu denken.

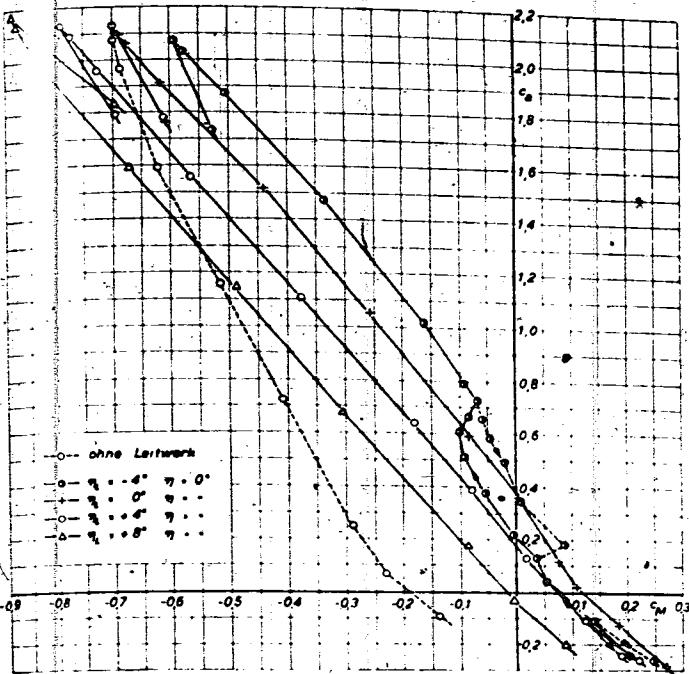


Bild 10. Unsymmetrisches Höhenleitwerksprofil, $\eta_L = 0^\circ$. Längsmomente $c_M(c_a)$ bei verschiedenen Höhenflossenstellungen η_L , mit 45° ausgefahrener Landehilfe: $\eta_{LK} = 45^\circ$, $\eta_{ZK} = 20,5^\circ$, $\eta_{KQ} = 38^\circ$, $\eta_{ZQ} = 17,5^\circ$, $\eta_Q = 0^\circ$.

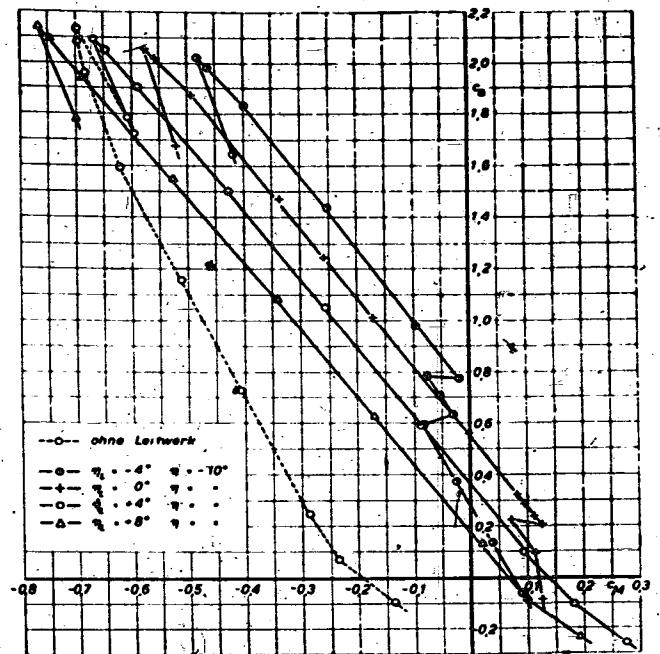


Bild 11. Symmetrisches Höhenleitwerksprofil mit gleichbleibendem Ruderausschlag $\eta = -10^\circ$. Längsmomente $c_M(c_a)$ bei verschiedenen Höhenflossenstellungen η_L , mit 45° ausgefahrener Landehilfe: $\eta_K = 45^\circ$, $\eta_{ZK} = 20,5^\circ$, $\eta_{KQ} = 38^\circ$, $\eta_{ZQ} = 17,5^\circ$, $\eta_Q = 0^\circ$.

Ein fester Vorflügel an der Höhenflosse ist nun widerstandsmäßig für ein Schnellflugzeug nicht gerade schön, auch dann nicht, wenn die Widerstandserhöhung an sich unbedeutend ist. Ein einziehbarer Vorflügel ist wegen des zusätzlichen Aufwandes unerwünscht. Die Windkanalversuche mit einem festen Vorflügel ergaben zwar eine merkliche Verbesserung im Abreißverhalten, aber die Ergebnisse der Windkanalmessung lagen wegen der zu kleinen Reynoldszahl unter den in der Großausführung zu erwartenden Werten und werden hier nicht ausführlicher wiedergegeben.

Für eine Wölbung des Höhenleitwerksprofils lagen grundsätzlich zwei Möglichkeiten vor:

1. Die Verwendung eines nach unten gewölbten Flossenprofils.
2. Die Erzielung eines nach unten gewölbten Höhenleitwerksprofils bei symmetrischem Flossenprofil durch Ausschlag des Höhenruders nach oben.

In Bild 10 sind die mit einem nach unten gewölbten Flossenprofil von der Form NACA 23012 erreichten Ergebnisse zusammengestellt. Obwohl die Messung nur bis zu Flossenstellungen von -4° durchgeführt wurde, zeigt sich doch schon eine wesentliche Verbesserung, auf die später noch näher eingegangen wird.

Noch weit günstiger sind die Versuchsergebnisse mit symmetrischer Höhenflosse bei gleichbleibendem Ruderausschlag von 10° nach oben (Bild 11). Dies ist hauptsächlich darauf zurückzuführen, daß der Ruderausschlag überhaupt keinen Einfluß auf die Abreißvorgänge hatte (Bild 12), was im übrigen schon deshalb zu erwarten war, weil ganz allgemein der Anstellwinkel des Höchstauftriebs praktisch nur wenig vom Klappenausschlag beeinflusst wird.

VI. Einige wichtige Ergebnisse der Auswertung.

In Bild 13 sind jeweils für die Landeklappenausschläge $\eta_K = 45^\circ$ und $\eta_K = 59^\circ$ drei Kurven eingetragen, die sich aus den Versuchsergebnissen Bild 8 und 9 errechnen lassen, nämlich:

1. Die bei den angegebenen Klappenstellungen mit reiner Höhenflossenstrimmung gerade noch zulässigen vordersten Schwerpunktslagen als Funktion des Auftriebswertes des Gesamtflugzeuges.
2. Die unter den gleichen Voraussetzungen bei $c_a = c_{a \max}$ möglichen Schwerpunktslagen.

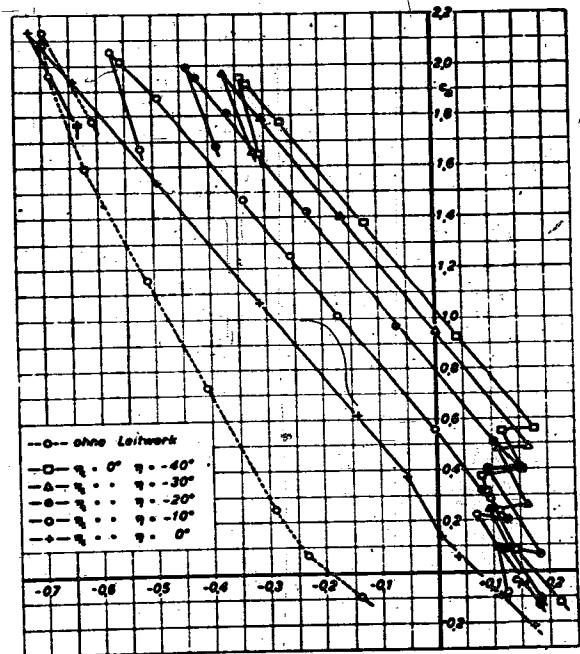


Bild 12. Symmetrisches Höhenleitwerksprofil mit verschiedenen Ruderausschlägen. Längsmomente $c_M(c_a)$ bei gleichbleibender Höhenflossenstellung $\eta_L = 0^\circ$, mit 45° ausgefahrener Landehilfe: $\eta_K = 45^\circ$, $\eta_{ZK} = 20,5^\circ$, $\eta_{KQ} = 38^\circ$, $\eta_{ZQ} = 17,5^\circ$, $\eta_Q = 0^\circ$.

3. Die unter denselben Vorbedingungen gemessenen hintersten Schwerpunktslagen des Flugzeuges ohne Berücksichtigung des Schraubenstrahleneinflusses.

Die drei Kurven umgrenzen mit der c_M/c_a -Achse ein Gebiet, innerhalb dessen längs stabile Flugzustände möglich sind. Bei außerhalb dieses Gebietes liegenden Schwerpunktslagen ist das Flugzeug entweder nicht mehr steuerungs-fähig oder instabil um die Querachse.

In Bild 14 sind die ebenfalls aus den Bildern 8 und 9 gewonnenen und über $c_{a \text{ Flug}}$ aufgetragenen größten Trimmwinkel $\Delta\eta_L$ und die dazugehörige Längsmomentenänderung Δc_M aufgetragen. $\Delta\eta_L$ ist der Höhenflossenverdrehwinkel, welcher bei den Anordnungen 2 und 3

gemessen wurde zwischen der im Mittel auftriebsfreien Höhenleitwerkslage (bestimmt durch c_M (c_a) ohne Leitwerk) und der Stellung, bei der die Strömung am Höhenleitwerk abreißt. Daß $\Delta \eta_L$ nicht unabhängig vom Klappenausschlag und c_a ist, wird nicht verwundern, wenn man bedenkt, daß die Abwindverteilung durch den Rumpf stark beeinflusst wird, der mit seiner abmindernden Wirkung besonders bei großen c_a -Werten in Erscheinung tritt. Wie man sich leicht überzeugt, ist $\Delta c_M \Delta \eta_L \approx 0,0196$ in allen Fällen ungefähr gleich groß, was nicht anders zu erwarten ist.

Zahlentafel 2.

$c_M = \text{konst.} \approx 0,8$				
Anordnung (vgl. Zahlentafel 1)	η_K	η'	$100 \frac{\Delta c_M}{c_M}$	$\Delta \eta_L$ in Grad
3	59	0	19,5	
2	45	0	16,8	
7	45	0	15	
4	45	0	7,5	
5	45	10	2,5	

In Zahlentafel 2 sind die bei konstantem $c_M \approx 0,8$ erreichbaren vordersten Schwerpunktlagen zusammengestellt. Sofern es die Höhenruderwirksamkeit erlaubt, ist — wie man sieht — die Höhenrudertrimmung am vorteilhaftesten. Es würde ein Rudertrimmwinkel von etwa -5° genügen, um mit genügend weit vorne liegenden Schwerpunktlagen gefahrlos zu fliegen, so daß man nicht notwendig zum Vorflugleitwerk mit symmetrischem Flossenprofil oder gar zum unsymmetrischen Höhenflossenprofil greifen muß. Aber auch eine Beschränkung im Klappenausschlag hat die gewünschte Wirkung.

VII. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen.

Bei Flugversuchen mit einem mit Doppelspaltklappen ausgerüsteten Flugzeug wurden Abreißerscheinungen am Höhenleitwerk festgestellt, die die zulässige Schwerpunktwanderung des Flugzeugs nach vorne beschränkten. Dies konnte durch Windkanalversuche bestätigt werden. Ferner wurden durch die Windkanalversuche die Grenzen festgestellt, innerhalb welcher der Flug gefahrlos ist. Darüber hinaus konnten Höhenleitwerksformen gefunden werden, die den zulässigen Schwerpunktsbereich so vergrößern, daß die Vorteile der Hochauftriebslandhilfe voll ausgenutzt werden können, ohne daß das Höhenleitwerk vergrößert werden muß.

Die beobachteten Erscheinungen sind bei allen Flugzeugen mit Hochauftriebslandhilfen zu erwarten, wenn mit Rücksicht auf Leitwerksgewicht und Schnellflug das Höhenleitwerk knapp bemessen wird. Sie sind keinesfalls ein besonderes Merkmal der hier zur Anwendung gekommenen Doppelspaltklappe. Die Abreißerscheinungen sind vielmehr ausschließlich durch den verstärkten Abwind verursacht, der um so größer wird, je wirksamer die Landhilfe ist. Das Abreißen kann durch die hier mitgeteilten Maßnahmen stets ohne Leitwerksvergrößerung vermieden werden.

Aus Bild 7, 8 und 9 läßt sich auch der c_a -Zuwachs entnehmen, den die DW-Doppelspaltklappe trotz vorliegender kleiner Modellabmessungen bringt. Es ist beispielsweise bei einer Schwerpunktlage von 30% Bezugsflügel-tiefe $\Delta c_a = 0,9$ bei einem Klappenausschlag $\eta_K = 45^\circ$ und $\Delta c_a = 1,9$ bei einem Klappenausschlag $\eta_K = 59^\circ$. Dieser Betrag wird von keiner mir bekannten, am Flugzeug erprobten Klappenanordnung ohne Absaugen oder Ausblasen erreicht oder gar überschritten, obwohl bei der vorliegenden Ausführung das Hilfsmittel der Flügel-tiefenvergrößerung wie

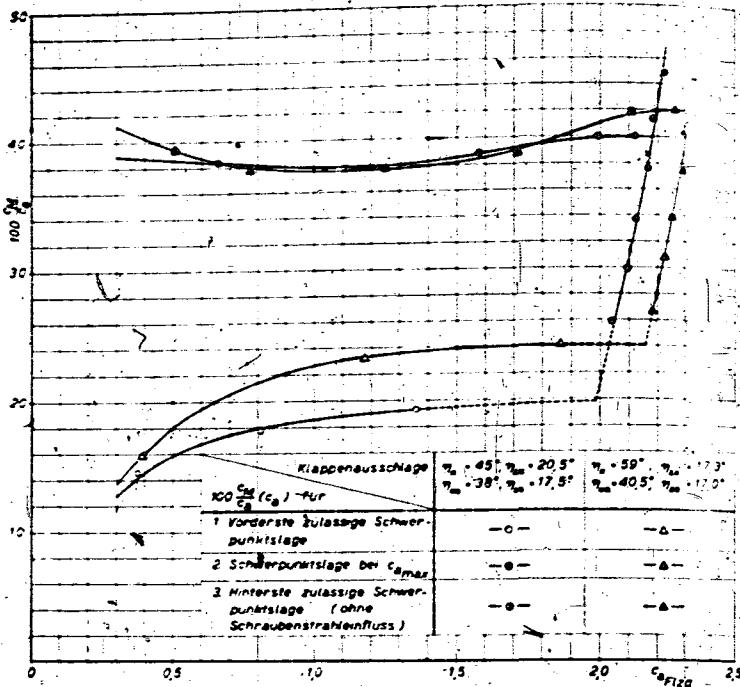


Bild 13. Einfluß des Landhilfenausschlages auf die vorderste zulässige Schwerpunktlage bei Verwendung des symmetrischen Höhenleitwerkprofils. Zulässige Schwerpunktlagen in Abhängigkeit vom Auftriebsbeiwert des Flugzeugs.

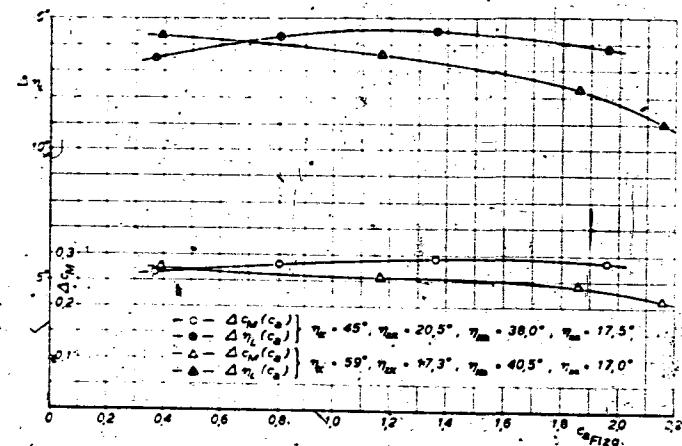


Bild 14. Abhängigkeit des Höhenflossenverdrehwinkels $\Delta \eta_L$ und der dazugehörigen Langmomentenänderung Δc_M vom Auftriebsbeiwert des Flugzeugs.

bei den Rollflügelkonstruktionen nicht in Anwendung gebracht wurde, es sich vielmehr nur um rein verdrehbare Klappen handelt. Bei Verbindung der Wirkung des vorliegenden Klappensystems mit einer Flügel-tiefenvergrößerung ist noch eine weitere c_{Mmax} -Erhöhung zu erwarten.

VIII. Schlussbemerkung.

Bei der Entwicklung der DW-Doppelspaltklappe bis zur Ausführungsreife und bei der Bearbeitung des durch die Flugerfahrungen ausgelösten Fragenkomplexes/war ein größerer Kreis von Konstrukteuren und Versuchsingenieuren tätig. Es seien hier der Flugkapitän Dipl.-Ing. Quenzler und die Leiter der Flugversuche Dr.-Ing. R. Schmidt und Dr.-Ing. Stieß besonders genannt. Auch meiner Mitarbeiter bei der Vorbereitung und Durchführung der Windkanalversuche, insbesondere des Ing. Goldmann, sei hier gedacht.

Schwingungsversuche im Windkanal an einem Flügel mit Ruder und Hilfsruder*).

Von A. Dimpker, Braunschweig.

Bericht der Ernst Henkel Flugzeugwerke G. m. b. H., Rostock.

Durch Windkanalversuche an einem ebenen Modell werden Konstruktionsrichtlinien für den Bau einer schwingungssicheren Kraftsteuerung eines Höhenleitwerks mit einkieligen Seitenleitwerk ermittelt.

Gliederung.

- I. Zweck der Untersuchung.
- II. Versuchsvorhaben.
- III. Beschreibung des Modells.
- IV. Versuchsdurchführung.
- V. Versuchsergebnisse.
 - a) Allgemeines.
 - b) Spezielle Versuchsergebnisse.
 1. Einfluß des Hilfsruderträgheitsmomentes.
 2. Einfluß der Steuerhebelmasse.
 3. Einfluß der Kraftsteuerfedern.
 4. Einfluß des Ruderungleiches.
 5. Einfluß der Steuerungssteifigkeit.
 6. Einfluß der Steuerungsmasse.
 7. Einfluß der begrenzten Spannweite des Hilfsruders.
- VI. Zusammenfassung.

I. Zweck der Untersuchung.

Zur Ermittlung von Konstruktionsrichtlinien für den Bau einer schwingungssicheren Kraftsteuerung wurden von den Ernst Henkel Flugzeugwerken GmbH Windkanalversuche an einem ebenen dynamisch ähnlichen Modell zur Erfassung des Einflusses des Freiheitsgrades Hilfsruderdrehung auf die Schwingungssicherheit durchgeführt.

Will man bei größeren Flugzeugen nicht zu Steuerungen mit Rudermaschinen übergehen, so kann auf die Kraftsteuerung, wie sie Bild 1 schematisch darstellt, nicht verzichtet werden. Auf der Ruderdrehachse ist frei drehbar nicht mit dem Ruder verbunden ein Hebel *A*, mit dem Hilfsruder fest verbunden ein Hebel *B* angebracht. Hebel *A* und *B* sind durch die Stange *C* verbunden. Der Steuerhebel *A* ist an das Ruder durch die Kraftsteuerfedern *F* gefesselt, die auf Druck und Zug vorgespannt sind. Für die Federn *F* sind Anschläge vorgesehen, so daß sie ab einem bestimmten Winkel zwischen Ruder und Hilfsruder ausgeschaltet sind. Außerdem ist zwischen Ruder und Hilfs-

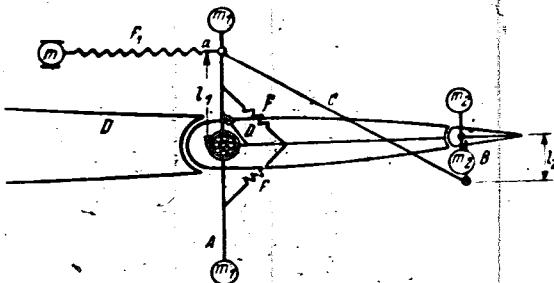


Bild 1. Kraftsteuerung (schematisch).
 Steuerfedern (Gestängeelastizität) F_1
 Kraftsteuerfedern F_2
 Übersetzungsverhältnis n
 Steuerungsmasse m
 Massen zur Vergrößerung des Steuerhebelträgheitsmomentes m_1
 Massen zur Vergrößerung des Hilfsruderträgheitsmomentes m_2

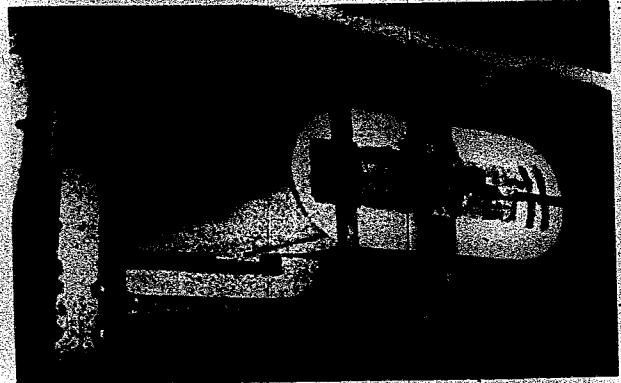


Bild 2. Modell.

ruder eine Dämpfung *D* eingebaut. Im Punkt *a* greift das Steuergestänge an, das durch die Federn *F*₁ (Steuerungssteifigkeit) und die Masse *m* (Steuerungsmasse) ersetzt ist. Das Trägheitsmoment des Steuerhebels (J_{Heb}) kann durch die Massen m_1 , das Hilfsruderträgheitsmoment (J_{HR}) durch die Massen m_2 geändert werden.

Zur Vereinfachung des Problems wurden bei den Versuchen die Kraftsteuerfedern nicht vorgespannt, Anschläge und Dämpfung weggelassen. Diese Vereinfachungen beeinflussen die Schwingungssicherheit ungünstig, denn die Vorspannung und die Anschläge stören das lineare Federgesetz und erschweren das Auftreten angefachter Schwingungen. Durch die Dämpfung wird erfahrungsgemäß die kritische Geschwindigkeit erhöht.

Bei den Versuchen haben wir uns auf die Freiheitsgrade Flossenbiegung, Ruderdrehung, Hilfsruderdrehung beschränkt. Der Freiheitsgrad Flossendrehung war ausgeschaltet. Die hier gefundenen Resultate gelten daher im allgemeinen nur für Höhenleitwerke mit einkieligen Seitenleitwerken, bei denen die Drehfrequenz der Höhenflosse vernachlässigbar hoch liegt. Dagegen sind die Ergebnisse nicht ohne weiteres auf ein Höhenleitwerk mit geteiltem Seitenleitwerk oder auf einen Flügel zu übertragen, wo die Höhenflossen- bzw. Flügeldrehung ausschlaggebende Bedeutung für die Schwingungssicherheit haben kann.

Da mit einer Ausnahme bei den Versuchen kein räumlicher Einfluß bestand, ist eine zahlenmäßige Übertragung der Ergebnisse auf ein wirkliches Flugzeug nicht möglich. Man kann aus diesen Versuchen lediglich allgemeine qualitative Konstruktionsrichtlinien ableiten.

In den normalen Windkanälen mit ihren verhältnismäßig kleinen Endgeschwindigkeiten kann der Einfluß der Machschen und Reynoldsschen Zahlen, die bei hohen Geschwindigkeiten die Schwingungssicherheit entscheidend beeinflussen können, nicht erfaßt werden.

II. Versuchsvorhaben.

Den Versuchen wurde folgendes Programm zugrunde gelegt:

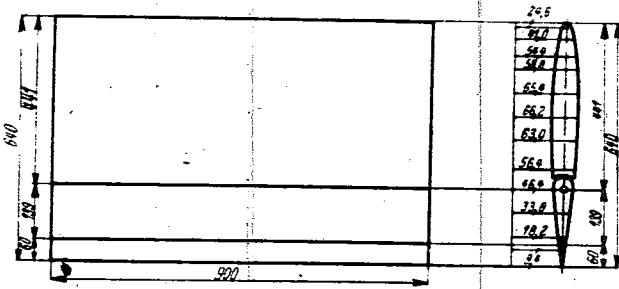


Bild 3a. Modell.

Freiheitsgrade: Flügelbiegung, Ruderdrehung, Hilfsruderdrehung.

1. Einfluß des Hilfsruderträgheitsmomentes.
2. Einfluß der Steuerhebelmasse.
3. Einfluß der Kraftsteuerfedern.
4. Einfluß des Ruderausgleiches.
5. Einfluß der Steuerungssteifigkeit.
6. Einfluß der Steuerungsmasse.
7. Einfluß der begrenzten Spannweite des Hilfsruders.

III. Beschreibung des Modells.

Die Versuche wurden mit einem ebenen Modell von 90 cm Spannweite und 64 cm Tiefe durchgeführt. Bild 2 zeigt eine Fotografie des Modells, Bild 3a eine maßstäbliche Skizze.

Die Flosse ist eine einholmige, vollbeplante Holzkonstruktion. Ruder und Hilfsruder sind mit Papier gespannt. Das Profil ist symmetrisch.

Der Massenausgleich des Ruders bzw. des Hilfsruders konnte in bekannter Weise so verändert werden, daß das Trägheitsmoment vom Ruder bzw. vom Hilfsruder nicht beeinflußt wurde.

Das Modell war mit flossenfesten Endscheiben versehen, um eine ebene Strömung zu erreichen.

Die Aufhängung des Modells im Windkanal zeigt schematisch Bild 3b. Durch eine steife Parallelführung wurde der Freiheitsgrad Flügeldrehung ausgeschaltet.

Die bei allen Versuchen konstant gehaltenen Baugrößen sind in Zahlentafel 1 zusammengestellt.

IV. Versuchsdurchführung.

Die Versuche wurden im Windkanal des Aerodynamischen Institutes der Technischen Hochschule Braunschweig ($v_{max} = 210 \text{ km/h}$) und im Windkanal des Institutes für Aerodynamik und Flugtechnik der Technischen Hochschule Hannover ($v_{max} = 160 \text{ km/h}$) durchgeführt.

Bei jedem Versuch wurde die Anblasgeschwindigkeit gesteigert, bis einwandfrei angefachte Schwingungen zu erkennen waren. Dann wurde sie langsam erniedrigt und die Geschwindigkeit bestimmt, bei der die Schwingungen gerade aufhörten. Diese wurden als untere kritische Geschwindigkeit in den Kurven aufgetragen.

Während des Hinauffahrens wurde das Modell ständig mit der Hand zu Schwingungen angeregt, damit die kritische Geschwindigkeit nicht so weit überfahren werden konnte, daß durch das plötzliche Auftreten von böseartig angefachten Schwingungen das Modell erheblich gefährdet wird.

Zahlentafel 1. Baugrößen des Modelles.

Gewicht	$G = 13,5 \text{ kg}$
Spannweite	$b = 0,90 \text{ m}$
Gesamttiefe	$t = 0,64 \text{ m}$
Rudertiefe	$t_R = 0,19 \text{ m}$
Ruderträgheitsmoment	$J_R = 160 \text{ cm/g/s}^2$
Biegefrequenz	$f_B = 4 \text{ s}^{-1}$
Dämpfung	$A = 0,030$

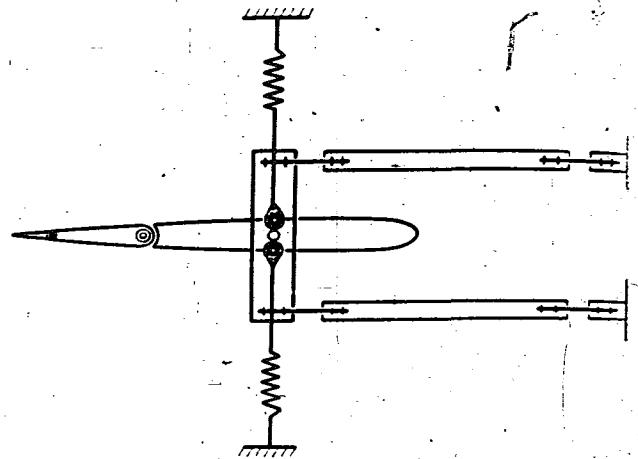


Bild 3b. Aufhängung im Windkanal (schematisch).

Bei der hier untersuchten Freiheitsgradkombination sind für einen bestimmten Bauzustand des Modells angefachte Schwingungen oft nur in einem Geschwindigkeitsbereich möglich. Dieser wird nach oben hin durch die obere kritische Geschwindigkeit begrenzt. Hierunter wird die Geschwindigkeit verstanden, bei der angefachte Schwingungen bei weiterer Steigerung der Anblasgeschwindigkeit wieder aufhören. In vielen Fällen wurde auch diese Geschwindigkeit versuchsmäßig ermittelt.

V. Versuchsergebnisse.

a) Allgemeines.

Wenn wir voraussetzen, daß das System Flosse—Ruder von sich aus keine angefachten Schwingungen ausführen kann — dies kann bekanntlich immer durch einen ausreichenden Massenausgleich des Ruders erzielt werden — so ergeben sich für die untersuchten Freiheitsgrade Flossenbiegung, Ruderdrehung, Hilfsruderdrehung vier grundsätzlich verschiedene Schwingungsformen. In Bild 4 sind schematisch die kritischen Geschwindigkeiten der verschiedenen Formen in Abhängigkeit vom Hilfsrudermassenausgleich aufgetragen.

Folgende Schwingungsformen treten auf:

1. Eine Schwingungsform des Systems Ruder—Hilfsruder. Durch Ausschaltung des Freiheitsgrades Flossenbiegung (Flosse fest gestellt) ändert sich diese Form nicht. Diese Schwingung setzt schon bei sehr kleinen Geschwindigkeiten ein (zum Teil schon bei einem Staudruck von $0,5 \text{ kg/m}^2$) und hat zunächst nur sehr kleine Frequenz (bis zu 1 s^{-1}), die aber mit wachsender Geschwindigkeit ansteigt. Die Schwingung ist zunächst sehr gutmütig. Wird jedoch die Anblasgeschwindigkeit so weit gesteigert, daß die Frequenz der angefachten Schwingung etwa mit der

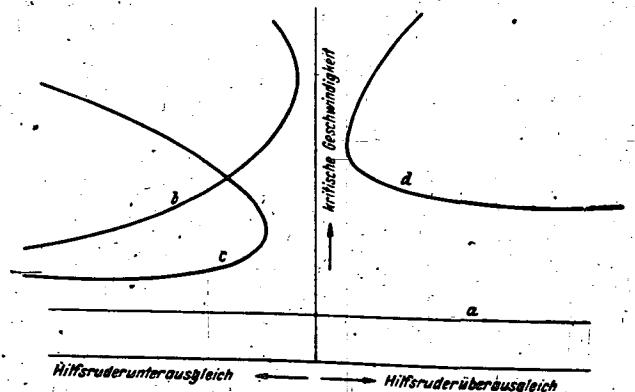


Bild 4. Schwingungsformen bei den Freiheitsgraden Flossenbiegung, Ruderdrehung, Hilfsruderdrehung. Ruder voll massenausgeglichen (schematisch).

a = Schwingungsform I = Ruder—Hilfsruder.
 b = Schwingungsform II = Ruder—Hilfsruder.
 c = Schwingungsform III = Flosse—Ruder—Hilfsruder.
 d = Schwingungsform IV = Flosse—Ruder—Hilfsruder.

Flossbiegefrequenz übereinstimmt, schwingt die Flosse stark mit und die Schwingung wird bösartig.

1. Eine Änderung des Massenausgleiches des Hilfsruders wird diese Schwingungsform — im folgenden als Schwingungsform I bezeichnet — und ihre kritische Geschwindigkeit beeinflusst.

2. Eine Schwingungsform des Systems Ruder—Hilfsruder, bei der ebenfalls die Flossenbiegung keine Rolle spielt. Die Frequenz ist im wesentlichen durch das System Steuerfedern des Hilfsruders bedingt und daher im allgemeinen ziemlich hoch (gemessen bis zu 15 s^{-1}).

Angefachte Schwingungen dieser Form treten bei konstant gehaltenen Baugrößen nur in einem bestimmten Geschwindigkeitsbereich auf, wie die Ermittlung von oberen kritischen Geschwindigkeiten zeigte.

Die kritische Geschwindigkeit ist stark vom Hilfsrudermassenausgleich abhängig. Bei ungünstiger Wahl des Hilfsruderträgheitsmomentes und der Steuerungssteifigkeit kann die Kurve $v_{kr} = f(M_{HR})$ (M_{HR} = rücklastiges Moment des Hilfsruders) den vollen Massenausgleich des Hilfsruders überschreiten, so daß auch hier angefachte Schwingungen möglich sind.

Diese Schwingungsform wird im folgenden als Schwingungsform II bezeichnet.

3. Eine Schwingungsform, an der alle drei Freiheitsgrade beteiligt sind.

Diese Form — Schwingungsform III — finden wir nur beim unterausgeglichenen Hilfsruder. Die Frequenz wurde im Rahmen der Meßgenauigkeit immer gleich der Biegefrequenz der Flosse unabhängig von allen anderen Baugrößen ermittelt.

Auch hier sind angefachte Schwingungen nur in einem vom Massenausgleich des Hilfsruders abhängigen Geschwindigkeitsbereich möglich.

Bei stark unterausgeglichenem Hilfsruder schwingt das Ruder mit der Flosse ohne Eigenbewegungen mit, während das Hilfsruder starke Drehungen ausführt. Dies ist also eigentlich nur eine Schwingung mit den beiden Freiheitsgraden Flossenbiegung—Hilfsruderdrehung. Bei kleineren Hilfsrudermassenausgleich führt dann aber auch das Ruder stärkere Drehbewegungen aus. Charakteristisch für diese Schwingungsform bleiben jedoch die starken Hilfsruderdrehungen.

4. Eine Schwingungsform, an der ebenfalls alle drei Freiheitsgrade beteiligt sind (Schwingungsform IV). Diese Schwingungsform tritt nur beim überausgeglichenen Hilfsruder auf. Die Frequenz ist immer etwas kleiner als die Biegefrequenz der Flosse (z. B. 3,8 anstatt 4 s^{-1}). Nur sehr

kleine zusätzliche Bewegungen des Hilfsruders sind zu erkennen, die aber für die Anfächung unbedingt wesentlich sind. Wenn man das Hilfsruder starr mit dem Ruder verbindet, also keine zusätzlichen Bewegungen zuläßt, ist keine Anfächung möglich, da das System Flosse—Ruder von sich aus nach Voraussetzung keine angefachten Schwingungen ausführen kann.

b) Spezielle Versuchsergebnisse.

1. Einfluß des Hilfsruderträgheitsmomentes (Ruder voll massenausgeglichen).

Da bei diesen Versuchen keine Steuerungssteifigkeit eingebaut war, wurden angefachte Schwingungen der Form II nicht festgestellt.

Trägt man bei einem vorgegebenen Bauzustand die kritische Geschwindigkeit als Funktion des Hilfsrudermassenausgleiches auf, so findet man zwischen den Kurven der Schwingungsformen III und IV einen schwingungsfreien Bereich, solange das Hilfsruderträgheitsmoment klein genug bleibt (s. Bild 4).

In Bild 5 ist dieser Bereich, d. h. die Lage der Umkehrpunkte für die Schwingungsformen III und IV in Abhängigkeit vom Hilfsruderträgheitsmoment für das freie Hilfsruder ohne Steuerhebel dargestellt. In dem von den Kurven umschlossenen Bereich sind also angefachte Schwingungen nicht möglich.

Mit Erhöhung des Hilfsruderträgheitsmomentes wird der schwingungsfreie Bereich schmaler und verschwindet ab einem Trägheitsmoment von etwa 4 cmgs^2 ganz. Bei voll ausgeglichenem Hilfsruder sind dann beide Schwingungsformen möglich, die unter Umständen eine besonders bösartige angefachte Schwingung bedingen.

Bei weiterer Erhöhung des Hilfsruderträgheitsmomentes ist ab etwa $J_{HR} = 5 \text{ cmgs}^2$ bei sehr niedrigen Staudrücken auch die Schwingungsform I zu beobachten. Angefachte Schwingungen dieser Form treten sehr gutmütig auf, so daß die kritische Geschwindigkeit unbedenklich überfahren werden kann. Bei höheren Geschwindigkeiten verdrängen dann Schwingungen der Form III oder IV die Schwingungen der Form I.

Angefachte Schwingungen der Form I treten also nur dann auf, wenn die Schwingungssicherheit bezüglich der Formen III und IV bereits außerordentlich schlecht ist.

Schon aus diesen wenigen Messungen ist die günstige Wirkung einer Verkleinerung des Hilfsruderträgheitsmomentes auf die Schwingungssicherheit zu erkennen, ein Ergebnis, das durch die weiteren Versuche immer wieder bestätigt wird.

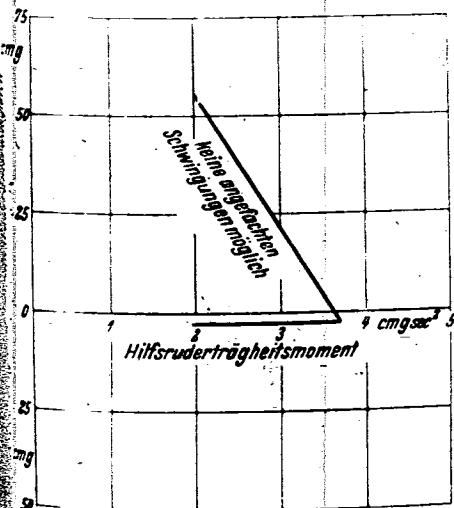


Bild 4. Abhängigkeit des schwingungsfreien Bereiches vom Hilfsruderträgheitsmoment. Hilfsruder ohne Gestänge.

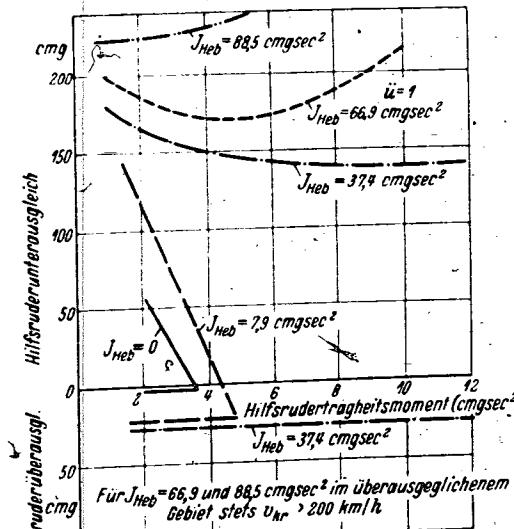


Bild 5. Abhängigkeit des schwingungsfreien Bereiches vom Hilfsruderträgheitsmoment.

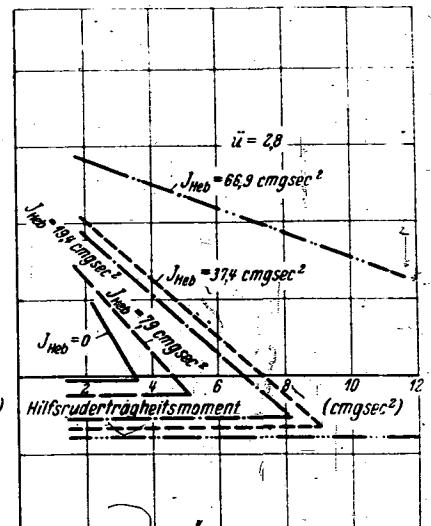


Bild 6. Abhängigkeit des schwingungsfreien Bereiches vom Hilfsruderträgheitsmoment.

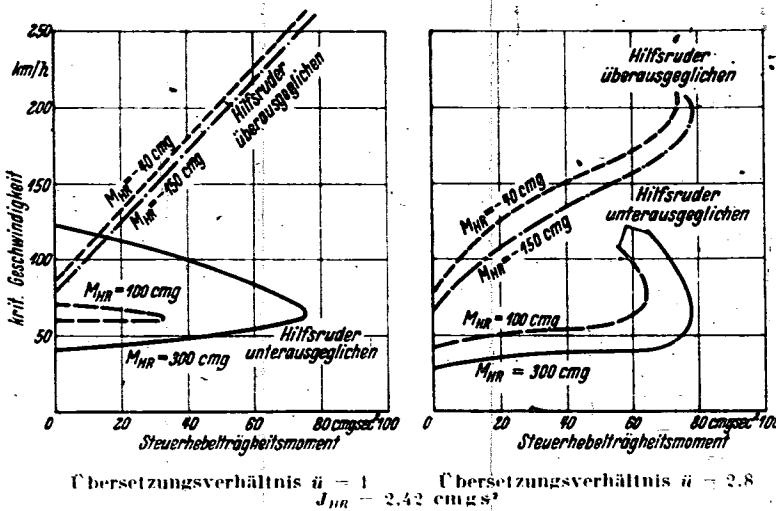


Bild 7. Kritische Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Steuerungssteifigkeitsmoment.

2. Einfluß der Steuerhebelmasse (Ruder voll massenausgeglichen).

Für diese Versuche wurde das Hilfsrudergestänge ohne Kraftsteuerfedern angeschlossen. Um den Einfluß des Steuerhebelträgheitsmomentes zu erfassen, wurden auf den Hebel A, Bild 1, verschiedene Zusatzmassen m_1 im gleichen Abstand von der Ruderdrehachse angebracht. Auch hier wurde die Steuerungssteifigkeit gleich Null gewählt und daher Schwingungen der Form II nicht gefunden.

Bei den Versuchen wurde bei verschiedenen Hilfsruderträgheitsmomenten das Steuerhebelträgheitsmoment und das Übersetzungsverhältnis geändert. Für das Hilfsruder mit Gestänge ergeben sich qualitativ ganz ähnliche Gesetze wie ohne. Auch hier kommen für normale Hilfsruderträgheitsmomente nur angefachte Schwingungen der Formen III und IV vor. Zwischen den beiden Formen findet man auch in diesem Fall bei genügend kleinen Hilfsruderträgheitsmomenten einen schwingungsfreien Bereich um den vollen Hilfsruderausgleich.

In Bild 6 ist dieser Bereich in Abhängigkeit vom Hilfsruderträgheitsmoment für verschiedene Steuerhebelträgheitsmomente aufgetragen, links für das Übersetzungsverhältnis $\bar{u} = 1$, rechts für $\bar{u} = 2.8$. Der schwingungsfreie Bereich wird mit wachsender Hebelmasse besonders im unterausgeglichenen Gebiet des Hilfsruders stark verbreitert.

Bild 7 zeigt die Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit vom Steuerhebelträgheitsmoment für das Hilfsruderträgheitsmoment 2.42 cmg s^2 bei den Übersetzungsverhältnissen 1 und 2.8. Als Parameter dient der Unter- bzw. Überausgleich des Hilfsruders.

Während im unterausgeglichenen Gebiet des Hilfsruders sich die kritische Geschwindigkeit bis zur Erreichung des Umkehrpunktes mit wachsendem Steuerhebelträgheitsmoment nur wenig ändert, nimmt sie bei Überausgleich stark zu. Durch eine Vergrößerung des Steuerhebelträgheitsmomentes wird also nicht nur der schwingungsfreie Bereich im unterausgeglichenen Gebiet verbreitert, sondern auch die kritische Geschwindigkeit bei überausgeglichenem Hilfsruder stark erhöht.

Versuche mit größeren Hilfsruderträgheitsmomenten, auf die nicht näher eingegangen werden soll, ergeben grundsätzlich keine neuen Resultate.

In Bild 8 ist der schwingungsfreie Bereich in Abhängigkeit vom Übersetzungsverhältnis für verschiedene Hilfsruder- und Steuerhebelträgheitsmomente aufgetragen. Auch hier sind aus einer Vielzahl von Versuchen nur einige charakteristische ausgewählt.

Wird das Übersetzungsverhältnis gleich Null, d. h. der Ruderhebel gleich Null, so ist das Hilfsruder starr mit dem

Ruder verbunden. Da aber das System Flosse—Ruder beim hier vorausgesetzten vollausgeglichenen Ruder keine angefachte Schwingungen ausführen kann, gibt es für $\bar{u} = 0$ keine Anfachung. Für $\bar{u} > 0$, d. h. Ruderhebel unendlich, kann sich das Hilfsruder beliebig stark bewegen, ohne daß sich der Steuerhebel mit seinen Massen bewegt. Es ist also in diesem Fall das gleiche Verhalten wie ohne Steuerungs- masse zu erwarten. Die einzelnen Kurven werden sich asymptotisch dem Verhalten ohne Steuerhebel nähern.

Für ein möglichst gutes schwingungssicheres Verhalten muß also das Übersetzungsverhältnis so klein wie möglich gehalten werden. Aus Flugeigenschaften- gründen kann es aber nicht beliebig verkleinert werden.

3. Einfluß der Kraftsteuerfedern (Ruder voll massenausgeglichen).

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Kraftsteuerfedern F auf die Schwingungssicherheit für die Steuerungssteifigkeit Null untersucht. Durch die zusätzliche Federung sind jetzt auch Schwingungen der Form II möglich.

Die Abhängigkeit des schwingungsfreien Bereiches bezogen auf die Schwingungsformen III und IV vom Federmoment $(M/\varphi)_{Kraft}$ der Kraftsteuerung — bezogen auf die Ruderdrehachse — zeigt Bild 9. Mit wachsender Federkonstanten wird der schwingungsfreie Bereich zunächst schmaler, erreicht ein Minimum und wird dann wieder breiter. Das Minimum ist um so kleiner, je kleiner Hilfs- ruder- und Steuerhebelträgheitsmoment sind. Der Anstieg nach dem Minimum wird um so steiler, je kleiner Hilfs- ruder- und Steuerhebelträgheitsmoment sind.

Man erhält naturgemäß das ungünstigste schwingungs- technische Verhalten, wenn die Eigenfrequenz des Systems Gestänge—Kraftsteuerung—Hilfsruder mit der Frequenz der angefachten Schwingung näherungsweise übereinstimmt.

Da die kritische Geschwindigkeit bezüglich der Form II bereits bei großen Hilfsruderunterausgleichen größer als die Endgeschwindigkeit des Kanals wird, lassen sich die Kurven $v_{kr} = f(M_{HR})$ nur in einem kleinen Bereich verfolgen. Auf den Umkehrpunkt kann nicht sicher extrapoliert werden, so daß seine Lage in Abhängigkeit von den einzelnen Bau- größen nicht erfaßt werden kann.

In Bild 10 ist die kritische Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Federmoment der Kraftsteuerung bei verschiedenen Hilfsruderunterausgleichen aufgetragen. Für das Hilfs- ruderträgheitsmoment 2.42 cmg s^2 und das Steuerhebel- trägheitsmoment 7.9 cmg s^2 finden wir bei weichen Kraft- steuerfedern zunächst angefachte Schwingungen der Form III. Dieser Form entsprechen die umkehrenden Kurven

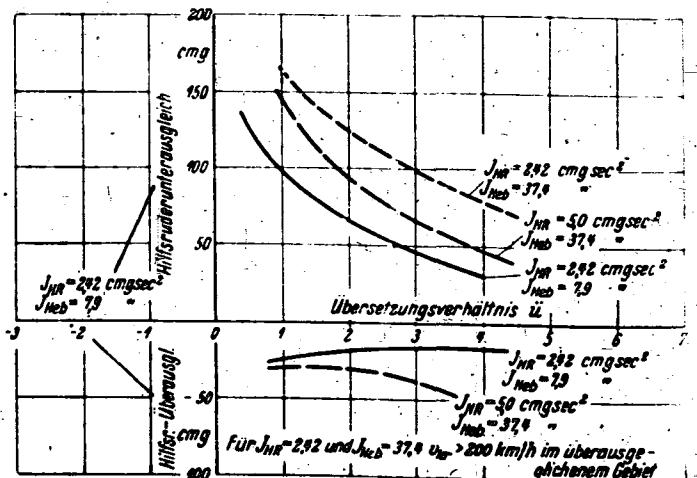


Bild 8. Schwingungsfreier Bereich in Abhängigkeit vom Übersetzungsverhältnis \bar{u} . Für alle anderen Versuche kein schwingungsfreier Bereich für negative \bar{u} .

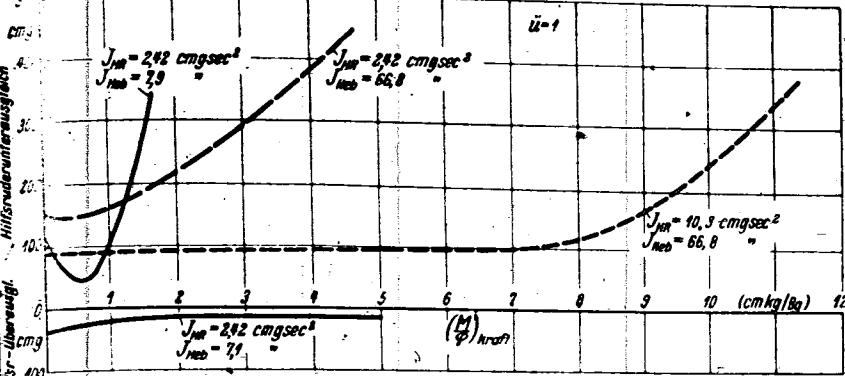


Bild 9. Abhängigkeit des schwingungsfreien Bereiches von der Federkonstanten der Kraftsteuerung $(\frac{M}{\phi})_{Kraft}$ $u = 1$.

Für $J_{HR} = 66,8 \text{ cmgsec}^2$: $v_{kr} > 200 \text{ km/h}$ im überausgeglichenen Gebiet.
 Für $J_{HR} = 10,3 \text{ cmgsec}^2$ und $J_{HR} = 2,9 \text{ cmgsec}^2$: kein schwingungsfreier Bereich.

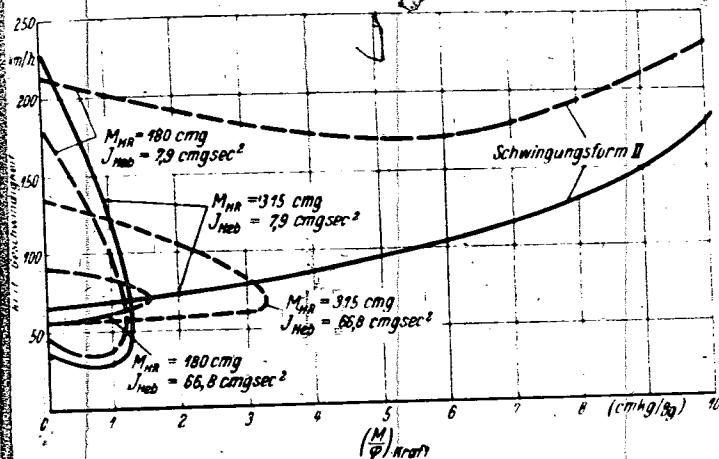


Bild 10. Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit von der Federkonstanten der Kraftsteuerung $(\frac{M}{\phi})_{Kraft}$ $u = 1$ $J_{HR} = 2,42 \text{ cmgsec}^2$.

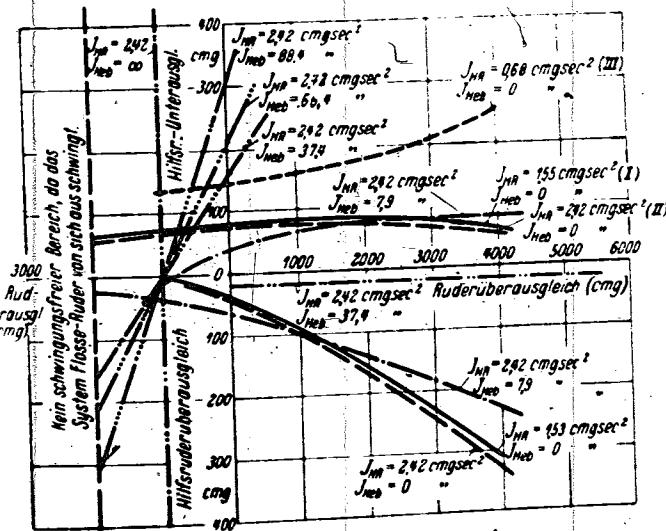


Bild 11. Abhängigkeit des schwingungsfreien Bereiches bezüglich der Schwingungsformen III und IV vom Ruder ausgleich. $u = 1$. Kurven für $J_{HR} = 66,8; 38,4; \infty$ können nicht aufgenommen werden. Im untersuchten überausgeglichenen Gebiet $v_{kr} > 200 \text{ km/h}$.

Ab einer bestimmten Federkonstanten sind diese Schwingungen nicht mehr möglich, da der schwingungsfreie Bereich bezüglich dieser Form erreicht wird. Bei höheren Geschwindigkeiten stellen sich dann aber angefachte Schwingungen der Form II ein.

Für das Steuerhebelträgheitsmoment $66,8 \text{ cmgsec}^2$ erhält man bei kleinen Federkonstanten der Kraftsteuerung an-

gefachte Schwingungen der Form III. Die Schwingungsform II wurde bis zur Endgeschwindigkeit des Kanals (210 km/h) nicht festgestellt.

Angefachte Schwingungen der Form I sind auch hier nur für große Hilfsruderträgheitsmomente möglich, wo die Schwingungssicherheit der anderen Formen schon sehr schlecht ist.

4. Einfluß des Ruderausgleiches.

Bei allen bisherigen Versuchen war das Ruder vollmassenausgeglichen. Wenn auch nach den Bauvorschriften voller Ruderausgleich gefordert wird, kommen im Flugbetrieb doch gewisse Abweichungen vor. Daher sollen die bisher gefundenen Resultate auf das über- bzw. unterausgeglichene Ruder erweitert werden. Aus Zeitmangel wurden die Versuche nur unter Vernachlässigung der Kraftsteuerfedern F , d. h. also bei freiem Hilfsruder mit angeschlossenem Gestänge, durchgeführt.

Auch in diesem Fall können wir die Schwingungsform I außer acht lassen, die nur auftritt, wenn die Schwingungssicherheit der anderen Formen schon außerordentlich schlecht ist.

Bezüglich der Schwingungsformen III und IV zeigt Bild 11 die Ergebnisse. Hier ist der schwingungsfreie Bereich des Hilfsruder ausgleiches über dem Ruderausgleich für verschiedene Steuerhebel- und Hilfsruderträgheitsmomente dargestellt.

Überschreitet der Ruderunterausgleich einen bestimmten Wert, so ist das System Flosse—Ruder bereits von sich aus schwingungsfähig. Während man bei großen Hilfsruder ausgleichen angefachte Schwingungen der Form III findet, d. h. die kritische Geschwindigkeit dieser Form tiefer liegt als die des Systems Flosse—Ruder, setzt sich bei kleinen Hilfsruderunterausgleichen bzw. bei Überausgleichen die Schwingungsform Flosse—Ruder durch. Die kritische Geschwindigkeit ist dann natürlich unabhängig vom Hilfsruder ausgleich.

Die Kurve I, Bild 11, gibt das Verhalten des freien Hilfsruders mit einem Trägheitsmoment von $1,55 \text{ cmgsec}^2$. Wenn infolge ausreichenden Ruderausgleiches angefachte Schwingungen des Systems Flosse—Ruder nicht mehr möglich sind, erhalten wir auch jetzt einen für die Schwingungsformen III und IV schwingungsfreien Bereich. Der Endpunkt dieses Bereiches im unterausgeglichenen Gebiet des Hilfsruders verschiebt sich zunächst mit wachsendem Ruderausgleich bzw. Überausgleich nicht wesentlich, rückt aber bei sehr hohen Überausgleichen wieder näher an den vollen Hilfsruder ausgleich heran.

Im überausgeglichenen Gebiet des Hilfsruders wandert der Endpunkt des schwingungsfreien Bereiches mit wachsendem Ruderausgleich stetig in Richtung Hilfsruderüberausgleich.

Eine Vergrößerung des Hilfsruderträgheitsmomentes auf $2,42 \text{ cmgsec}^2$ (Kurve II) ändert die Verhältnisse nur wenig, während eine Verkleinerung des Hilfsruderträgheitsmomentes auf $0,66 \text{ cmgsec}^2$ den schwingungsfreien Bereich in Richtung Hilfsruderunterausgleich stark vergrößert (Kurve III). Für das überausgeglichene Hilfsruder konnte in diesem Fall die Kurve nicht aufgenommen werden, da sich aus versuchstechnischen Gründen kein Überausgleich herstellen ließ.

Bei genügend stark ausgeglichenem Ruder bzw. bei Ruderüberausgleich wirkt eine Vergrößerung der Steuerhebelmasse für den Endpunkt im unterausgeglichenen Gebiet des Hilfsruders stets günstig. Die Kurven steigen mit wachsendem Ruderausgleich um so steiler an, je größer die Steuerhebelmasse ist. Eine Umkehr der Kurven bei großen Ruderüberausgleichen ist nicht mehr zu beobachten. Die Steuerhebelmasse ∞ wurde erreicht, indem der Steuerhebel, der normal frei beweglich auf der Ruderdrehschneise saß, starr mit der Flosse verbunden wurde.

Ist das Ruder über ein bestimmtes Maß unterausgeglichen, aber noch nicht so weit, daß das System Flosse-Ruder von sich aus angefachte Schwingungen ausführen kann, so wirkt die Gestängemasse ungünstig.

Im überausgeglichenen Gebiet des Hilfsruders verkleinert eine Gestängemasse den schwingungsfreien Bereich. Bei genügend großer Gestängemasse läuft die Grenzkurve parallel zur M_R -Achse, wird also mit geändertem Ruderausgleich nicht geändert. Die kritische Geschwindigkeit jedoch steigt mit wachsender Gestängemasse stark an, so daß bei größeren Massen bei allen untersuchten Hilfsrunderüberausgleichen keine kritische Geschwindigkeit unterhalb $v = 200$ km/h gefunden wurde.

Bei den Versuchen mit den Hilfsrunderträgheitsmomenten 1,55 und 2,42 $cmgs^2$ trat die Schwingungsform II überhaupt nicht auf. Wenn keine anderen Schwingungsformen vorher erscheinen, liegt also die kritische Geschwindigkeit der Form II höher als 200 km/h. Wenn solche dagegen auftreten, liegt die kritische Geschwindigkeit der Form II immer höher als die der anderen Form.

Bei einem Hilfsrunderträgheitsmoment von 0,66 $cmgs^2$ und einem Steuerhebelträgheitsmoment von 7,9 $cmgs^2$ finden wir die Schwingungsform II auch dort, wo die Formen III und IV nicht mehr beobachtet wurden. Die kritische Geschwindigkeit dieser Form liegt immer sehr hoch. Auch hier finden wir einen Umkehrpunkt der Kurve $v_{kr} = f(M_{II})$. Seine Lage in Abhängigkeit vom Ruderausgleich gibt Bild 12. Der Umkehrpunkt wandert zunächst mit wachsendem Ruderausgleich in Richtung des vollen Massenausgleiches des Hilfsruders, nähert sich aber dann einer Asymptoten parallel zur M_R -Achse. In allen Fällen ist ein ausreichender Abstand vom vollen Hilfsrunderausgleich festzustellen. Die Lage des Umkehrpunktes konnte infolge der hohen kritischen Geschwindigkeiten nur näherungsweise durch Extrapolation gefunden werden.

Erhöht man das Steuerhebelträgheitsmoment auf 66,8 $cmgs^2$, so ergeben sich bis zur Endgeschwindigkeit des Kanals keine angefachten Schwingungen der Form II.

Bei einem Hilfsrunderträgheitsmoment von 0,23 $cmgs^2$ konnte kein Ausgleichsgewicht angebracht und deshalb nur ein Ausgleichsgrad von 4500 cmg untersucht werden. Beim freien Hilfsrunder wurden bis 200 km/h keine angefachten Schwingungen gefunden.

5. Einfluß der Steuerungssteifigkeit (Steuerungsmasse unendlich; Ruder voll massenausgeglichen).

Bei den bisher durchgeführten Versuchen wurde die Elastizität der Steuerzüge und die Steuerungsmasse — insbesondere die Masse des Steuerknüppels — nicht berücksichtigt. Bei den Versuchen dieses Abschnittes wurde der Knüppel starr festgehalten, d.h. die Steuerungsmasse unendlich groß gewählt.

Gerade durch ungünstige Steuerungssteifigkeiten sind im Fluge mehrmals zum Teil böartige an-

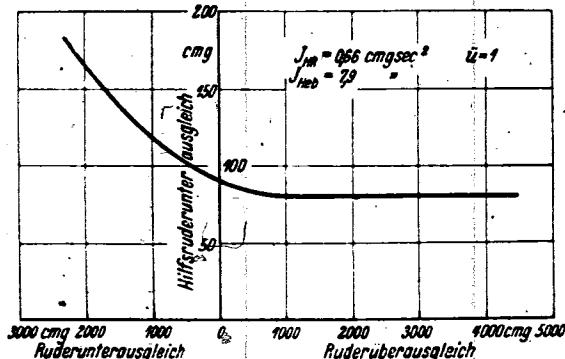


Bild 12. Höchstzulässiger Unterausgleich bezüglich der Schwingungsform II in Abhängigkeit vom Ruderausgleich.

gefachte Schwingungen aufgetreten. Daher ist eine eingehende Untersuchung dieses Parameters erforderlich. Für die Durchführung dieser Versuche wurde das Schema des Bildes 13 zugrunde gelegt.

Die Versuche zeigten einen großen Einfluß des Übersetzungsverhältnisses. Während für kleine \bar{u} sich wieder bisher um den vollen Hilfsrunderausgleich ein schwingungsfreier Bereich ergab, erhielt man bei größeren Werten auch hier angefachte Schwingungen, die die Schwingungssicherheit erheblich gefährden können.

Zur Zeitersparnis haben wir uns auf die Untersuchung von Hilfsrunderträgheitsmomenten, wie sie bei normalen Flugzeugen vorkommen, beschränkt. Daher wurden angefachte Schwingungen der Form I überhaupt nicht gefunden.

In Bild 14 links ist der schwingungsfreie Bereich in Abhängigkeit von der Steuerungssteifigkeit für verschiedene Hilfsrunderträgheitsmomente beim Übersetzungsverhältnis 1 aufgetragen. Da für das Hilfsrunderträgheitsmoment 0,66 $cmgs^2$ kein Massenüberausgleich hergestellt werden konnte, sind nur die Kurven im unterausgeglichenen Gebiet zu vergleichen. Die günstige Wirkung einer Verkleinerung des Hilfsrunderträgheitsmomentes ist auch hier deutlich zu erkennen.

Der rechte Teil von Bild 14 gibt den Einfluß des Übersetzungsverhältnisses wieder. Während eine Vergrößerung von 1 auf 2 eine günstige Wirkung erkennen läßt, wird bei 2,8 bereits der schwingungsfreie Bereich bedeutend schmaler und verschwindet zwischen 3 und 4.

Allen Kurven gemeinsam ist ein Knick bei etwa $(M/\varphi)_{Steuer} = 10$ $cmkg/Bg$. Während man unterhalb dieses Wertes angefachte Schwingungen der Form III findet, ergeben sich oberhalb Schwingungen der Form II, die natürlich anderen Gesetzen gehorchen.

Ein Minimum des schwingungsfreien Bereiches erhält man immer, wenn die Eigenfrequenz des Hilfsruders infolge

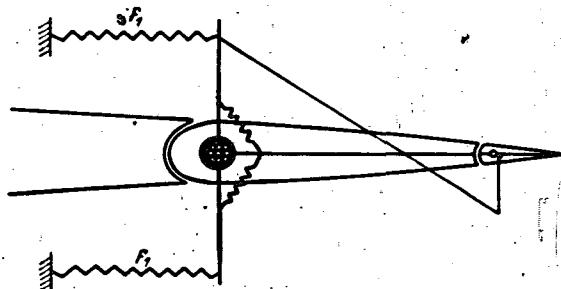


Bild 13. Untersuchung der Steuerungssteifigkeit. (Festgehaltener Knüppel; Steuerungsmasse ∞) (Schematisch.)

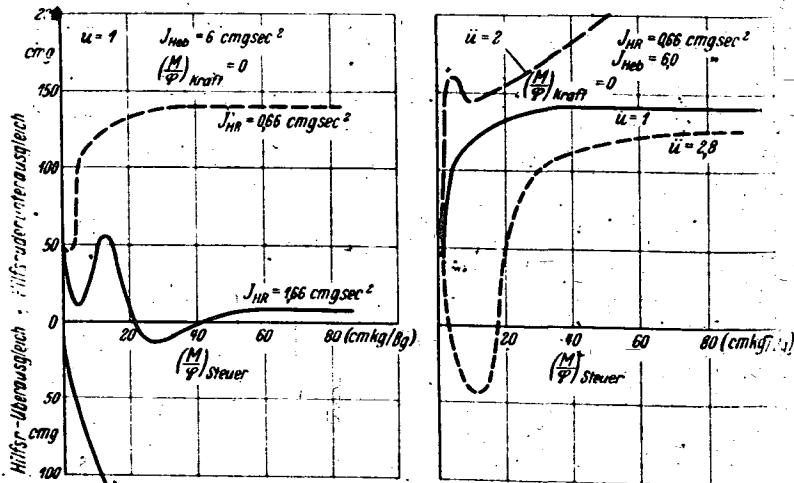


Bild 14. Einfluß des Hilfsrunderträgheitsmomentes. Einfluß des Übersetzungsverhältnisses. Abhängigkeit des schwingungsfreien Bereiches von der Steuerungssteifigkeit.

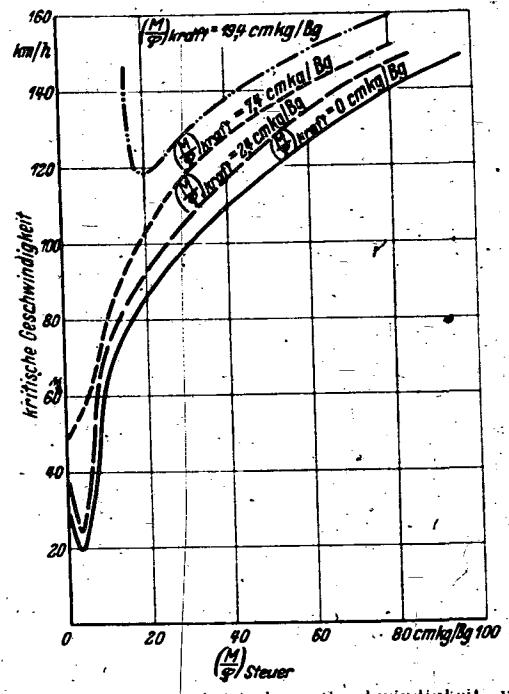
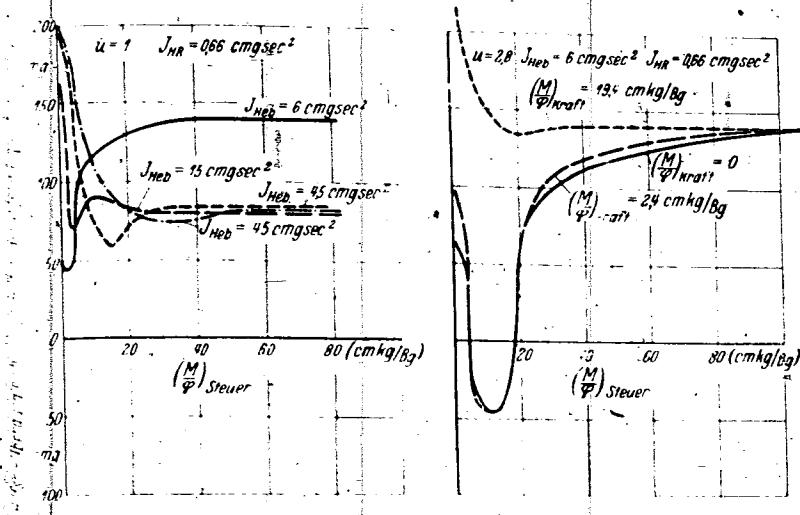


Bild 15. Abhängigkeit des schwingungsfreien Bereiches von der Steuerungssteifigkeit.

der Steuerungssteifigkeit mit der Frequenz der angefachten Schwingung der Form III übereinstimmt.

Bild 15 links zeigt den Einfluß der Steuerhebelmasse. Während ohne Steuerungssteifigkeit eine Vergrößerung günstig auf die Schwingungssicherheit wirkt ergibt sich bei größeren Steuerungssteifigkeiten der größte schwingungsfreie Bereich für die kleinste Hebelmasse. Er wird mit wachsender Hebelmasse schmaler, ändert sich aber ab einem Trägheitsmoment von etwa 15 cmg² praktisch nicht mehr.

Im rechten Teil von Bild 15 sind die Kraftsteuerfedern näher untersucht. Nur bei kleinen Steuerungssteifigkeiten macht sich ihr Einfluß bemerkbar, indem sie das Minimum des schwingungsfreien Bereiches ausglätten. Dies ist verständlich, denn nur hierbei kann sich die zusätzliche Federung durch die Kraftsteuerfedern auswirken.

Der linke Teil von Bild 16 zeigt den Einfluß des Übersetzungsverhältnisses auf die kritische Geschwindigkeit bei verschiedenen Hilfsruderausgleichen im Bereich $\bar{u} = 1$ bis 3. Mit wachsendem Übersetzungsverhältnis nehmen die kritischen Geschwindigkeiten ab.

Den Einfluß der Steuerhebelmasse gibt Bild 16 rechts wieder. Nach einer geringfügigen Zunahme der kritischen Geschwindigkeit sinkt sie mit wachsender Masse stark ab. Besonders bei kleinen Steuerungssteifigkeiten wirken auch hier die Kraftsteuerfedern günstig, Bild 17.

Da aus Flugeigenschaften Gründen oft größere Hebelverhältnisse für die Kraftsteuerung erwünscht sind, wurden auch solche eingehend untersucht.

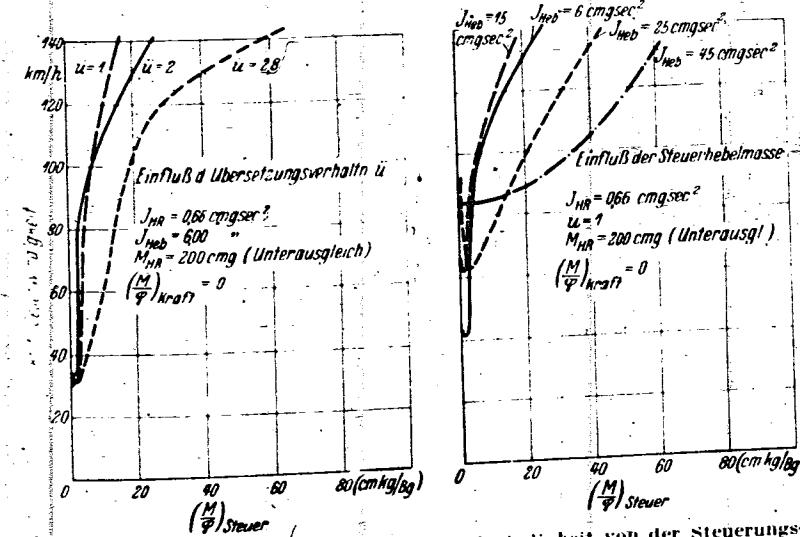


Bild 16. Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit von der Steuerungssteifigkeit.

Bild 17. Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit von der Steuerungssteifigkeit. Einfluß der Kraftsteuerfedern. $J_{HR} = 0.66 \text{ cmgsec}^2$, $\bar{u} = 2.8$, $J_{Heb} = 15 \text{ cmgsec}^2$, $M_{HR} = 200 \text{ cmg}$ (Unterausgleich).

Wie schon früher erwähnt, ist bei größeren Übersetzungsverhältnissen kein schwingungsfreier Bereich um den vollen Hilfsruderausgleich mehr vorhanden. Die Kurve $v_{kr} = f(M_{HR})$ verläuft in der Nähe des vollen Hilfsruderausgleiches praktisch parallel zur M_{HR} -Achse. Um aber auch für diese Fälle charakteristische Kurven angeben zu können, wurde die kritische Geschwindigkeit für das voll ausgeglichene Hilfsruder in Abhängigkeit von der Steuerungssteifigkeit bei verschiedenen Baugrößen aufgetragen.

Für die Steuerungssteifigkeit Null erhält man bei genügend kleinen Hilfsruderträgheitsmomenten keine angefachten Schwingungen, da hier nach den früheren Versuchen ein schwingungsfreier Bereich vorhanden ist. Aber schon bei sehr kleinen Steuerungssteifigkeiten ergeben sich verhältnismäßig niedrige kritische Geschwindigkeiten, die nach Durchschreiten eines Minimums mit wachsender Steuerungssteifigkeit langsam ansteigen.

In Bild 18 ist der Einfluß der Kraftsteuerfedern auf die kritische Geschwindigkeit beim Übersetzungsverhältnis 5 untersucht. Im allgemeinen kann durch Vergrößerung der Steuerungssteifigkeit die kritische Geschwindigkeit nicht so hoch gebracht werden, daß eine einwandfreie Schwingungssicherheit bis zu den gegenwärtig geforderten Endgeschwindigkeiten garantiert werden kann.

Die Kraftsteuerfedern ändern auch hier das schwingungstechnische Verhalten nur bei verhältnismäßig kleinen Steuerungssteifigkeiten wesentlich. Das Minimum der Kurve wird mit wachsender Steifigkeit der Kraftsteuerfedern zu größeren Steuerungssteifigkeiten verschoben.

Ein Einfluß der Gestängemasse beim Übersetzungsverhältnis 5 ist nur bei großen Steuerungssteifigkeiten festzustellen, wo die kritische Geschwindigkeit mit wachsender Steuerhebelmasse abnimmt, Bild 19.

Mit zunehmendem Übersetzungsverhältnis nimmt die kritische Geschwindigkeit stark ab, Bild 20. Für die Übersetzungsverhältnisse 1 und 2 sind für vollen Hilfsruderausgleich bis $v = 200 \text{ km/h}$ in keinem Fall angefachte Schwingungen festzustellen.

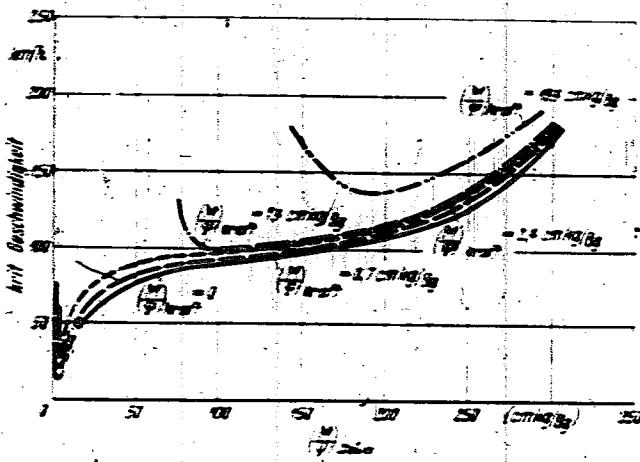


Bild 19. Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit von der Steuerungssteifigkeit.
Einfluß der Kraftsteuerfedern.
Hilfsruder voll massenausgeglichen.
 $J_{St} = 33 \text{ cm}^2/\text{g}^2$ $u = 1$ $J_{St} = 3 \text{ cm}^2/\text{g}^2$

6. Einfluß der Steuerungsmasse
Ruder voll massenausgeglichen.

Im letzten Abschnitt hatten wir angenommen, daß beim Auftreten angefachter Schwingungen der Knüppel starr festgehalten wird. Bei symmetrischen Höhenleitwerkschwingungen wird dies dem Flugzeugführer im allgemeinen nicht gelingen. In diesem Abschnitt soll daher für große Übersetzungsverhältnisse der Grenzfall des freischwingenden Knüppels untersucht werden.

Die Versuche wurden nach dem Schema, Bild 21, durchgeführt. Auf der Ruderrehachse ist frei drehbar ein weiterer Hebel angebracht, der die Ersatzmassen m für die Steuerungsmasse trägt. Dieser Hebel ist durch die Federn F_2 als Ersatz für die Steuerungssteifigkeit am Steuerhebel gefesselt.

Wie Bild 22 werden mit abnehmender Masse die kritischen Geschwindigkeiten stark erhöht. Durch die Änderung der Frequenz des Systems Steuerungsmasse—Steuerungsfedern—Steuerhebel—Hilfsruder wird das Minimum der Kurven zu größeren Steuerungssteifigkeiten verschoben. Trotzdem liegen aber im gesamten Bereich die Kurven mit kleiner Steuerungsmasse über denen mit größerer Masse.

Da man das schwingungstechnisch ungünstigste Verhalten für unendlich große Steuerungsmasse erhält, das System aber auch für diesen Fall in Ordnung sein muß, wurde auf eine weitere Fortführung dieser Versuche verzichtet.

7. Einfluß der begrenzten Spannweite
des Hilfsruders.

Bisher wurden nur rein ebene Probleme behandelt. Das Hilfsruder erstreckte sich dabei über die gesamte Spannweite. Für große Übersetzungsverhältnisse ergab sich ein recht ungünstiges schwingungstechnisches Verhalten. Bei einem Flugzeug erstreckt sich im allgemeinen das Hilfsruder nur über einen Teil der Spannweite. Bei einer durch

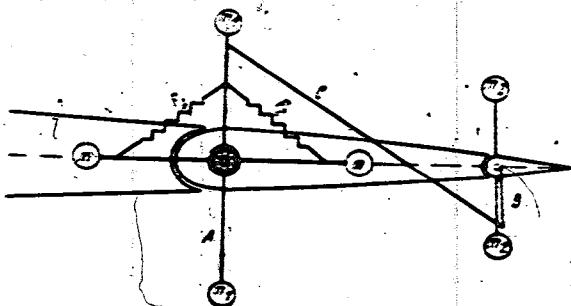


Bild 21. Untersuchung der Steuerungsmasse.

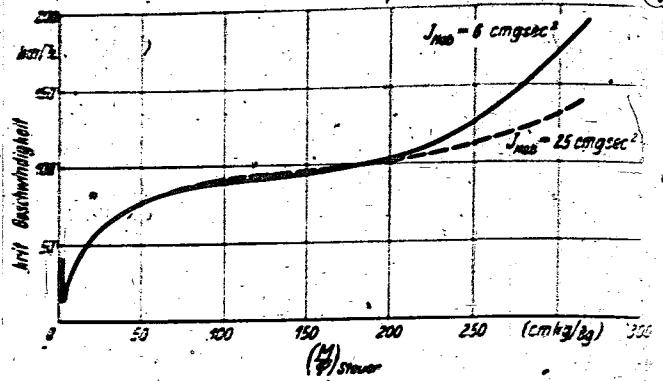


Bild 19. Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit von der Steuerungssteifigkeit.

Einfluß der Gestängemasse.
Hilfsruder voll massenausgeglichen.

$$J_{St} = 0,68 \text{ cm}^2/\text{g}^2 \quad \left(\frac{M}{q}\right)_{Krac} = 0 \quad u = 3$$

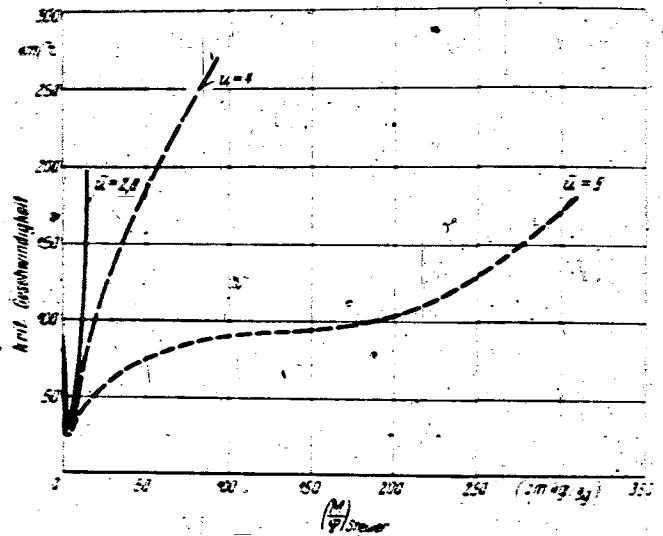


Bild 20. Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit von der Steuerungssteifigkeit.

Einfluß des Übersetzungsverhältnisses.
Hilfsruder voll massenausgeglichen.

$$J_{St} = 0,66 \text{ cm}^2/\text{g}^2 \quad \left(\frac{M}{q}\right)_{Krac} = 0 \quad J_{St} = 3 \text{ cm}^2/\text{g}^2$$

das Hilfsruder bedingten angefachten Schwingung werden anfachende Luftkräfte nur im Spannweitenbereich des Hilfsruders erzeugt, während im anderen Bereich dämpfende Luftkräfte auftreten, die die Schwingungssicherheit begün-

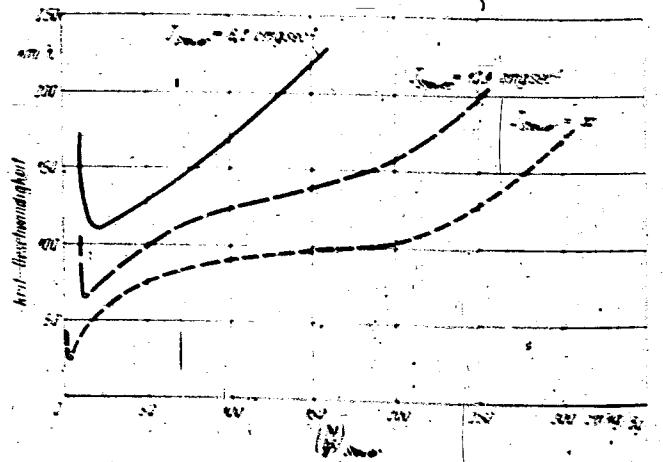


Bild 22. Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit von der Steuerungssteifigkeit.

Einfluß der Steuerungsmasse

$$J_{St} = 0,66 \text{ cm}^2/\text{g}^2 \quad J_{St} = 0,0 \text{ cm}^2/\text{g}^2 \quad u = 3$$

Hilfsruder voll massenausgeglichen

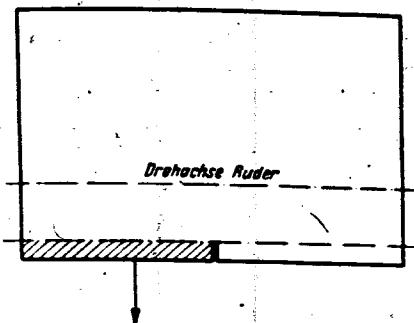


Bild 23. Starr mit dem Ruder verbunden.

stigen müssen. Um diesen Einfluß näherungsweise zu erfassen, wurde das Hilfsruder in der Mitte der Spannweite geteilt. Der eine Teil wurde starr mit dem Ruder verbunden. Nur der andere Teil wirkte als Hilfsruder, s. Bild 23.

Bild 24 zeigt einen Vergleich zwischen den Verhältnissen beim Hilfsruder über gesamte Spannweite und über halbe Spannweite. Der schwingungsfreie Bereich ist hier in Abhängigkeit von der Steuerungssteifigkeit bei verschiedenen Übersetzungsverhältnissen aufgetragen. Hilfsruder- und Steuerhebellträgheitsmoment waren für beide Hilfsruderzustände konstant. Da für das Hilfsruder über die gesamte Spannweite kein Überausgleich hergestellt werden konnte, werden nur die Kurven im unterausgeglichenen Gebiet verglichen.

Besonders beim Hebelverhältnis $\bar{u} = 5$ finden wir einen starken Einfluß. Ist die Hilfsruderspannweite gleich der Modellspannweite, so ist überhaupt kein schwingungsfreier Bereich festzustellen. Ist dagegen die Hilfsruderspannweite nur gleich der halben Modellspannweite, findet man auch bei kleinster Steuerhebelmasse einen solchen. Für $\bar{u} = 6$ ist auch in diesem Fall kein schwingungsfreier Bereich mehr vorhanden.

VI. Zusammenfassung.

Durch den zusätzlichen Freiheitsgrad Hilfsruderdrehung wird das schwingungstechnische Verhalten eines Flügels selbst bei Vernachlässigung des Freiheitsgrades Flügelrotation bedeutend komplizierter. Man kann aber auch bei einem solchen System eine einwandfreie Schwingungssicherheit erzielen, wenn man die bei den hier besprochenen Windkanalversuchen mit einem dynamisch ähnlichen ebenen Schwingungsmodell gefundenen Konstruktionsrichtlinien anwendet. Diese sollen kurz zusammengefaßt werden:

1. Das Ruder ist — wie auch in den Bauvorschriften gefordert — voll massenauszugleichen. Unterausgleich ist grundsätzlich zu vermeiden. Überausgleich ist im allgemeinen zulässig.
2. Die Hilfsruder sind ebenfalls voll massenauszugleichen. Nur sehr geringe Abweichungen hiervon sind zuzulassen.
3. Das Hilfsrudertägheitsmoment bei vollem Massenausgleich ist möglichst klein zu halten.

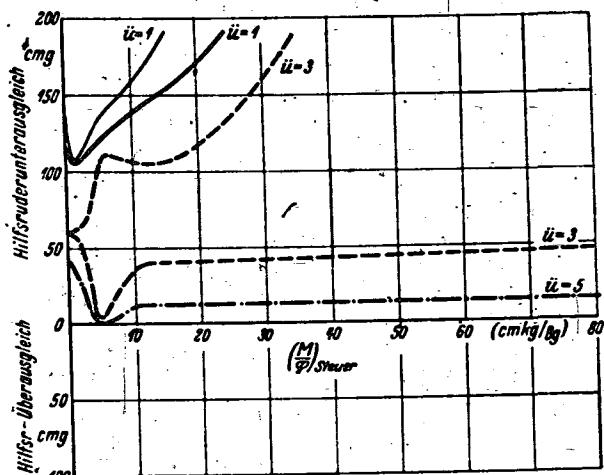


Bild 24. Abhängigkeit des schwingungsfreien Bereiches von der Steuerungssteifigkeit. Vergleich des Hilfsruders über gesamte Spannweite und über halbe Spannweite.

$$J_{H_{\text{ges}}} = 0,66 \text{ cmgs}^2 \quad J_{H_{\text{hal}}} = 6,0 \text{ cmgs}^2 \quad J_{\text{steuer}} = \infty \left(\frac{M}{q} \right)_{\text{Kraft}} = 0.$$

Die stark ausgezogenen Linien gelten für gesamte Spannweite, die dünn ausgezogenen für halbe Spannweite. Für $\bar{u} = 5$ und ganze Spannweite kein schwingungsfreier Bereich.

Diese Forderung ist bei weitem die wichtigste, die bei den Versuchen gefunden wurde. Mit Hilfe eines genügend kleinen Hilfsrudertägheitsmomentes kann man einwandfreie Schwingungssicherheit oft erreichen, die durch ungünstige Wahl anderer Baugrößen sonst nicht vorhanden ist.

4. Durch eine Vergrößerung der Gestängemasse kann oft die Schwingungssicherheit noch erreicht werden, wenn sie sonst nicht mehr vorhanden ist. In einigen Fällen, insbesondere bei den durch die Steuerungssteifigkeit bedingten Schwingungsformen, kann sich eine solche Vergrößerung ungünstig auswirken. Diese ungünstige Wirkung ist aber selbst bei abnorm großen Gestängemassen nicht so stark, daß in der Nähe des voll ausgeglichenen Hilfsruders Gefahr für die Schwingungssicherheit besteht.
5. Das Übersetzungsverhältnis Steuerhebel zu Hilfsruderspannweite muß so klein wie möglich gehalten werden. Kann es aus Flugeigenschaftsgründen nicht klein genug gemacht werden, ist eine einwandfreie Schwingungssicherheit nur durch ein genügend kleines Hilfsrudertägheitsmoment zu erreichen.
6. Durch eine ungünstige Steuerungssteifigkeit kann die Schwingungssicherheit infolge Frequenznachbarschaft stark verschlechtert werden.
7. Eine Verkleinerung der Steuerungsmasse wirkt ungünstig.
8. Durch die Kraftsteuerfedern wird im allgemeinen die Schwingungssicherheit nicht maßgeblich verändert.
9. Erstreckt sich das Hilfsruder nur über einen Teil der Ruderspannweite, so wirkt dies günstig auf die Schwingungssicherheit.

Ein Trägerfrequenzmeßgerät für Schwingungsmessungen, insbesondere für Flugversuche*).

Von Gerhard de Vries.

Bericht der Dornier-Werke G. m. b. H., Friedrichshafen.

Schwingungsmessungen an Flugzeugen erfordern möglichst kleine und leichte Geber, da für die Anbringung nur selten feste Bauteile zur Verfügung stehen. Wo mechanisch schreibende Geräte den gestellten Anforderungen nicht mehr genügen, ist die Umformung des Meßwertes in eine elektrische Größe und Aufzeichnung mit Oszillographen zweckmäßig. Für die elektrische Fernübertragung des Meßwertes hat sich das Trägerfrequenzverfahren bewährt. Es wird ein Gerät beschrieben, das den besonderen Anforderungen des Flugbetriebes angepaßt ist und die gleichzeitige Aufzeichnung von vier Meßwerten auf einem Oszillographen erlaubt.

Gliederung.

- A. Allgemeine Gesichtspunkte zum Entwurf eines Trägerfrequenzgeräts für Schwingungsmessungen.
- B. Wirkungsweise.
 1. Das Meßelement.
 2. Der Trägerfrequenzgenerator.
 3. Der Verstärker.
- C. Aufbau.
 1. Die Dimensionierung.
 2. Der Aufbau.
- D. Betrieb.
 1. Die Eichung.
 2. Der Betrieb.
- E. Zusatzgeräte.
 1. Verschiebungsmeßgerät.
 2. Ruderschwingungsmeßgerät.
 3. Drehschwingungsmeßgerät.
 4. Schlagschwingungsmeßgerät.
 5. Zusatzgerät zum Anschluß weiterer Meßstellen.
- F. Zusammenfassung.

A. Allgemeine Gesichtspunkte zum Entwurf eines Trägerfrequenzgeräts für Schwingungsmessungen.

Schwingungsmessungen an Flugzeugen können im Stand und im Fluge notwendig sein. Bei Standmessungen ist es im allgemeinen möglich, Geräte mit zwei Festpunkten, sog. Verschiebungsschreiber zu benutzen, ohne daß an Größe und Gewicht der Geräte besondere Anforderungen zu stellen sind. Eine Ausnahme bildet die Messung an schwer zugänglichen Teilen (z. B. Lagerungskörpern der Motoren) sowie die Messung von Drehschwingungen, die sich mit Verschiebungsmessern nicht genügend genau durchführen läßt. In diesen Fällen sind kleine Ausmaße und — bei Geräten die an Flügel, Leitwerk oder andere nicht sehr steife Teile angeschlossen werden müssen — geringes Gewicht notwendig.

Wesentlich schärfer sind hinsichtlich Größe und Gewicht die Forderungen, die an Geräte für Flugmessungen zu stellen sind. Daneben ergeben sich aber weitere Wünsche an ein ideales Meßgerät, die durch die Vielseitigkeit der Flugmessungen bedingt sind.

Zunächst ist das Frequenzspektrum der im fliegenden Flugzeug auftretenden Schwingungen außerordentlich umfangreich. Es umfaßt sowohl langsame Schwingungen durch Böen- und Flugbewegungen als auch vom Triebwerk und von der Luftschraube erregte verhältnismäßig hohe Frequenzen. Fast immer ist die Aufgabe gestellt, aus diesem weiten Frequenzbereich heraus einen Ausschnitt zu betrachten. Es wäre nun wünschenswert, daß ein Meßgerät erlaubt, die nicht interessierenden Frequenzen abzufiltern:

Dehnt sich die Messung auf mehrere Bauteile aus, ist es notwendig, die Schriebe untereinander und z. B. der Motor- oder Luftschraubendrehzahl zuordnen zu können.

Mit den auf dem seismographischen Prinzip arbeitenden, mechanisch unmittelbar aufzeichnenden Geräten lassen sich diese Wünsche bekanntlich nur teilweise erfüllen. Die Bewegungsmesser zeigen langsame Bewegungen durch Böen oder Flugbewegungen unerwünscht groß an, so daß die Papierbreite nur zum kleinen Teil für die eigentliche Meßgröße zur Verfügung steht. Diesen Nachteil vermeiden Geschwindigkeits- und Beschleunigungsmeßgeräte, die aber wieder die höheren und höchsten Frequenzen gegenüber den tieferen Frequenzen so stark vergrößert anzeigen, daß diese nicht mehr auszuwerten sind. Ferner lassen sich die Ausmaße mechanisch aufzeichnender Geräte nicht unter ein bestimmtes Maß senken, ohne daß die Auswertegenauigkeit durch den abnehmenden Maßstab der Aufzeichnung leidet. Die Vorteile der unmittelbar aufzeichnenden Geräte sind andererseits in ihrem verhältnismäßig kleinen Aufwand und den entsprechend geringen Fehlermöglichkeiten zu sehen.

Die beschriebenen Nachteile eines Bewegungs- und Beschleunigungsmessers sind grundsätzlicher Art, doch läßt sich der Frequenzgang dadurch verbessern, daß der Meßwert nicht unmittelbar aufgezeichnet, sondern durch entsprechende Filter berichtigt wird. Das läßt sich besonders bequem durchführen, wenn eine Umwandlung der mechanischen Größe in eine elektrische erfolgt. Dann kann jeder beliebige Frequenzverlauf erzielt werden, und gleichzeitig ergibt sich die Möglichkeit, eine zentrale Aufzeichnung verschiedener Meßvorgänge auf einem Oszillographenstreifen vorzunehmen und den Maßstab der Aufzeichnung beliebig zu vergrößern.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, mechanische Größen in elektrische Werte umzuformen [1]. Unter diesen nimmt das Trägerfrequenzverfahren eine besondere Stellung ein, da es erlaubt, auch statische Verschiebungen zu übertragen. Das kann bei vielen Messungen erwünscht sein, insbesondere bei Dehnungsmessungen. Weiterhin lassen sich mit geringen Schaltmitteln auch die tiefen Frequenzen der mechanischen Schwingungen mittels des Trägerfrequenzverfahrens bequem verstärken. Der Aufwand für alle diese Meßverfahren ist verhältnismäßig groß, doch ist er für die Versuchsdurchführung ohne größere Bedeutung, wenn es gelingt, die Schaltmittel in einfachen, möglichst unveränderlichen Baugruppen zusammenzufassen. Drei solcher Baugruppen sind immer vorhanden:

1. Das Meßelement,
2. der Verstärker bzw. das Siebglied,
3. die Registriervorrichtung.

Zur Aufzeichnung steht im Oszillographen ein betriebs-sicheres Gerät zur Verfügung, das — vom Austausch der Schleifen abgesehen — unveränderliche Eigenschaften aufweist. Das Zwischenglied, das als Vierpol anzusehen ist und Verstärker, Gleichrichter, Siebketten usw. umfassen kann, läßt sich bis auf feste Schaltstellungen zur Regelung der Empfindlichkeit auch noch unveränderlich halten. Schließlich kann das erste Glied der elektrischen Kette —

*) C 29, A 2541.

das Meßelement — in seinem elektrischen Teil bei den verschiedenen Formen der Verschiebungs- und Schwingungsmessungen auch konstant gehalten werden. Dann läßt sich für jede Aufgabe der Schwingungsmessung das geeignete mechanische Meßsystem bauen bzw. ein anderes entsprechend abändern und mit dem fertigen Meßelement verbinden. Von diesem Grundgedanken ausgehend entstand das im folgenden beschriebene Gerät.

Dieses wurde für die gleichzeitige Aufzeichnung von vier Meßvorgängen mit einem Luftfahrtoszillographen entworfen. Auf die vorgesehene Verwendung im Flugbetrieb wurde weitgehend Rücksicht genommen. So sollte die Eichung des Gerätes möglichst einfach sein und nach Möglichkeit auch die Schleifen des Oszillographen einschließen. Sie mußte auf alle Fälle ermöglichen, in die Messung — auch im Flug — oder kurz vorher oder nachher — eine Eichung einzuschleiben, ohne daß die Meßelemente selbst zugänglich waren.

Für die Verwendung der Röhrenverstärkung waren verschiedene Überlegungen maßgebend. Die moderne Verstärkerröhre selbst ist ein Bauelement, das sowohl in der mechanischen Stofffestigkeit als auch in seinen elektrischen Eigenschaften andere Bauteile, wie Kondensatoren, Widerstände und Trockengleichrichter erreicht hat. Sie bietet die Möglichkeit beliebig großer Verstärkung, bequemer Regelung der Verstärkung und guter Anpassungsmöglichkeit an Registriergeräte mit beliebigen Eingangswiderständen solange man sich auf Wechselvorgänge beschränkt. Diesen Vorteilen gegenüber stehen als Nachteil der größere Aufwand an Schaltelementen im Vergleich zu röhrenlosen Geräten und vor allem der Bedarf an Heiz- und Anodenstrom.

Bei geschicktem Aufbau lassen sich die Schaltmittel aber auf verhältnismäßig kleinem Raum unterbringen, die Ausmaße üblicher Verstärker lassen sich noch erheblich unterschreiten. Der dadurch bedingte erhöhte Arbeitsaufwand zur Herstellung ist einmalig und macht sich durch die bequeme Handhabung bald bezahlt. Der Bedarf an Heiz- und Anodenspannung bleibt ein Nachteil, weil damit die Anlage abhängig von dem Vorhandensein geeigneter Stromquellen wird.

B. Wirkungsweise.

1. Das Meßelement.

Über Trägerfrequenzgeräte besteht eine umfangreiche Literatur [1]. Der Grundgedanke bei dem Verfahren ist in Bild 1 dargestellt. Die Amplitude einer Wechselspannung hoher Frequenz — der Trägerfrequenz — wird in einem Geber entsprechend dem Meßwert verändert, d. h. moduliert. Nach der Gleichrichtung wird dann der Meßwert selbst als Spannungs- bzw. Stromschwankung erhalten. Für die Modulation gibt es verschiedene Verfahren, für deren praktische Durchführung in [1] Beispiele gegeben sind. Als zweckmäßig für den vorgesehenen Verwendungszweck erwies sich das sog. gegeninduktive Verfahren, das in Bild 2 schematisch dargestellt ist. Das Meßelement (auch mit Geber bezeichnet) besteht aus zwei Transformatoren T_1 mit Primär- und Sekundärspulen, die ein gemeinsames Joch in der Form des verbleiblichen Ankers A haben. In der Mittellage des Ankers sind die Luftspalte und damit bei sonst gleichem Aufbau auch die Wechselstromwiderstände der beiden Transformatoren

gleich. Eine an die hintereinandergeschalteten Primärspulen $a-b$ gelegte Wechselspannung induziert in den Sekundärspulen eine entsprechende, in beiden Spulen gleiche, Spannung. Werden die Spulen gegenemangergeschaltet, heben sich die Spannungen auf, so daß an den Klemmen $c-d$ keine Spannung auftritt. Bei einer Verschiebung des Ankers wird der Luftspalt für den einen Transformator kleiner, für den anderen größer, d. h. die Primärinduktivität wird größer bzw. kleiner. Die Spannungsteilung erfolgt im Verhältnis der Induktivitäten, und bei unbelasteter Sekundärseite ändern sich entsprechend die Spannungen in den Sekundärspulen. Für den verlustlosen Transformator ergeben sich folgende Beziehungen mit:

- ω = Kreisfrequenz.
- L_1, L_2 = Induktivitäten.
- R = induktiver Gesamtwiderstand.
- K = Konstante $= 0,4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$.
- z = Windungszahl.
- R_m = magnetischer Widerstand.
- l_1 = Eisenweg.
- l_2 = doppelter Luftspalt.
- F_1 = Eisenquerschnitt (als konstant angenommen).
- F_2 = Querschnitt im Luftspalt.
- μ = Permeabilität des Eisens.
- μ_0 = Permeabilität der Luft = 1.

Induktiver Widerstand der Primärseite

$$R_1 = \omega \cdot L_1 + \omega \cdot L_2 = \omega \cdot (L_1 + L_2) \tag{1}$$

$$L = \frac{z^2 \cdot 0,4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot K \cdot z^2}{R_m} \tag{2}$$

$$R_m = \frac{l_1}{F_1 \cdot \mu} + \frac{l_2}{F_2 \cdot \mu_0} \quad \text{mit } \mu_0 = 1 \tag{3}$$

$$L_1 = \frac{K \cdot z^2}{l_1 \cdot F_1 \cdot \mu} = \frac{K \cdot z^2 \cdot F_1 \cdot \mu \cdot F_2}{l_1 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \mu} \tag{4}$$

für den hier vorliegenden Fall $F_1 \approx F_2 = F$

$$L_1 = \frac{K \cdot \mu \cdot F \cdot z^2}{l_1 - l_2 \cdot \mu} \quad L_2 = \frac{K \cdot \mu \cdot F \cdot z^2}{l_1 + l_2 \cdot \mu} \tag{4a, b}$$

wenn die Transformatoren geometrisch und elektrisch gleichwertig sind. Damit

$$R_1 = \omega \cdot K \cdot \mu \cdot F \cdot z^2 \left(\frac{1}{l_1 - l_2 \cdot \mu} + \frac{1}{l_1 + l_2 \cdot \mu} \right) \tag{5}$$

Mit dem Ansatz

$$\left. \begin{aligned} l_{11} &= l - x \\ l_{12} &= l + x \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

und unter der Voraussetzung, daß l_2 klein gegen $l_1 \cdot \mu$ ist, wird

$$R_1 = \omega \cdot K \cdot F \cdot z^2 \left(\frac{2l}{l^2 - x^2} \right) \tag{7}$$

Die Teilspannungen an den beiden Primär- und bei gleicher Windungszahl an den Sekundärspulen sind

$$J \cdot R_{L1} = \frac{E}{R_1} \cdot R_{L1} \quad \text{bzw.} \quad J \cdot R_{L2} = \frac{E}{R_1} \cdot R_{L2}$$

Die Differenz der Spannungen

$$\Delta E = \frac{E}{R_1} (R_{L1} - R_{L2}) \tag{8}$$

mit $R_{L1} = \omega \cdot L_1$, $R_{L2} = \omega \cdot L_2$ und dem Wert R_1 nach (7) ist

$$\Delta E = \frac{E \cdot \omega \cdot K \cdot F \cdot z^2 \left(\frac{1}{l-x} - \frac{1}{l+x} \right)}{\omega \cdot K \cdot F \cdot z^2 \frac{2l}{l^2 - x^2}} = E \cdot \frac{l^2 - x^2}{2l} \cdot \frac{2x}{l^2 - x^2}$$

$$\Delta E = \frac{x}{l} \cdot E \tag{9}$$



Bild 1. Schema des Trägerfrequenzverfahrens.

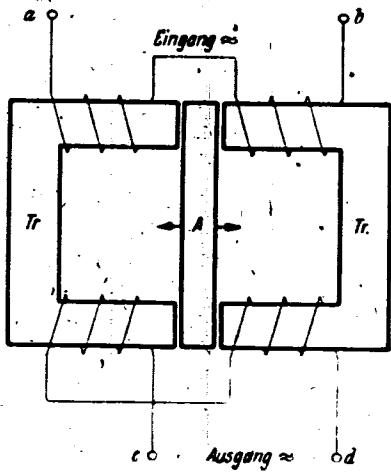


Bild 2. Schematische Darstellung des Meßelements.

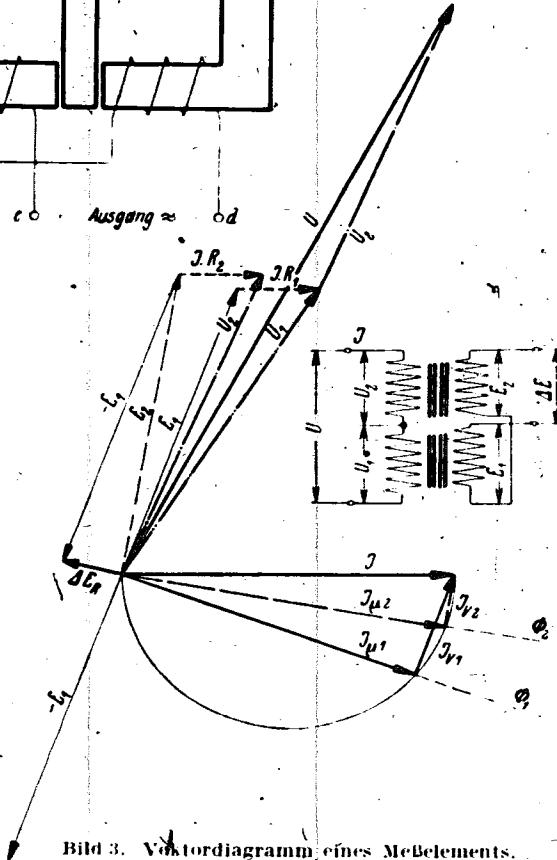


Bild 3. Vektordiagramm eines Meßelements.

Die Sekundärspannung ist also unter den gemachten Voraussetzungen proportional der Verschiebung x .

In Wirklichkeit ist der Geber kein idealer Transformator, da er einerseits Ohmsche Widerstände, andererseits auch Eisenverluste hat. Die kapazitive Belastung der Sekundärseite durch die Windungskapazität ist demgegenüber zu vernachlässigen, so daß die Annahme eines Transformators im Leerlauf erhalten bleiben kann. Die Eigenschaften eines solchen Transformators werden am besten am Vektordiagramm nach Bild 3 verfolgt.

Wir betrachten zunächst Transformator 1. Auf der Primärseite fließt ein — in beiden Transformatoren bei Hintereinanderschaltung gleicher — Strom J . Dieser setzt sich zusammen aus dem Magnetisierungsstrom $J_{\mu 1}$ und einer durch Eisenverluste bedingten Verlustkomponente $J_{r 1}$. Auf der Sekundärseite tritt nur die dem magnetischen Fluß Φ_1 , d.h. dem Strom $J_{\mu 1}$ entsprechende Spannung E_1 auf, die senkrecht zu $J_{\mu 1}$ steht. Für den zweiten Transformator sind die Eisenverluste kleiner angenommen, infolgedessen stimmt die Richtung von $J_{\mu 2}$ mit der $J_{\mu 1}$ nicht überein. Dann sind aber auch die sekundärseitigen Spannungen bei Gegen-einanderschaltung nicht um 180° , sondern um einen kleineren Betrag phasenverschoben, so daß auch bei gleichen Absolutwerten die Spannungen sich nicht aufheben, sondern eine Restspannung ΔE_n bleibt.

Wie das Vektordiagramm weiter zeigt, sind die Ohmschen Widerstände für diese nicht verschwindende Restspannung ohne Bedeutung. Der an ihnen auftretende Spannungsabfall bei einem Geber mit verschiedenem Eisenverlust der Transformatoren ergibt mit den Werten E_1 und E_2 die Klemmen-

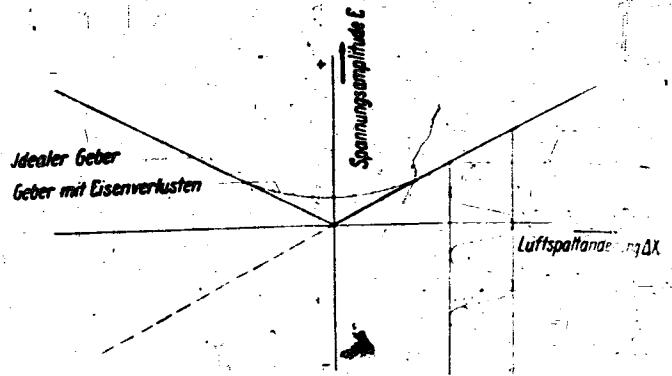


Bild 4. Wegspannungsdiagramm eines Gebers (Meßelement).

teilspannungen U_1 und U_2 , deren Summe schließlich die Gesamtklemmenspannung U ergibt.

Bild 4 zeigt den Verlauf der Sekundärspannung für einen idealen Geber und für einen solchen mit verschiedenen Verlustwerten der Transformatoren. Die negativen x -Werte sind gegenüber den positiven um 180° phasenverschoben. Da die Spannung E an der Sekundärseite im allgemeinen mit Instrumenten gemessen wird, die den Absolutwert anzeigen, wird in Bild 4 die Anzeige in Abhängigkeit von $-x$ nicht nach dem gestrichelten, sondern nach dem voll ausgezogenen Verlauf erfolgen. Bei dem idealen Geber bleibt das Verhältnis elektrische Amplitude bis zu sehr kleinen

x -Werten konstant, während sich dieses Verhältnis bei einem Geber mit verschiedenem Eisenverlust der Transformatoren in der Nähe $x = 0$ stark ändert. Die Beziehung Ankerweg-Anzeige ist dann nicht mehr linear, sondern durch eine Hyperbel gegeben. Obgleich bei den in Frage kommenden kleinen Werten von ΔE die Kennlinie nur in der Nähe des 0-Punktes gekrümmt ist, wird dadurch wesentlich an Verstärkung eingebüßt. Man darf nämlich den Arbeitspunkt auf der Geberkennlinie nicht unter einen bestimmten E -Wert sinken lassen, um nicht in das Gebiet der Krümmungen (bedingt durch die Eisenverluste) zu kommen. Das heißt aber, man könnte eine verhältnismäßig hohe Trägerfrequenzspannung, die durch den gekrümmten Bereich gegeben ist, nur sehr schwach modulieren, da die Verstärkung durch die Amplitude der Trägerfrequenz, nicht durch die der Modulation bestimmt ist.

Die Eisenverluste in den beiden Transformatoren müssen daher gleich gemacht werden. Die Genauigkeit ist gegeben durch die Anforderungen an die Meßgenauigkeit, dann aber auch durch den Klirrfaktor der zur Verfügung stehenden Wechselspannung, da nur die Grundschwingung bzw. die geraden Vielfachen im Geber kompensiert werden, während im Generator durch die eisenhaltigen Überträger vor allem die dritte Oberschwingung der Grundschwingung überlagert ist. Bei dem verwendeten Geber ist die Ausgangsspannung im Bereich von $\pm 10\%$ der Eingangsspannung als linear abhängig vom Weg des Ankers anzusehen. Ein Klirrfaktor von 1% wäre demnach schon antragbar, da er in dem Meßbereich 10% ausmachen würde. Trotzdem sind größere Werte zugelassen, weil hinter dem Geber Siebkreise alle nicht gewünschten Frequenzen fernhalten wie noch gezeigt wird.

Den praktischen Aufbau des Gebers zeigt die Schnittzeichnung Bild 5. Ein Harexkörper a trägt die beiden Köpfe b der Transformatoren mit den Spulen c . Über den Köpfen ist der Doppelanker d angebracht, der durch zwei Kreuzfedergelenke gelagert ist. Mit dem Hebel f ist der Anker zu verstellen. Das Kreuzfedergelenklager ist als Aufsatzstück aus Dural hergestellt. Durch Lösen von vier Schrauben läßt sich das Kopfstück mit Lagern, Anker und Deckplatte g abheben, so daß die Spulen bequem zugänglich sind. Die Anschlußklemmen h sind an beiden Seiten im Halsteil untergebracht.

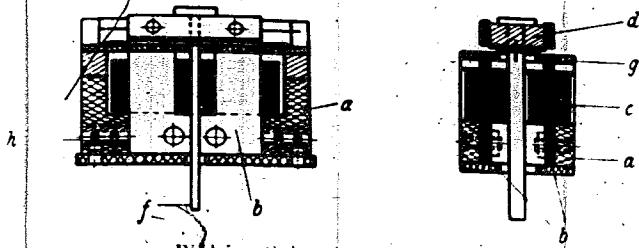


Bild 5. Geber im Schnittbild.

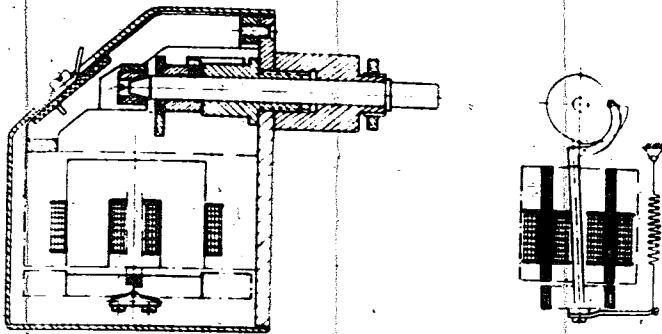


Bild 6. Kompensationsgerät im Schnittbild.

Die Zweideutigkeit der Anzeige nach Bild 4 ist äußerst unerwünscht, da sie den Meßbereich halbiert. Andererseits ist aber auch die Lage des Arbeitspunktes auf der Kennlinie nach Bild 4 bei eingebauten, nicht zugänglichen Gebern schlecht zu verändern. Bei großen Verschiebungen aus der Mittellage und kleinen Wechselamplituden — entsprechend einer geringen Modulation — ist die Verstärkung des Meßwertes verhältnismäßig klein. Um die Modulation zu vergrößern, ist es erwünscht, den Arbeitspunkt verschieben zu können. Dies geschieht durch ein sog. Kompensationsgerät nach Bild 6. Es besteht aus einem zweiten Geber vom gleichen Aufbau wie das Meßelement, aber mit willkürlicher Verstellmöglichkeit des Luftspaltes durch eine Kurvenscheibe mit Skala. Die Sekundärseiten von Geber und Kompensationsgerät sind hintereinandergeschaltet, so daß die Summe der Spannungen gemessen wird. Damit ergeben sich nun verschiedene Vorteile:

1. Durch das Kompensationsgerät läßt sich der Geberspannung eine beliebige Spannung überlagern, womit, wie Bild 7 zeigt, aus der Kennlinie des Gebers eine ganze Kennlinienschar wird. Man kann also den Arbeitspunkt verschieben und damit die Modulation beliebig vergrößern.

2. Das Kompensationsgerät bietet die Möglichkeit, eine Eichung des Gerätes vorzunehmen, ohne daß der Geber zugänglich ist. Die durch eine Verschiebung des Gebers erfolgte Spannungsänderung läßt sich ja durch einen entsprechenden Weg am Kompensationsgerät ausgleichen. So entspricht beispielsweise eine Winkeländerung von etwa 30° am Kompensationsgerät einer Luftspaltänderung von 0,1 mm des Gebers. Diese Zuordnung ist durch die Konstruktion gegeben, also unveränderlich. Wird demnach die Spannung E (bzw. der Strom J am Ausgang des Verstärkers) in Abhängigkeit von der Stellung des Kompensationsgerätes gemessen, (senkrechte Verbindungslinie der Meßpunkte in Bild 7), so ist damit auch das Verhältnis Ankerweg-Oszillographenschrieb gegeben.

3. In irgendeiner bestimmten Mittellage gibt das Kompensationsgerät keine zusätzliche Spannung. Wird das Gerät in diese Stellung gebracht, so entspricht die Anzeige E der Auslenkung des Ankers allein, so daß bei bekannter Kennlinie des Gebers auch dessen Stellung bekannt ist. Umgekehrt läßt sich diese auch so bestimmen, daß die Anzeige mit dem Kompensationsgerät auf den Wert Null gebracht wird, aus der bekannten Kennlinienschar der zugehörige x -Wert bestimmt wird. So ist die tatsächliche Stellung des Ankers im Meßelement festzustellen, auch wenn dieses in zugänglicher Weise eingebaut ist.

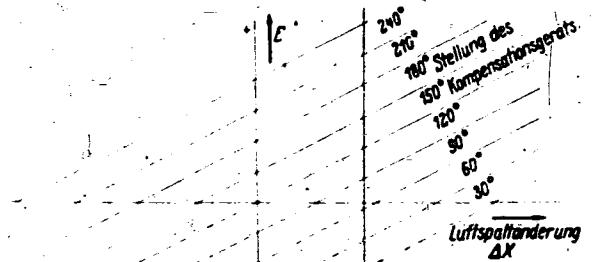


Bild 7. Kennlinienschar eines Gebers mit Kompensationsgerät.

Das beschriebene Gebersystem fand nicht nur im Verschiebungsgeber und Eichgerät, sondern auch in anderen Meßgeräten Verwendung, auf die noch in einem besonderen Abschnitt eingegangen wird.

2. Der Trägerfrequenzgenerator.

Die zum Betrieb der Geber erforderliche Wechselspannung der Trägerfrequenz von 2500 Hz und 20 V wird einem zweistufigen Röhrengenerator entnommen.

Dieser hat zwei Forderungen zu erfüllen, einmal muß er genügend unabhängig von der Belastung durch die Geber sein, und andererseits soll er einen kleinen Klirrfaktor haben. In einem einstufigen Generator sind diese Forderungen schlecht zu vereinen, darum ist der verwendete Generator aus einer Schwingstufe und einer Verstärkerstufe aufgebaut, Bild 8.

Die Schwingröhre besitzt die sog. Elektronenkopplung, die den Vorteil guter Amplitudenkonstanz besitzt. Der abgestimmte Kreis liegt in der Anodenleitung, dadurch ist auch bei Gitterwechselspannung mit sehr starken Oberwellen (Klirrfaktor > 100%) der Anodenstrom noch ziemlich rein. Im Schwingkreis selbst ist die Schwingungsform schließlich sehr sauber und wird von hier aus auf den ebenfalls abgestimmten Gitterkreis der Verstärkerröhre durch eine Kopplungsspule übertragen. Die weiteren Verzerrungen werden ausschließlich durch die Krümmung der Röhrenlinie und den Ausgangsübertrager verursacht, darum ist von den Oberwellen fast ausschließlich die dritte vertreten. Die günstigste Rückkopplung in der Schwingstufe läßt sich durch ein Potentiometer einstellen. Die Ausgangsspannung am Transformator ist durch einen Spannungsteiler am Gitter der Verstärkerröhre zu ändern. Entsprechend den vier Teilen des Vierfachverstärkers sind vier getrennte Ausgangswicklungen vorhanden, die je 5 Anzapfungen zur Abstufung der Spannung und damit der Verstärkung besitzen.

3. Der Verstärker.

Der Verstärker wurde als abgestimmter Verstärker ausgeführt, da die damit verbundene Selektion sowohl die nicht kompensierten Oberwellen als auch die aperiodischen Störungen durch induktive oder kapazitive Beeinflussungen vom Triebwerk bzw. Schaltvorgängen usw. vom Gitter der Endröhre fernhält.

Als Eingangsröhre wurde die EF 12 in Penthodenschaltung mit einem auf die Trägerfrequenz abgestimmten Resonanzkreis als Außenwiderstand gewählt (Bild 8). Als Belastung des Resonanzkreises wirkt der Innenwiderstand der Röhre und der transformatorisch angekoppelte Diodengleichrichter mit Belastungswiderstand. Neben der Pseudodämpfung durch diese Belastung wirkt dämpfend der Ohmsche Widerstand des Kreises. Durch diese Dämpfungsgrößen ist die Resonanzschärfe des abgestimmten Kreises bestimmt. Aus zwei Gründen ist diese nicht so groß zu wählen, wie es vom Standpunkt der Störungsfreiheit und Verstärkung aus erwünscht sein würde.

1. Jeder Resonanzkreis nimmt erst nach einer gewissen Zahl von Perioden, während der er erregt wird, den Größt-

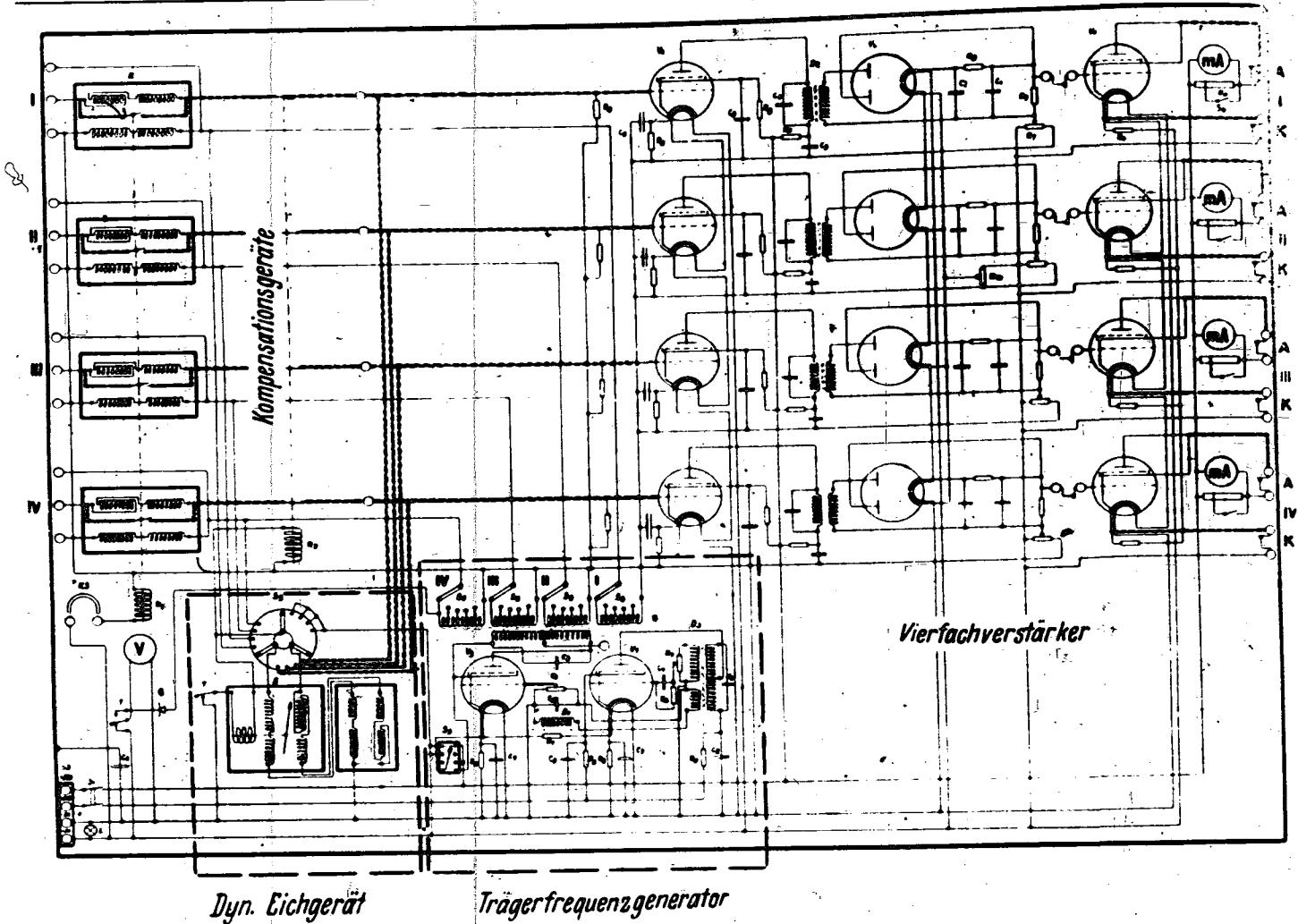


Bild 8. Schaltung des Vierfachverstärkers

ausschlag an. In Bild 9 ist der Zusammenhang nach den Untersuchungen von Koch [2] dargestellt. Mit zunehmender Dämpfung wird die erforderliche Zahl der Perioden zum praktischen Erreichen des Größtausschlages (z. B. 98% des Endwertes) kleiner.

Angenommen, es soll als höchste Modulationsfrequenz 125 Hz übertragen werden, so muß etwa nach 5 Perioden der Trägerfrequenz (Bild 9) der größte Ausschlag erreicht werden, wenn die Modulationskurve in ihren Extremwerten richtig wiedergegeben werden soll. Für den ungünstigsten Fall, daß die Modulation 100% ist, würde nach Bild 9 eine Dämpfung von $D > 0.2$ erforderlich sein. Ein derart stark gedämpfter Resonanzkreis besäße aber nur eine Resonanzüberhöhung von $V \approx \frac{1}{2D} = 2.5$ und käme (abgesehen davon, daß sich damit der Resonanzwiderstand nicht genügend groß halten ließe) als selektives Glied nicht mehr in Frage. Praktisch wird man eine 100proz. Modulation aber nicht erreichen. Bei starker Modulation muß man in Kauf nehmen, daß gewisse Verzerrungen durch eine mit der Modulationsfrequenz zunehmende »Einebnung« der Modulation entstehen. Groß sind diese Fehler nicht, sind aber z. B. bei der Messung von Ein- oder Ausschwingvorgängen zu beachten.

2. Ein weiterer Grund, die Resonanzscharfe der Kreise nicht zu groß zu machen, liegt in der Forderung, daß ein gewisses Frequenzband übertragen werden muß. Dieses ist begrenzt durch die Werte $f_{Tr} + f_{mod}$ und $f_{Tr} - f_{mod}$, wobei f_{Tr} die Trägerfrequenz und f_{mod} die Modulationsfrequenz ist. Bei zu scharfen Resonanzkurven werden wiederum die hohen Frequenzen vernachlässigt. Diese Forderung ist nach Barkhausen [3] mit der unter 1 angeführten identisch.

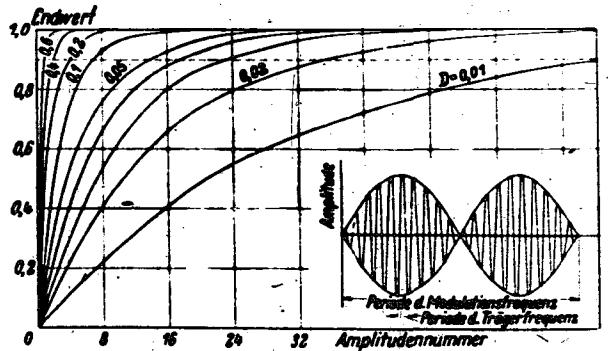


Bild 9. Das Aufschaukeln eines Schwingkreises nach Koch [2].

3. Frequenzschwankungen des Generators haben bei steilen Resonanzkurven natürlich einen viel größeren Einfluß auf die Verstärkung als bei stärker gedämpften Kreisen. Aus diesem Grunde sollte die Dämpfung nicht zu klein sein, doch tritt diese Forderung in ihrer Strenge hinter der gleichen Forderung von 1 zurück.

Bild 10 zeigt eine Resonanzkurve des gesamten Verstärkers, bei der der Anodenstrom der Endröhre über der Frequenz bei konstanter Eingangsspannung aufgetragen ist. In dieser Kurve ist der Einfluß der Röhrenkennlinien enthalten.

Wie aus Bild 8 zu sehen ist, wird die Gleichrichtung vor der Endröhre mit einer Diodenstrecke vorgenommen. Durch eine RC-Anordnung wird der gleichgerichtete Wechselstrom von der Trägerfrequenz gereinigt und dem Gitter

der Endröhre zugeführt. Der Spannungsabfall am Gitterwiderstand bewirkt eine Abnahme der negativen Gittervorspannung und damit eine Zunahme des Anodenstroms. Die konstante negative Gittervorspannung wird durch einen Spannungsteiler an den 24 V des Heizkreises abgegriffen. Zum Schutz der Röhre und etwaiger eingeschalteter Schleifen ist eine Begrenzung des Anodenstroms notwendig. Anodenseitig läßt sich diese schlecht durchführen, daher ist sie gitterseitig vorgesehen. Zwischen Gitter und Kathode liegt dazu die zweite Diodenstrecke der EB 11, die über einen Spannungsteiler negativ vorgespannt ist. Bei Überschreiten dieses Wertes durch die Gitterspannung tritt eine Gitteremission der Röhre und damit praktisch ein Kurzschluß Gitter-Kathode der EL 11 ein, der die Gitterspannung und damit den Anodenstrom begrenzt. Die Diodengleichrichtung hat gegenüber der in einer früheren Schaltung verwendeten Anodengleichrichtung in der Endstufe vor allem den Vorteil, daß eine Siebung der Trägerfrequenz und die Gestaltung eines gewünschten Frequenzbereiches der Meßfrequenzen durch Siebglieder am Gitter mit sehr kleinem Aufwand durchgeführt werden kann, während dieselbe Aufgabe anodenseitig schwer zu lösen ist. Eine Anodenstrombegrenzung ergibt sich bei der Anodengleichrichtung übrigens schon durch den Einsatz des Gitterstroms, der eine starke Dämpfung des Resonanzkreises und damit einen Spannungszusammenbruch bewirkt. Der so erreichbare Anodenstrom ist bei der in Dreipolschaltung verwendeten Röhre EL 11 etwa 30 bis 35 mA.

Der übliche Anschluß einer Schleife an den Verstärker für Schwingungsmessungen ist der im Anodenkreis. Bei der Verwendung des Gerätes im Flugbetrieb muß aber berücksichtigt werden, daß der Oszillograph nicht die nötige Sicherheit gegen Berührung spannungsführender Teile bietet und darum nur mit 40 V Spannungsunterschied von Schleife zu Gehäuse bzw. Schleife-Schleife belastet sein darf. Es ist daher weiter die Möglichkeit vorgesehen, die Schleife in den Kathodenkreis zu legen. Der dadurch bewirkte Spannungsabfall an der Schleife bringt eine geringe Gegenkopplung auf das Gitter, die die Verstärkung kaum merkbar herabsetzt. Der Anschluß erfolgt durch je ein paar Buchsen, von denen eine als Schutzbuchse ausgebildet ist, so daß der nicht belastete Ausgang jeweils kurzgeschlossen ist. Um die Schleife nach beiden Seiten hin aussteuern zu können, erhält sie über einen Vorwiderstand eine dauernde Vorbelastung von 12 mA, die dem Anodenstrom entgegengesetzt ist. D. h. bei einer im Anodenkreis angezeigten Stromstärke von 12 mA befindet sich die Schleife gerade in Mittellage. Bei der Verwendung von Ausgangsübertragern kann nur der Anschluß in der Anodenleitung benutzt werden. Ausgangsübertrager sind zweckmäßig, wenn tiefe Frequenzen (z. B. Eigenfrequenzen der Meßgeräte) und langsame Verschiebungen des Ankers in den Gebern nicht mit übertragen werden sollen. Außerdem lassen sich durch die bessere Anpassung der Schleife an die Endröhre erheblich größere Verstärkungen erreichen (um das Hundertfache größer). Demgegenüber steht der Nachteil, daß die tieferen Meßfrequenzen sehr schlecht übertragen werden, denn es ist nicht möglich, den gleichstrombelasteten Übertrager mit der notwendigen Primärinduktivität in brauchbaren Abmessungen herzustellen. Eine für die meisten Schwingungsmessungen ausreichende Anhebung läßt sich dadurch erreichen, daß die Primärseite des Transformators durch Parallelschalten eines Kondensators abgestimmt wird. Der so entstehende Resonanzkreis (Bild 11) muß genügend gedämpft werden, damit die Einschwingvorgänge das Meßergebnis nicht zu stark beeinflussen. Für alle Vorgänge mit beschleunigter oder verzögerter Drehzahl, z. B. Anfahrvorgänge, durchlaufende Erregung bei Schwingungs- insbesondere Flugschwingungsversuchen ist zu beachten, daß der Ausgang von der Drehzahlbeschleunigung abhängig ist, und daß die scheinbare Resonanzfrequenz und damit das Verhältnis von Eingangs- und Ausgangsspannung sich verschiebt, je nachdem ob der Drehzahlbereich von unten nach oben oder von oben nach unten durchlaufen wird. (Dies ist bekanntlich auch bei den

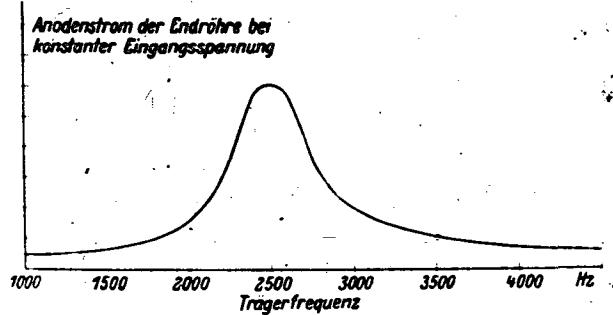


Bild 10. Resonanzkurve des Verstärkers.

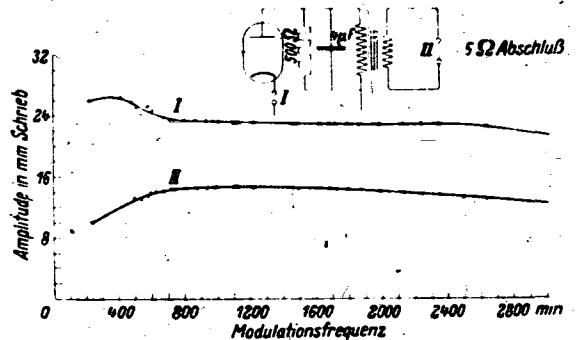


Bild 11. Die Frequenzkurve mit abgestimmtem Ausgangsübertrager.

auf seismographischem Prinzip arbeitenden Schwingungsmessern mehr oder weniger stark der Fall, worauf bei Auswertung der Resonanzkurven im Flugschwingungsversuch zu achten ist.) Weiter gelten auch hier die im Zusammenhang mit Bild 9 angestellten Überlegungen über Einschwingvorgänge. Die Ausbildung weiterer Frequenzkorrekturen richtet sich nach dem gewünschten Meßbereich und läßt sich durch Kondensator- oder Spulenketten zweckmäßig im Gitterkreis erhalten. Schwer zu übersehen sind die Phasenverhältnisse, die sich aber durch eine entsprechende Eichung in jedem Einzelfall darstellen lassen.

C. Aufbau.

1. Die Dimensionierung.

Beim Entwurf des Gerätes standen zwei Wege frei:

- den Stromverbrauch so klein wie möglich zu halten und dafür Einschränkungen in den Anwendungsmöglichkeiten in Kauf zu nehmen.
- Die Frage der Stromversorgung in ihrer Bedeutung hinter die der Vielseitigkeit zurücktreten zu lassen.

Der Leistungsbedarf einer Oszillographenschleife ist gering. Im Vergleich dazu ist die aufzuwendende Leistung für den Verstärker erheblich. Sie ist davon abhängig, ob die Oszillographenschleifen direkt im Anodenkreis der Endröhre liegen, oder ob grundsätzlich ein Übertrager verwendet werden kann. Im ersteren Fall ist der minimale Anodenstrombedarf durch die Schleifen gegeben. Beim Luftfahrtoszillograph ist die Belastung mit ± 12 mA zulässig. Um diesen Bereich auszunutzen, ist ein dauernder Anodenruhestrom von mindestens 12 mA — wegen der Anlaufkrümmung der Röhrenlinie praktisch 15 mA — erforderlich. Der durchschnittliche Verbrauch der Endstufen ist daher mit $4 \cdot 15 = 60$ mA anzusetzen. Für die Eingangsrohren kommen noch etwa 10 bis 15 mA hinzu, so daß der Ruhestrombedarf 70 bis 75 mA ist. Ein solcher Stromverbrauch ist aus Anodenbatterien schlecht zu entnehmen, da z. B. bei Eichung ein mehrstündiger Betrieb der Anlage keine Seltenheit ist. Wird dagegen ein Übertragerausgang zugelassen, so ist durch Übertrager eine günstige Anpassung der Schleifen an den Verstärker ausgang möglich, und ein Anodenstrom von wenigen Milliampère ist vollkommen ausreichend. Durch Wahl geeigneter Röhren läßt sich in diesem Fall eine Einschränkung des Anodenstrombedarfs auf 10 bis 20 mA erreichen, die

ohne weiteres einer Batterie entnommen werden können. Auch der Heizleistungsbedarf ließe sich mit geeigneten Röhren klein halten. Der Aufwand an Schälmitteln und damit die Größe des Geräts würde in beiden Ausführungen etwa gleich werden.

Die Wahl der einen oder anderen Ausführung ist durch den Verwendungszweck bestimmt. In dem beschriebenen Gerät wurde auf den erforderlichen Strombedarf zunächst nur soweit Rücksicht genommen, als dadurch keine Einschränkungen in den übrigen Leistungen erforderlich wurden. Es ist daraufhin abgestellt worden, daß es an das Bordnetz von 24 V angeschlossen werden kann. Als Röhren fanden indirekt geheizte Verwendung, die unempfindlich gegen Heizspannungsschwankungen sind. In den Stahlröhren als Vorrohre steht außerdem eine gegen äußere Beeinflussungen (Röhrenklingen) unempfindliche Röhre zur Verfügung. Als Endröhre hat sich die EL 11 zweckmäßig erwiesen, da sie eine genügende Steilheit auch in Triodenschaltung hat. Die entsprechenden Röhren sind hintereinander geschaltet, so daß sich eine erforderliche Heizspannung von $3 \cdot 6,3 = 25,2 \text{ V}$ ergibt. Im Generator fand eine C-Röhre mit 24 V sowie eine weitere E-Röhre mit Vorwiderstand Verwendung.

Der Gesamtbedarf an Heizstrom belauft sich auf 1,7 A.

Der Anodenstrom wird einem Gleichstrom-Gleichstrom-24/400-V-Umformer entnommen. Nach Siebung durch eine Drossel wird er über zwei Eisenwasserstoffwiderstände in zwei Strecken mit Stabilisatoren aufgeteilt, die je 280 V und 120 mA abgeben können. An jede Strecke kann ein Gerät angeschlossen werden.

2. Der Aufbau.

Das Gerät sollte in seinen Ausmaßen soweit wie möglich beschränkt werden, ohne dadurch die Herstellung und evtl. Reparaturen unnötig zu erschweren. Die Austauschbarkeit der wesentlichsten Bauteile mußte gewährleistet sein. Dadurch ergaben sich folgende Abmaße:

Verstärker: 440 · 220 · 180 mm 11 kg (ohne Aufhängung)
Umformer: 380 · 250 · 310 mm 15 kg (große Ausführung für zwei Verstärker).

Bild 12 zeigt die Ansicht der Frontplatte mit den Bedienungsteilen. Die Buchsenreihe links ist der Eingang zum Verstärker, an je drei Buchsen wird ein Geber angeschlossen. Die Buchsen rechts werden wahlweise für den Ausgang in Anoden- oder Kathodenleitung benutzt. Ein besonderer direkter Gitteranschluß ist in den einzelnen Buchsen am unteren Rand gegeben. Auf der Rückseite des Kastens lassen sich durch je ein Buchsenpaar Siebglieder in die Gitterleitung der Endröhre einschalten. Die Kennzeichnung der Anschlüsse erfolgt allgemein durch Farben.

Die Stromzuführung erfolgt rechts unten durch einen Sechsfachstecker. Durch einen Schalter darüber läßt sich die Anodenspannung abschalten. Darüber befindet sich die durch einen Schraubenzieher von außen zugängliche Regelung der Wechselfspannung, die mit \approx gekennzeichnet ist und dem Potentiometer R_7 am Gitter der CL 4 im Schaltbild entspricht. Zur Einstellung wird der mit \approx bezeichnete Tastknopf gedrückt und das Potentiometer so lange verstellt, bis der Zeiger eine rote Marke auf dem Anzeigement I deckt.

Die weiteren Instrumente sind die in den Anodenkreisen liegenden Milliampereometer jeder Stufe mit dem Umschalter für den 15-mA- und 30-mA-Meßbereich. Darunter jeweils das Kompensationsgerät mit Stufenschaltern für die Wahl der Arbeitsspannung.

Der innere Aufbau des Gerätes ist gekennzeichnet durch die Unterteilung in fünf Abschnitte, von denen vier je einen Verstärker aufnehmen und der fünfte den Röhrengenerator enthält. Die Anordnung der wichtigsten Bauelemente zeigt Bild 13.

Der Umformer ist in einem besonderen Kasten (Bild 12) mit Siebkreis und Stabilisator zusammengefaßt. Heiz- und Anodenspannung werden durch einen Sechsfachstecker abgenommen und dem Gerät zugeführt. Statt der Kippschalter

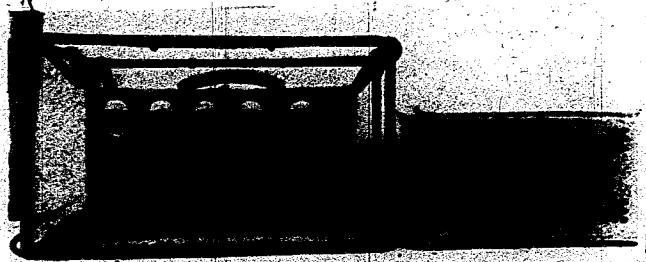


Bild 12. Lichtbild des Verstärkers mit Generator.



Bild 13. Lichtbild des inneren Aufbaus des Verstärkers.

sind Überstromautomaten verwendet, um den Sicherheitsforderungen beim Anschluß an das Bordnetz zu genügen.

Beide Geräte sind mit Aufhängeösen versehen, damit sie elastisch aufgehängt werden können.

D. Betrieb.

1. Die Eichung.

Die Eichung des Verstärkers kann statisch oder dynamisch erfolgen. In beiden Fällen ist es zweckmäßig, im Betriebszustand mit angeschlossenem Oszillographen zu eichen. Die statische Eichung geschieht folgendermaßen:

Das Kompensationsgerät wird stufenweise um je einige Teilstriche weitergedreht und bei jeder Stellung ein Schrieb mit dem Oszillograph gemacht. Die Zahl der Teilstriche und damit die Größe der Stufen richtet sich nach dem Meßbereich und der Stellung des Stufenschalters. Eine Kontrolle der Eichung kann dabei durch das Milliampereometer erfolgen. Die Stellung des Kompensationsgerätes läßt sich einer solchen des angeschlossenen Gebers eindeutig zuordnen. Ist diese einmal durch Messung erhalten, so ist durch die Eichung sofort das Verhältnis: Weg am Geber—Ausschlag der Schleife gegeben.

Die statische Eichung läßt sich in der beschriebenen Form nur durchführen, wenn der Ausgang unmittelbar auf die Schleife erfolgt. Ist ein Ausgangsübertrager eingeschaltet, so ist die Oszillographenschleife in die Kathodenleitung zu legen und die Messung mit eingeschaltetem Übertrager, der sekundär mit dem Widerstand der Schleife abgeschlossen sein muß, durchzuführen. Zu dieser statischen Eichung ist dann allerdings eine weitere, einmalige, Eichung notwendig, um den Unterschied zwischen der statischen und dynamischen Kennlinie der Röhre und den Frequenzgang des Übertragers zu erfassen.

Eine dynamische Eichung läßt sich auf zweierlei Weise durchführen. Am Stand und im Laboratorium wird ein bekannter Geber durch einen Exzenterantrieb periodisch mit veränderlicher Drehzahl ausgelenkt und dieser Geber an die verschiedenen Verstärker nacheinander angeschlossen. Auf diese Weise läßt sich das Verhältnis »Weg am Geber—Schrieb auf dem Oszillographenpapier« unmittelbar in Abhängigkeit von der Frequenz erhalten.

Diese, doch mit größerem Aufwand verbundene Eichung wird im praktischen Versuchsbetrieb ersetzt durch ein ab-

gekürzte Verfahren mit dem eingebauten Eichgerät. Es besteht aus einem, als schwingungsfähiges System geringer Dämpfung ausgebildeten Geber, der durch einen Magneten auf eine durch eine Kurvenscheibe einstellbare Anfangsamplitude ausgelenkt und dann freigelassen wird, Bild 14. Die Ausschwingkurve wird mit dem Oszillographen aufgezeichnet und dient als Eichkurve. Die Eichung geschieht durch Drehen des Eichschalters auf die einzelnen Verstärker und jeweiliges Drücken und Wiederloslassen der Eich Taste, ist also außerordentlich schnell auch zwischen den einzelnen Messungen wiederholt durchzuführen. Bild 15 zeigt ein Beispiel für eine solche Ausschwingkurve. Der Ausgangswert wird durch Extrapolation der Ausschwingkurve gewonnen, da die Amplituden in den ersten Perioden durch den Einschwingvorgang beeinflusst werden.

2. Der Betrieb.

Die Betriebsweise ergibt sich aus den vorhergehenden Ausführungen. Der Geber wird durch drei Leitungen mit den Eingangsklemmen des Verstärkers verbunden. Mit dem Stufenschalter wird die gewünschte Empfindlichkeit eingestellt und der Arbeitspunkt mit dem Kompensationsgerät so gewählt, daß die Anzeige des Milliampèremeters etwa 12 bis 15 mA beträgt.

Da die Gitterspannungen von der Heizbatterie abgegriffen werden, ergeben sich durch die Spannungsänderungen im Bordnetz — falls der Verstärker daran angeschlossen ist — kleine Verschiebungen des Arbeitspunktes, die bei der Messung von Verschiebungen störend wirken können. In diesen Fällen empfiehlt es sich, eine eigene Batterie für die Meßanlage zu verwenden. Bei Schwingungsmessungen mit Ausgangsübertrager sind diese Schwankungen ohne Bedeutung, da sie die Verstärkung nicht beeinflussen.

Nach dem Einschalten treten zunächst — wie bei jedem Röhrengerät — noch kleinere Änderungen in Anodenstromanzeige und Verstärkung ein. Bei längeren Messungen wird daher der Verstärker etwa 10 min vor Beginn der Aufnahme eingeschaltet. Bild 16 zeigt zwei Beispiele für Stand- und Flugmessungen.

E. Zusatzgeräte.

Der Geber zum Trägerfrequenzgerät wurde schon beschrieben. Er bildet das Meßelement für eine Anzahl von Schwingungsmessern, die kurz beschrieben werden sollen. Es sind:

1. Verschiebungsmeßgerät,
2. Ruderschwingungsmeßgerät,

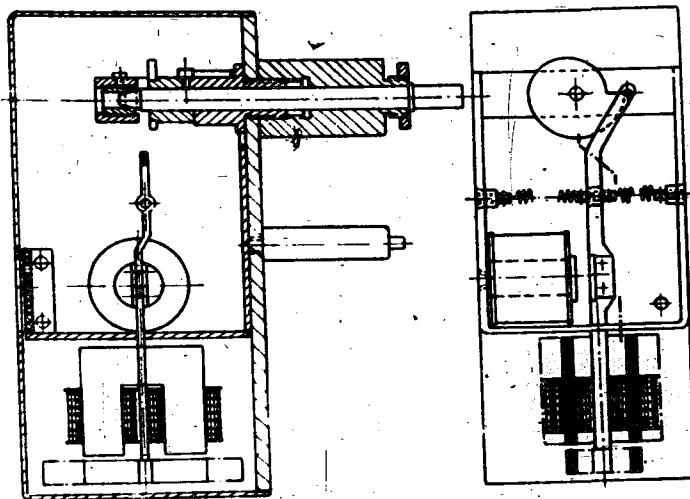


Bild 14. Dynamisches Eichgerät im Schnittbild.

3. Drehschwingungsmeßgerät,
4. Schlagschwingungsmeßgerät,
5. Zusatzgerät zum Anschluß weiterer Meßstellen.

Als Verschiebungsmeßgerät dient der beschriebene Geber, der zum Schutz gegen Beschädigungen mit einer Metallkappe versehen wird. Dieses Gerät kann zum Messen beliebiger Relativbewegungen zweier Punkte benutzt werden; z. B. Schwingungsmessung an den Gummilagerungskörpern von elastisch aufgehängten Motoren, an Steuerstäben, Instrumenten usw. Bild 17 zeigt den Verschiebungsmesser im Lichtbild. Er ist verhältnismäßig groß gehalten, da für die vorgesehenen Messungen keine besonders kleinen Meßgeräte notwendig waren. Dafür wurde bei der Konstruktion auf einfache Herstellung und Wartung sowie vielseitige Verwendbarkeit großer Wert gelegt.

Das Ruderschwingungsmeßgerät dient zur Messung der Relativedrehungen der Ruder gegen Flosse oder einen anderen festen Punkt. Es wurde für die Anforderungen des Flugschwingungsversuches entwickelt. Bild 18 zeigt das Gerät im Lichtbild. Das Meßelement ist über eine Reibkupplung mit dem Hebel verbunden, der an das Ruder angeschlossen wird. Auf diese Weise können noch sehr kleine Ruderbewegungen gemessen werden, ohne daß die Steuerungsfähigkeit beeinträchtigt wird. Die Verkleidung ist bei

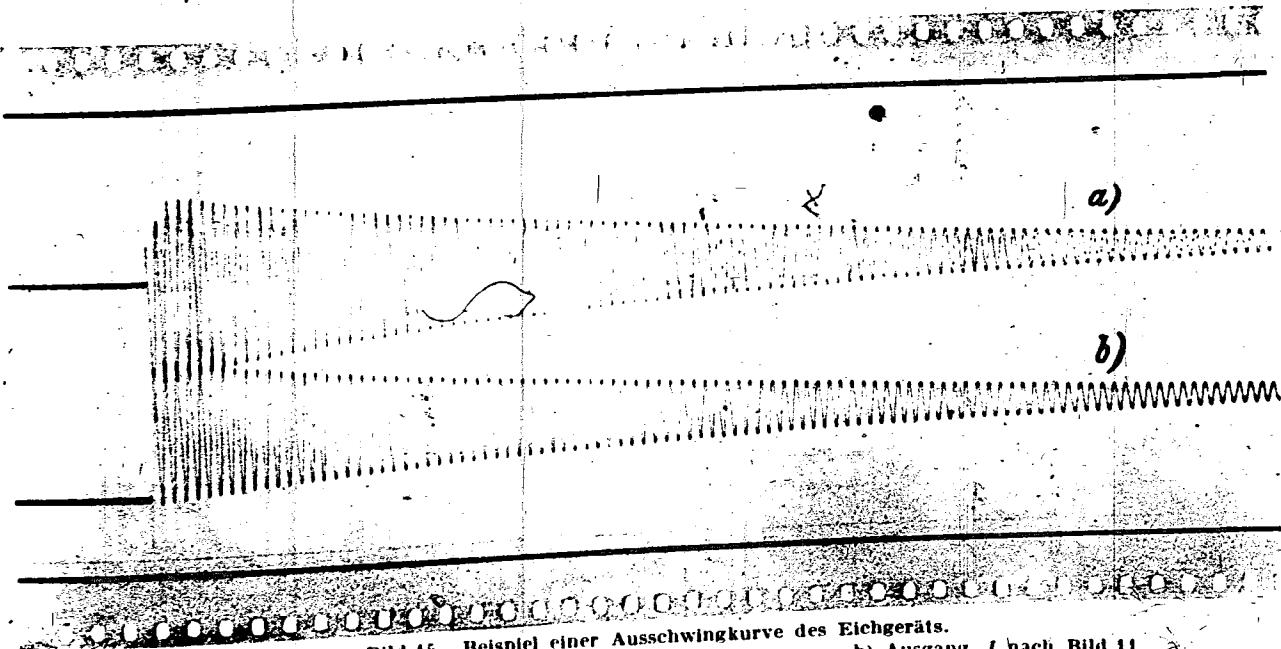


Bild 15. Beispiel einer Ausschwingkurve des Eichgeräts.
 a) Ausgang // nach Bild 11.
 b) Ausgang / nach Bild 11.

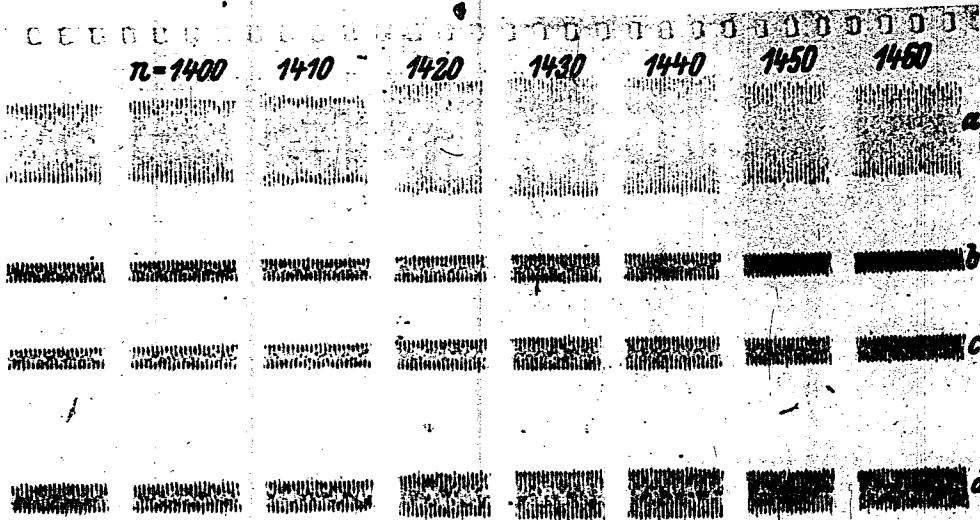
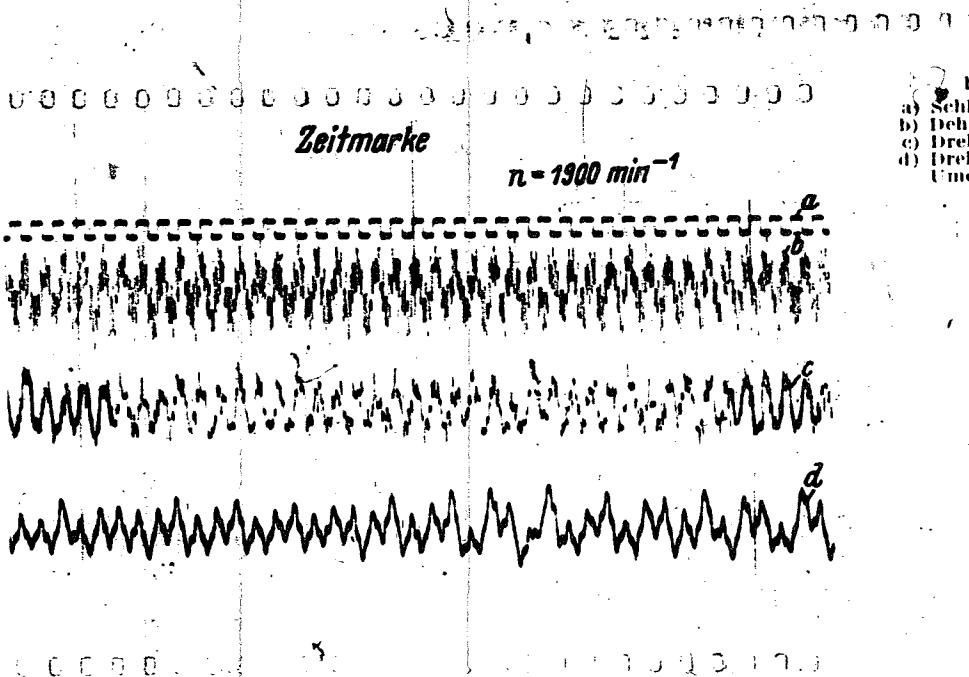


Bild 16. Beispiele für Schwingungsschriebe.
 a) bei Unwuchterregung am Schrotel,
 b) Umdrehungsmarke,
 c) Dehnung am Lagerungskörper,
 d) Drehschwingung des Motors um Hochachse.



b) an einem Triebwerk im Fluge.
 a) Schlagschwingung an der Kanzel,
 b) Dehnung am Lagerungskörper,
 c) Drehschwingung des Motors um Hochachse,
 d) Drehschwingung des Motors um Querachse, Umdrehungsmarke.

diesem Gerät stromlinienförmig, damit es ohne weiteren Umbau auf der Flosse befestigt und zu Flugversuchen benutzt werden kann.

Das Drehschwingungsmeßgerät ist ebenfalls unter Verwendung des gleichen Meßelementes hergestellt. Der Aufbau ist einfach, Bild 19. An den Anker des Gebers sind beiderseitig Kupferscheiben angeschlossen, die im Felde eines permanenten Magneten schwingen. Sie bilden das erforderliche Trägheitsmoment des Meßgerätes und dienen gleichzeitig als Dämpfungsscheiben. Die Federung wird durch die Steifigkeit der Kreuzfederung bewirkt. Die Eigenfrequenz der Geräte beträgt 6 Hz. Die Dämpfung D mit den Bezeichnungen der Schwingungsgleichung

ist

$$a \cdot \ddot{q} + b \cdot \dot{q} + c \cdot q = 0$$

$$D = \frac{b}{2 \cdot \sqrt{a \cdot c}} = 0,25.$$

Der Schwerpunkt des Ankers mit den Scheiben liegt im Kreuzfedergelenk, so daß der Schwingungsmesser gegen Translationsbewegungen unempfindlich ist.

Das Schlagschwingungsmeßgerät ist ebenfalls auf dem seismographischen Prinzip aufgebaut. Durch die symmetrische Anordnung von zwei Massen, die durch eine Koppelfeder verbunden sind, wird erreicht, daß das Meßgerät nur auf translatorische Bewegungen, nicht auf Dreh-

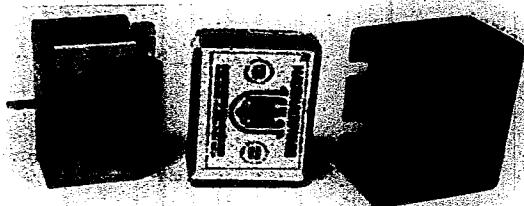


Bild 17. Lichtbild des Verschiebungsgebers.

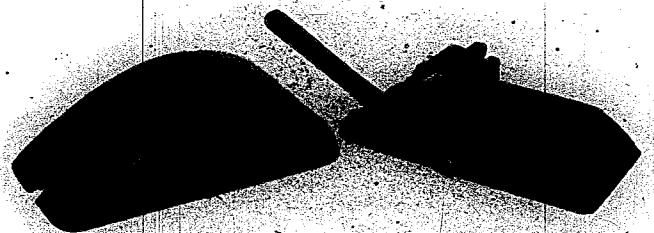


Bild 18. Lichtbild des Ruderschwingungsgebers.



Bild 19. Lichtbild des Drehschwingungsmeßgeräts.

bewegungen anspricht. Durch eine Feder ist die Einstellung der Mittellage des Ankers möglich, die auch bei geschlossenen Gehäuse durch ein kleines Fenster überwacht werden kann. Es ist so möglich, auch bei Messungen mit geneigtem Schwingungsschreiber die 0-Lage einzustellen, was für Bahnneigungsflüge z. B. bei Flugschwingungsversuchen von Bedeutung ist. Die Eigenfrequenz des Schwingungsmessers beträgt etwa 3 Hz, die Dämpfung — die durch zwei Doppelmagnete hervorgerufen wird — ist $D = 0,30$.

Alle Meßgeräte sind so eingerichtet, daß sie an das Trägerfrequenzgerät einheitlich angeschlossen werden können.

Zusatzgerät zum Trägerfrequenzverstärker. Als wesentlicher Vorteil des beschriebenen Verstärkers wurde angegeben, daß der Arbeitspunkt eines Gerätes, das nach dem Einbau nicht mehr zugänglich ist und durch statische Verschiebungen seine Lage verändert hat, durch ein Kompensationsgerät verschoben werden kann. Eine solche Kompensation kann auch während der Messung erforderlich werden, so z. B. bei der Messung der Schwingungen an den Gummilagerungskörpern eines Motors. Durch den Schraubenzug können an dieser Stelle statische Verschiebungen erfolgen, die wesentlich größer sind als die zu messenden Schwingungen. Diese Verschiebungen können — unter gleichzeitiger Messung ihres Absolutwertes — durch das Kompensationsgerät ausgeglichen werden. Dieses ist daher bei derartigen Messungen nicht zu umgehen. Andererseits ist die Umschaltung verschiedener Geber auf das Trägerfrequenzgerät nicht mehr ohne weiteres möglich, da dieses ja nur vier Kompensationsgeräte besitzt, die nach dem Umschalten nachgestellt werden müßten. Um dies zu vermeiden, wird für den Anschluß weiterer Meßstellen ein Zusatzkasten mit weiteren elf Kompensationsgeräten verwendet, die durch einen Umschalter in vier Gruppen auf den Verstärker zu schalten sind. Es können so 15 Meßpunkte nacheinander auf den zugehörigen Kompensationsgeräten eingestellt werden. Danach lassen sich durch Drehen des Umschalters alle Messungen an diesen Stellen in wenigen Sekunden durchführen. Eine Ausführung für eine frühere Bauart des Verstärkers ohne dynamisches Eichgerät zeigt Bild 20 im Lichtbild.



Bild 20. Vierfachverstärker mit Zusatzgerät zum Anschluß von weiteren Meßstellen.

F. Zusammenfassung.

Bei der Wahl einer geeigneten Anlage zur Schwingungsmessung an Flugzeugen, insbesondere beim Flugschwingungsversuch, erweist sich die Fernübertragung der Meßwerte und gemeinsame Aufzeichnung auf einen Oszillographen als zweckmäßig. Den Anforderungen geringer Störanfälligkeit genügt das Trägerfrequenzverfahren mit Gebern auf dem gegeninduktiven Prinzip und abgestimmtem Röhrenverstärker. Durch Verbindung mehrerer Verstärker in einem Gerät lassen sich gleichzeitig vier beliebige Meßvorgänge auf einem Oszillographen aufzeichnen; bei Wahl eines Zusatzgerätes kann die Anzahl der Meßstellen durch Umschalter vergrößert werden. Wesentlich ist die Möglichkeit, eine Eichung, die den Verstärker einschließlich Oszillographenschleife umfaßt, jederzeit in die Messung einschieben zu können. Das Gerät benötigt nur eine Spannung von 24 bis 27 V, die Anodenspannung wird durch einen Umformer gewonnen. An das Trägerfrequenzgerät lassen sich dafür entwickelte Schwingungs- oder Verschiebungsmeßgeräte anschließen.

Schrifttum.

- [1] Zahlreiche Beispiele sind zu finden in:
1. Paul Pflüger, Elektr. Messung mechanischer Größen. Verlag Springer 1940.
 2. ATM V 132—4. Elektr. Druckmessung durch Änderung einer Induktivität.
 3. ATM V 171—2. Erschütterungsmessungen an Maschinen.
 4. J. Meister, Neue Schwingungsmeßgeräte für den Betrieb. Maschinenbau Bd. 19 (1940) Nr. 4.
- [2] W. Koch, Das Aufschaukeln im Resonanzfalle infolge des Einschwingungsvorganges. Ing. Archiv (1935), S. 253 ff.
- [3] H. Barkhausen, Elektronenröhren — Gleichrichter-Empfänger. Bd. IV (S. 140).

Beulfestigkeit von versteiften Zylinderschalen mit Schub und Innendruck*).

Von A. Kromm.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Institut für Festigkeit, Berlin-Adlershof.

In der Arbeit wird die Beulfestigkeit von zylindrischen Schalen mit Schub und Innendruck, die durch Längsrippen in Plattenstreifen von kleinem Öffnungswinkel unterteilt sind, untersucht. Dabei genügt es, näherungsweise die kritischen Spannungen für einen Plattenstreifen mit frei aufgelagerten Rändern zu finden. Die Knickbedingung wird mit Hilfe eines Ritz-Ansatzes aufgestellt und für die praktisch wichtigen Sonderfälle ausgewertet.

Gliederung.

- I. Einleitung.
- II. Verformung des Plattenstreifens vor dem Ausbeulen infolge des Innendruckes.
- III. Aufstellung der Knickbedingung.
- IV. Auswertung der Knickbedingung.
- V. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

A. Stellung der Aufgabe.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Beulproblem für die Beplankung von Höhenkammern, die unter Innendruck stehen und außerdem durch Schubkräfte belastet sind. Dabei interessiert insbesondere der mehr oder weniger zylindrische Teil der Kammer, dessen Beplankung durch Längsrippen in schmale Schalelemente von kleinem Öffnungswinkel (schwach gekrümmte Plattenstreifen) unterteilt ist, Bild 1. Es ergibt sich somit die Aufgabe, die Stabilitätsgrenzesolcher Plattenstreifen, die durch Schubkräfte und Innendruck belastet sind, zu bestimmen. Da die Länge der Plattenstreifen groß ist gegenüber ihrer abgewickelten Breite, so werden wir sie in der Rechnung als unendlich lang betrachten. Außerdem werden wir näherungsweise annehmen, daß sie an den Längsrändern momentenfrei gelagert sind. Mit diesen beiden Annahmen befinden wir uns bei der Bestimmung der Stabilitätsgrenze auf der sicheren Seite.

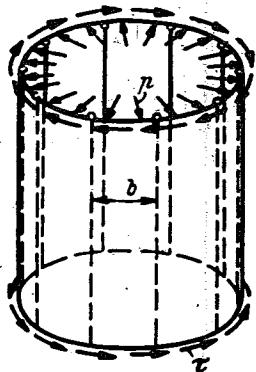


Bild 1. Zylinderschale mit Schub und Innendruck.

Die vorliegende Arbeit schließt sich an zwei frühere Arbeiten^{1), 2)} über die Knickfestigkeit von gekrümmten Plattenstreifen mit Schub- und Längskräften an. Sie unterscheidet sich von den früheren Arbeiten dadurch, daß hier an Stelle der Längskräfte der Innendruck in der Höhenkammer tritt, der in erster Linie eine Blechspannung σ_x in der Umfangsrichtung hervorruft. Die auf die Abschlußwände der Höhenkammer wirkenden Längskräfte (in Richtung der Zylindererzeugenden) werden im wesentlichen nicht durch die Blechhaut, sondern durch die Längsrippen (entsprechend dem Querschnittsverhältnis von Haut und Rippen) übertragen. Bei unendlich starren Rippen entsteht in der Blechhaut nur infolge der Querkontraktion eine Längsspannung

$\sigma_x = \nu \sigma_y$. Mit abnehmender Rippensteifigkeit wächst die Längsspannung der Blechhaut an. Bei einer unversteiften kreiszylindrischen Schale hat sie den Wert $\sigma_x = \sigma_y/2$. Durch die unter II behandelte Vorverformung werden die Verhältnisse noch komplizierter, und in allerdings ungewöhnlichen Fällen kann auch $\sigma_x/\sigma_y > 1/2$ sein. Da aber die Längsspannung wie bei den unversteiften Zylinderschalen³⁾ nur einen geringen Einfluß auf die kritische Schubspannung hat, so wird hier $\sigma_x = \sigma_y/2$ und, um interpolieren zu können, $\sigma_x = 0$ angenommen.

Bei der Aufstellung der Knickbedingung müssen wir von der Gleichgewichtsgestalt des Plattenstreifens vor dem Ausbeulen ausgehen. Diese kann sich aber infolge des Innendruckes von der Gestalt des unbelasteten Plattenstreifens dann wesentlich unterscheiden, wenn der Plattenstreifen ohne Innendruck sehr schwach gekrümmt oder gar eben ist. Da bekanntlich^{1), 2)} die Gestalt (Krümmung) des Plattenstreifens einen großen Einfluß auf seine Knickfestigkeit hat, so ergibt sich als erste Aufgabe die Verformung des Plattenstreifens infolge des Innendruckes vor dem Ausbeulen zu bestimmen. Die Verformung infolge der Schubbelastung ist sehr gering und braucht nicht untersucht zu werden.

B. Bezeichnungen und Abkürzungen.

(s. Bild 1)

- t Wanddicke des Plattenstreifens.
- b abgewinkelte Breite des Plattenstreifens.
- r Krümmungsradius des Plattenstreifens ohne und mit Innendruck.
- r_0 Krümmung des Plattenstreifens ohne und mit Innendruck.
- x_0 Krümmung des Plattenstreifens ohne und mit Innendruck.
- x Krümmung des Plattenstreifens ohne und mit Innendruck.
- p Innendruck je Flächeneinheit.
- σ_x Längsspannung (in Richtung der Erzeugenden), als Zug positiv.
- σ_y Ringspannung, als Zug positiv.
- τ Schubspannung.
- E Elastizitätsmodul.
- ν Querkontraktionszahl.

$$K = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad \text{Biegesteifigkeit der Platte.}$$

$$D = \frac{E t}{1 - \nu^2} \quad \text{Dehnungssteifigkeit der Platte.}$$

$$\sigma^* = \frac{\pi^2 E t^2}{3 (1 - \nu^2) b^2} \quad \text{Bezugsspannung.}$$

$$k_p = \frac{p}{E} (1 - \nu^2)^{1/2} \frac{b^4}{t^3} \quad \text{Kennzahl für den Innendruck.}$$

$$\omega_0 = \frac{12 (1 - \nu^2) b^4}{\pi^4 r_0^2 t^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Formkennzahl des Plattenstreifens} \\ \text{ohne und mit Innendruck.} \end{array} \right\}$$

$$\omega = \frac{12 (1 - \nu^2) b^4}{\pi^4 r^2 t^2}$$

II. Verformung des Plattenstreifens infolge des Innendruckes vor dem Ausbeulen.

Wir betrachten einen schwach gekrümmten Plattenstreifen, Bild 2, mit radial nach außen gerichteter gleich-

¹⁾ s. W. Flügge, Die Stabilität der Kreiszylinderschale. *Intr. Arch.* Bd. 13 (1932), S. 463.

²⁾ A 22 42.

³⁾ A. Kromm, Die Stabilitätsgrenze eines gekrümmten Plattenstreifens bei Beanspruchung durch Schub- und Längskräfte. *Luftf.-Forsch.* Bd. 15 (1938), S. 517.

⁴⁾ A. Kromm, Knickfestigkeit gekrümmter Plattenstreifen unter Schub- und Druckkräften. *Jahrbuch 1940 der deutschen Luftfahrtforschung*, S. I 832.

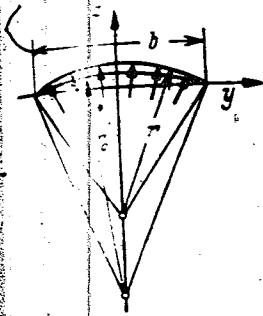


Bild 2. Verformung eines schwach gekrümmten Plattenstreifens infolge einer gleichmäßig verteilten Flächenbelastung.

mäßig verteilter Flächenbelastung p und mit einer momentenfreien Auflagerung an den Längsrändern. Stärker gekrümmte Plattenstreifen erleiden infolge des Innendruckes nur eine geringe Verformung, und sind deswegen hier ohne Interesse. Die Krümmung der Platte vor der Belastung mit Innendruck sei $\text{const} = -\alpha_0 = -1/r_0$. Dann ist die Profilform des unbelasteten Plattenstreifens bei schwacher Krümmung ($W_{yy} \approx -\alpha_0$) gegeben durch die Funktion

$$W = \frac{\alpha_0}{2} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \quad (1)$$

Die Profilform nach der Belastung mit Innendruck können wir, wie es bei dünnen Schalen üblich ist, unter Vernachlässigung der Biegesteifigkeit, d. h. nach der Membrantheorie, ermitteln. Die Verschiebungen der Plattenmittelfläche infolge der Flächenbelastung p werden in die Komponenten $\bar{u}_x, \bar{v}_y, \bar{w}$ in den Richtungen x, y, z zerlegt. Bei schwach gekrümmten Plattenstreifen wird die Ausbiegung \bar{w} von derselben Größenordnung sein wie W . Deswegen müssen in den Verzerrungsgrößen quadratische Glieder in \bar{w} berücksichtigt werden⁴⁾.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}_x &= \bar{u}_x \\ \bar{\epsilon}_y &= \bar{v}_y + \alpha_0 \bar{w} + \frac{1}{2} \bar{w}_y^2 \\ \bar{\gamma}_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

In diesen Gleichungen ist vorweggenommen worden, daß beim unendlich langen Plattenstreifen, der auch nach der Belastung mit Innendruck zylindrisch bleibt, \bar{v} und \bar{w} von x unabhängig sind und daß keine Schubverzerrungen entstehen.

Der Spannungszustand des Plattenstreifens ist gegeben durch:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_x + \nu \bar{\epsilon}_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\epsilon}_y + \nu \bar{\epsilon}_x), \quad \tau = 0 \quad (3)$$

Wir untersuchen parallel die beiden Fälle:

$$\text{a) } \sigma_x = 0 \quad \text{b) } \sigma_x = \frac{1}{2} \sigma_y \quad (4)$$

dann ist

$$\text{a) } \bar{\epsilon}_x = \nu \bar{\epsilon}_y, \quad \sigma_y = E \bar{\epsilon}_y \quad \text{b) } \bar{\epsilon}_x = \frac{1-2\nu}{2} \bar{\epsilon}_y, \quad \sigma_y = \frac{2E}{2-\nu} \bar{\epsilon}_y \quad (5)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung $\partial \sigma_y / \partial y = 0$ erhalten wir mit (5) und (2):

$$\bar{v}_{yy} + \bar{w}_y (\alpha_0 + \bar{w}_{yy}) = 0 \quad (6)$$

Der Querschnitt des Plattenstreifens bleibt auch nach der Belastung mit Innendruck ein Kreis. Bezeichnen wir die noch unbekannte Änderung der Krümmung mit $-\alpha$, so ist die Ausbiegung \bar{w} gegeben durch:

$$\bar{w} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \quad (7)$$

Aus (6) und (7) erhalten wir bei Berücksichtigung der Randbedingung $\bar{v} = 0$ bei $y = \pm b/2$ die Verschiebung in y -Richtung zu:

$$\bar{v} = -\frac{\alpha (\alpha_0 - \alpha)}{6} \left(\frac{b^2 y}{4} - y^3 \right) \quad (8)$$

Dann kann die Krümmung $-\alpha (\alpha_0 + \alpha) = -\frac{1}{r}$ des belasteten Streifens berechnet werden aus der Gleichgewichtsbedingung in x -Richtung

$$t \sigma_y (-\alpha_0 + \bar{w}_{yy}) + p = 0 \quad (9)$$

oder mit (5) und (2) aus:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } (\bar{v}_y + \alpha_0 \bar{w} + \frac{1}{2} \bar{w}_y^2) (-\alpha_0 + \bar{w}_{yy}) + \frac{p}{Et} &= 0 \\ \text{b) } (\bar{v}_y + \alpha_0 \bar{w} + \frac{1}{2} \bar{w}_y^2) (-\alpha_0 + \bar{w}_{yy}) + \frac{p}{Et} \frac{2-\nu}{2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9')$$

Das Ergebnis bringen wir gleich in die früher¹⁾ benutzte dimensionslose Form mit Hilfe der Formkennzahlen:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \frac{b^4 \alpha_0^2}{t^2} = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \frac{b^4}{r_0^2 t^2} \\ \omega &= \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \frac{b^4 (\alpha_0 + \alpha)^2}{t^2} = \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^4} \frac{b^4}{r^2 t^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Aus (7), (8) und (9') ergeben sich für diese nach einigen Umformungen folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \omega^2 (\omega - \omega_0) &= 24 \frac{12^2}{\pi^6} \frac{p}{E} (1-\nu^2)^2 \frac{b^4}{t^4} = 1,035 k_p \\ \text{b) } \omega^2 (\omega - \omega_0) &= \frac{2-\nu}{2} 24 \frac{12^2}{\pi^6} \frac{p}{E} (1-\nu^2)^2 \frac{b^4}{t^4} \\ &= 0,880 k_p \quad \text{bei } \nu = 0,3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Aus den Gl. (11) läßt sich zu jedem Innendruck für ein gegebenes ω_0 die neue Formkennzahl ω leicht berechnen. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in Bild 4 und 5 eingetragen. Dort ist der Zusammenhang zwischen ω und ω_0 durch die Kurven mit dem Parameter ω_0 dargestellt. Diese sind durch die andere Kurvenschar mit dem Parameter k_p in Abhängigkeit vom Innendruck beziffert. Zu jedem k_p gibt die Abszisse der ω_0 -Kurven den zugehörigen Wert ω .

Wie man aus Gl. (11) leicht einsieht, strebt mit wachsendem ω_0 das Verhältnis ω/ω_0 gegen eins, d. h. die Verformung des Plattenstreifens infolge des Innendruckes wird mit wachsender Vorkrümmung kleiner. Außerdem zeigt der Vergleich zwischen (11a) und (11b), daß die Längsspannung σ_x die Verformung des Plattenstreifens nur wenig beeinflusst.

Zum Schluß ermitteln wir noch die Ringspannung σ_y . Aus (7) und (9) ergibt sich:

$$\sigma_y = \frac{p}{t(\alpha_0 + \alpha)} = \frac{pr}{t} \quad (12)$$

oder, mit (10):

$$\sigma_y = p (1-\nu^2)^2 \frac{b^2}{t^2} \frac{1}{\pi^2 \omega} \quad (12a)$$

Endlich erhält man σ_y auf σ^* bezogen (s. I, B) zu:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma^*} = \frac{p}{E} (1-\nu^2)^2 \frac{b^4}{t^4} \frac{3}{\pi^4} \frac{1}{\omega} = k_p \frac{1}{9,38 \omega} \quad (13)$$

σ_y und σ_y/σ^* können nur nach Auflösung der Gl. (11) für ω berechnet werden.

III. Aufstellung der Knickbedingung.

Jetzt gehen wir zur Bestimmung der Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtsgestalt des belasteten Plattenstreifens über. Den Rechnungsgang fassen wir nun ganz kurz zusammen, da er in den früheren Arbeiten in ausführlicher Weise dargestellt ist^{1), 2)}.

Wir betrachten einen Plattenstreifen nach Bild 3, der an der Innenfläche durch den Druck p belastet ist und an dessen Rändern die Spannungen $\sigma_y = pr/t$, σ_x und τ angreifen. Die Größe der Längsspannung σ_x lassen wir zunächst offen, und nur in den Auswertungen werden wir

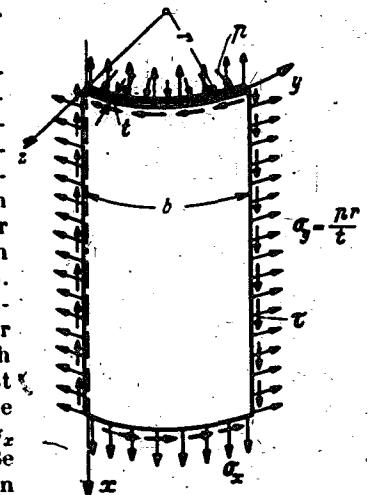


Bild 3. Gekrümmter Plattenstreifen mit Schub und Innendruck.

⁴⁾ s. K. Marguerre, Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung, Jahrbuch 1939 der deutschen Luftfahrtforschung, S. 414.

auf die in der Einleitung erwähnten Sonderfälle $\sigma_x = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y/2$ zurückkommen. Die y -Koordinate wird jetzt, im Gegensatz zu Bild 2, vom Plattenrand aus und längs des Umfanges gezählt, statt von der Plattenmitte aus und längs der Sehne. Die Berechnung der Vorverformung infolge des Innendruckes ist nur für sehr schwach gekrümmte Platten von Bedeutung, und dort ist der Unterschied zwischen Umfang und Sehne vernachlässigbar klein.

Beim Ausbeulen des Plattenstreifens erfährt seine Mittel- fläche Verschiebungen, die wir in die Komponenten u, v, w nach den Achsen x, y, z zerlegen. Die Beulgrenze wird wie früher mit Hilfe der Energiemethode berechnet. Diese fordert, daß der in den Verschiebungen u, v, w quadratische Anteil $\Pi^{(2)}$ in der Änderung der potentiellen Energie⁵⁾:

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)} = & \frac{D}{2} \int_0^{2l} \int_0^b \left\{ \left(u_x + v_y + \frac{w}{r} \right)^2 \right. \\ & - 2(1-\nu) \left[(u_x v_y - u_y v_x) - \frac{1}{4} (u_y - v_x)^2 + u_x \frac{w}{r} \right] \Big\} dx dy \\ & + \frac{K}{2} \int_0^{2l} \int_0^b \left\{ (w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1-\nu) (w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2) \right\} dx dy \\ & + \tau l \int_0^{2l} \int_0^b w_x w_y dx dy + \frac{\sigma_x l}{2} \int_0^{2l} \int_0^b w_x^2 dx dy \\ & + \frac{p r}{2} \int_0^{2l} \int_0^b w_y^2 dx dy \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

an der Stabilitätsgrenze verschwindet und daß er außerdem der Minimalbedingung

$$\delta \Pi^{(2)} = 0 \dots \dots \dots (15)$$

für alle zulässigen Variationen $\delta u, \delta v, \delta w$ genügt. Die Änderung der potentiellen Energie wird in der x -Richtung über die Wellenlänge $2l$ der Beulfigur integriert.

Wir untersuchen hier die Stabilität eines Plattenstreifens mit momentenfrei gelagerten Längsrändern, d. h. bei

$$y = 0 \text{ und } y = b \text{ ist } u = w = w_{yy} = 0 \quad (16_{1-3})$$

Unter Beachtung dieser drei Randbedingungen erhalten wir aus (15) nach Durchführung üblicher Teilintegrationen

$$\frac{1}{D} \delta \Pi_u^{(2)} = - \int_0^{2l} \int_0^b \left(u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{xy} + v \frac{w_x}{r} \right) \delta u dx dy = 0 \dots \dots \dots (17_1)$$

$$\frac{1}{D} \delta \Pi_v^{(2)} = - \int_0^{2l} \int_0^b \left(v_{yy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + \frac{1+\nu}{2} u_{xy} + \frac{w_y}{r} \right) \delta v dx dy + \int_0^{2l} \left\{ v_y \delta v \Big|_{y=0}^{y=b} \right\} dx = 0 \dots \dots \dots (17_2)$$

$$\frac{1}{D} \delta \Pi_w^{(2)} = \int_0^{2l} \int_0^b \left[\frac{1}{r} (v u_x + v_y + \frac{w}{r}) + k r^2 \Delta \Delta w - 2 q_1 w_{xy} - q_2 w_{xz} - q_3 w_{yy} \right] \delta w dx dy = 0 \dots \dots \dots (17_3)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } k = \frac{K}{D r^2} = \frac{t^2}{12 r^2} \cdot q_1 = \frac{\tau t}{D} = \frac{\tau}{E} (1-\nu^2), \quad q_2 = \frac{\sigma_x t}{D} \\ = \frac{\sigma_x}{E} (1-\nu^2), \quad q_3 = \frac{\sigma_y t}{D} = \frac{p r}{D} = \frac{p r}{E t} (1-\nu^2) \quad (18) \end{aligned}$$

Sollen die Variationen von $\Pi^{(2)}$ für beliebige $\delta u, \delta v, \delta w$ gleich Null sein, so müssen in (17₁₋₃) die in den Klammern stehenden Ausdrücke in den Integranden der Flächeninte-

grale und das Randintegral in (17₂) je für sich verschwinden. Aus dem Nullsetzen der Klammerausdrücke erhält man die bekannten vereinfachten Differentialgleichungen für den schwach gekrümmten Plattenstreifen⁶⁾; aus dem Verschwinden des Randintegrals in (17₂) ergibt sich die dritte Randbedingung $v = 0$ oder $v_y = 0$ bei $y = 0$ und $y = b$; die uns aussagt, daß entweder die Normalverschiebung oder die zusätzliche Normalspannung in Richtung der zum Rand senkrechten Plattentangente verschwinden muß. Die Bedingung $v_y = 0$ scheint in Widerspruch zu stehen mit der Bedingung $\bar{v} = 0$ (s. Abs. II), daß der Rand vor dem Ausbeulen festgehalten wird, was bei einer Platte mit Innendruck immer der Fall sein wird. Nun ist bei einem Plattenstreifen, welcher aus einer Vollschale durch Unterteilung mit Längsrippen entstanden ist, die Verschiebung \bar{v} infolge des Innendruckes am Rande gleich Null, weil die Ringspannungen der benachbarten Felder sich schon allein das Gleichgewicht halten. D. h. die Bedingung $\bar{v} = 0$ ist mit einer in y -Richtung beliebig biegeweichen Rippe verträglich. Anders ist es beim Ausbeulen des Plattenstreifens oberhalb der Stabilitätsgrenze. Im Grenzfall der in y -Richtung biegeweichen Rippe, den wir annehmen wollen, müssen die zusätzlichen Spannungen σ_y am Rande verschwinden, da sie sich sonst aus benachbarten Feldern addieren könnten und für die Rippe eine Belastung bilden würden, die sie nicht aufnehmen kann. Als vierte Randbedingung erhalten wir somit

$$v_y = 0 \text{ bei } y = 0 \text{ und } y = b \dots \dots \dots (19)$$

Mit dieser Annahme befindet man sich auf der sicheren Seite (man ermittelt etwas zu kleine kritische Spannungen) und hat außerdem den Vorteil einer wesentlich einfacheren Rechnung. Selbstverständlich ist auch der andere Grenzfall der in y -Richtung biegestarren Rippen, dem die Bedingung $v = 0$ bei $y = 0$ und $y = b$ entspricht, denkbar. Wir werden aber diesen Fall nicht weiter verfolgen.

Wie in den früheren Arbeiten^{1), 2)}, wird hier die Knickbedingung mit Hilfe des Ritzansatzes

$$\begin{aligned} u = \cos \frac{\pi x}{l} \sum_{1,3,\dots} A_m \sin \frac{m \pi y}{b} - \sin \frac{\pi x}{l} \sum_{2,4,\dots} A_m \sin \frac{m \pi y}{b} \\ v = \sin \frac{\pi x}{l} \sum_{1,3,\dots} B_m \cos \frac{m \pi y}{b} + \cos \frac{\pi x}{l} \sum_{2,4,\dots} B_m \cos \frac{m \pi y}{b} \\ w = \sin \frac{\pi x}{l} \sum_{1,3,\dots} C_m \sin \frac{m \pi y}{b} + \sin \frac{\pi x}{l} \sum_{2,4,\dots} C_m \sin \frac{m \pi y}{b} \end{aligned} \quad (20)$$

aufgestellt, indem jedes Glied den Rändbedingungen (16₁₋₃) und (19) genügt.

Man setzt nun die gewählten Funktionen für die Verschiebungen u, v, w im Ausdruck (14) für $\Pi^{(2)}$ ein. Die Minimalbedingung (15) geht in ein gewöhnliches Minimumproblem über. Beachtet man noch die Orthogonalitätsbedingungen für die Kreisfunktionen und die Beziehungen

$$\int_0^b \sin \frac{n \pi y}{b} \cos \frac{m \pi y}{b} dy = \begin{cases} \frac{b}{\pi} \frac{2n}{n^2 - m^2} \text{ für } n + m \\ \text{ungerade} \\ 0 \text{ für } n + m \text{ gerade} \end{cases} \quad (21)$$

so erhält man durch Differentiation nach A_n, B_n, C_n nach größeren Umformungen folgendes Gleichungssystem für diese A, B, C :

$$\begin{aligned} A_n a_n + B_n f_n - C_n \frac{b}{\pi r} g_n = 0 \\ A_n f_n + B_n b_n - C_n \frac{b}{\pi r} h_n = 0 \\ - A_n \frac{b}{\pi r} g_n - B_n \frac{b}{\pi r} h_n + C_n \frac{b^2}{\pi^2 r^2} c_n \\ - q_1 \beta \frac{8}{\pi} \sum_m C_m \frac{n m}{n^2 - m^2} (-1)^m = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

⁵⁾ Dieser Ausdruck ergibt sich aus der Formel (14) der unter Fußnote ¹⁾ genannten Arbeit unter Streichung der Glieder, die sich im Laufe der dort durchgeführten Rechnung für Öffnungswinkel $b/r < 45^\circ$ als vernachlässigbar klein erwiesen haben und nach Ergänzung durch den entsprechend vereinfachten Term aus der Flächenbelastung p .

⁶⁾ s. Gl. (41₁₋₃) in der unter Fußnote ¹⁾ zitierten Arbeit. Die Gl. (41) ist hier in (17₁) um das Glied $q_3 w_{yy}$ aus der Flächenbelastung erweitert.

mit

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \beta^2 \left[\frac{1-\nu}{2} n^2, b_n = n^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta^2, \right. \\ c_n &= 1 - k \frac{\pi^4 r^4}{b^4} (n^2 + \beta^2)^2 + q_2 \frac{\pi^2 r^2}{b^2} \beta^2 + q_3 \frac{\pi^2 r^2}{b^2} n^2, \\ f_n &= \frac{1}{2} \nu n \beta, g_n = \nu \beta, h_n = n, \beta = \frac{b}{l}, \end{aligned} \right\} (23)$$

$n + m$ ungerade

Infolge der gemachten Vereinfachungen im Energieausdruck (s. Fußnote 5) enthalten die Gl. (22₁₋₃) keine Summenglieder (vgl. die unter den Fußnoten 1) und 2) zitierten Arbeiten). Deswegen lassen sich A_n, B_n aus diesen Gleichungen ohne Iteration durch C_n ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{b}{\pi r} \beta \frac{\nu \beta^2 - n^2}{(n^2 + \beta^2)^2} C_n \\ B_n &= \frac{b}{\pi r} n \frac{(2 + \nu) \beta^2 + n^2}{(n^2 + \beta^2)^2} C_n \end{aligned} \right\} (24)$$

Nach Einsetzen dieser Beziehungen in die dritte Gleichung eines jeden Gleichungstripels erhält man nach weiteren Umformungen folgendes System linearer homogener Gleichungen nur für die C -Freiwerte:

$$(C_n n) \frac{\tau}{32 \beta} \left[(n^2 + \beta^2)^2 + \omega \frac{\beta^4}{(n^2 + \beta^2)^2} + \frac{p r^4}{\sigma^* l} 4 n^2 + \frac{\sigma_x}{\sigma^*} 4 \beta^2 \right] \frac{1}{n^2} - \frac{\tau}{\sigma^*} \sum_m (C_m m) \frac{1}{n^2 - m^2} (-1)^m = 0$$

$n + m$ ungerade (25)

wo ω und σ^* die Formkennzahl und die Bezugsspannung sind (s. I, B). Führt man zur Abkürzung

$$T_n = \frac{\tau}{32 \beta} \left[(n^2 + \beta^2)^2 + \omega \frac{\beta^4}{(n^2 + \beta^2)^2} + \frac{p r^4}{\sigma^* l} 4 n^2 + \frac{\sigma_x}{\sigma^*} 4 \beta^2 \right] \frac{1}{n^2} \dots (26)$$

ein, so ergibt sich für gegebene p und σ_x die kritische Schubspannung aus dem Nullsetzen folgender Knickdeterminante (Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems (25)):

$$\Delta = \begin{vmatrix} T_1 & \frac{1}{3} \frac{\tau}{\sigma^*} & 0 & \frac{1}{15} \frac{\tau}{\sigma^*} & \dots \\ \frac{1}{3} \frac{\tau}{\sigma^*} & T_2 & -\frac{1}{5} \frac{\tau}{\sigma^*} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{5} \frac{\tau}{\sigma^*} & T_3 & \frac{1}{7} \frac{\tau}{\sigma^*} & \dots \\ \frac{1}{15} \frac{\tau}{\sigma^*} & 0 & \frac{1}{7} \frac{\tau}{\sigma^*} & T_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

Der dimensionslose Ausdruck für die reziproke Halbwellenlänge $\beta = b/l$ in T_n muß durch Probieren so gewählt werden, daß bei gegebenem p und σ_x die Schubspannung τ zum Minimum wird. Außer in β sind die Schalenabmessungen nur noch in ω und σ^* enthalten.

Für reinen Schub ergibt sich die schon früher errechnete Kurve τ/σ^* über ω , für Schub und Innendruck erhält man zweiparametrische Kurvenscharen, wobei wir uns hier wegen der geringen Abhängigkeit der kritischen Schubspannung von der Längsspannung σ_x nur auf die zwei Kurvenscharen mit k_p als Parameter für $\sigma_x = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y/2 = pr/2l$ beschränken wollen.

IV. Auswertung der Knickbedingung.

A. Aufstellung von Kurvenblättern.

Die kritischen Spannungen werden aus (27) berechnet, indem eine endliche (zwei-, dreireihige usw.) Determinante als Näherung für die unendliche gesetzt wird. Für den stark gekrümmten Plattenstreifen (großes ω) mit großem Innendruck hat die Auswertung gezeigt, daß die wesentlichen Glieder im Reihenansatz (20), d. h. solche mit großen Frei-

werten A_m, B_m, C_m nicht die ersten sind. Deshalb benutzt man dann zur Annäherung der Determinante zweckmäßig nicht ihren Anfang, sondern einen Ausschnitt, der bei demjenigen n liegt, zu dem die größten C_n gehören. Man erkennt diese Stelle auch ohne C_n auszurechnen daran, daß sich dann bei festgehaltener Ordnung des benutzten Ausschnitts die Knicklast am kleinsten ergibt. Es hat sich gezeigt, daß Determinantenausschnitte vierter Ordnung, die auf biquadratische Gleichungen in τ führen, immer ausreichend genaue Näherungen ergeben.

Wir schreiben das Diagonalglied T_n der Determinante für die beiden Sonderfälle $\sigma_x = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y/2 = pr/2l$ auf:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad T_n &= \frac{\tau}{32 \beta} \left[(n^2 + \beta^2)^2 + \omega \frac{\beta^4}{(n^2 + \beta^2)^2} + \frac{p r^4}{\sigma^* l} 4 n^2 \right] \frac{1}{n^2} \\ b) \quad T_n &= \frac{\tau}{32 \beta} \left[(n^2 + \beta^2)^2 + \omega \frac{\beta^4}{(n^2 + \beta^2)^2} + \frac{p r^4}{\sigma^* l} (4 n^2 + 2 \beta^2) \right] \frac{1}{n^2} \end{aligned} \right\} (28)$$

Mit diesen T_n erhält man für τ/σ^* in den beiden Sonderfällen Kurvenscharen über ω mit $\sigma_y/\sigma^* = pr/\sigma^* l$ als Parameter (oder umgekehrt). Die Benutzung dieses Parameters hat den Nachteil, daß er den Krümmungsradius r des belasteten Plattenstreifens enthält, der erst mit Hilfe der Gl. (11) und (13) berechnet werden muß.

Aus rechnerischen Gründen wurden zunächst Kurvenscharen mit σ_y/σ^* als Parameter berechnet und über $\sqrt{\omega}$ aufgetragen. Diese haben nämlich den Vorteil, daß sie bei wachsendem ω sehr schnell in die asymptotischen Kurven für $\omega \rightarrow \infty$ übergehen, wodurch man viel Rechenarbeit erspart. Mit $\omega \rightarrow \infty$ geht β , wie $1/\omega^{1/2}$ nach Null²⁾, und wie man aus (28) sieht, erhält man in den beiden Sonderfällen die gleichen Scharen von Asymptoten. Aus den so ermittelten Kurvenscharen wurden dann mit Hilfe der Gl.

(13) Kurvenscharen mit $k_p = \frac{p}{E} (1 - \nu)^{1/2} \frac{b^4}{r^4}$ als Parameter aufgestellt, wobei k_p den unbekanntenen Krümmungsradius des belasteten Plattenstreifens nicht enthält und unmittelbar aus den Abmessungen und dem Druck berechnet werden kann. Diese Kurvenscharen sind in Bild 4 und 5 wiedergegeben. Aus diesen ersieht man, daß alle Kurven die Kurve für reine Schubbelastung als gemeinsame Asymptote haben. Das erkennt man auch, wenn man in (28) $pr/\sigma^* l = \sigma_y/\sigma^*$ durch k_p nach Gl. (13) ersetzt:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad T_n &= \frac{\tau}{32 \beta} \left[(n^2 + \beta^2)^2 + \omega \frac{\beta^4}{(n^2 + \beta^2)^2} + k_p \frac{1}{9,38 \sqrt{\omega}} 4 n^2 \right] \frac{1}{n^2} \\ b) \quad T_n &= \frac{\tau}{32 \beta} \left[(n^2 + \beta^2)^2 + \omega \frac{\beta^4}{(n^2 + \beta^2)^2} + k_p \frac{1}{9,38 \sqrt{\omega}} (4 n^2 + 2 \beta^2) \right] \frac{1}{n^2} \end{aligned} \right\} (28a)$$

Mit $\omega \rightarrow \infty$ gehen die Glieder, die aus dem Innendruck herkommen, nach Null. Der Vorteil der gemeinsamen Asymptote würde aber bei der unmittelbaren Berechnung der Kurvenscharen mit k_p als Parameter aufgehoben sein durch den Nachteil, daß diese Kurven nur langsam in diese Asymptote übergehen.

Die Auftragung über $\sqrt{\omega}$ hat noch den Nachteil, daß ω erst nach Gl. (11) aus den gegebenen Größen ω_0 und k_p berechnet werden muß. Das kann man ersparen, wenn man an jeden Punkt der Kurventafeln den zu seinem Wertepaar ω, k_p gehörenden Wert ω_0 anschreibt und Punkte mit gleichem ω_0 durch Kurven verbindet. So entsteht die zweite, etwa lotrechte Kurvenschar, Bild 4 und 5, die nach $\sqrt{\omega_0}$ beziffert ist. Da für $k_p = 0$ immer $\omega = \omega_0$ ist, so liegt das untere Ende jeder dieser Kurven bei der Abszisse $\sqrt{\omega_0}$, die seiner Bezifferung $\sqrt{\omega_0}$ gleich ist.

²⁾ In der unter Fußnote 1) zitierten Arbeit ist das auf S. 525 ausführlich gezeigt.

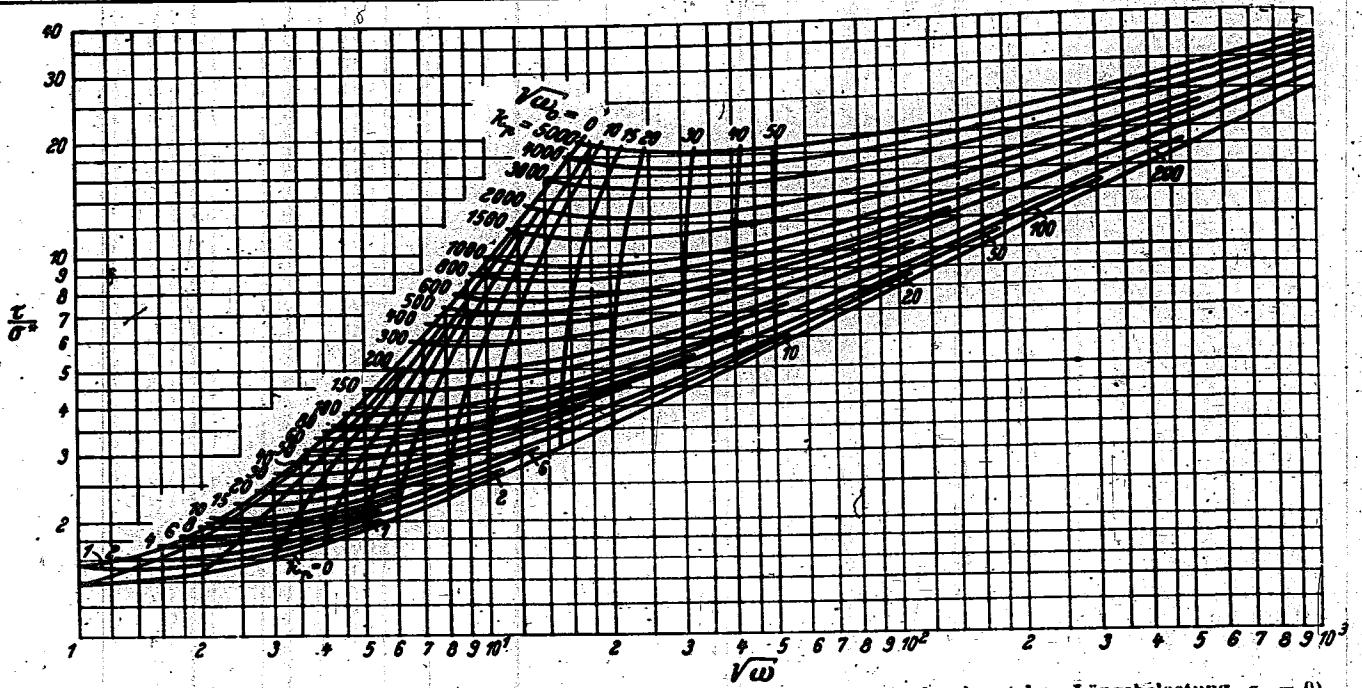


Bild 4. Kritische Schubspannung τ eines gekrümmten Plattenstreifens mit Innendruck p (ohne Längsbelastung, $\sigma_x = 0$)

$$\sigma^* = \frac{\pi^2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t^3}{b^3}, \quad k_p = \frac{p}{E} (1-\nu^2)^{3/2} \frac{b^4}{t^3}, \quad \sqrt{\omega} = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi^2} \frac{b^2}{rt}$$

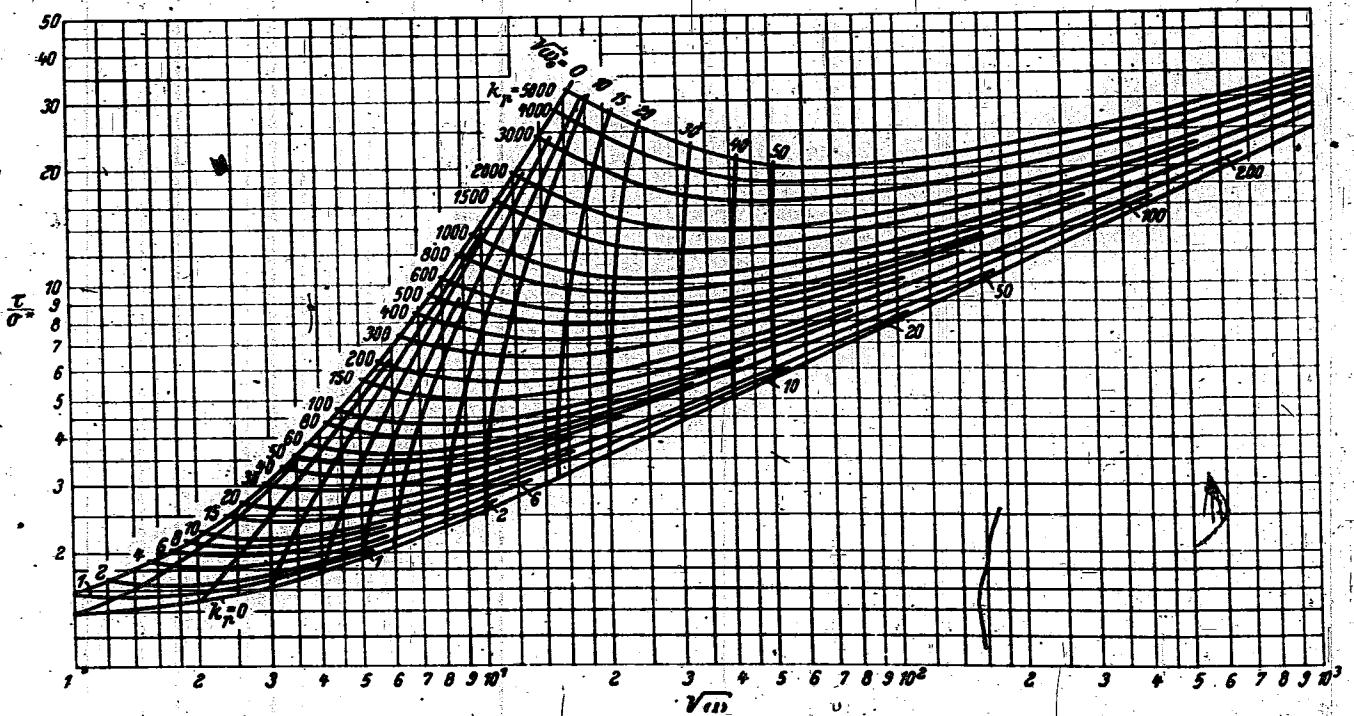


Bild 5. Kritische Schubspannung τ eines gekrümmten Plattenstreifens mit Innendruck p und Längsspannung $\sigma_x = pr/2t$.

$$\sigma^* = \frac{\pi^2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t^3}{b^3}, \quad k_p = \frac{p}{E} (1-\nu^2)^{3/2} \frac{b^4}{t^3}, \quad \sqrt{\omega} = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi^2} \frac{b^2}{rt}$$

Nun ist die Benutzung dieser Diagramme sehr einfach: Der Formparameter und die kritische Schubspannung τ/σ^* sind als Abszisse und Ordinate des Punktes abzulesen, in dem sich die Kurven zu den gegebenen Werten der Parameter k_p und ω_0 schneiden. Aus k_p und ω läßt sich dann nach Gl. (13) auch die Ringspannung σ_r leicht berechnen. Man könnte auch diese Rechenarbeit ersparen, indem man die Kurvenscharen mit σ_r/σ^* als Parameter ebenfalls in Bild 4 und 5 aufnehmen würde; wegen der Überlastung der Diagramme würde aber davon abgesehen.

B. Diskussion der Ergebnisse.

Die Kurven mit dem Parameter $\sqrt{\omega_0}$ geben die Vorverformung der Platte infolge des Innendruckes wieder. Der

schräge Verlauf der Kurve $\sqrt{\omega_0} = 0$ und der Kurven mit kleinen Parametern $\sqrt{\omega_0}$ zeigt uns, daß die Vorverformung der ebenen und der schwach gekrümmten Platte infolge des Innendruckes groß ist. Dagegen wächst die Formkennzahl $\sqrt{\omega}$ bei großen Werten von $\sqrt{\omega_0}$ über den Anfangswert $\sqrt{\omega} = \sqrt{\omega_0}$ bei $k_p = 0$ nur wenig an.

Die k_p -Kurven sind links durch die Kurve $\sqrt{\omega_0} = 0$ begrenzt. Bei größeren k_p -Werten fallen die Kurven mit wachsendem ω_0 (oder ω) zunächst ab. Somit kommt nun zu dem paradox erscheinenden Ergebnis, daß die kritische Schubspannung mit abnehmender Krümmung des Plattenstreifens schließlich wieder wächst. Man versteht aber diese Erscheinung, wenn man bedenkt, daß nicht nur die Krü-

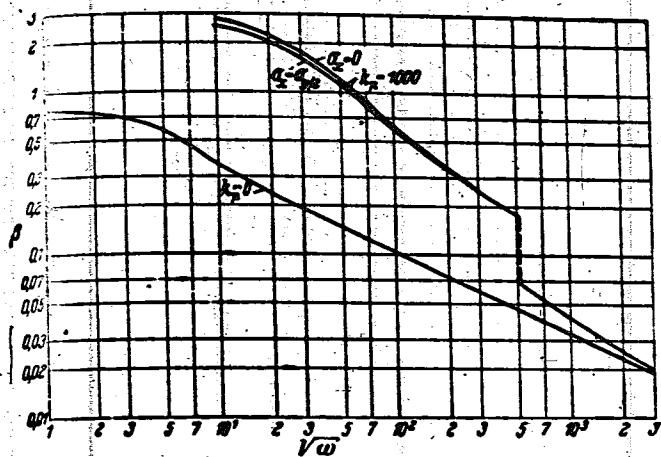


Bild 6. Reziproke Halbwellenlänge $\beta = b/l$ der Beulfigur eines Plattenstreifens mit Schub und Innendruck

$$k_p = \frac{p}{E} (1 - \nu^2) \frac{b^4}{t^4}, \quad \sqrt{\omega} = \frac{\sqrt{12(1 - \nu^2)}}{\pi^2} \frac{b^2}{r t}$$

mung, sondern auch die Ringspannung $\sigma_y = pr/t$ stabilisierend wirkt. Diese ist aber gerade bei den ganz flach gekrümmten Platten besonders groß (s. Gl. (13)), und ihr stabilisierender Einfluß überwiegt dann die Folgen der geringen Krümmung.

Endlich sieht man aus dem Vergleich der Kurvenscharen für $\sigma_x = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y/2$ (s. Bild 4 u. 5), daß die Längsspannung nur bei kleinen Werten ω_0 einen größeren Einfluß auf die kritische Schubspannung hat. Mit wachsendem ω_0 oder ω weichen die beiden Kurvenblätter immer weniger voneinander ab.

Zum Schluß betrachten wir das Bild 6, in dem die reziproke Halbwellenlänge $\beta = b/l$ über $\sqrt{\omega}$ für reinen Schub ($k_p = 0$) und für Schub und Innendruck mit $k_p = 1000$ aufgetragen ist. Man sieht, daß der Innendruck die Beulen kürzer macht. Bemerkenswert ist der Sprung in der Kurve mit $k_p = 1000$. Er kommt dadurch zustande, daß die kritische Spannung, wenn man sie für ein bestimmtes Wertepaar ω, k_p über β aufträgt, zwei Minima hat. Hält man k_p fest, so ergibt für kleinere ω -Werte das zweite (d. h. das zu den größeren β gehörende) Minimum die absolut kleinste Knicklast, bei größeren ω -Werten das erste, und da in Bild 6 das zu der kleinsten kritischen Spannung gehörende β aufgetragen ist, so hat diese Kurve bei einem bestimmten ω -Wert einen Sprung, obgleich die Knickspannung selbst stetig verläuft.

Zusammenfassung.

Es wird die Stabilität eines gekrümmten Plattenstreifens untersucht, der durch Schub- und Längskräfte τ und $\sigma_x t$ und durch gleichmäßig verteilte Flächenlast p (Innendruck) belastet ist. Die Verformung des Plattenstreifens durch den Innendruck hat auf die kritische Last wesentlichen Einfluß und wird deshalb zunächst untersucht. Dann wird für die Gleichgewichtsgestalt des belasteten Plattenstreifens mit Hilfe des Ritzansatzes (20) die Knickbedingung (27) aufgestellt, die außer den Lastparametern $\tau/\sigma^*, \sigma_x/\sigma^*$ und $pr/\sigma^* t$ noch den Formparameter ω enthält. Aus dieser Knickbedingung ist die kritische Schubspannung τ für die Sonderfälle $\sigma_x = 0$ und $\sigma_x = pr/2t$ berechnet und in den Bildern 4 und 5 über der Formkennzahl $\sqrt{\omega}$ des belasteten Plattenstreifens mit $k_p = \frac{p}{E} (1 - \nu^2) \frac{b^4}{t^4}$ als Parameter aufgetragen. Außerdem ist in Bild 4 und 5 auch die Formkennzahl $\sqrt{\omega_0}$ des unbelasteten Plattenstreifens in Form einer zweiten Kurvenschar angegeben.

Prüfung von Laboratoriumsverfahren zur Bestimmung des Bleigehaltes in Kraftstoffen*).

Von O. Widmaier.

Bericht aus dem Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Das den Flugmotorenkraftstoffen zugesetzte Bleitetraäthyl erhöht in erheblichem Maße die Klopfestigkeit und damit die erzielbare Leistung der Flugmotoren.

Je nach ihrer Verwendung werden die Kraftstoffe verschieden stark verbleit. Der Gehalt an Bleitetraäthyl gibt dabei schon Anhaltspunkte über die Klopfestigkeit des Kraftstoffes.

Es ist deshalb wichtig, den Bleitetraäthylgehalt einfach, schnell und genau bestimmen zu können. In letzter Zeit sind mehrere neue Bestimmungsverfahren ausgearbeitet worden.

An verschiedenen Kraftstoffen werden neun Bleibestimmungsverfahren erprobt und die Ergebnisse miteinander verglichen.

Gliederung.

- I. Anlaß der Versuche.
- II. Beschreibung der einzelnen Verfahren zur Bleibestimmung in Kraftstoffen.
 1. Chromat-Verfahren nach Edgar und Calingaert.
 2. Salzsäure-Verfahren nach Calingaert und Gambrill.
 3. Sulfat-Verfahren nach Ulrich.
 4. FKFS-Chromat-Verfahren.
 5. Chromat-Titrier-Verfahren.
 6. DVL-Dithizon-Titrier-Verfahren.
 7. FKFS-Chromat-Titrier-Verfahren.
 8. FKFS-Jodverfahren.
 9. FKFS-Trichloressigsäureverfahren.
- III. Wahl der Kraftstoffe zur quantitativen Bleibestimmung.
- IV. Ergebnisse der einzelnen Verfahren.
- V. Zusammenfassung.
- VI. Schrifttum.

I. Anlaß der Versuche.

Die Flugmotorenkraftstoffe werden vor ihrer Verwendung sowohl motorisch als auch in Bezug auf eine Reihe physikalisch-chemischer Eigenschaften geprüft. Außerst wichtig ist dabei die Bestimmung des in Flugmotorenkraftstoffen enthaltenen Bleitetraäthyls, da hieraus Schlüsse auf die Klopfestigkeit gezogen werden können.

Es gibt eine ganze Reihe von Untersuchungsverfahren, um den Bleigehalt in Flugmotorenkraftstoffen quantitativ zu ermitteln, nur haben die meisten dieser Verfahren den Nachteil, daß sie sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Aus einer Zusammenstellung der einzelnen Verfahren sollen ihre Vorteile und Nachteile erkannt werden. Die in dieser Arbeit untersuchten Verfahren sind folgende:

1. Chromat-Verfahren nach Edgar und Calingaert [1].
2. Salzsäure-Verfahren nach Calingaert und Gambrill [2].
3. Sulfat-Verfahren nach Ulrich [3].
4. FKFS-Chromat-Verfahren,
5. Chromat-Titrier-Verfahren [4].
6. DVL-Dithizon-Titrier-Verfahren [5].
7. FKFS-Chromat-Titrier-Verfahren,
8. FKFS-Jodverfahren [6].
9. FKFS-Trichloressigsäureverfahren [7].

Wichtig für die quantitative Bleibestimmung ist vor allen Dingen ein Verfahren, das einfach ist, genaue Werte liefert und nur kurze Zeit in Anspruch nimmt. Bei den meisten obenerwähnten Verfahren wird eine verhältnismäßig große Genauigkeit erreicht, aber die Einfachheit und die Dauer lassen, wie schon gesagt, sehr oft zu wünschen übrig.

*) G 11-3.

II. Beschreibung der einzelnen Verfahren zur Bleibestimmung in Kraftstoffen.

Von den neun obenerwähnten Verfahren zur quantitativen Bestimmung des Bleigehaltes in Kraftstoffen sind vier auf gewichtsanalytischer und vier auf maßanalytischer Grundlage aufgebaut. Im allgemeinen sind die gewichtsanalytischen Methoden genauer als die maßanalytischen, kosten aber einen wesentlich größeren Zeitaufwand.

1. Chromat-Verfahren nach Edgar und Calingaert [1]

100 cm³ des zu prüfenden alkoholfreien Kraftstoffes sind mit einer Pipette in ein 400 cm³-Becherglas abzumessen. Zur Ausfällung des Bleis ist eine Lösung von 30 Gewichtsteilen Brom in 70 Gewichtsteilen Tetrachlorkohlenstoff langsam hinzuzufügen, bis eine bleibende Braunfärbung auftritt. Das Ganze ist sofort durch einen 1 G4-Glasfiltertiegel zu filtrieren und mit Petroläther oder Normalbenzin nachzuwaschen. Dann ist der Tiegel in das Becherglas, in dem die Ausfällung vorgenommen wurde, zurückzusetzen, etwa 3 cm³ konzentrierte Salpetersäure hindurchzugießen, das Becherglas mit warmer 10 proz. Salpetersäure so weit aufzufüllen, daß der obere Rand des Tiegels gerade bedeckt ist, und kurz aufzukochen. Darauf ist der Tiegel herauszunehmen und mit warmem Wasser abzuspülen. Der Inhalt des Becherglases ist auf etwa 3 cm³ einzudampfen, mit destilliertem Wasser zu verdünnen und mit Ammoniak zu neutralisieren. Zur Bleifällung sind 5 cm³ 50 proz. Essigsäure und 40 cm³ 5 proz. Kaliumdichromatlösung hinzuzufügen.

Diese Lösung ist bis zum Sieden zu erhitzen und unter Rühren etwa 5 min in der Wärme zu halten. Nachdem man sie einige Zeit stehen gelassen hat, ist der Bleichromat-Niederschlag durch einen 1 G4-Tiegel zu filtrieren und mit destilliertem Wasser nachzuwaschen, bei 105° C bis zum Erreichen der Gewichtskonstanz zu trocknen und nach dem Erkalten zu wägen.

Die Auswaage an Bleichromat in g ergibt, durch 1,659 geteilt, den Gehalt an Bleitetraäthyl in Volumenteilen.

2. Salzsäure-Verfahren nach Calingaert und Gambrill.

Die von Calingaert und Gambrill beschriebene Einrichtung [2] wurde etwas abgeändert, und zwar wurde der Einfachheit halber ein Rundkolben mit seitlichem Stutzen und ein Rückflußkühler verwendet. Die in den Apparat eingebaute elektrische Heizquelle wurde durch eine Propangasflamme ersetzt.

Mit einer Pipette werden 50 cm³ Benzin in den Rundkolben gebracht und außerdem zweckmäßig noch 50 cm³ eines hochsiedenden Destillates (Ruhrchemie-Dieselmotorenstoff).

Zu diesem Gemisch werden 50 cm³ konzentrierte Salzsäure durch den Seitenstutzen mit Aufsatzrohr hinzugefügt und die Flüssigkeit in kürzester Zeit zum Kochen gebracht. Sobald dieser Punkt erreicht ist, stellt man die Wärmezufuhr derart ein, daß ein stetiger Kondensatstrom von

Kübler abläuft, und setzt diese Erhitzung 30 min lang fort. Nach dieser Zeit entfernt man die Heizquelle, läßt einige Minuten abkühlen und überführt den Großteil der Säure in ein 400 cm³-Becherglas; hierauf fügt man zum Kolbeninhalt 50 cm³ destilliertes Wasser hinzu, kocht 5 min lang bei voller Hitze, läßt dann dieses Wasser zur Säure ab und wiederholt den Wasserauszug noch einmal. Dieser Säureabzug wird bis zur Trockenheit eingedampft. Sollte sich dabei das Bleichlorid nicht als weißes Salz abscheiden, so fügt man zur Zerstörung von organischen Stoffen Salpetersäure zu und dampft danach bis zur Trockenheit ein.

Das trockene Bleichlorid wird in 10 cm³ verdünnter Salpetersäure aufgenommen und darin das Blei als Bleichromat bestimmt. Dazu neutralisiert man zuerst die salpetersäure Lösung mit Ammoniak, fügt 5 cm³ Ammoniak im Überschuß zu und versetzt dann mit einem kleinen Überschuß von verdünnter Essigsäure. Diese Lösung wird auf etwa 200 cm³ verdünnt, zum Kochen erhitzt und tropfenweise mit 10 bis 15 cm³ einer 10 proz. Kaliumbichromatlösung versetzt. Die Flüssigkeit wird noch 10 bis 15 min im Kochen gehalten, bis sich ein tief orangefarbener Niederschlag bildet. Hierauf läßt man ihn einige Stunden absitzen, filtriert durch einen Gooch-Tiegel, wäscht mit heißem destilliertem Wasser aus, trocknet bei 110°C und wägt als Bleichromat. Die Ausrechnung erfolgt wie unter 1. beschrieben.

3. Sulfat-Verfahren nach Ulrich [3].

100 cm³ Kraftstoff von 20°C werden in einem Scheidetrichter von 250 cm³ Inhalt mit 10 cm³ einer Lösung von 30 Vol.-% Brom in Tetrachlorkohlenstoff versetzt und das Gemisch etwa ½ h lang stark geschüttelt. Sogleich danach schüttelt man mit 5 cm³ 65 proz. Salpetersäure kräftig durch, bis sich der Niederschlag von Bleibromid vollständig gelöst hat. Nach kurzem Abstellen läßt man die abgesetzte Salpetersäure in einen gewogenen, vorher geglähten 50 cm³ fassenden Porzellantiegel ab. Das im Scheidetrichter verbliebene Benzin wird dann anschließend noch zweimal mit je 5 cm³ 10 proz. Salpetersäure ausgewaschen. Die Säureauszüge werden ohne Verluste in den Porzellantiegel übergeführt und mit 1 cm³ 10 proz. Schwefelsäure versetzt. Dann wird der Tiegelinhalt auf dem Dampfbade nahezu bis zur Trockenheit eingedampft und anschließend mit nicht zu starker Flamme befächelt, bis keine Säuredämpfe mehr auftreten. Dann wird solange gegläht, bis die organischen Bestandteile restlos verbrannt sind. Da hierbei ein Teil des Bleisulfates zu Metall reduziert werden kann, befeuchtet man den Tiegelinhalt mit verdünnter Salpetersäure, verdampft bis zur Trockenheit, fügt zwei Tropfen konzentrierte Schwefelsäure hinzu und erwärmt über starker Flamme, bis keine Schwefelsäuredämpfe mehr entweichen, glüht dann schwach und wägt nach dem Erkalten im Exsikkator.

Für die Berechnung des Bleitetraäthylgehaltes in Vol.-% ist die in 100 cm³ der Probe gefundene Bleisulfatmenge mit dem Faktor 0,6427 zu multiplizieren.

4. FKFS-Chromat-Verfahren¹⁾.

Das FKFS-Verfahren zur gewichtsanalytischen Bleibestimmung in Kraftstoffen wurde noch nicht veröffentlicht. Für die vorliegende Zusammenstellung einzelner Verfahren soll aber auch dieses Verfahren mit erwähnt werden.

Eine genau pipettierte Menge von 100 cm³ Benzin wird mit einem Überschuß von 30 proz. Bromlösung in Tetrachlorkohlenstoff bis zur schwachen Braunfärbung versetzt, mit 2 mal 20 und 1 mal 30 cm³ heißer 10 proz. Salpetersäure im Scheidetrichter durchgeschüttelt. Die salpetersäure Lösung wird mit etwa 1 cm³ konzentrierter Salpetersäure 15 min lang gekocht, mit konzentrierter Ammoniaklösung neutralisiert, mit 1 cm³ Eisessig versetzt und kochend heiß mit 40 cm³ 5 proz. Kaliumbichromatlösung gefällt. Nach

kurzem Aufkochen wird heiß durch einen Porzellanfiltertiegel filtriert und heiß ausgewaschen. Der Filterstand wird ½ h bei 110°C getrocknet und nach dem Erkalten im Exsikkator gewogen. Die Umrechnung in Bleitetraäthyl wird entsprechend dem unter 1. beschriebenem Verfahren vorgenommen.

5. Chromat-Titrierverfahren [4].

Aus der nach 1. hergestellten Lösung ist an Stelle der 5 proz. Lösung eine n/10-Kaliumbichromatlösung zu verwenden, und zwar wird die Fällung mit 25 cm³ unter Zugabe von wenig Natriumazetat vorgenommen. Der Bleichromatniederschlag wird durch einen 1 G4-Tiegel filtriert, das Filtrat mit 1,5 g KJ und 5 cm³ konzentrierter Salzsäure versetzt und mit n/10-Natriumthiosulfat zurücktitriert.

Die Menge der verbrauchten Kaliumbichromatlösung in cm³ ergibt, mit 0,00648 multipliziert, den Gehalt an Bleitetraäthyl in Vol.-%.

6. DVL-Dithizon-Titrierverfahren [5].

Zur DVL-Bleibestimmung ist eine in Bild 1 dargestellte Apparatur [5] notwendig.

2,0 cm³ des verbleiten Kraftstoffes werden in einem trockenen Siedekolben mittels einer genauen Pipette (2 Marken-Pipette) eingefüllt und mit 3,0 cm³ einer Mischung von einem Teil Chloroform (vor Gebrauch schütteln mit CaCl₂) und zwei Teilen eines paraffinreichen Naturbenzins verdünnt. Nach dem Zufügen von 1 cm³ Sulfurylchlorid (pro analysi) wird der Kolben mit dem Steigrohr versehen und 2 ½ min über einer kleinen Flamme bis zum Sieden erhitzt, 1 min im fließenden Wasser abgekühlt, abermals jetzt 1 min erhitzt und abgekühlt und dann die Flüssigkeit vom Niederschlag abfiltriert. Das Kolbchen mit Filterröhrchen wird noch dreimal mit je 2 bis 3 cm³ Petroläther gut

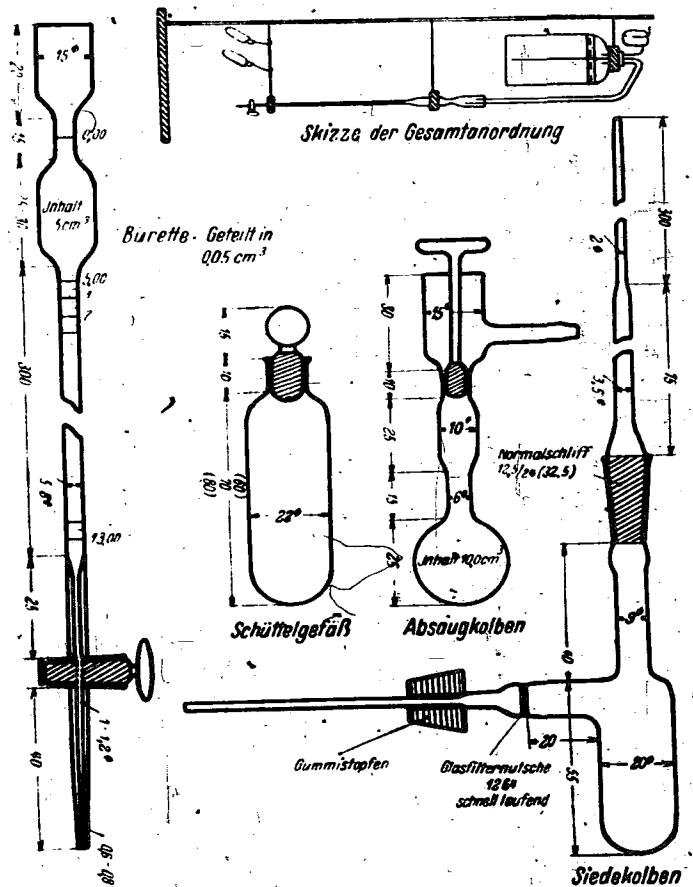


Bild 1. Geräte zum DVL-Bleibestimmungs-Verfahren. Gefäße aus Jenaer Geräteglas (Angabe der Maße in mm).

¹⁾ Das Verfahren wurde von O. Widmaier und L. Nenninger entwickelt.

ausgewaschen. Das Kölbchen wird jetzt kurz trocken gesaugt, mit 3 cm³ einer wäßrigen Lösung, die 0,1% Ammoniak, 0,5% Seignettesalz und 0,5% Natriumthiosulfat enthält, der Niederschlag gelöst und die Lösung vorsichtig in einen 10,00 cm³-Meßkolben schließlich bis zur Marke aufgefüllt und gut durchgemischt. 2,50 cm³ dieser Lösung kommen in ein Schüttelgefäß und werden nun nach Zusatz von 0,25 cm³ einer 2,5 bis 5 proz. wäßrigen Zyankali-Lösung titriert. Die Titerlösung muß nach Vorschrift hergestellt werden.

Herstellung der Titerlösung. 600 cm³ auf etwa 40° C erwärmter Tetrachlorkohlenstoff (pro analysi) wird in einem 750 cm³-Scheidetrichter mit einem größeren Überschub an pulverisiertem Dithizon (ungefähr 0,5 g) 15 min lang kräftig geschüttelt und in einem 1 l Scheidetrichter von Ungelöstem rasch filtriert (licht- und sauerstoffempfindlich). Die dunkelgrüne CCl₄-Lösung wird mit etwa 300 cm³ 0,25 proz. Ammoniak überschichtet und etwa 3 bis 5 min geschüttelt, wobei das Dithizon zum Großteil in die wäßrige Schicht übergeht. Nach kurzem Absitzenlassen wird die schmutzig braungrüne Tetrachlorkohlenstofflösung, welche die Verunreinigung des käuflichen Dithizon enthält, abgelaßen und, nachdem die wäßrige Lösung noch kurz mit ungefähr 30 cm³ Tetrachlorkohlenstoff einmal ausgespült wurde, mit 750 cm³ reinem Tetra unterschichtet, das Dithizon aus der ammoniakalischen Lösung durch Zugabe von 100 cm³ 10 proz. Schwefelsäure freigemacht und durch starkes Schütteln im Tetra aufgenommen. Die wäßrige farblose Schicht wird nun mit Hilfe der Wasserstrahlpumpe oder eines zweiten Scheidetrichters möglichst entfernt, die Tetralösung neuerdings mit 200 bis 300 cm³ 2 proz. Schwefelsäure geschüttelt, die wäßrige Lösung wieder entfernt und schließlich die Dithizon-Lösung noch dreimal mit je 200 bis 300 cm³ destilliertem Wasser ausgewaschen, die Tetra-Lösung nach gutem Absitzenlassen gleich in einen trockenen Scheidetrichter abgelaßen, mit etwas frisch geglühtem Natriumsulfat kräftig 10 min geschüttelt und dann rasch filtriert.

Von der so erhaltenen Dithizon-Lösung wird nach dem im folgenden beschriebenen Verfahren mit einer Bleilösung bekannten Bleigehaltes, die man sich am besten aus einem benzol- und homologefreiem gesättigtem paraffiniertem Bleibenzin — dessen Bleigehalt nach einem der üblichen Verfahren genau bestimmt wurde — hergestellt, der ungefähre Wirkungswert bestimmt. Die Dithizon-Lösung wird nun mit soviel Tetra verdünnt, daß 0,5 cm³ eines Bleibenzins von 0,10/Vol.-% Bleigehalt ungefähr 9 bis 10 cm³ Titerlösung entsprechen. Die Lösung wird dann in eine dunkelbraune 1½ l-Flasche gefüllt, das Heberrohr eingetaucht, 1 proz. Schwefelsäure vorsichtig über die Tetralösung geschichtet und dann luftdicht verschlossen und paraffiniert. Das Heberrohr wird durch Ansaugen gefüllt und die Bürette mit Hilfe eines Korkens angeschlossen und ebenfalls paraffiniert. Durch die Bürette wird nun mit Stickstoff die Luft aus dem Apparat gespült, eine Niederdruckwasserflasche mit Pyrogallol-Lösung angeschlossen und der Bürettenhahn angeschlossen. Das Heberrohr wird schwarz lackiert und sonst vor Licht geschützt. Über die braune Flasche wird noch zur Sicherheit ein schwarzes Tuch gelegt.

Am besten wird jetzt die Titerlösung 8 bis 10 Tage stehen gelassen, da manchmal in dieser Zeit noch geringe Titeränderungen eintreten können. Der Titer der Lösung wird dann mit einer frisch hergestellten Bleilösung genau bestimmt. Die Titriervorrichtung (Vorratslösung mit Bürette) sollte an einen kühlen, nicht zu hellen Ort gestellt werden. Die Titerlösung in der vor Licht ungeschützten Bürette ändert auch im Verlaufe eines Tages ihren Titer kaum.

Titration. Die Titration wird folgendermaßen durchgeführt: Der Bleilösung wird soviel Titerlösung zugefügt, wie die untere Grenze des zu erwartenden Bleigehaltes beträgt, 1 min geschüttelt und nun durch Zugabe von 0,2 oder 1 cm³ der Titerlösung so lange unter jedesmaligem Schütteln titriert, bis die früher farblose Schicht eine gelbe oder braune Färbung angenommen hat. Zur genauen Bestimmung wird

jetzt zu weiteren 2 cm³ der Probe gleich eine solche Menge Titerlösung zugesetzt, die beim Vorversuch noch keine Färbung hervorrufen konnte und jetzt von 0,05 zu 0,05 cm³ titriert, bis der Umschlag eintritt. Bei einiger Übung kann man aus dem Vorversuch den Wert so abschätzen, daß die eigentliche Bestimmung sehr rasch durchzuführen ist. Bei Kenntnis des ungefähren Bleigehaltes erübrigt sich der Vorversuch.

Berechnung:

$$\text{Pb (C}_2\text{H}_5)_4 \text{ in Vol.}\% = y \cdot \frac{a}{x} \text{ cm}^3/100 \text{ cm}^3$$

a bekannter Gehalt an Bleitetraäthyl in Vol.-%

x Dithizon-Lösungsmenge in cm³

y Verbrauch der Dithizon-Lösung bei der Analyse in cm³

7. FKFS-Chromat-Titrierverfahren.

Entsprechend dem unter 4. beschriebenen Verfahren wird die erhaltene Lösung nicht mit 5 proz. Kaliumbichromat, sondern mit 25 cm³ n/10-Kaliumbichromatlösung versetzt, 1,5 g Kaliumjod und 5 cm³ konzentrierte Salzsäure zugegeben und mit n/10-Natriumthiosulfatlösung zurücktitriert. Die Berechnung des Bleitetraäthylgehaltes ist, wie unter 5. beschrieben, durchzuführen.

8. FKFS-Jodverfahren [6].

In einem 100 cm³ fassenden Jodzählkolben werden 25 cm³ des zu untersuchenden Kraftstoffs mit 5 cm³ n/10 alkoholischer Jodlösung 5 bis 10 min geschüttelt. Zur Herstellung der Jodlösung werden beispielsweise 11,96 bis 98 proz. Äthylalkohols und 12,7 g Jod mit 20 g Kaliumjodid etwa ½ h lang geschüttelt und das nicht in Lösung gegangene Kaliumjodid als Bodensatz belassen. Der Jodüberschuß wird mit n/10 Natriumthiosulfatlösung mit Hilfe einer Mikrobürette zurücktitriert. Die verbrauchte Menge an n/10 alkoholischer Jodlösung, mit 0,0391 multipliziert, ergibt den Bleitetraäthylgehalt in Vol.-%.

9. FKFS-Trichloressigsäureverfahren [7].

10 cm³ des zu untersuchenden Kraftstoffes werden mit 10 cm³ Paraffin-Benzin verdünnt. Dem Benzingemisch gibt man 1 bis 2 g feste Trichloressigsäure zu und erhitzt das Ganze in einem 30 cm³ fassenden Siedekölbchen am Rückflußkühler. Der Rückflußkühler ist mit dem Siedekölbchen durch einen Normalschliff verbunden. Nach erfolgter Umsetzung wird das Reaktionsprodukt dreimal mit je 3 cm³ Wasser ausgezogen. Mit Hilfe eines mit dem Siedekölbchen wiederum durch Normalschliff verbundenen Scheidetrichters werden die drei wäßrigen Auszüge in ein 100 cm³ fassendes Becherglas abgelaßen.

Die im Becherglas befindliche Flüssigkeit wird vollständig eingedampft, wobei zuletzt weiße Dämpfe von überschüssiger Trichloressigsäure entweichen. Die Trichloressigsäure ist durch nicht zu starkes, vorsichtiges Erhitzen vollständig zu entfernen, was am besten erreicht wird, wenn man das Becherglas an einer Stativklammer befestigt und über der Flamme in Bewegung hält. Leichtes Hinwegblasen über dem Becherglas fördert die Entfernung der Trichloressigsäuredämpfe. Zu dem so erhaltenen Rückstand werden noch 1 bis 2 Tropfen Ammoniak hinzugegeben und mit 2 bis 3 cm³ 10 proz. Essigsäure und wenig kristallisiertem Natriumazetat aufgeköcht. Die heiße Lösung wird mit 5 cm³ n/20-Kaliumbichromat versetzt, wobei das vorhandene Blei als Bleichromat ausfällt.

Nach kurzem Aufkochen des Bleichromatniederschlags wird rasch abgekühlt und durch einen G4-Glasfiltertiegel in eine etwa 200 cm³ fassende Saugflasche filtriert.

Das Filtrat wird mit etwa 0,2 g Kalium-Jodid und 5 cm³ Salzsäure versetzt und mit n/20-Natriumthiosulfat-Lösung zurücktitriert. Die Menge der verbrauchten n/20-Kaliumbichromatlösung in cm³ ergibt, mit 0,0324 multipliziert, den Gehalt an Bleitetraäthyl in Volumen-Hundertteilen.

Zur Nachprüfung kann auch der im Filter gewonnene Bleichromatniederschlag gewogen werden, woraus sich dann die Menge Blei berechnen läßt.

III. Wahl der Kraftstoffe zur quantitativen Bleibestimmung.

Zur Durchführung der Versuche für die quantitative Bleibestimmung nach verschiedenen Verfahren wurden folgende Benzine gewählt:

1. Paraffin-Benzin,
2. Leuna-Benzin (Hydrierbenzin),
3. Rheinpreußen-Benzin,
4. Rumänisches Benzin,
5. VT 702,
6. VT 707,
7. VT 810,
8. A3-Kraftstoff,
9. B4-Kraftstoff,
10. C3-Kraftstoff.

Die annähernde Zusammensetzung dieser Kraftstoffe geht aus der Zahlentafel 1 hervor.

Zahlentafel 1. Annähernde Zusammensetzung der untersuchten Kraftstoffe.

Kraftstoff	Dimethylsulfatzahl (Aromaten + Olefine)	Naphtengehalt	Paraffingehalt	Jodzahl (Haus)
	Vol.-%	Vol.-%	Vol.-%	
I.G.-Eichbenzin	10,8	41,6	47,6	0,38
Leuna-Benzin	11,6	44,2	44,2	2,68
Rheinpreußen-Benzin	24,4	42,8	32,8	79,52
Rumänisches Benzin	12,4	51,1	36,5	51,73
VT 702	11,6	58,9	29,5	1,81
VT 707	10,0	57,5	32,5	2,56
VT 810	12,0	39,6	48,4	2,58
A3-Kraftstoff	11,2	88,8	0	2,23
B4-Kraftstoff	18,4	54,5	27,1	3,65
C3-Kraftstoff	24,4	73,1	2,5	3,92

Das Paraffin-Benzin stellt dabei das bei der Oktanzahlbestimmung verwendete IG-Eichbenzin dar, das, wie der Name sagt, in der Hauptsache aus Paraffinen besteht. Ähnlich ist das Leuna-Benzin zusammengesetzt. Das Rheinpreußen-Benzin entspricht im Naphtengehalt den bereits genannten Kraftstoffen, weist aber an Hand der Dimethylsulfatzahl und Jodzahl einen höheren Olefingehalt aus. Das rumänische Benzin enthält wenig Aromaten und viel Olefine, was aus der niederen Dimethylsulfatzahl und der hohen Jodzahl hervorgeht. Während die beiden Flugmotoren-Grundkraftstoffe VT 702 und VT 707 in ihrer Zusammensetzung etwa gleich sind, enthält der Kraftstoff VT 810 etwas mehr Paraffine und weniger Naphtene.

Die handelsüblichen Flugmotorenkraftstoffe, die mit A3, B4 und C3 bezeichnet werden, enthalten wenig Olefine.

Zahlentafel 2. Bleiwerte nach verschiedenen Verfahren in Vol.-% bei einem theoretischen Gehalt von 0,0326 Vol.-% Bleitetraäthyl.

Theoretischer Bleitetraäthylgehalt 0,0326 Vol.-%	Gewichtsanalytische Verfahren				Maßanalytische Verfahren				
	Chromat-Verfahren n. Edgar u. Calingaert	HCl-Verfahren n. Calingaert u. Gambrill	Sulfat-Verfahren n. Ulrich	FKFS-Chromat-Verfahren	Chromat-Titrier-Verfahren	DVL-Dithizon-Verfahren	FKFS-Chromat-Titrier-Verfahren	FKFS-Jod-Verfahren	FKFS-Trichlor-essigsäure-Verfahren
Paraffin-Benzin	0,0317	0,0314	0,0320	0,0318	0,0324	0,0322	0,0324	0,0325	0,0328
Leuna-Benzin	0,0334	0,0326	0,0332	0,0322	0,0330	0,0308	0,0326	0,0326	0,0330
Rheinpreußen-Benzin	0,0316	0,0314	0,030	0,0309	0,0316	(0,0129)	0,0314	0,0326	0,0327
Rumänisches Benzin	(0,0355)	(0,0326)	(0,0279)	(0,0289)	(0,0279)	(0,0392)	(0,0288)	—	0,0335
VT 702	0,0329	0,0304	0,0328	0,0325	0,0322	0,0309	0,0326	0,0326	0,0327
VT 707	0,0331	0,0318	0,0319	0,0328	0,0316	0,0318	0,0320	0,0325	0,0324
VT 810	0,0328	0,0318	0,0316	0,0319	0,0326	0,0310	0,0330	0,0328	0,0326
Fehlergrenze:	— 3,1	— 3,7	— 3,1	— 5,2	— 3,1	— 5,5	— 3,7	— 0,3	— 0,6
(GröÙte und kleinste Abweichung vom theoretischen Wert in %)	+ 3,7	+ 0	+ 1,2	+ 0,6	+ 1,2	— 1,2	+ 1,2	+ 0,6	+ 2,8

Der Aromatengehalt ist bei A3 am niedrigsten und bei C3 am höchsten, woraus zu schließen ist, daß dieser Kraftstoff Benzol bzw. Aromaten enthält. Einen ausgesprochen hohen Naphtengehalt hat der A3-Kraftstoff mit etwa 89% im Vergleich zum B4-Kraftstoff mit etwa 55%. Einzelheiten sind aus der Zahlentafel 1 zu ersehen.

IV. Versuchsergebnisse.

Für eine übersichtliche Darstellung wurden sämtliche Grundkraftstoffe mit folgenden Mengen Bleitetraäthyl versetzt:

- 0,0326 Vol.-% Bleitetraäthyl,
- 0,0653 Vol.-% Bleitetraäthyl,
- 0,1306 Vol.-% Bleitetraäthyl.

Im allgemeinen werden, wie aus Zahlentafel 2 bis 5 hervorgeht, bei allen Verfahren befriedigende Ergebnisse erhalten. Die besten Ergebnisse sind durchweg bei ausgesprochen paraffinhaltigen Kraftstoffen zu verzeichnen, so zum Beispiel bei Paraffinbenzin, Leuna-Benzin, VT 702 und VT 707. Auch Aromaten wirken im allgemeinen bei der Bleibestimmung nicht störend (C3-Kraftstoff). Die Olefine dagegen wirken sich bei allen Verfahren nachteilig aus. Das geht eindeutig aus den Ergebnissen von Rheinpreußen- und rumänischem Benzin hervor. Diese beiden Benzine wurden deshalb für die Bestimmung der Fehlergrenze nicht herangezogen.

Ausgehend vom jeweiligen theoretischen Bleitetraäthylgehalt wurde die größte und kleinste Abweichung der gefundenen Werte in Vol.-% angegeben, wobei mit Ausnahme von Rheinpreußen-Benzin und rumänischem Benzin alle Kraftstoffe erfaßt wurden.

Die nach den einzelnen Verfahren erhaltenen Ergebnisse werden im folgenden kurz besprochen, wobei das DVL-Dithizonverfahren, das FKFS-Jodverfahren und das Trichloressigsäure-Verfahren besonders eingehend betrachtet werden, da diese Verfahren erst in letzter Zeit entwickelt wurden und den Vorzug haben, daß eine Bleibestimmung in kurzer Zeit durchgeführt werden kann.

1. Chromat-Verfahren nach Edgar- und Calingaert [4].

Das bekannte Verfahren von Edgar und Calingaert liefert im allgemeinen brauchbare Werte. Die größte Genauigkeit wird bei den Flugmotorenkraftstoffen erreicht, wobei hauptsächlich gesättigte Kohlenwasserstoffe vorliegen. (Zahlentafel 2 bis 5). Beim Vorhandensein von viel Olefinen, wie bei Rheinpreußen-Benzin und bei rumänischem Benzin, treten größere Fehler auf. Die im Mittel für alle Verbleibungen auftretende Fehlergrenze ist —2,5 bis +0,5%. Die Fehlergrenze wird um so kleiner, je höher die Kraftstoffe verbleibt sind. Das Verfahren ist an die Ausführung im Laboratorium gebunden, da verschiedene Laboratoriumsgeräte, u. a. Heizquelle und Saugpumpe, benötigt werden.

Zahlentafel 3. Bleiwerte nach verschiedenen Verfahren in Vol.-% bei einem theoretischen Gehalt von 0,0653 Vol.-% Bleitetraäthyl.

Theoretischer Bleitetraäthyl- gehalt 0,0653 Vol.-%	Gewichtsanalytische Verfahren				Maßanalytische Verfahren				
	Chromat- Verfahren n. Edgar u. Calingaert	HCl-Ver- fahren n. Calingaert u. Gambrill	Sulfat- Verfahren n. Ulrich	FKFS- Chromat- Verfahren	Chromat- Titrier- Verfahren	DVL-Di- thizon- Verfahren	FKFS- Chromat- Titrier- Verfahren	FKFS- Jod- Verfahren	FKFS- Trichlor- essigsäure- Verfahren
Paraffin-Benzin	0,0651	0,0613	0,0653	0,0646	0,0642	0,0659	0,0648	0,0653	0,0655
Leuna-Benzin	0,0646	0,0636	0,0642	0,0648	0,0642	0,0620	0,0638	0,0653	0,0656
Rheinpreußen-Benzin	0,0638	0,0642	0,0634	0,0628	0,0638	(0,0341)	0,0636	0,0622	0,0656
Rumänisches Benzin	(0,0628)	(0,0630)	(0,0614)	(0,0618)	(0,0624)	(0,0689)	(0,0618)	—	0,0668
VT 702	0,0656	0,0642	0,0638	0,0658	0,0648	0,0640	0,0654	0,0653	0,0655
VT 707	0,0653	0,0638	0,0648	0,0644	0,0652	0,0634	0,0652	0,0669	0,0662
VT 810	0,0646	0,0636	0,0638	0,0644	0,0652	0,0638	0,0648	0,0663	0,0659
Fehlergrenze	- 2,3	- 5,4	- 2,9	- 3,9	- 1,7	- 5,1	+ 2,6	+ 0	+ 0,3
(GröÙte und kleinste Ab- weichung vom theoreti- schen Wert in %).	+ 0,5	- 1,7	+ 0	+ 0,8	- 0,2	+ 0,9	+ 0,2	+ 2,5	+ 2,45

Zahlentafel 4. Bleiwerte nach verschiedenen Verfahren in Vol.-% bei einem theoretischen Gehalt von 0,1306 Vol.-% Bleitetraäthyl.

Theoretischer Bleitetraäthyl- gehalt 0,1306 Vol.-%	Gewichtsanalytische Verfahren				Maßanalytische Verfahren				
	Chromat- Verfahren n. Edgar u. Calingaert	HCl-Ver- fahren n. Calingaert u. Gambrill	Sulfat- Verfahren n. Ulrich	FKFS- Chromat- Verfahren	Chromat- Titrier- Verfahren	DVL-Di- thizon- Verfahren	FKFS- Chromat- Titrier- Verfahren	FKFS- Jod- Verfahren	FKFS- Trichlor- essigsäure- Verfahren
Paraffin-Benzin	0,1308	0,1292	0,1306	0,1280	0,1299	0,1313	0,1288	0,1306	0,1294
Leuna-Benzin	0,1286	0,1304	0,1302	0,1298	0,1302	0,1320	0,1299	0,1298	0,1311
Rheinpreußen-Benzin	0,1278	0,1290	0,1288	0,1294	(0,1284)	(0,0418)	0,1294	0,1312	0,1315
Rumänisches Benzin	(0,1302)	(0,1268)	(0,1250)	(0,1246)	(0,1256)	(0,1387)	(0,1238)	—	0,1291
VT 702	0,1304	0,1279	0,1303	0,1288	0,1318	0,130	0,1302	0,1302	0,1290
VT 707	0,1304	0,1294	0,1312	0,1298	0,1297	0,1298	0,1309	0,1290	0,1295
VT 810	0,1288	0,1300	0,1296	0,1298	0,1301	0,1261	0,1298	0,1298	0,1305
Fehlergrenze	- 2,1	- 2,9	- 1,4	- 2,0	- 1,7	- 3,4	- 1,4	- 1,2	- 1,2
(GröÙte und kleinste Ab- weichung vom theoreti- schen Wert in Vol.-%).	+ 0,2	- 0,2	+ 0	- 0,6	+ 0,9	+ 1,1	+ 0,2	+ 0,5	+ 0,7

Zahlentafel 5. Bleiwerte in Vol.-% für verschiedene Flugmotoren-Kraftstoffe.

	Gewichtsanalytische Verfahren				Maßanalytische Verfahren				
	Chromat- Verfahren n. Edgar u. Calingaert	HCl-Ver- fahren n. Calingaert u. Gambrill	Sulfat- Verfahren n. Ulrich	FKFS- Chromat- Verfahren	Chromat- Titrier- Verfahren	DVL-Di- thizon- Verfahren	FKFS- Chromat- Titrier- Verfahren	FKFS- Jod- Verfahren	FKFS- Trichlor- essigsäure- Verfahren
A3-Flugkraftstoff	0,0541	0,0540	0,0528	0,0540	0,0556	0,0543	0,0550	0,0554	0,0555
B4-Flugkraftstoff	0,1175	0,1150	0,1178	0,1180	0,1179	0,1213	0,1182	0,1192	0,1202
C3-Flugkraftstoff	0,1181	0,1182	0,1184	0,1179	0,1178	0,1219	0,1180	0,1198	0,1210

Nachteilig erweist sich das Verfahren vor allem deshalb, weil zu einer Bleibestimmung die Zeit von etwa 4 h notwendig ist.

2. Salzsäure-Verfahren nach Calingaert und Gambrill [2].

Wie aus der Beschreibung hervorgeht, handelt es sich hier, im Grund genommen, auch um ein Chromatverfahren, nur wird vorher das Bleitetraäthyl in Bleichlorid übergeführt. Mit dem HCl-Verfahren werden ebenfalls — wie Zahlentafel 2 bis 5 zeigen — gute Werte erhalten; eine Ausnahme macht das rumänische Benzin. Allgemein sind die Werte etwas zu nieder.

Das Verfahren ist etwas umständlich, da zur Umsetzung des Bleitetraäthyls in Bleichlorid besondere Maßnahmen getroffen werden müssen. Die Fehlergrenze ist im Mittel für alle Verbleiungen -4,0 bis -1,0%. Die zu einer Bleibestimmung notwendige Zeit beträgt etwa 3 1/2 h, wobei das vorgeschlagene längere Stehenlassen des Bleichromatniederschlags nicht angerechnet ist.

3. Sulfat-Verfahren nach Ulrich [3].

Das im Kraftstoff enthaltene Bleitetraäthyl wird mit konzentrierter Salpetersäure zersetzt und in Bleisulfat übergeführt. Das Verfahren hat sich als einfach erwiesen, nur ist die größte Vorsorge zu treffen, daß beim Abrauchen der

Schwefelsäure das Bleisulfat nicht aus dem Porzellantiegel herausspritzt. Die im Mittel aufgetretenen Fehlergrenzen liegen zwischen -2,5 und +0,4%. Die Zeitdauer zur Durchführung einer Bleibestimmung beträgt etwa 2 h.

4. FKFS-Chromatverfahren.

Das FKFS-Chromatverfahren stellt nur eine Abkürzung des bereits von Edgar und Calingaert angegebenen Verfahrens dar. Die Abkürzung besteht darin, daß der Bleibromidniederschlag unmittelbar im Scheidetrichter mit heißer, verdünnter Salpetersäure umgesetzt und aus der erhaltenen wäßrigen Lösung das Blei als Bleichromat bestimmt wird. Es hat sich gezeigt, daß ein längeres Stehenlassen des Bleichromatniederschlags nicht notwendig ist.

Die Ergebnisse entsprechen durchaus den nach dem Calingaertschen Verfahren erhaltenen, weshalb das abgekürzte FKFS-Verfahren ohne Bedenken angewendet werden kann. Die aufgetretene Fehlergrenze ist -3,7 bis +0,3%. Die Zeitdauer für eine Bleibestimmung beträgt 1 1/2 h.

5. Chromat-Titrierverfahren [4].

Das Chromat-Verfahren zur maßanalytischen Bestimmung des Bleigehaltes in Kraftstoffen stellt eine Abkürzung gegenüber dem gewichtsanalytischen Verfahren dar, da das Wägen der Tiegel und die zum Teil lange Trockenzeit wegfällt. Zu beachten ist, daß das mit Kaliumjodid und Salz-

säure behandelte Filtrat eine geraume Zeit (mindestens 10 min) vor der Titration mit Natriumthiosulfat unter Luftabschluß stehenbleiben muß. Außer den für das Calingertsche Verfahren notwendigen Laboratoriumsgeräten werden zu dem Titrierverfahren noch Büretten benötigt, so daß in dieser Hinsicht keine Vereinfachung eintritt. Auch dieses Verfahren ist an das Laboratorium gebunden.

Die Fehlergrenze ist im Mittel für alle neun Kraftstoffe $-2,2$ bis $+0,6\%$. Zu einer Bleibestimmung wird ungefähr 1 h benötigt.

6. DVL-Dithizon-Titrierverfahren [5].

Das DVL-Schnellverfahren zur Bleibestimmung in Kraftstoffen beruht darauf, daß durch Sulfurychlorid das Bleitetraäthyl in Dichloräthylblei umgesetzt und mit Dithizon titriert wird.

Die Ergebnisse in Zahlentafel 2 bis 5 zeigen, daß nach diesem Verfahren im allgemeinen gute Ergebnisse erzielt werden. Allerdings ist darauf zu achten, daß die zu untersuchende Kraftstoffprobe keine Spur Alkohol enthält und vollkommen wasserfrei ist.

So konnte beim Rheinpreußen-Benzin die Feststellung gemacht werden, daß Spuren von Wasser vollkommen falsche Bleiwerte ergeben (Zahlentafel 2 bis 5).

Das rumänische Benzin zeigte Schwankungen, weshalb die gefundenen Werte nicht angegeben wurden.

Ferner wurde allgemein die Feststellung gemacht, daß niederverbleite Kraftstoffe (0,0326 Vol.-% Bleitetraäthyl) etwas ungenauere Werte ergeben als hochverbleite. Der gefundene Bleiwert ist bei den mit 0,0326 Vol.-% verbleiten Kraftstoffen durchweg zu nieder. Der Grund dafür ist jedenfalls in der unterschiedlichen Kristallisation des Dichloräthylbleis zu suchen. Die Größe und die Form dieser Kristalle sind maßgebend für die Filterdurchlässigkeit.

Es wurden deshalb von verschiedenen Dichloräthylbleiniederschlägen mikroskopische Aufnahmen mit 400facher Vergrößerung gemacht, die aus Bild 2 bis 7 zu ersehen sind. So geht zum Beispiel aus Bild 2 — das die Dichloräthylkristalle des mit 0,0326 Vol.-% verbleiten Leuna-Fahrzeug-Benzins darstellt — hervor, daß die einzelnen Kristalle sehr klein sind und dadurch nicht quantitativ am Filter hängenbleiben. Tatsächlich wird auch ein zu niedriger Bleiwert gefunden.

Die in Bild 3 dargestellten Kristalle des Spuren von Wasser enthaltenen Rheinpreußen-Benzins sind nicht einheitlich, weshalb hier ein falscher Wert erhalten wird.

Die Verschiedenheit der Dichloräthylbleikristalle geht auch aus den weiteren Bildern 4 bis 7 klar hervor. Gegenüber den in Bild 2 und 3 dargestellten kleinen Kristallen geben der VT 707-Kraftstoff (Bild 4) und der C3-Kraftstoff (Bild 5) etwas größere Kristalle. Die größten Dichloräthylbleikristalle sind beim Paraffin-Benzin (Bild 6) und beim B4-Kraftstoff (Bild 7) festzustellen.

Aus dem Vergleich der Kristallbildung mit den erhaltenen Ergebnissen für die einzelnen Kraftstoffe kann gefolgert werden, daß die Genauigkeit mit der Größe der Dichloräthylbleikristalle zunimmt.

Das DVL-Verfahren ist nur im Laboratorium ausführbar, verlangt bestimmte Laboratoriumsgeräte und ein gut eingearbeitetes Personal. Die verhältnismäßig hohe Fehlergrenze mit $-4,7$ bis $+0,3$ ist hauptsächlich auf die niederen Bleiwerte des Leuna-Fahrzeug-Benzins zurückzuführen. Das Rheinpreußen-Benzin und das rumänische Benzin sind dabei wieder berücksichtigt. Eine Bleibestimmung dauert 35 min, wobei das Reinigen und Trocknen der Glasgeräte und die Herstellung der Titerlösung nicht eingerechnet sind.

7. FKFS-Titrierverfahren.

Das FKFS-Chromat-Titrierverfahren entspricht in der Analysendurchführung dem gewöhnlichen Chromat-Titrierverfahren, es stellt nur eine Abkürzung in der Hinsicht dar, daß der Bleichromatniederschlag nach dem unter II 4. be-



Bild 2. Dichloräthylbleikristalle von mit 0,0326 Vol.-% verbleitem Leuna-Benzin.

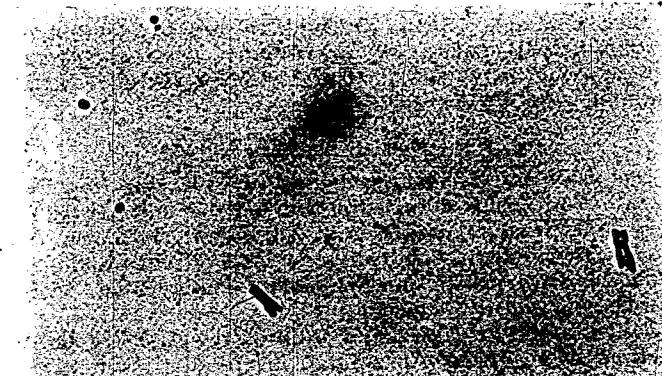


Bild 3. Dichloräthylbleikristalle von mit 0,0326 Vol.-% verbleitem Rheinpreußen-Benzin (enthält Spuren von Wasser).

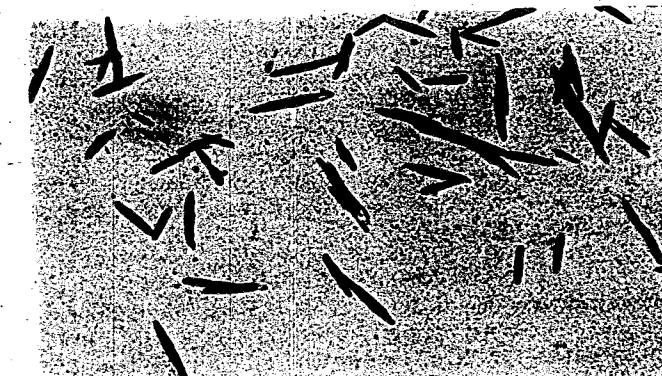


Bild 4. Dichloräthylbleikristalle von mit 0,1306 Vol.-% verbleitem VT 707-Kraftstoff.



Bild 5. Dichloräthylbleikristalle von C3-Kraftstoff.



Bild 6. Dichloräthylbleikristalle von mit 0,1306 Vol.-% verbleitem Paraffin-Benzin.



Bild 7. Dichloräthylbleikristalle von B4-Kraftstoff.

schriebenen FKFS-Chromatverfahren hergestellt wird. Das Verfahren war bei allen Kraftstoffen mit Ausnahme des rumänischen Benzins gut anwendbar. Die Fehlergrenze beträgt $-2,6$ bis $+0,07\%$. Die Zeitdauer für eine Bleibestimmung beträgt ungefähr 40 min.

8. FKFS-Jodverfahren [6].

Das FKFS-Jodverfahren beruht darauf, daß das Bleitetraäthyl mittels Jod in Bleitetraäthyljodid und Äthyljodid übergeführt wird. Wesentlich ist bei diesem Verfahren, daß keine wäßrige Jodlösung, sondern alkoholische Jodlösung verwendet wird, wobei der Äthylalkohol mindestens 96 bis 98 Proz. sein soll.

Zahlentafel 2 bis 5 zeigen, daß durchweg gute Ergebnisse erzielt werden. Eine Ausnahme macht das rumänische Benzin, das so viel Ungesättigte enthält, daß das Jod angelagert wird und dadurch ein zu hoher Bleiwert gefunden wird. Das FKFS-Verfahren stellt ein ausgesprochenes Schnellverfahren dar. Es ist sehr einfach und nicht an das Laboratorium gebunden. Es fand deshalb bereits an der Front Verwendung. Die Fehlergrenze beträgt im Mittel $-0,5$ bis $+1,2\%$. Diese erstaunlich kleine Fehlergrenze ist teilweise darauf zurückzuführen, daß das Laboratoriumspersonal mit diesem Verfahren gut vertraut ist. Aber auch bei einem ungeübten Prüfer dürfte der Fehler im allgemeinen innerhalb der Fehlergrenzen der übrigen Verfahren bleiben. Die für eine Bleibestimmung benötigte Zeit beträgt 10 min. Diese kurze Zeit wird bis heute noch von keinem anderen Verfahren erreicht.

9. FKFS-Trichloressigsäureverfahren.

In Ergänzung des Jodverfahrens [6], das als Schnellverfahren an der Front bereits eingesetzt ist, wurde im Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart das Trichloressigsäureverfahren entwickelt, das sowohl peroxydhaltige als auch olefinreiche Kraftstoffe mit großer Genauigkeit zu untersuchen gestattet.

Durch die Trichloressigsäure wird das Bleitetraäthyl über Bleitriäthyltrichloracetat und Bleitriäthylchlorid in Bleichlorid übergeführt. Das im Bleichlorid enthaltene Blei wird als Bleichromat maßanalytisch bestimmt. Aus Zahlentafel 2 bis 5 geht hervor, daß durchweg bei allen Kraftstoffen — auch bei Rheinpreußen-Benzin und rumänischem Benzin — eine verhältnismäßig geringe Streugrenze auftritt.

V. Zusammenfassung.

Der Bleitetraäthylgehalt in zehn verschiedenen Kraftstoffen wurde nach neun Verfahren quantitativ bestimmt. Hierbei wurde der Bleigehalt in den Grenzen von 0,0326 bis 0,1306 Vol.-% geändert.

Im allgemeinen liefern alle Verfahren brauchbare Ergebnisse. Eine Ausnahme bilden bei fast allen Verfahren ungesättigte und peroxydhaltige Kraftstoffe. Ein Nachteil der älteren Verfahren ist die lange Zeitdauer einer Untersuchung.

Zahlentafel 6. Die nach den untersuchten Bleiverfahren auftretenden Fehlergrenzen und die für eine Bleibestimmung benötigte Zeit.

	Fehlergrenze in % Größe und kleinste Abweichung vom theor. Wert aus dem Mittel aller verbleiten Kraftstoffe	Zeitdauer für eine Blei- bestimmung
Chromat-Verfahren nach Edgar und Calingaert .	$-2,5$ bis $+0,5$	4 h
HCl-Verfahren nach Ca- lingaert und Gambrill .	$-4,0$ bis $-1,0$	3½ h
Sulfat-Verfahren nach Ulrich	$-2,5$ bis $+0,4$	2 h
FKFS-Chromat- Verfahren	$-3,7$ bis $+0,3$	1 h
Chromat-Titrier- Verfahren	$-2,2$ bis $+0,6$	1 h
DVL-Dithizon-Titrier- Verfahren	$-4,7$ bis $+0,3$	35 bis 40 min
FKFS-Chromat-Titrier- Verfahren	$-2,6$ bis $+0,1$	40 min
FKFS-Jod-Verfahren . .	$-0,5$ bis $+1,2$	10 min
FKFS-Trichloressig- säure-Verfahren	$-0,5$ bis $+1,98$	30 min

Die in letzter Zeit entwickelten Schnellverfahren der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt und des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart haben den großen Vorteil, daß sie viel weniger Zeit erfordern. Das DVL-Verfahren bereitet bei einigen Kraftstoffarten Schwierigkeiten, die in der unterschiedlichen Kristallisation des durch Sulfurylchlorid erhaltenen Dichloräthylbleis liegen. Es ist an die Ausführung im Laboratorium gebunden. Eine Bleibestimmung dauert — ohne die Zeit für das Reinigen der Glasgeräte und das Herstellen der Titerlösung — 35 min.

Das FKFS-Jodverfahren ist mit Ausnahme von sehr ungesättigten und peroxydhaltigen Kraftstoffen allgemein gut brauchbar, schnell durchführbar und deshalb besonders für fahrbare Laboratorien geeignet. Die Zeitdauer für eine Bleibestimmung beträgt nur 10 min. Der Fehler liegt bei einem geübten Prüfer in den Grenzen $-0,5$ bis $+1,2\%$, ist also sehr gering.

In Ergänzung des Jodverfahrens wurde im Forschungsinstitut für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart ein weiteres Verfahren entwickelt, bei dem das Bleitetraäthyl mit Hilfe von Trichloressigsäure in Bleichlorid umgesetzt und das Blei maßanalytisch als Bleichromat bestimmt wird. Dieses Verfahren gestattet, den Bleigehalt auch stark olefin- und peroxydhaltiger Kraftstoffe mit großer Genauigkeit zu ermitteln. Gegenüber dem Jodverfahren hat es den Nachteil, daß es an die Ausführung im Laboratorium gebunden ist und eine Bleibestimmung 30 min dauert.

VI. Schrifttum.

- [1] Edgar u. Calingaert, Analytical Reactions of Tetraethyl. Ind. Engng. Chem. Anal. Ed. Bd. 1 (1929) S. 221.
- [2] Holde, D., Kohlenwasserstofföle und Fette. 7. Auflage, Berlin (1933) S. 215.
- [3] Calingaert G. u. Gambrill, C. M., Eine verbesserte Methode zur Bleibestimmung in Benzin. Öl und Kohle, Bd. 15 (1939) S. 782.
- [4] Ulrich, W., Über eine Schnellmethode zur Bestimmung des Bleitetraäthylgehaltes in Kraftstoffen. Öl und Kohle, Bd. 14 (1938) S. 131.
- [5] Chromat-Titrier-Verfahren, Bauvorschriften für Flugmotoren (BVM). Ausgabe Okt. 1940 S. 59.
- [6] Morghen, J., Ein exaktes Schnellverfahren zur Bestimmung von Blei in Kraftstoffen. Jahrbuch 1941 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. II 456.
- [7] Widmaier, O., FKFS-Schnellverfahren zur Bestimmung des Bleigehalts in Flugmotorenkraftstoffen. Jahrbuch 1941 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. II 453.
- [8] Widmaier, O., FKFS-Trichloressigsäureverfahren zur Bleibestimmung in Kraftstoffen. Nichtveröffentlichter Bericht des Forschungsinstituts für Kraftfahrwesen und Fahrzeugmotoren an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Metalllichtbogenschweißung vergütbarer Stähle*).

Von Werner Hummitzsch.

Bericht der Gebr. Böhler & Co. A.-G., Edelstahlwerke, Kapfenberg.

Ziel der Untersuchung ist, legierte Mantelschweißelektroden zu nennen, deren Schweißgut in Verbindung mit verschiedenen dicken Blechen der Fliegwerkstoffe 1265, 1604 und 1452 Festigkeiten nach der Vergütung ergeben, die der Vergütestigkeit des jeweils geprüften Bleches entsprechen. Die Grenze der Nahtstärke, bis zu der eine Vergütbarkeit durch Auslegung der Schweiße mit aufgeschmolzenem Grundwerkstoff möglich ist, soll ermittelt werden.

Es sollen einige Versuchsergebnisse vergütbarer elektrisch geschweißter Verbindungen an Blechen des Flugzeugbaues mitgeteilt werden. Bisher wurde mit Erfolg die Gasschmelzschweißung angewandt. H. Cornelius¹⁾ erreichte dabei Festigkeiten an vergütbaren Schweißverbindungen der im Flugzeugbau üblichen Stähle bis zu etwa 110 kg/mm², wobei im Reißversuch die Brüche immer im Blech auftrafen. Als Zusatzdrähte dienten chrommolybdän- bzw. manganchromvanadin-legierte Stähle. Die Blechstärke betrug 1,5 mm und die Anlaßtemperatur 575°C, nachdem vorher bei 850 bis 870°C in Öl gehärtet wurde, was einer Blechfestigkeit von 100 bis 110 kg/mm² entspricht.

Vorliegender Bericht befaßt sich mit der Lichtbogenschweißung von Flugzeugblechen. Es sollen die Grenzen gezeigt werden, bis zu welchen Festigkeiten und Blechdicken mit verschiedenen legierten Elektroden gearbeitet werden kann. Beim Lichtbogenschweißen macht sich gegenüber der Gasschmelzschweiße die höhere Schweißgeschwindigkeit und die geringere Breite der wärmebeeinflussten Zone neben der Naht vorteilhaft bemerkbar. Hierdurch tritt natürlich ein geringerer Verzug auf, wodurch Richtarbeiten am fertigen Stück eingespart werden können. Außerdem gibt die Lichtbogenschweißung den Vorteil, dickere Bleche als 3 mm mit einer zähen feinkörnigen Schweiße zu verbinden. Über elektrisch geschweißte Verbindungen dünner Bleche berichten die Amerikaner Johnson²⁾ und Smith³⁾. Im deutschen Flugzeugbau hat die ersten richtungsweisenden Versuche H. Cornelius⁴⁾ mit unlegierten und legierten Elektroden unternommen, wobei sich ein Mantelstab, dessen Kerndraht aus einem Chrom-Molybdän-Stahl bestand, für Festigkeiten bis 97,5 kg/mm² an 1 und 2 mm starken Blechen im vergüteten Zustand als brauchbar erwies. Die Blechproben wurden nach dem Schweißen bei 850°C in Öl gehärtet und auf 600°C angelassen.

Die Zielsetzung dieser Untersuchung ist, Elektroden zu finden, die bei Blechen von mehr als 3 mm Dicke Festigkeiten in ihren Verbindungen im vergüteten Zustande von

mehr als 90 kg/mm² ergeben. Erprobt wurden drei verschiedene Blechsorten, deren Zusammensetzung und physikalischen Werte in Zahlentafel 1 angegeben sind. Der manganlegierte Stahl weist nach dem Vergüten 92 bis 98 kg/mm², der manganchromvanadin-legierte Stahl 105 bis 120 kg/mm² und der chrommolybdän-legierte Stahl 110 bis 130 kg/mm² Festigkeit auf. Die in Zahlentafel 1 angegebenen Werte beziehen sich auf Blechdicken von 2 bis 12 mm, wobei die höheren Werte den dünneren Blechen eigen sind. Die Bleche wurden durch Härten bei 870°C in Öl und Anlassen auf 500°C ½ bis 2 h je nach der Blechdicke vergütet. Die Bleche erhielten vor dem Schweißen eine Abschragung, so daß sie in einer Stumpfnah mit 70° geschweißt werden konnten. Die zur Schweißung vorgesehenen Bleche lagen im geglähten Zustand vor, die Vergütung wurde nach dem Schweißen vorgenommen.

Als Zusatzdraht dienten vier verschiedene Elektroden, deren Zusammensetzung und Eigenschaften aus Zahlentafel 2 zu ersehen sind. Alle Stäbe waren dick umhüllt. Die Elektrode A hat im Gegensatz zu den drei anderen eine basische Hülle, die hauptsächlich aus Kalkspat und Flußspat besteht, frei von Mangan ist, aber einen desoxydierenden und legierenden Stoff in Form von Ferrotitan enthält. Sie wird am Pluspol geschweißt. Sie schweißt gegenüber den Elektroden B, C und D etwas langsamer, hat aber dafür einen guten Einbrand. Ihr Kerndraht ist manganlegiert, s. Zahlentafel 2. Die Elektroden B, C und D besitzen einen erzsaurigen Mantel, der hauptsächlich aus Erzen, Silikaten und Ferromangan besteht. Mantelstäbe mit solchen Hüllen zeichnen sich durch eine hohe Abschmelzgeschwindigkeit

Zahlentafel 2. Chemische Zusammensetzung der Elektroden und ihres durch Grundwerkstoffe unbeeinflussten Schweißgutes.

	C %	Si %	Mn %	Cr %	Mo %	V %	Ti %
Elektrode A mit basischer Hülle							
Kerndraht	0,11	0,13	1,73	—	—	—	—
reines Schweißgut	0,09	0,10	1,27	—	—	—	0,13
Elektrode B mit erzsaurer Hülle							
Kerndraht	0,17	0,19	0,58	0,67	0,19	—	—
reines Schweißgut	0,11	0,06	0,43	0,32	0,18	—	—
Elektrode C mit erzsaurer Hülle							
Kerndraht	0,26	0,37	1,21	0,89	—	0,17	—
reines Schweißgut	0,15	0,13	1,77	0,58	—	0,08	—
Elektrode D mit erzsaurer Hülle							
Kerndraht	0,46	0,14	1,35	1,28	0,37	—	—
reines Schweißgut	0,23	0,06	1,17	0,67	0,32	—	—

Zahlentafel 1. Chemische Zusammensetzung und Vergütestigkeit der Bleche.

Fliegnorm	Legierung	C %	Si %	Mn %	Cr %	Mo %	V %	Wärmebehandlung	Festigkeit kg/mm ²
1265	Mn	0,18	0,45	2,23	—	—	—	870° Öl 500° C	92—98
1604	Mn-Cr-V	0,27	0,25	1,26	0,79	—	0,18	870° » 500° »	105—120
1452	Cr-Mo	0,26	0,30	0,67	1,08	0,17	—	870° » 500° »	110—130

Die Werte entstammen 2 bis 12 mm dicken Blechen. Die Festigkeit der geglähten Bleche lag bei 65 bis 73 kg/mm².

Man schweißt am Minuspol. Das Erz der Hülle und Luft-sauerstoff verbrennen das Mangan. Durch diesen Vorgang werden Wärmemengen frei, die die Abschmelzleistung der Elektrode erhöhen, infolgedessen schweißen diese Stäbe schneller als die manganfreien basischen Stäbe. Durch den großen Erzanteil brennen natürlich auch die Legierungsbestandteile des Kerndrahtes heraus. Infolgedessen ist der Legierungsverlust bei Gebrauch von erzsauren Hüllen bedeutend größer als bei basischen Hüllen. Der Kerndraht der Elektrode *B* ist chrommolybdän-legiert und entspricht dem Fliegwerkstoff 1453, der Kerndraht der Elektrode *C* ist manganchromvanadium-legiert und entspricht dem Fliegwerkstoff 1604, und der Kerndraht der Elektrode *D* ist chrommolybdän-legiert und zeichnet sich gegenüber 1453 durch einen höheren Kohlenstoff-, Mangan-, Chrom- und Molybdän-Gehalt aus. Die Hüllen der drei Elektroden sind etwa gleich aufgebaut. Die physikalischen Werte einer Schweißung werden abgesehen von der Beschaffenheit der Elektrode auch durch den Grundwerkstoff beeinflusst. Je höher derselbe legiert ist, um so mehr wird die Schweißung von ihm Legierungsbestandteile aufnehmen, und dies um so mehr, je stärker sie sich mit ihm mischen kann. Der Grad der Mischung ist um so größer, je mehr Grundwerkstoff aufgeschmolzen wird.

Über diese Vorgänge berichten eingehend F. Rapatz, W. Hummitzsch und F. Schütz⁹⁾. Ferner spielt die Abkühlungsgeschwindigkeit eine bedeutende Rolle. Je größer der Anteil an härtenden Bestandteilen ist, um so mehr Härte wird das Schweißgut annehmen, je rascher es abkühlt. Um nun von der mischenden Wirkung des Grundwerkstoffes unabhängig zu sein, wurden Barren aus reinem Schweißgut auf Weicheisen dick aufgetragen und aus dem Mischung mit dem Grundwerkstoff unbeeinflussten Teile des Barrens Zerreißproben $d \approx 10 \text{ mm}$, $l = 5d$ herausgearbeitet. Vorher wurden die Barren der gleichen Vergütungsbehandlung unterworfen, wie sie für die Blechvergütung vorgesehen ist, nämlich 870°C Öl und 500°C angelassen. Auf diese Weise erhält man die physikalischen Werte des durch Mischung unbeeinflussten Schweißgutes. In Zahlentafel 3 sind diese Werte aufgeführt. Gleichzeitig sind die Festigkeiten des unbehandelten, nur der Luftabkühlung überlassenen Schweißgutes gemessen nach Brinell angeführt. Das Schweißgut der Elektrode *A* zeigt den niedrigsten Wert. Die von *B* und *C* sind etwa gleich und der von *D* am höchsten. Bei den Elektroden *A*, *B* und *C* bestehen keine nennenswerten Unterschiede zwischen der Festigkeit der luftabgekühlten und der ölvergüteten Proben. Ihre Härtezunahmen sind gering. Die chemischen Zusammensetzungen ihrer Schweißungen entsprechen noch nicht einem Vergütungsstahl. Anders bei der Elektrode *D*, hier ist tatsächlich eine Härtezunahme vorhanden und somit die Möglichkeit einer Vergütung gegeben. Die Brinellfestigkeit der luftabgekühlten Schweißung betrug 152 kg/mm², die der vergüteten Probe 132 kg/mm². Der Bruch des vergüteten reinen Schweißgutes ist sehnig und zäh, Bild 1.

Nachdem wir uns mit der Vergütbarkeit des reinen, durch den Grundwerkstoff unbeeinflussten Schweißgutes befaßt haben, soll gezeigt werden, wie durch die Mischung mit dem aufgeschmolzenen legierten Blech die Schweißung dennoch in Grenzen eine Vergütbarkeit erhält. 2, 5, 8 und 12 mm dicke geglühte Bleche wurden verwendet, ihre Kanten waren abgeschragt. Als Elektroden dienten die Stähle *A*, *B*, *C* und *D* nach Zahlentafel 2. Nach dem Schweißen wurden die Verbindungen vergütet, und zwar die Bleche des Fliegenstahles 1265 auf über 90 kg/mm², die des Bleches 1604 auf über 105 kg/mm² und die des Bleches 1252 auf über 120 kg/mm². Hierfür genügte eine Ölvergütung von 870°C bei 500°C Anlaßtemperatur von 1/2 bis 2 h Anlaßdauer. Aus den vergüteten Blechen wurden Zerreißproben nach DIN Vornorm 120 A Bild 1 herausgeschnitten und mit besserer Raupe geprüft. Vergleicht man die Festigkeitswerte der Schweißverbindungen der gleichen Elektrode, so

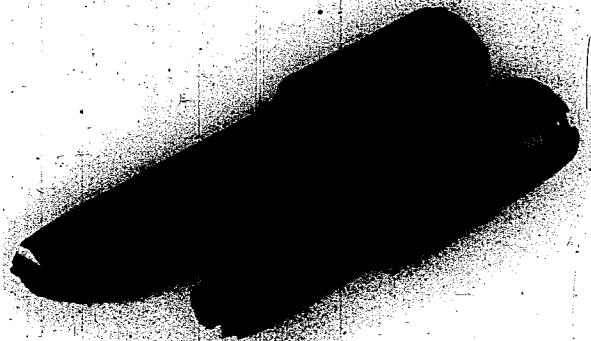


Bild 1. Reißprobe des auf 132 kg/mm² vergüteten reinen Schweißgutes der Elektrode *D*.

stellt man mit steigender Blechdicke eine Abnahme fest, Zahlentafel 4. Besonders auffällig ist der Unterschied zwischen den 5 und 12 mm dicken Blechen. Sie bestehen bei den Verbindungen der Elektroden *A*, *B* und *C*, während sie bei der Elektrode *D* nicht in Erscheinung treten. Die Erklärung für dieses unterschiedliche Verhalten liegt in dem verschiedenen Grade der Mischung und somit der Auflegung durch den aufgeschmolzenen Blechwerkstoff. Wie aus Zahlentafel 3 ersichtlich, ergibt das durch Mischung unbeeinflusste reine Schweißgut bedeutend niedrigere Festigkeitswerte als die Verbindungen von Zahlentafel 4. Die Mischung zwischen Grundwerkstoff und Schweißgut ist bei den dünnen Blechen am stärksten und nimmt mit der Anzahl der erforderlichen Raupenlagen ab. Bei 12 mm Blechdicke benötigt man bei Gebrauch von 4 mm Elektroden bereits vier Lagen, wobei die Mischung mit dem Grundwerkstoff an Einfluß verliert. Hieraus erklärt sich das Absinken der Festigkeitswerte gegenüber den dünneren Blechen. Es werden bereits die Werte des reinen Schweißgutes nach Zahlentafel 3 erreicht. Die Schweißung der Elektrode *D* macht

Zahlentafel 3. Physikalische Werte des reinen Schweißgutes an Reißproben $l = 5d$, $d = 10 \text{ mm}$.

	Luftabk. kg/mm ²	vergütet 870° C Öl 500° C 1 Stunde	Streckgrenze kg/mm ²	Festigkeit kg/mm ²	Dehnung %	Einschnürung %
Elektrode <i>A</i>	63	50,9	59,2	28,5	56,0	
Elektrode <i>B</i>	76	68,0	74,7	16,3	48,3	
Elektrode <i>C</i>	74	70,6	76,4	16,1	51,0	
Elektrode <i>D</i>	152,0	—	132,0	11,0	39,2	

Zahlentafel 4. Festigkeitswerte der vergüteten Schweißverbindungen.

Elektrode	Stahl des Bleches	Blechdicke mm	Festigkeit der Verbindung kg/mm ²	Bruch	Blechfestigkeit kg/mm ²
<i>A</i>	1265	2	93—96	Blech	93—96
		5	92—97	Blech	92—97
		12	72—74	Schweißung	92—95
		5	98—105	Schweißung	123—126
		2	100—105	Schweißung	118—120
<i>B</i>	1604	5	89—98	Schweißung	107—115
		2	108—115	Schweißung	118—120
		5	103—107	Schweißung	110—115
<i>C</i>	1604	12	78—81	Schweißung	105—110
		2	107—113	Schweißung	118—120
		5	103—109	Schweißung	110—118
<i>D</i>	1452	12	76—78	Schweißung	105—110
		2	122—125	Blech	123—125
		5	121—125	Blech/Sch.	123—126
		8	121—125	Blech/Sch.	123—126
		12	119—124	Schweißung	125—128

Alle Verbindungen wurden bei 870°C in Öl gehärtet und bei 500°C angelassen.

⁹⁾ Autogene Metallbearbeitung Bd. 33 (1940), S. 193—200 und 211—215.

insofern eine Ausnahme, weil sie wie ein Vergütungsstahl legiert ist und somit die gleichen Vergütungseigenschaften wie der Blechwerkstoff hat. Ihre Schweiße ist gegen die Mischung mit auf gleiche Festigkeit vergütbaren Blechwerkstoff unempfindlich.

Die Elektrode *A* mit der basischen Hülle erreicht an den Blechen des Fliegwerkstoffes 1265 bis zu 5 mm Blechdicke die Blechfestigkeit von über 90 kg/mm². Bei den Fliegwerkstoffen 1604 und 1452 wurde bei 2 und 5 mm dicken Blechen, die Blechfestigkeit nicht erreicht, die Brüche während des Zerreißversuches traten in der Schweiße auf. Die Schweißungen besitzen im Vergleich zum Blech bei gleicher Vergütungsbehandlung eine zu niedrige Festigkeit, sie genügen also nicht. Die Elektroden *B* und *C* mit den erzsaurigen Hüllen können gleichzeitig betrachtet werden. Sie haben wohl in ihren Verbindungen an 2 und 5 mm starken Blechen nach Fliegnorm 1604 höhere Festigkeiten als die Schweißungen der Elektrode *A*. Aber die Blechfestigkeit erreichen sie noch nicht ganz nach der Vergütungsbehandlung. Auch ist ein bedeutender Unterschied zwischen Blech- und Schweißgutfestigkeit an den 12 mm starken Proben zu erkennen.

Mit einer etwas höher legierten Elektrode als *B* erreichte H. Cornelius^{*)} an 1 und 2 mm starken chrommolybdänlegierten Blechen bei einer Vergütung auf etwa 92 bis 95 kg/mm², dies entspricht einer Anlaßtemperatur von 600°C, Festigkeiten in der Schweiße, die höher lagen als die Blechfestigkeit und somit der Bruch während der Belastung im Blech erfolgte. Diese Schweiße genügte der Blechfestigkeit. Die Elektrode *D* mit der erzsaurigen Hülle und dem höher legierten chrommolybdänhaltigen Kerndraht ergibt ein Schweißgut, das bereits die Eigenschaften eines Vergütungsstahles besitzt. Die Proben des 2 mm dicken Bleches rissen alle im Blech, die von 5 und 8 mm ebenfalls im Blech, teils im Übergang von der Schweiße zum Blech. Bei dem 12 mm

^{*)} Siehe Anmerkung/4.

dicken Blech brach die Schweiße auf. Jedoch ist der Unterschied zwischen der Festigkeit des Bleches und der Schweiße nicht erheblich. Somit ist bis zu 8 mm dicken Blechen die Festigkeit der Schweiße ausreichend und bei 12 mm nahezu erreicht.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Elektrode *A* für Vergütungsfestigkeiten bis zu 98 kg/mm² bei Blechen bis 5 mm Dicke mit Erfolg gebraucht werden kann, die Elektrode *D* bis zu Festigkeiten von 125 kg/mm² bei Blechen bis 8 mm Dicke.

In Bild 2 bis 5 sind die Gefügebilder der vergüteten Schweißungen gezeigt. Über ihren Aufbau ist wenig zu sagen. Besonders auffällig ist die sehr feine Struktur der Schweiße *D*, Bild 5.

Die Elektroden *A* bis *D* wurden an Rundnähten auf ihre Reißfähigkeit geprüft. Die 3 und 4 mm Elektroden wurden außerdem noch an der Doppelkehlnahtprobe nach der Reichsbahn auf Warmrißempfindlichkeit untersucht. Die Elektrode *D* war nicht in allen Fällen rißbeständig. Reißversagen waren die Schweißungen der Elektrode *A*, *B* und *C*.

Das Schweißgut der Elektrode *D* härtet bereit stark bei Luftabkühlung. Es erreicht 152 kg/mm². Ein solches Schweißgut ist spröde und verträgt keine Schläge noch Stöße. Will man einen mit dieser Elektrode geschweißten Körper richten, so muß man denselben ausglühen oder auf die gewünschte Festigkeit vergüten, damit er zähe wird.

Zusammenfassung.

Fliegwerkstoffe 1265, 1452 und 1604 wurden in den Abmessungen von 2 bis 12 mm Dicke mit vier verschiedenen Mantelelektroden geschweißt und die Vergütungsfestigkeiten ihrer Verbindungen bestimmt. Für Bleche bis 5 mm Dicke erwies sich eine Elektrode, die eine mangan-titanlegierte Schweiße ergibt, bis zu Festigkeiten von 98 kg/mm² als brauchbar, für Festigkeiten bis zu 125 kg/mm² an Blechen bis 8 mm Dicke eine chrommolybdänlegierte Elektrode.

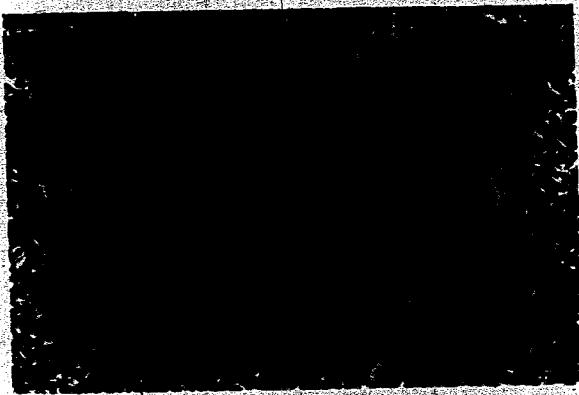


Bild 2. Elektrode *A*.



Bild 3. Elektrode *B*.



Bild 4. Elektrode *C*.

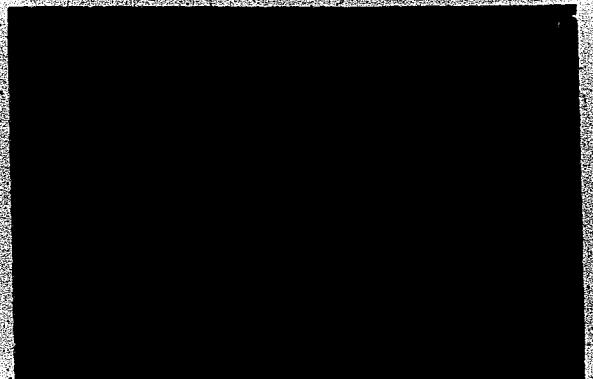


Bild 5. Elektrode *D*.

Bild 2 bis 5. Gefügebilder des Schweißgutes aus den 5 mm starken Verbindungen. Vergr. 400fach.

J. Bukowski

Systematische Windkanalmessungen an Luftschauben

Messergebnisse des Aerodynamischen Instituts
der Technischen Hochschule Warschau

Herausgegeben mit Unterstützung der
Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring,
Braunschweig

Umfang 88 Seiten A 4 mit 84 Bildern und 61 Zahlentafeln

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 7,50 RM
je Exemplar einschl. Porto und Verpackung durch die ZWB

B. v. Schlippe und R. Dietrich

Zur Mechanik des Luftreifens

Herausgegeben von der

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen
der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)

Umfang 20 Seiten A 4 mit 51 Bildern

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 3,— RM
je Exemplar einschl. Porto und Verpackung durch die ZWB

J. Nikuradse

Turbulente Reibungsschichten an der Platte

Herausgegeben von der

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen
der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)

Umfang 24 Seiten A 4 mit 39 Bildern

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 3,— RM
je Exemplar zuzüglich Porto und Verpackung durch die ZWB

J. Nikuradse

Laminare Reibungsschichten an der längs angeströmten Platte

Ein Beitrag zur Prandtl'schen Grenzschichttheorie

Herausgegeben von der

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen
der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)

Umfang 46 Seiten A 4 mit 76 Bildern

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 6,— RM
je Exemplar zuzüglich Porto und Verpackung durch die ZWB