Technischer Prüfstand

Nur für den Dienstgebrauch

D 5

Technische Berichte

und

Vorabdrucke

aus

Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung

Lieferung 5 und 6

8002

Herausgegeben
von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB) - Berlin-Adlershof

Band 9 (1942) Heft 7 (30. Dezember) Seite 201 bis 232

1 10

Inhaltsverzeichnis

„Die Fahrtrichtungshaltung des Flugzeugs am Boden und die Neigung zum seitlichen Ausbrechen". Von J. Rotta, Bremen 201

„Zusatz-Beanspruchungen in Stahl-Dural-Konstruktionen infolge Wärmeausdehnungen". Von R. Freyer, Bremen 215

„Verhalten der Außenluftthermometer bei hohen Fluggeschwindigkeiten in der gestörten Strömung am Flugzeug". Von W. Hofmann, Berlin 221

„Verfahren zum Messen auch von sehr kleinen (Thermo-) Spannungen über Schleifringe". Von G. Fleißner und H. Viehmann, Berlin-Adlershof . . 227

„Messungen beim Ausströmen von Wasserstoff". Von E. Strauß, Berlin-Adlershof 229

Aus deutschen Forschungsanstalten 230

Zur Beachtung!

Dieser Bericht ist bestimmt für die Arbeiten im Dienstbereich des Empfängers. Der Bericht darf innerhalb dieses Dienstbereichs nur an Persönlichkeiten ausgehändigt werden, die aus dem Inhalt Anregungen für ihre Arbeiten zu schöpfen vermögen.

Verwendung zu Veröffentlichungen (ganz oder teilweise) sowie Weiterleitung an Persönlichkeiten außerhalb des Dienstbereichs des Empfängers ist ausgeschlossen.

Der Bericht ist unter Stahlblechverschluß mit Patentschloß zu halten.

Druck: Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB) — Berlin-Adlershof

8903

TECHNISCHE BERICHTE

Herausgegeben
von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB) / Berlin-Adlershof

Bd. 9 (1942) Heft 7

Die Fahrtrichtungshaltung des Flugzeugs am Boden und die Neigung zum seitlichen Ausbrechen

J. Rotta, Bremen

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau GmbH., Bremen.

II. Teilbericht.

Die Fahrtrichtungsstabilität des ungefederten Flugzeugs.

P 39 91

Übersicht: Auf die Ergebnisse des ersten Teilberichtes[1]) aufbauend wird die Fahrtrichtungsstabilität des Flugzeugs unter Berücksichtigung der Luftkräfte, jedoch unter Vernachlässigung des Einflusses der Fahrwerks- und Reifenfederung untersucht.

Gliederung

I. Einleitung
II. Bezeichnungen
III. Luftkräfte am Flugzeug auf dem Boden
IV. Aufstellung der dynamischen Gleichgewichtsbedingungen für Dreipunktlage des Flugzeugs
V. Bewegungsformen
VI. Einfluß der Luftkräfte
VII. Einfluß der Baugrößen und Betriebsbedingungen
VIII. Rollen des Flugzeugs in Zweipunktlage
IX. Zusammenfassung
X. Schrifttum

I. Einleitung

In dem kürzlich erschienenen ersten Teil der vorliegenden Arbeit[1]) wurde über die Fahrtrichtungsstabilität eines dreirädrigen Fahrzeugs berichtet, wobei keine Luftkräfte im Ansatz der Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigt wurden. Es ist offenbar, daß diese Untersuchungen, auf die Fragen des rollenden Flugzeugs angewendet, nicht recht befriedigen können. Schon bei Untersuchung der Fahrmechanik des schnellfahrenden Kraftfahrzeugs empfiehlt es sich, die durch den Fahrtwind zur Wirkung kommenden Luftkräfte zu berücksichtigen. Vielmehr trifft dies selbstverständlich für das Flugzeug zu, dessen eigentlicher Zweck es ist, sich frei im Luftraum zu bewegen. Es ist also zu erwarten, daß die Auftriebskräfte und die in der $x_e y_e$-Ebene wirkenden aerodynamischen Kräfte und Kräftepaare ganz beachtlichen Einfluß auf das Fahrverhalten des Flugzeugs am Boden ausüben. Die Untersuchung dieses Einflusses ist die Aufgabe des vorliegenden zweiten Teiles. Die Ergebnisse des ersten Teiles sind somit nur als eine grundlegende Orientierung anzusehen, von der aus schrittweise zu verfeinerten Untersuchungen aufgestiegen werden soll, die den tatsächlich am rollenden Flugzeug herrschenden Verhältnissen besser entsprechen.

1) Vgl. Technische Berichte Bd. 9 (1942) Nr. 2, S. 37.

Die Stabilitätsgleichungen für das ungefederte Fahrzeug, wie sie im ersten Teil entwickelt wurden, sind einigermaßen verwickelt und nicht sehr übersichtlich. Durch Hinzutreten der Glieder aus den Luftkräften werden die Formeln noch umfangreicher, und die Übersichtlichkeit leidet weiter. Es drängt sich deshalb die Frage auf, ob nicht einige Vereinfachungen zulässig sind. Die nächstliegende Vereinfachung ist die Vernachlässigung von Vor- und Nachspur. Bei der immehin recht zweifelhaften Zweckmäßigkeit des Schrägstellens der Hauptfahrwerkräder (vgl. ersten Teil) wäre es wirklich überflüssig, die Stabilitätsgleichungen mit dem hierfür zusätzlich erforderlichen Aufwand zu belasten. Darüber hinaus scheinen jedoch weitere wesentliche Vereinfachungen kaum empfehlenswert zu sein, wenn nicht der Gültigkeitsbereich der Formeln eingeschränkt werden soll. Die Gültigkeit der bisher abgeleiteten Beziehungen erstreckt sich auf ein Gebiet, das einmal vom ungebremsten Zustand bis zum gebremsten Zustand mit blockierten Rädern und zum anderen von $\varepsilon = 0$ (keine Seitenführung am Bug- oder Heckrad) bis $\varepsilon \to \infty$ (keine Seitenführung an den Haupträdern) reicht. Da eine Einschränkung dieses Gültigkeitsbereiches vermieden werden soll, wird von weiteren Vernachlässigungen abgesehen, obwohl in Einzelfällen einige Glieder ohne praktischen Einfluß bleiben. Als eine Vereinfachung, die noch ohne weiteres zulässig ist, könnte man sich die Trägheitshauptachsen des Flugzeugs mit den pseudo-flugzeugfesten Achsen zusammenfallend denken. Dies würde sich aber nur so auswirken, daß in den Stabilitätsbedingungen an die Stelle von i_{red} der Wert i_z treten würde. Es wird deshalb auch von dieser Vereinfachung abgesehen, da die auftretenden Formelausdrücke keine Entlastung erfahren würden. Es bleibt dann jedem freigestellt, bei Zahlenrechnungen für i_{red} einfach den Betrag von i_z einzusetzen.

Im übrigen bleiben die Voraussetzungen die gleichen wie im ersten Teil. Die sich ändernden Bewegungsgrößen sind wieder

der Flugzeug-Schräglaufwinkel β
der Fahrbahn-Azimutwinkel χ.

8004

Das Flugzeug bewege sich in dem betrachteten Zeitintervall mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer vollkommen ebenen, waagerechten Fläche. Bei Dreipunktlage berühren sämtliche Räder dauernd den Boden, während bei Zweipunktlage nur die Räder des Hauptfahrwerks ununterbrochen Bodenberührung haben und die Längslage des Flugzeugs keine zeitlichen Änderungen erfährt.

Die Stabilitätsuntersuchungen werden nach der Methode der kleinen Schwingungen durchgeführt.

II. Bezeichnungen

Die benutzten Formelzeichen entsprechen denen des ersten Teiles. Außerdem sind folgende Bezeichnungen zu erläutern:

β_s = seitlicher Anströmwinkel des Flugzeugs (Winkel zwischen Anströmrichtung und $x_e z_e$-Ebene).

Abmessungen des Flugzeugs:

l_M = Bezugstiefe des Flügels für das Längsmoment,

$s = b/2$ = Halbspannweite des Flügels,

F = Flügelfläche.

Geschwindigkeiten:

w = Geschwindigkeit des Bodenwindes (entgegen der x_g-Achse wehend),

v_s = resultierende Anströmgeschwindigkeit,

$q_v = \frac{\rho}{2} \cdot v^2$ = Staudruck der Rollgeschwindigkeit,

$q_s = \frac{\rho}{2} \cdot v_s^2$ = Staudruck der resultierenden Anströmgeschwindigkeit,

q_a = Abhebestaudruck,

$\varphi_{ze} = d\psi/dt \cdot \frac{s}{v_s}$ = dimensionslose Winkelgeschwindigkeit um die z_e-Achse,

$\varphi_{xe} = d\varphi_e/dt \cdot \frac{s}{v_s}$ = dimensionslose Winkelgeschwindigkeit um die x_e-Achse,

$\gamma = \rho \cdot g$ = Luftwichte.

Im übrigen gilt für die Bezeichnungen das im ersten Teil Gesagte.

III. Luftkräfte am Flugzeug auf dem Boden

Im freien Flug treten am Flugzeug außer Auftrieb, Widerstand und Längsmoment bei unsymmetrischen Flugbewegungen noch eine Seitenkraft (Richtung der y-Achse), ein Giermoment (bezüglich der z_e-Achse) und ein Rollmoment (bezüglich der x_e-Achse) auf.

Von den in der Symmetrieebene des Flugzeugs wirkenden Luftkräften nehmen wir an, daß ihre Größen von der Änderung des Schräganblaswinkels und von den Flugzeugdrehungen $d\psi/dt$ und $d\varphi_e/dt$ unberührt bleiben. Dies ist bei Berücksichtigung kleiner Änderungen der Bewegungsgrößen zulässig. Bei Dreipunktlage ist das auf den Flugzeugschwerpunkt bezogene Längsmoment vom Flugzeugführer durch Höhenruderbetätigung innerhalb gewisser Grenzen willkürlich zu beeinflussen, während der Auftrieb durch Verstellen der Landeklappen gewollt zu verändern ist. Da die Stellung der Landeklappen gewöhnlich durch die Forderung nach geringster Landegeschwindigkeit und steilem Anschwebewinkel bzw. beim Start nach einem günstigen Kompromiß zwischen Auftrieb und Widerstand bedingt ist, kommt also die Betätigung der Landehilfen für eine willkürliche Beeinflussung der Fahrtrichtungshaltung kaum in Frage. Die in Betracht kommende Größe des Längsmomentes ist beim Heckradfahrwerk nach der positiven Seite (kopflastig) durch das Abheben des Spornrades, wenn Dreipunktlage eingehalten werden soll, und nach der negativen Seite (schwanzlastig) durch die Höhenruderwirksamkeit bzw. den größtmöglichen Höhenruderausschlag begrenzt. Bei den meisten Flugzeugen ist es bei vorderen Schwerpunktlagen überhaupt nicht möglich, negative Luftkraftmomente bezüglich der y-Achse zu erzeugen. Rollt das Flugzeug mit abgehobenem Sporn, so ist die Größe des Längsmomentes nicht mehr frei verfügbar, sondern sie ist mit der Lage des Flugzeugs zwangsläufig verbunden. Eine Betätigung des Höhenruders ruft in diesem Fall eine Änderung des Anstellwinkels und damit eine Auftriebsänderung hervor.

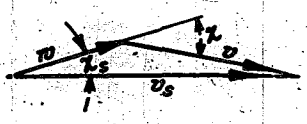


Bild 1. Vektorielle Addition von Rollgeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit

Bei dem am Boden rollenden Flugzeug ist nun zunächst zu beachten, daß Fahrgeschwindigkeit und Fahrtrichtung relativ zum Boden nicht mit Anströmgeschwindigkeit und -richtung des Flugzeuges identisch zu sein brauchen. Letztere ergeben sich vielmehr durch Addition des der Fahrtrichtung entgegen gerichteten Vektors vom Betrage v und des Windgeschwindigkeitsvektors von der Größe w. Nehmen wir den Bodenwind entgegen der positiven x_g-Achse wehend an, so folgt für die Anblasgeschwindigkeit des Flugzeugs nach Bild 1

$$v_s = \sqrt{v^2 + w^2 + 2wv\cos\chi}$$

und für die Anblasrichtung

$$\chi_s = arc\,tg\left\{\frac{\sin\chi}{\frac{w}{v} + \cos\chi}\right\}$$

Der tatsächliche Anströmwinkel des Flugzeugs beträgt dann

$$\beta_s = \beta + \chi - \chi_s.$$

Hieraus ergibt sich folgende Beziehung zwischen den Änderungen des Anströmwinkels, des Flugzeug-Schräglaufwinkels und des Flugzeug-Azimutwinkels, wenn man sich auf kleine Winkeländerungen beschränkt und $\xi = w/v$ setzt:

$$\Delta\beta_s = \frac{1 + \xi\cos\chi}{1 + \xi^2 + 2\xi\cos\chi} \cdot \Delta\beta + \frac{\xi^2 + \xi\cos\chi}{1 + \xi^2 + 2\xi\cos\chi} \cdot \Delta\psi$$

Wie bei flugmechanischen Rechnungen allgemein üblich, werden zwischen den unsymmetrischen Luftkräften und den veränderlichen Bewegungsgrößen lineare Zusammenhänge vorausgesetzt, d. h. die ersten partiellen Differentialquotienten der dimensionslosen Luftkraftbeiwerte nach dem Schiebewinkel und nach den Winkelgeschwindigkeiten bezüglich z_e- und x_e-Achse werden konstant angenommen.

Luftkräfte als Folge instationärer Bewegungen werden nicht berücksichtigt.

Auf das Zustandekommen der Luftkräfte und auf die Berechnung bzw. Abschätzung derer Größen kann hier selbstverständlich nicht eingegangen werden. Als Beispiel seien lediglich die Ableitungen der Luftkraftbeiwerte nach dem Schräganblaswinkel für zwei Flugzeuge bei sehr kleinem β_s gezeigt (Bild 2 und 3). Sollen numerische Untersuchungen für Rollen mit Seitenwind durchgeführt werden, so sind Luftkraftmessungen über einen Anblaswinkelbereich $0 \leqq \beta_s \leqq 180°$ erforderlich. In Er-

8005

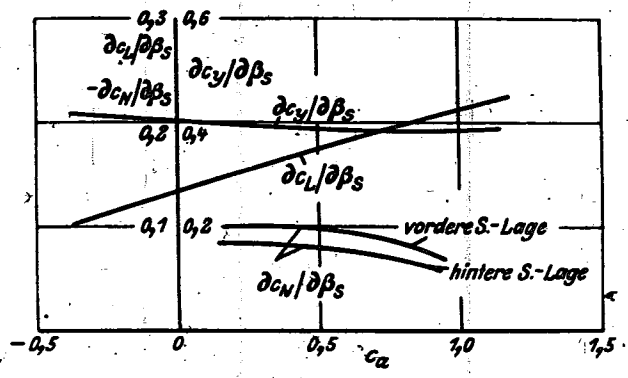


Bild 2. Luftkraftbeiwerte bezüglich der flugzeugfesten Achsen im Schiebeflug für ein Verkehrsflugzeug; $\beta_s \to 0$

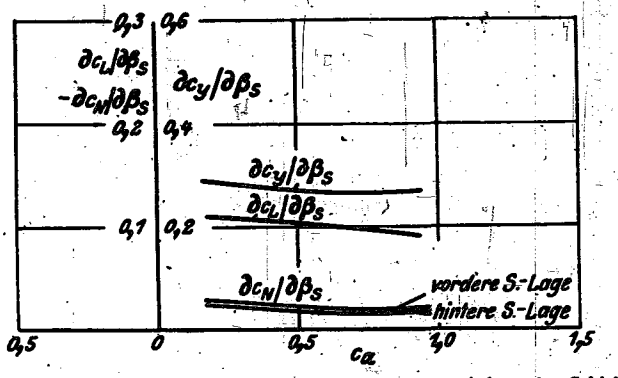


Bild 3. Luftkraftbeiwerte bezüglich der flugzeugfesten Achsen im Schiebeflug für ein Kampfflugzeug; $\beta_s \to 0$

mangelung irgendwelcher Spezialmessungen können für eine grundsätzliche Orientierung die an einigen Seeflugzeugmodellen gewonnenen Meßergebnisse [1, 2, 3][2]) herangezogen werden. Im übrigen sei auf das diesbezügliche Schrifttum verwiesen.

Wir wollen aber hervorheben, daß die Luftkräfte durch den Einfluß der Erdbodennähe gegenüber dem freiliegenden Flugzeug z. T. mehr oder weniger stark geändert werden. In erster Linie kommt der Bodeneinfluß am Flügel zur Auswirkung. Die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit hinter dem Flügel erfährt durch den Erdboden eine Ablenkung, was auf den Flügel dieselbe Wirkung hat, als ob er sich im Felde einer aufwärtsgerichteten Störgeschwindigkeit befindet. Die hierdurch hervorgerufene Verminderung des induzierten Widerstandes und Anstellwinkels ist bekannt, und für den Flügel mit elliptischer Auftriebsverteilung liegen Rechenergebnisse seit langem vor [4]. Der verkleinerte Abwindwinkel hat eine nicht unbedeutende Erhöhung der statischen Längsstabilität zur Folge. Diese bedingt ihrerseits eine Verschlechterung der statischen Höhensteuerwirkung und ist mit ein Grund für die erwähnte Tatsache, daß bei dem am Boden befindlichen Flugzeug meist keine negativen Luftkraft-Längsmomente durch Höhenruderbetätigung aufgebracht werden können. Die Ablenkung der vom Flügel abgehenden freien Wirbel macht sich auch auf das Schieberollmoment und das Rolldämpfungsmoment bemerkbar. Die Schieberollmomente infolge V-Formeinfluß und Rumpf-Flügelinterferenz werden vergrößert, ebenso wächst das Rolldämpfungsmoment an. Ferner wird ein Rollmoment infolge eines Querneigungswinkels φ_e erzeugt, welches ausschließlich durch Erdbodennähe hervorgerufen wird und das an einem in größerer Höhe fliegenden Flugzeug nicht auftritt. Dieses Rollmoment wirkt im aufrichtenden Sinne. Solange wir das Flugzeug ohne Fahrwerksfederung betrachten, bleibt φ_e und somit auch das letztgenannte Rollmoment gleich Null. Mit den Rollmomenten des Flügels ist zwangsläufig die Entstehung induzierter Giermomente verbunden. Da diese aber in der Bilanz der Momente um die Hochachse meist nur eine kleine Rolle spielen, sind die durch Bodeneinfluß zusätzlich hervorgerufenen Giermomente von untergeordneter Bedeutung. Über die Berechnung dieser Bodeneinflüsse, die mit den bekannten Methoden der Tragflügeltheorie möglich ist, soll gegebenenfalls an anderer Stelle berichtet werden.

Weiter ist der Bodeneinfluß auf den Normalkraftgradienten des Seitenleitwerks sehr gut einer Berechnung zugänglich. Ähnlich wie beim Tragflügel wird auch hier das von den freien und gebundenen Wirbeln induzierte Geschwindigkeitsfeld durch den vorhandenen Erdboden gestört, was wiederum eine Änderung der Strömung am Seitenleitwerk zur Folge hat. Auch hier werden induzierter Widerstand und Anstellwinkel gegenüber der ungestörten Strömung vermindert. Bei der viel gebräuchlichen Ausführung des Seiten-Höhenleitwerk-Aggregates nach Bild 4, wie es beispielsweise der Fw 200 entspricht, kann allerdings der Bodeneinfluß die Seitenleitwerkswirksamkeit nur sehr wenig erhöhen. Denn auch ohne Bodeneinfluß erreicht hierbei der Normalkraftgradient infolge der Randscheibenwirkung des Höhenleitwerks fast seinen größtmöglichen Wert, der einer wirksamen Streckung des Seitenleitwerks entspricht, die doppelt so groß wie die geometrische Streckung ist [5]. Ist dagegen das Höhenleitwerk oberhalb des Rumpfes angebracht (Bild 5), so kommt die Nähe des Erdbodens stärker zur Auswirkung. Erhöhung der Seitenleitwerkswirksamkeit bedeutet Vergrößerung des Schiebe-Giermomentes und des Wendedämpfungsmomentes. Weiter werden dadurch Schiebe- und Wende-Seitenkraft erhöht. Der Einfluß auf die Rollmomente ist unbedeutend.

Der Vollständigkeit halber sei auch noch erwähnt, daß bei vorhandenem Bodenwind die an den Boden angrenzende Luftschicht geringerer Windgeschwindigkeit eine Änderung der Luftkräfte zur Folge hat. Dieser Einfluß ist allerdings nur experimentellen Untersuchungen zugänglich.

Roll- und Giermoment werden für flugmechanische Rechnungen bezüglich der flugzeugfesten x- und z-Achse angegeben. Da für die Untersuchung der Fahrtrichtungshaltung des Flugzeugs die pseudo-flugzeugfesten Achsen x_e und z_e als Momentenbezugsachsen benutzt werden, ist eine entsprechende Umrechnung vorzunehmen. Diese wirkt sich hauptsächlich auf die Größe des Schiebe-Giermomentes aus. Da das Schiebe-Rollmoment bezüglich der

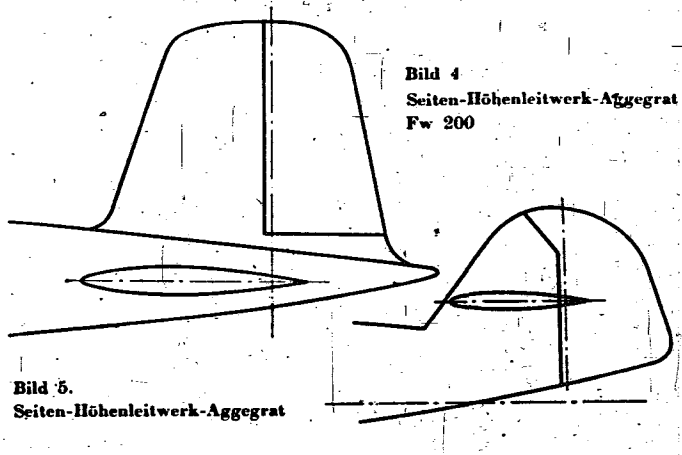


Bild 4
Seiten-Höhenleitwerk-Aggregat Fw 200

Bild 5.
Seiten-Höhenleitwerk-Aggegrat

2) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumverzeichnis am Ende der Arbeit.

8006

x-Achse gewöhnlich beträchtlich größer ist als das Schiebe-Giermoment bezüglich der z-Achse, so hat insbesondere bei großem Anstellwinkel das Schiebemoment um die z_e-Achse mitunter einen nicht unerheblich größeren Wert als das um die z-Achse.

IV. Aufstellung der dynamischen Gleichgewichtsbedingungen für Dreipunktlage des Flugzeugs

Wir behandeln zunächst den Fall der Dreipunktlage, d. h. die Räder des Hauptfahrwerks und das Spornrad bzw. das Bugrad berühren den Boden. Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen gestaltet sich im großen und ganzen ähnlich wie beim Fahrzeug ohne Luftkräfte. Lediglich sind neben den Bodenkräften und Massenkräften die Luftkräfte zu berücksichtigen. Ein Punkt jedoch verdient besondere Beachtung: Bei stationärer Geradeausfahrt muß vollkommenes Gleichgewicht herrschen. Es darf also auch bezüglich der z_e-Achse kein Moment und in Richtung der y_a-Achse keine Kraft wirken. Diese Bedingung wurde bei der Ableitung der Stabilitätsgleichungen im ersten Teilbericht stillschweigend als erfüllt vorausgesetzt, was ja auch bei einem symmetrischen Fahrzeug allgemein zutrifft, wenn die Laufräder sorgfältig gerichtet sind und an den Haupträdern nicht gerade unterschiedlicher Rollwiderstand wirkt. Aber auch am rollenden Flugzeug herrscht im Normalfall Gleichgewicht, wenn kein Bodenwind vorhanden ist oder wenn ein solcher in Fahrtrichtung weht (Gegenwind oder Rückenwind). Wenn dagegen ein Wind seitlich zur Rollrichtung weht, so entstehen unsymmetrische Luftkräfte, die vom Flugzeugführer durch Eingriff in die Steuerung korrigiert werden müssen. Es entsteht zunächst eine seitliche Luftkraft, deren Größe durch den Schräganblaswinkel β_s und den Seitenruderausschlagwinkel ζ bestimmt wird. Diese Seitenkraft muß durch Gegenkräfte an den Rädern ausgeglichen werden, die ihrerseits nur auftreten können, wenn das Flugzeug schrägläuft. Hierdurch entsteht wiederum i. allg. ein Moment um die Hochachse, das mit dem auftretenden Luftkraftmoment die Summe Null

$$Y = \left[c_{y\,o}(1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi) + \frac{\partial c_y}{\partial \beta_s}(1 + \xi\cos\chi)\,\Delta\beta + \frac{\partial c_y}{\partial \beta_s}(\xi^2 + \xi\cos\chi)\,\Delta\psi \right.$$
$$\left. + \frac{\partial c_y}{\partial \varphi_{z\,e}} \cdot \sqrt{1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi} \cdot \frac{s}{v} \cdot \frac{d\psi}{dt} \right] F\,q_v .$$

ergeben muß. Somit ist dann die erforderliche Größe des Seitenruderausschlages festgelegt. Außerdem geht auch der Querruderausschlag in das Gleichgewicht mit ein. Am gefederten Flugzeug hat der Querneigungswinkel φ_e im Beharrungszustand einen vom Querruderausschlag abhängigen Wert. Wir brauchen uns mit diesen Gleichgewichtsbedingungen nicht weiter auseinanderzusetzen, da sie die Bewegungsgleichungen selbst kaum beeinflussen. Wir müssen nur im Gedächtnis behalten, daß sie bei der Aufstellung der Stabilitätsbedingungen vorausgesetzt werden und daß sowohl ψ als auch β im unbeschleunigten Geradeausrollen von Null verschiedene Werte haben, wenn die Windrichtung nicht parallel der Fahrtrichtung ist. Aus diesem Grunde werden in den Bewegungsgleichungen die veränderlichen Bewegungsgrößen mit $\Delta\beta$, $\Delta\psi$ und $\Delta\chi$ bezeichnet, während es im ersten Teilbericht genügte, sie einfach β usw. zu nennen.

Nach diesen Ausführungen können wir die für die Ableitung der Stabilitätsgleichungen benötigten Ansätze der Luftkräfte hinschreiben. Wir führen einen auf die Fahrgeschwindigkeit des Flugzeugs relativ zum Boden bezogenen Staudruck ein:

$$q_v = \frac{\rho}{2} v^2$$

Der tatsächlich am Flugzeug wirkende Staudruck der Strömung beträgt dann

$$q_s = \frac{\rho}{2} v_s^2 = q_v\,(1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi).$$

Dieser Staudruck ändert sich mit der Bewegungsgröße χ. Die hierdurch hervorgerufenen Änderungen der Gleichgewichtsbedingungen werden außer Acht gelassen, um die ohnehin nicht sehr übersichtlichen Gleichungen etwas zu vereinfachen. Die auf diese Weise erzielte Exaktheit erscheint zunächst ausreichend.

Wir haben also den Auftrieb

$$A = c_a F q_v (1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi)$$

und das Längsmoment

$$M = c_M F l_M q_v\,(1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi).$$

Die Größen c_a und c_M sind u. a. auch vom Schräganblaswinkel des Flugzeugs während des stationären Rollens abhängig [1, 2, 3]. Bei Untersuchung mit Seitenwind ist dies gegebenenfalls zu berücksichtigen. Dagegen werden die durch $\Delta\beta_s$ hervorgerufenen Änderungen von c_a und c_M außer Acht gelassen, wie schon im vorigen Abschnitt hervorgehoben wurde.

Der Luftwiderstand interessiert hier nicht, da — wie im ersten Teilbericht — bezüglich der x_e-Achse statisches Kräftegleichgewicht vorausgesetzt wird.

Ferner entsteht eine Seitenluftkraft in Richtung der flugzeugfesten y-Achse

$$Y = \left[c_{y\,o}(1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi) + \frac{\partial c_y}{\partial \beta_s}(1 + \xi\cos\chi)\,\Delta\beta + \frac{\partial c_y}{\partial \beta_s}(\xi^2 + \xi\cos\chi)\,\Delta\psi \right.$$
$$\left. + \frac{\partial c_y}{\partial \varphi_{z\,e}} \cdot \sqrt{1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi} \cdot \frac{s}{v} \cdot \frac{d\psi}{dt} \right] F\,q_v .$$

Die Seitenluftkraft in Richtung der fahrbahnfesten y_a-Achse weicht hiervon etwas ab und beträgt für kleine Schräglaufwinkel

$$Y_a = Y - c_w\,(1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi)\,F\,q_v\,\beta.$$

Für das Giermoment und das Rollmoment gelten folgende Beziehungen:

$$N = \left[c_{N\,o}(1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi) + \frac{\partial c_N}{\partial \beta_s}(1 + \xi\cos\chi)\,\Delta\beta + \frac{\partial c_N}{\partial \beta_s}(\xi^2 + \xi\cos\chi)\,\Delta\psi \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial c_N}{\partial \varphi_{z\,e}} \cdot \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial c_N}{\partial \varphi_{xe}} \cdot \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \cdot \sqrt{1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi} \cdot \frac{s}{v} \right] F s\,q_v ,$$

$$L = \left[c_{L\,o}(1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi) + \frac{\partial c_L}{\partial \beta_s}(1 + \xi\cos\chi)\,\Delta\beta + \frac{\partial c_L}{\partial \beta_s}(\xi^2 + \xi\cos\chi)\,\Delta\psi + \frac{\partial c_L}{\partial \varphi_e}(1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi)\,\Delta\varphi_e \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial c_L}{\partial \varphi_{z\,e}} \cdot \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial c_L}{\partial \varphi_{xe}} \cdot \frac{d\varphi_e}{dt} \right) \cdot \sqrt{1 + \xi^2 + 2\,\xi\cos\chi} \cdot \frac{s}{v} \right] F s\,q_v .$$

Hierin sind $c_{y\,o}$, $c_{N\,o}$ und $c_{L\,o}$ die durch Schräganblaswinkel, Querneigungswinkel und Seiten- und Querruderausschlag gegebenen Beiwerte beim stationären Geradeausrollen. Die Größen $\frac{\partial c_y}{\partial \beta_s}$, $\frac{\partial c_y}{\partial \varphi_{ze}}$ usw. sind ebenfalls vom Schräganblaswinkel β_s abhängig. Streng genommen ent-

8007

stehen am sich in Bodennähe bewegenden Flugzeug auch infolge des Querneigungswinkels φ_e Beiträge zur Seitenkraft und zum Giermoment, die jedoch sehr klein und deshalb vernachlässigbar sind. Ferner entsteht als Folge einer Winkelgeschwindigkeit $d\varphi_e/dt$ noch eine Seitenkraft, die ebenfalls zu vernachlässigen ist.

Jetzt lassen sich für das ungefederte Flugzeug die beiden Bewegungsgleichungen aufstellen.

$$-v\cdot\frac{G}{g}\left(\frac{d\psi}{dt}-\frac{d\beta}{dt}\right)+S_{Rr}+S_{Rl}+S_{Sp}-(G-A)\mu_b\,\beta+Y_a=0 \qquad (1)$$

$$-J_{ze}\frac{d^2\psi}{dt^2}+(S_{Rr}+S_{Rl})\,r\sin\varkappa+(W_{bRr}-W_{bRl})\cdot\frac{b_R}{2}-S_{Sp}(r_{Sp}-r\sin\varkappa)+N=0 \qquad (2)$$

Ähnlich wie im ersten Teilbericht werden die Seitenführungskräfte jeweils als Funktion des Raddruckes und des Schräglaufwinkels des betreffenden Rades ausgedrückt. Ebenso werden die Kräfte W_b als von der Radbelastung abhängige Größen behandelt. Für die Berechnung der Radlasten haben wir folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$P_{Rr}+P_{Rl}+P_{Sp}-G+A=0$$

$$(P_{Rr}+P_{Rl})\,r\sin\varkappa-P_{Sp}(r_{Sp}-r\sin\varkappa)-(G-A)\,\mu_b\,r\cos\varkappa-M=0$$

$$-J_{xz}\frac{d^2\psi}{dt^2}-(P_{Rr}-P_{Rl})\cdot\frac{b_R}{2}-(S_{Rr}+S_{Rl}+S_{Sp})\,r\cos\varkappa+L=0$$

Auf den weiteren Rechnungsgang wird nicht näher eingegangen, weil er sich ähnlich dem des ersten Teilberichtes gestaltet. Es sei nur kurz gesagt, daß man durch Elimination der Kräfte S und W in den Bewegungsgleichungen und durch Einsetzen der angegebenen Ausdrücke für die Luftkräfte wieder zwei lineare Differentialgleichungen erhält, in denen die konstanten Glieder weggestrichen werden können, da sie unter sich jeweils die Summe Null ergeben müssen. Die Gleichungen bleiben also homogen. Die Zeitfaktoren der Veränderlichen $\Delta\beta$, $\Delta\psi$ und $d\psi/dt$ sind in Tafel 1 zusammengestellt. Die Auflösung des Gleichungssystems liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3+B_1\lambda^2+B_2\lambda+B_3=0 \qquad (3)$$

mit den Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned}B_1&=\quad\mathfrak{n}_\Omega+\mathfrak{y}_s\\B_2&=-(\mathfrak{n}_\gamma+\mathfrak{n}_s\,\mathfrak{y}_\Omega-\mathfrak{n}_\Omega\,\mathfrak{y}_s)\\B_3&=-\mathfrak{n}_\gamma\,\mathfrak{y}_s+\mathfrak{n}_s\,\mathfrak{y}_\gamma\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Bewegungen sind nun stabil, wenn sämtliche Wurzeln dieser Gleichung negativen Realteil haben. Dies ist der Fall, wenn die Koeffizienten B_1, B_2, B_3 und die Diskriminante $D=B_2\cdot B_1-B_3$ positive Vorzeichen haben.

Tafel I. Zeitfaktoren der dynamischen Gleichgewichtsbedingungen (ungefedertes Flugzeug). Flugzeug in Dreipunktlage.

Bezeichnung	Formel	Zeitfaktor für	Dimension
$\mathfrak{y}_s$	$T^{-1}\left\{\left[1-c_a\frac{q_v(1+\xi^2+2\xi\cos\gamma)}{G\,F}\right]\cdot\left[\frac{k_sR}{2}[1-\tau(1-\sigma)(1-\varepsilon)]-\frac{\mu_b}{2}\right]+\frac{q_v}{G/F}\left[\left[c_M\frac{k_sR}{2}\,t\,\tau(1-\varepsilon)-\frac{c_w}{2}\right](1+\xi^2+2\xi\cos\gamma)+\frac{\partial c_Y/\partial\beta_s}{2}(1+\xi\cos\gamma)\right]\right\}$	Schräglauf-Seitenkraft	s^{-1}
$\mathfrak{y}_\gamma$	$T^{-1}\left\{\frac{q_v}{G/F}\cdot\frac{\partial c_Y/\partial\beta_s}{2}(\xi^2+\xi\cos\gamma)\right\}$	Azimutal-Seitenkraft	s^{-1}
$\mathfrak{y}_\Omega$	$\left\{1+\frac{k_sR}{2}\cdot\frac{\gamma\,r\sin\varkappa}{q_v}\left[1-c_a\frac{q_v(1+\xi^2+2\xi\cos\gamma)}{G/F}\right]\cdot\left[1-(1-\sigma)[\varepsilon+\tau(1-\varepsilon)]\right]+\frac{\gamma\,r\sin\varkappa}{G/F}\left[c_M\frac{k_sR}{2}\,t\,[\varepsilon+\tau(1-\varepsilon)](1+\xi^2+2\xi\cos\gamma)-\frac{\partial c_Y/\partial\tau_{ze}}{2}\,\nu\sqrt{1+\xi^2+2\xi\cos\gamma}\right]\right\}$	Wende-Seitenkraft	—
$\mathfrak{n}_\beta$	$T^{-2}\left(\frac{r\sin\varkappa}{i_{red}}\right)^2\left\{\frac{q_v}{\gamma\,r\sin\varkappa}\cdot\frac{k_sR}{2}\left[1-c_a\frac{q_v(1+\xi^2+2\xi\cos\varkappa)}{G/F}\right]\cdot\left[(1-\sigma_w)[1-\tau(1-\sigma)(1-\varepsilon)]-(1-\sigma)\varepsilon\right]+\frac{q_v^2}{\gamma\,r\sin\varkappa\,G/F}\left[c_M\frac{k_sR}{2}\,t\,[(1-\sigma_w)\tau(1-\varepsilon)+\varepsilon]\right.\right.$ $\left.\left.(1+\xi^2+2\xi\cos\gamma)+\frac{\partial c_N/\partial\beta_s+k_wR\cdot\partial c_L/\partial\beta_s}{2}\,\nu(1+\xi\cos\gamma)\right]\right\}$	Schräglauf-Wendemoment	$s-2$
$\mathfrak{n}_\gamma$	$T^{-2}\left(\frac{r\sin\varkappa}{i_{red}}\right)^2\left\{\frac{q_v^2}{\gamma\,r\sin\varkappa\,G/F}\cdot\frac{\partial c_N/\partial\beta_s+k_wR\cdot\partial c_L/\partial\beta_s}{2}\,\nu(\xi^2+\xi\cos\gamma)\right\}$	Azimutal-Wendemoment	$s-2$
$\mathfrak{n}_\Omega$	$T^{-1}\left(\frac{r\sin\varkappa}{i_{red}}\right)^2\left\{\frac{k_sR}{2}\left[1-c_a\frac{q_v(1+\xi^2+2\xi\cos\gamma)}{G/F}\right]\cdot\left[(1-\sigma_w)\{(1+\varepsilon)[1-\tau(1-\sigma)]+\varepsilon\sigma\}+(1-\sigma)\varepsilon\left(\frac{1}{\tau}-1\right)\right]+\frac{q_v}{G/F}\left[c_M\frac{k_sR}{2}\,t\,[\tau(1-\varepsilon)-\left(\frac{1}{\tau}-2\right)\varepsilon]-\frac{\partial c_N/\partial\tau_{ze}+k_wR\cdot\partial c_L/\partial\tau_{ze}}{2}\,\nu^2\sqrt{1+\xi^2+2\xi\cos\gamma}\right]\right\}$	Wende-Dämpfungsmoment	$s-1$

$$\tau=\frac{r\sin\varkappa}{r_{Sp}};\quad\sigma=\frac{\mu_b}{tg\,\varkappa};\quad\sigma_w=\frac{k_wR}{tg\,\varkappa};\quad\varepsilon=\frac{k_sSp}{k_sR};\quad t=\frac{l_M}{r\sin\varkappa};\quad\nu=\frac{s}{r\sin\varkappa};\quad T=\frac{v}{2g};\quad\xi=w/v$$

8008

V. Bewegungsformen

Das auffallende Ergebnis der vorausgegangenen Rechnung ist die Tatsache, daß nicht mehr wie beim Fahrzeug ohne Luftkräfte eine der drei Wurzeln der Hauptgleichung gleich Null wird. Das Flugzeug ist also nicht indifferent bezüglich der Fahrtrichtung, und wir können jetzt von Fahrtrichtungsstabilität im eigentlichen Sinn sprechen. Diese Erscheinung tritt jedoch nur auf, wenn ein Bodenwind vorhanden ist; verschwindet dieser, so wird $B_3 = 0$ und das Verhalten des Flugzeugs gegenüber der Fahrtrichtung ist wieder indifferent wie das des Fahrzeugs ohne Berücksichtigung der Luftkräfte oder wie das des freifliegenden Flugzeugs.

Um tiefer in den Charakter der Bewegung eindringen zu können, ist es erforderlich, die drei Wurzeln der Hauptgleichung zu ermitteln. Die numerische Abschätzung der Größen $B_1 \ldots B_3$ zeigt, daß die Größe B_3 in fast allen praktisch wichtigen Fällen nur sehr klein ist und deshalb in der Regel eine Näherungslösung ausreicht, die man durch Aufspalten der Hauptgleichung (3) in einen quadratischen und in einen linearen Teil erhält:

$$\left(\lambda^2 + \frac{B_1 B_2 - B_3}{B_2}\lambda + B_2\right) \cdot (\lambda + B_3/B_2) = 0 \qquad (5)$$

Der erste quadratische Klammerausdruck charakterisiert hierbei die bekannte Schleuderbewegung, die im ersten Teilbericht beschrieben wurde und die in Form einer gedämpften Schwingung oder aperiodisch ablaufen kann. Der zweite lineare Teil kennzeichnet einen aperiodischen Vorgang, den wir Azimutalbewegung nennen wollen, da er seine Ursache in Kräften und Momenten hat, die vom Flugzeug-Azimutwinkel ψ abhängen[3]). Diese Azimutalbewegung bildet sich nur sehr langsam aus, und die Schleuderbewegung ist vorherrschend. Aus diesem Grunde bleibt nach wie vor die Bedingung $B_2 > 0$ die wichtigste. Das Kriterium $B_3 > 0$ kennzeichnet die Stabilität der Azimutalbewegung. Das Vorzeichen der Zeitfaktoren η_2 und η_3 wird nur durch die Richtung des Bodenwindes bestimmt, da für $\partial c_y/\partial \beta_s$ physikalisch nur positive Größen möglich sind und $\partial c_N/\partial \beta_s$ aus Gründen der Seitenstabilität des freien Fluges nur negative Werte (Windfahnenstabilität) haben darf.

3) Azimutal-Seitenkraft und -Wendemoment rühren hier lediglich von Luftkräften her. Es ist auch möglich, daß solche Kräfte ohne Vorhandensein von Luftkräften wirksam werden, nämlich beim Rollen auf geneigter Bodenebene oder wenn das Fahrzeug an einem Seil in Fahrtrichtung geschleppt wird. Letzterer Fall liegt häufig beim Modellversuch vor, für den die Gleichgewichtsbedingungen deshalb etwas andere Form haben, als sie hier dargestellt werden.

Die wichtigsten Fälle von Fahrtrichtungsstabilität sind in Tafel II zusammengestellt. Eine instabile Azimutalbewegung ($B_3 < 0$) bedeutet für das Flugzeug keine Gefahr, da sie sehr langsam vor sich geht und der Flugzeugführer Zeit zur Betätigung des Seitenruders hat. Weil die Azimutal-Seitenkraft und das Azimutal-Wendemoment reine Luftkräfte sind, können diese nur bei entsprechender Anblasgeschwindigkeit des Flugzeugs auftreten; in diesem Fall ist aber auch eine ausreichende Wirksamkeit des Seitenruders gewährleistet. Eine stabile Azimutalbewegung kann sich andererseits als „Windgierigkeit" sogar unangenehm bemerkbar machen [9, 11], weil ein solches Flugzeug bei plötzlicher Änderung der Windrichtung aus der Fahrtrichtung ausbricht. Aus diesem Grunde wird die gesamte Bewegung als stabil angesprochen, wenn $B_2 > 0$ bzw. $D = B_1 \cdot B_2 - B_3 > 0$ ist, auch wenn $B_3 < 0$ ist.

Zur Diskriminante $D = B_1 \cdot B_2 - B_3$ ist zu sagen, daß in der Regel das Produkt $B_1 \cdot B_2$ überwiegt. In den seltenen Fällen, bei denen B_2 klein wird und die gleiche Größenordnung wie B_3 hat, verläuft die Schleuderbewegung ebenso langsam wie die Azimutalbewegung. Die angegebene Näherungslösung für die Wurzeln der Hauptgleichung ist dann nicht mehr statthaft. Das Fahrverhalten des Flugzeugs ähnelt in diesem Zustand, der nur in einem kleinen Geschwindigkeitsbereich besteht, aber auch schon dem eines indifferenten Flugzeugs.

Wir knüpfen nun an die Betrachtungen des VI. Abschnittes im ersten Teilbericht an und bekommen genau wie beim Fahrzeug ohne Luftkräfte infolge Schräglaufbewegung und Wendegeschwindigkeit Ω Seitenkräfte Y_β und Y_Ω, wobei jetzt selbstverständlich die Luftkraftgrößen in den Werten Y_β und Y_Ω berücksichtigt sind. Außerdem entsteht bei vorhandenem Bodenwind eine Kraft Y_β infolge Abweichungen von der ursprünglichen Fahrtrichtung, die am Hebelarm l_3 hinter dem Schwerpunkt angreift. Bei Gegenwind hat Y_β positives Vorzeichen, wenn das Flugzeug nach rechts ausbricht. Bei Rückenwind wirkt Y_β in umgekehrter Richtung. Es ist einleuchtend, daß bei kleinen Rollgeschwindigkeiten die Größen Y_β und Y_Ω von den am Fahrzeug ohne Luftkräfte auftretenden kaum abweichen. Mit zunehmender Geschwindigkeit wird dann der Einfluß der Luftkräfte immer stärker. In den meisten Fällen macht der aerodynamische Auftrieb des Flugzeugs die Hauptwirkung der Luftkräfte aus, die den Einfluß der übrigen Luftkraftgrößen mitunter beträchtlich übersteigt. Die Wirkung des Auftriebs ist indirekter Art, indem durch Vermin-

Tafel II. Bewegungsformen bei statischer Fahrtrichtungsstabilität ($B_2 > 0$)

$\eta_3 > 0 \qquad \eta_\Omega > 0 \qquad n_\Omega > 0$

	Wind	η_β	n_β	n_3	Sonderbedingung	B_3	Azimutalbewegung
a	kein Wind	$\neq 0$	$= 0$	< 0	—	$= 0$	indifferent
b				> 0	$n_\Omega \eta_3 > n_3 \eta_\Omega$		
c	Gegenwind	> 0	< 0	< 0	$n_\beta \eta_3 > n_3 \eta_\beta$	> 0	stabil
d				> 0	$n_\beta \eta_\Omega < n_\Omega \eta_\beta - n_\beta$	> 0	stabil
e				< 0	$n_\beta \eta_3 < n_3 \eta_\beta$	< 0	instabil
f	Rückenwind	< 0	> 0	< 0	$n_\beta \eta_\Omega - n_\Omega \eta_\beta > n_\beta$	< 0	instabil
g				> 0	$n_\beta + n_3 \eta_\Omega < n_\Omega \eta_3$	< 0	instabil
h				< 0	$n_\beta \eta_3 < n_3 \eta_\beta$	> 0	stabil

8009

rung der Radlasten die Seitenführungskräfte an den Rädern verringert werden. Wenn kein Bodenwind vorhanden ist, so sind die Bewegungsvorgänge nach einer Störung etwa so wie am Fahrzeug ohne Luftkräfte. Demnach entspricht der Fall a nach Tafel II der im ersten Teilbericht, Abschnitt VI unter a beschriebenen Bewegungsform, und Fall b hat den dort unter d erläuterten Bewegungstypus zur Folge.

Das Kriterium für die Azimutalbewegung

$$-n_z y_z + n_x y_z \geqq 0$$

läßt sich auch aus rein statischen Betrachtungen herleiten. Es handelt sich hier um ähnliche Vorgänge, wie sie am Kraftwagen bei Seitenwind auftreten (Schrifttum [10] des ersten Teilberichtes): Entsteht infolge einer Störgröße ψ eine Seitenkraft Y_z, so wird das Flugzeug seitlich weggeschoben und somit eine Schräglaufbewegung herbeigeführt. Hierdurch entsteht eine Seitenkraft Y_z, die der Kraft Y_z entgegenwirkt. Die Schräglaufbewegung spielt sich nach kurzer Zeit so ein, daß $Y_z = -Y_z$ wird. Jetzt wirkt am Flugzeug nur noch ein Kräftepaar mit dem Abstand $l_3 - l_1$ voneinander, das eine Drehung des Flugzeuges um seine z_c-Achse einleitet. Wenn wir wieder wie im ersten Bericht annehmen, daß zu Beginn des betrachteten Zeitabschnitts ein positiver Schräglaufwinkel $\beta = \psi$ vorhanden ist, der eine Störung der unbeschleunigten Geradeausfahrt hervorruft, so wirkt die infolge eines Gegenwindes auftretende Azimutal-Seitenkraft nach rechts. Greifen die beiden Kräfte Y_z und Y_z hinter dem Schwerpunkt an (Bugradfahrwerk) und ist der Hebelarm von Y_z größer als der von Y_z ($l_3 > l_1$), wie dieses bei c) der Fall ist, so wird das Flugzeug in die anfängliche Fahrtrichtung zurückgedreht; das Flugzeug ist fahrtrichtungsstabil. Ist aber $l_3 < l_1$ (Fall e), so wirkt das Moment im entgegengesetzten Sinne. Das Flugzeug giert in diesem Fall, der in der Praxis nur sehr selten vorkommen kann, aus der Richtung heraus. Dies kann am Flugzeug mit losem Bugrad und sehr kleinem, unwirksamem Seitenleitwerk auftreten. Liegt wie im Fall d) der Angriffspunkt von Y_z vor dem Schwerpunkt, so ist das in die Fahrtrichtung drehende Moment entsprechend größer als z. B. im Fall c). Diese Verhältnisse liegen gewöhnlich am Flugzeug mit einem mit Rückstellfederung versehenen Spornrad vor. Bei vorhandenem Rückenwind wirkt die Azimutal-Seitenkraft nach links, wenn ψ eine positive Größe hat. Es entsteht dann der umgekehrte Effekt wie bei Gegenwind. Wenn nun $Y\beta$ hinter dem Schwerpunkt angreift und $l_3 > l_1$ ist, so wird das vorhandene ψ vergrößert, das Flugzeug ist instabil in bezug auf die Azimutalbewegung (Fall f); dagegen ist das Verhalten bei Rückenwind stabil, wenn $l_3 < l_1$ ist (Fall h). Ist aber n_z positiv (Fall g), so dreht sowohl das Moment $Y_z \cdot l_3$ als auch das als Folge des durch Y_z erzeugten seitlichen Schiebens auftretende Moment $Y_z l_1 = -Y_z l_1$ das Flugzeug aus der Richtung heraus.

Die instabilen Formen der Schleuderbewegung (Bodenlooping) bilden sich genau so wie beim Fahrzeug ohne Luftkräfte aus und überlagern sich der Azimutalbewegung. Die Azimutalbewegung selbst hat in diesen Fällen auf den Ablauf der Bewegung praktisch keinen Einfluß, weil ein Bodenlooping in sehr kurzer Zeit vonstatten geht. Ein weiteres Eingehen hierauf ist nicht erforderlich.

VI. Einfluß der Luftkräfte

Zwei wesentliche Veränderliche in den Stabilitätsgleichungen sind die Rollgeschwindigkeit v und die Geschwindigkeit des Bodenwindes w. Wir tragen die Ergebnisse

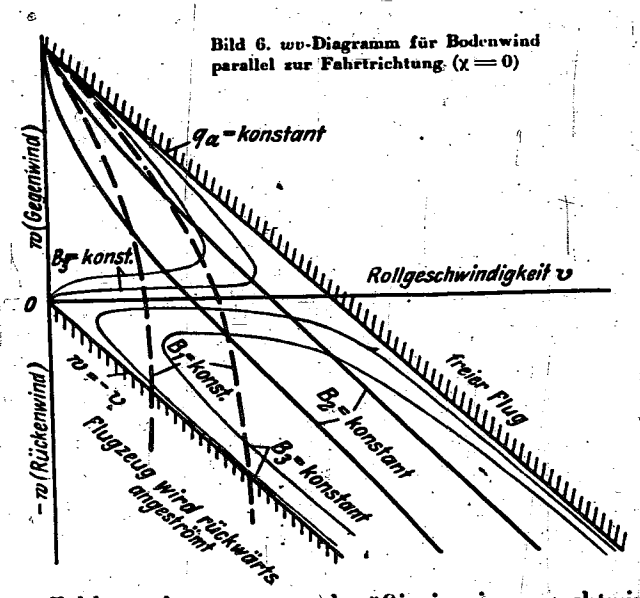


Bild 6. wv-Diagramm für Bodenwind parallel zur Fahrtrichtung ($\chi = 0$)

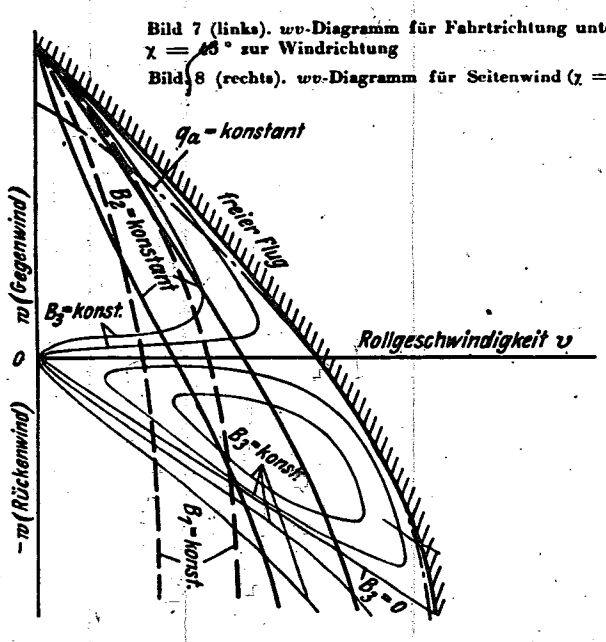
von Zahlenrechnungen zweckmäßig in einem rechtwinkligen Achsenkreuz auf, in welchem auf der Abszisse die Rollgeschwindigkeit und auf der Ordinate die Windgeschwindigkeit aufgetragen wird. Solche Diagramme lassen sich für jede Windrichtung zeichnen; die Bilder 6, 7 und 8 zeigen einige typische Beispiele hierfür. Bild 6 stellt ein wv-Diagramm für parallel zur Rollrichtung des Flugzeugs wehenden Wind dar. Auf der positiven Ordinate ist der Gegenwind aufgetragen, und unterhalb der Abszisse ist der Rückenwind dargestellt. Alle Punkte gleicher Anströmgeschwindigkeit und damit gleichen Staudrucks liegen auf geraden Linien, die unter 45° zur Abszisse von links oben nach rechts unten verlaufen ($w + v = \text{konst.}$). Wenn der Staudruck der anströmenden Luft so groß ist, daß der entstehende Auftrieb gleich dem Gewicht des Flugzeugs ist, so geht das Flugzeug aus dem rollenden Zustand in den freien Flug über. Die Grenze für diesen Übergang wird also auch durch eine Gerade unter 45° zur v-Achse dargestellt. Solange das Flugzeug seine ursprüngliche Fahrtrichtung beibehält, wird es gewöhnlich von vorn unter dem Winkel $\beta_s = 0$ angeströmt. Bei starkem Rückenwind und kleiner Rollgeschwindigkeit ($w > v$) findet dann eine Anströmung von rückwärts statt ($\beta_s = 180°$). Die Gerade ($w = -v$), auf welcher überhaupt keine Luftkräfte am Flugzeug zur Wirkung kommen, ist ebenfalls im Diagramm eingezeichnet. In dieses Diagramm kann man sich nun Kurvenscharen für $B_1 = \text{konst.}$ bzw. B_2 und $B_3 = \text{konst.}$ einzeichnen. Auf diese Weise erhält man dann einen Überblick über die Stabilitätsverhältnisse beim Rollen für den ganzen, praktisch vorkommenden Bereich von v und w. Sämtliche Schaulinien mit dem Parameter B_1 und B_3 schneiden die Achse $v = 0$ in einem Punkt. Dieser Punkt liegt bei einer Windgeschwindigkeit, die dem Abhebestaudruck q_a entspricht. Auch die Linien $B_2 = \text{konst.}$ laufen größtenteils in diesem Punkt zusammen. Die Linie $B_3 = 0$ fällt mit der Achse $w = 0$ und der Linie $v + w = \text{konst.}$ entsprechend dem Wert q_a zusammen und verläuft weiter entlang der Linie $w = -v$. Praktisch wichtig ist nur ein mäßig breiter Bereich des Diagramms oberhalb und unterhalb der v-Achse, der den hauptsächlich vorkommenden Windstärken entspricht.

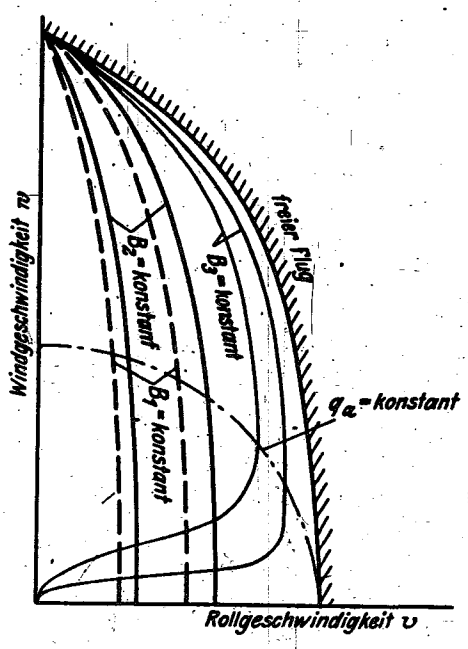
Für den Fall, daß die Rollrichtung mit der Windrichtung einen Winkel $\chi = 45°$ einschließt, ist ein grundsätzliches wv-Diagramm in Bild 7 gezeigt. Die Linien konstanten Staudruckes sind jetzt nicht mehr gerade Linien, sondern haben einen schwach gekrümmten Ver-

8010

Bild 7 (links). wv-Diagramm für Fahrtrichtung unter $\chi = 45°$ zur Windrichtung

Bild 8 (rechts). wv-Diagramm für Seitenwind ($\chi = 90°$)





lauf. Bei unterschiedlichen Verhältnissen $\xi = w/v$ wird das Flugzeug unter verschiedenen Anströmwinkeln angeblasen, zu denen wiederum verschiedene Größen von c_a gehören. Aus diesem Grunde fällt die Grenzlinie zwischen Rollzustand und freiem Flug nicht mit der Linie q_a = konst. zusammen, sondern hat ungefähr den in der Abbildung gezeigten Verlauf. Die Kurvenscharen mit den Parametern B_1, B_2 und B_3 haben ähnlichen Charakter wie in Bild 6. Für die Bedingung $B_3 = 0$ tritt abweichend von obigem anstelle von $w = -v$ die Linie $w = -v \cdot \cos\chi$.

Schließlich zeigt das Bild 8 noch den Fall des Rollens rechtwinklig zum Wind. Die Schaulinien gleichen Staudrucks bilden hier konzentrische Kreise, deren Mittelpunkt im Nullpunkt des Achsenkreuzes liegt. Aus Gründen der bei Besprechung des Bildes 7 erwähnten Abhängigkeit des Anströmwinkels von ξ, die jetzt in noch stärkerem Maße in Erscheinung tritt, fällt die Grenze für den Übergang des Flugzeugs in den freien Flug nicht mit einer Linie q = konst. zusammen. Im übrigen ist aber auch bei diesem Diagramm eine Ähnlichkeit mit den vorher gezeigten Bildern festzustellen.

Wir wollen nun einige konkrete Beispiele bringen und behandeln dabei nur noch Fälle mit parallel zur Fahrtrichtung wehendem Wind.

Wir legen folgende Werte zugrunde:

Abmessungen des Flugzeugs:

$b = 2\,s = 10$ m
$l_M = 1{,}62$ m
$r = 2{,}10$ m
$r_{Sp} = 7{,}80$ m
$G/F = 160$ kg/m²
$i_z = 1{,}63$ m
$\varkappa = 24°$ (in Dreipunktlage)

Reifenwerte: $k_{s\,R} = 6{,}0$
$\mu_r = k_{w\,R} = 0{,}06$

Luftkraftwerte: $c_a = 1{,}6$ (in Dreipunktlage)
$dc_a/d\alpha = 4{,}30$
$\partial c_y / \partial \beta_s = 0{,}36$
$\partial c_N / \partial \beta_s = -0{,}055$
$\partial c_L / \partial \beta_s = 0{,}22$
$\partial c_y / \partial \bar{\varrho}_{z\,e} = 0{,}14$
$\partial c_N / \partial \bar{\varrho}_{z\,e} = -0{,}22$
$\partial c_L / \partial \bar{\varrho}_{z\,e} = 0{,}7$

Luft: $\gamma = 1{,}225$ kg/m³, $\quad \rho = 0{,}125 \frac{\text{kg}\,s^2}{\text{m}^4}$.

Ein Stabilitätsdiagramm für ein Flugzeug mit festem Spornrad zeigt Bild 9 ($\varepsilon = 1{,}0$), wobei $c_M = 0$ gesetzt ist. Das Flugzeug ist im ganzen Rollbereich stabil. Allerdings werden die Größen B_1 und B_2 mit zunehmendem v und w kleiner, was darauf zurückzuführen ist, daß die entlastende Wirkung des Auftriebs geringere Seitenführungskräfte an den Rädern zur Folge hat. Es ist hier gleich als kennzeichnend festzuhalten, daß die Momente um Hoch- und Längsachse infolge der Seitenführungskräfte an Rädern und Sporn wesentlich größer als die Luftkraftmomente sind, solange der Bodendruck auf die Räder etwa den Reaktionskräften aus dem Flugzeuggewicht entspricht. Diesem Umstand ist es zuzuschreiben, daß die Auftriebskräfte weit mehr die Fahrtrichtungshaltung beeinflussen als die unsymmetrischen Luftkräfte.

Bild 10 gibt ein wv-Diagramm für ein Flugzeug mit frei schwenkbarem Spornrad ($\varepsilon = 0$), gleichfalls für $c_M = 0$, welches fast im ganzen Rollbereich instabiles Verhalten zeigt. Die Ausbrechneigung wird aber mit zunehmender Roll- und Windgeschwindigkeit geringer, und ganz kurz vor dem Abheben geht das Flugzeug in den stabilen Zustand über. Dieses Verhalten bestätigt ebenfalls die Tatsache, daß die unsymmetrischen Luftkräfte nur einen geringen Einfluß auf die Fahrtrichtungsstabilität ausüben. Zu dem gleichen Ergebnis gelangten

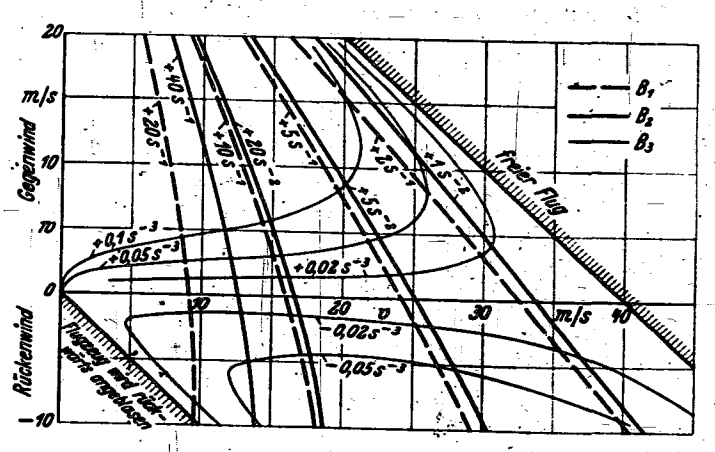


Bild 9. wv-Diagramm für Flugzeug mit festem Spornrad ($\varepsilon = 1{,}0$). Dreipunktlage, $\chi = 0$, $c_M = 0$

8011

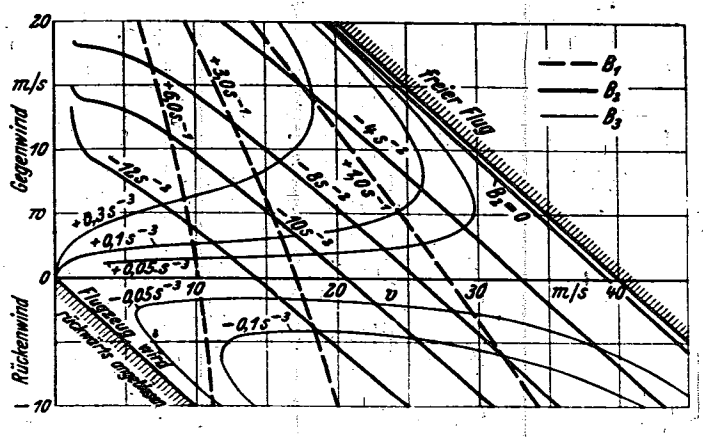


Bild 10. wv-Diagramm für Flugzeug mit frei schwenkbarem Spornrad ($\varepsilon = 0$), Dreipunktlage, $\chi = 0$, $c_M = 0$

auch andere Bearbeiter [6, 7, 8][4]). Von wirklicher Bedeutung ist auch hier nur die Auftriebskraft.

Die Azimutalbewegung ist in beiden Fällen bei Gegenwind stabil, dagegen ist B_3 sowohl für das Flugzeug mit festem als auch mit losem Spornrad bei Rückenwind negativ.

Aus dem Dargelegten folgt, daß ein großes c_a und ein kleines G/F bei einem instabilen Flugzeug günstig sind. Die starke Zunahme der Flächenbelastung G/F und die damit verbundene Vergrößerung des Start- und Landeweges und die Erhöhung der zum Durchfahren dieser Strecken erforderlichen Zeiten haben eine wesentliche Verschlechterung der Fahrtrichtungshaltung herbeigeführt und sind wohl die Ursache dafür, daß man sich heute mit diesen Dingen etwas intensiver beschäftigt.

Die Größen $\partial c_y/\partial \beta_s$, $\partial c_N/\partial \beta_s$ und $\partial c_N/\partial \varphi_{ze}$ üben einen stabilisierenden, wenn auch zahlenmäßig nicht sehr starken Einfluß aus. Der Wert $\partial c_y/\partial \varphi_{ze}$ bleibt praktisch ohne Einfluß. Die Rollmomentenbeiwerte $\partial c_L/\partial \beta_s$ und $\partial c_L/\partial \varphi_{ze}$ haben, da sie entgegengesetzte Vorzeichen wie $\partial c_N/\partial \beta_s$ und $\partial c_N/\partial \varphi_{ze}$ tragen, umgekehrte Wirkung wie diese. Weil die Rollmomentenwerte gewöhnlich mehrfache Größe wie die Giermomentenwerte haben, lohnt sich die Berücksichtigung von $\partial c_L/\partial \beta_s$ und $\partial c_L/\partial \varphi_{ze}$ neben $\partial c_N/\partial \beta_s$ und $\partial c_N/\partial \varphi_{ze}$, obwohl sie mit k_{wR} zu multiplizieren sind. Bei blockierten Rädern ist sogar meistens $\partial c_L/\partial \beta_s \cdot k_{wR} > -\partial c_N/\partial \beta_s$ und $\partial c_L/\partial \varphi_{ze} \cdot k_{wR} > -\partial c_N/\partial \varphi_{ze}$, sodaß die unsymmetrischen Luftkräfte in diesem Fall instabilisierend wirken.

Den Einfluß des Momentenbeiwertes c_M zeigen die Bilder 11 und 12 in Abhängigkeit von der Rollgeschwindigkeit v für $\varepsilon = 1{,}0$ und $\varepsilon = 0$. Wie schon gesagt wurde, sind am Flugzeug in Dreipunktlage keine sehr großen schwanzlastigen Luftkraftmomente mit dem Höhensteuer aufzubringen; $c_M = -0{,}12$ stellt einen Wert dar, dessen Größe wohl nur selten übertroffen werden kann. Für „Drücken" wurde in der dargestellten Vergleichsrechnung der gleiche Absolutbetrag von c_M eingesetzt wie für „Ziehen". Natürlich können größere positive c_M-Werte vorkommen, das Abheben des Spornrades findet dann dementsprechend früher statt. Nach Bild 11 ruft ein negatives c_M eine nicht unbedeutende Verbesserung von B_2 hervor, besonders trifft dies für $\varepsilon = 1{,}0$ zu. Der Einfluß des Längsmomentes auf B_1 ist weniger bedeutend (Bild 12). Hieraus folgt die Regel: Solange der Sporn den Boden berührt, ist es zweckmäßig, seine Belastung zu erhöhen, d. h. den Steuerknüppel bis zum Anschlag durchzuziehen.

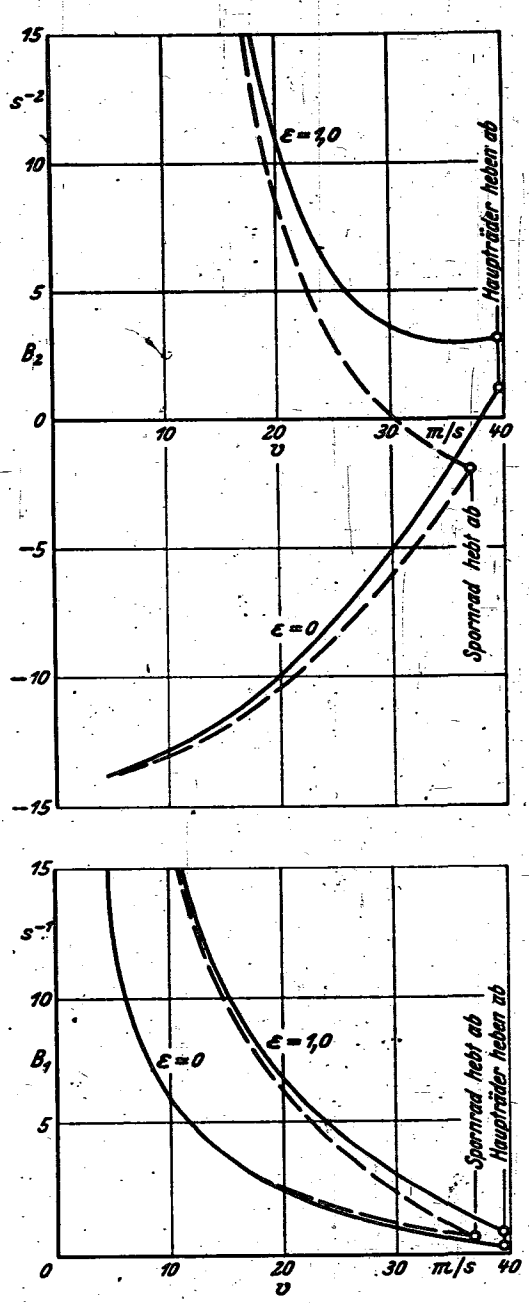


Bild 11 und 12. Einfluß des Luftkraftlängsmomentes auf B_1 und B_2 bei Dreipunktlage, $w = 0$
—— $c_M = -0{,}12$ (Ziehen)
- - - - $c_M = +0{,}12$ (Drücken)

VII. Einfluß der Baugrößen und Betriebsbedingungen

Schon im ersten Teilbericht dieser Arbeit wurde auf den großen Einfluß der Seitenführungskraft am Sporn- und Bugrad, die in der Verhältniszahl s berücksichtigt wird, auf die Fahrtrichtungsstabilität hingewiesen. Im Bild 13 ist die Bedingung $B_2 = 0$ im wv-Diagramm dargestellt. Bei kleinen Rollgeschwindigkeiten ist das Flugzeug zunächst stabil. Mit zunehmender Geschwindigkeit kommt es dann in ein instabiles Gebiet, und kurz vor dem Abheben wird das Verhalten des Flugzeugs wieder stabil. Das instabile Gebiet ist umso kleiner, je stärker der Gegenwind ist. Bei $w = 12{,}0$ m/s und $s = 0{,}7$

4) Den Untersuchungen von Scheubel [6] und Thomas [7] liegen wesentlich andere Voraussetzungen zugrunde als der vorliegenden Darstellung. Demzufolge ergeben sich auch etwas andere Ergebnisse, die z. T. mit den Aussagen dieses Berichtes in Widerspruch stehen. Die dort getroffene Vernachlässigung des seitlichen Gleitens der Laufräder führt zu Resultaten, die dem tatsächlichen Verhalten eines gummibereiften Fahrzeugs nicht ganz gerecht werden.

8012

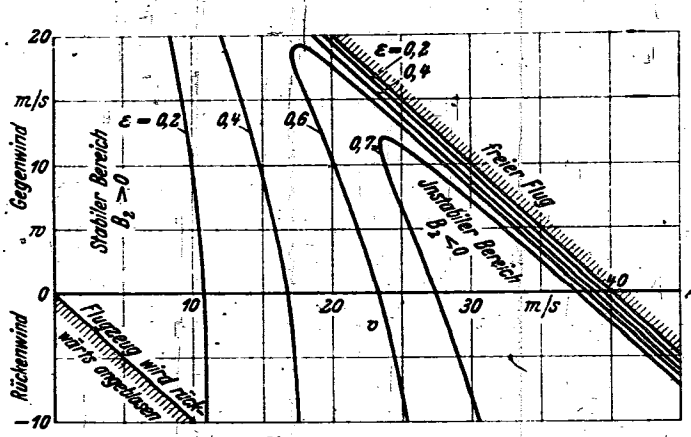


Bild 13. wv-Diagramm, Bedingung $B_2 = 0$ bei Dreipunktlage. $\chi = 0$, $c_M = 0$

ist beispielsweise das durchgerechnete Flugzeug im ganzen Bereich fahrtrichtungsstabil. Diese Tendenz kommt auch sehr deutlich im Bild 14 zum Ausdruck. In diesem Schaubild ist B_2 über v für verschiedene ε und $w = 0$ aufgetragen. Bild 15 zeigt B_1 für verschiedene Werte ε. Unterschiedliche Größen von ε kann man praktisch durch entsprechende, vom Schwenkwinkel abhängige Rückstellmomente an der Schwenkachse des Spornrades verwirklichen, wie im ersten Teil ausgeführt wurde. Nimmt man an, daß der Beiwert k_s der Seitenführungskraft für den Reifen des Spornrades die gleiche Größe hat wie der für die Reifen des Hauptfahrwerks, so läßt sich ε aus der dort gegebenen Beziehung berechnen zu

$$\varepsilon = \frac{b}{1 + b}$$

mit $b = \frac{c_{F\beta}}{k_s\, a\, P_{Sp}}$

Für ein Flugzeug, wie es den Beispielsrechnungen zugrunde liegt, beträgt am Stand etwa $P_{Sp} = 250$ kg, a = 5 cm. Es würden folgende Werte für die Konstante der elastischen Fesselung erforderlich sein:

ε	0,2	0,4	0,6	0,7
$c_{F\beta}$ mkg/Winkelgrad	0,33	0,87	1,95	3,03

Die Rückstellmomente erreichen schon für kleine ε derartige Größen, daß diese für die Wendigkeit des Flugzeuges am Boden sehr nachteilig werden können. Die bislang bei Spornrädern angewandten Rückführungsmomente sind allgemein bedeutend kleiner. Es ist dafür Sorge zu tragen, daß beim Rollen von der Halle zum Startplatz usw. der Sporn frei schwenkbar ist (beispielsweise durch Lösen der elastischen Fesselung oder dergleichen). Es zeigte sich nun weiter, daß ε von dem Raddruck des Spornes abhängig ist. Wenn wie in unseren Beispielen $c_M = 0$ ist, so nimmt der Sporndruck von einem Höchstwert bei $v = 0$ mit dem Staudruck des Fahrtwindes linear ab und verschwindet im Augenblick des Abhebens. Dementsprechend nimmt ε mit der Rollgeschwindigkeit zu. Bild 16 gibt den Verlauf von ε über v an, wenn für $c_{F\beta}$ und den Nachlauf a des Rades gewisse, jeweils für eine Kurve konstante Werte angenommen werden. Im Bereich kleiner Rollgeschwindigkeiten ist B_2 stark veränderlich mit ε, dagegen ändert sich der Wert ε aber nur wenig mit v. Bei großem v ist es umgekehrt, ε ändert sich stark und B_2 ist weniger von ε abhängig. So kommt es, daß die Geschwindigkeitsabhängigkeit von ε gar nicht so großen Einfluß auf die Fahrtrichtungsstabilität hat. Die Bilder 14 und 15 geben daher das Kennzeichnende sehr gut wieder. Eine andere

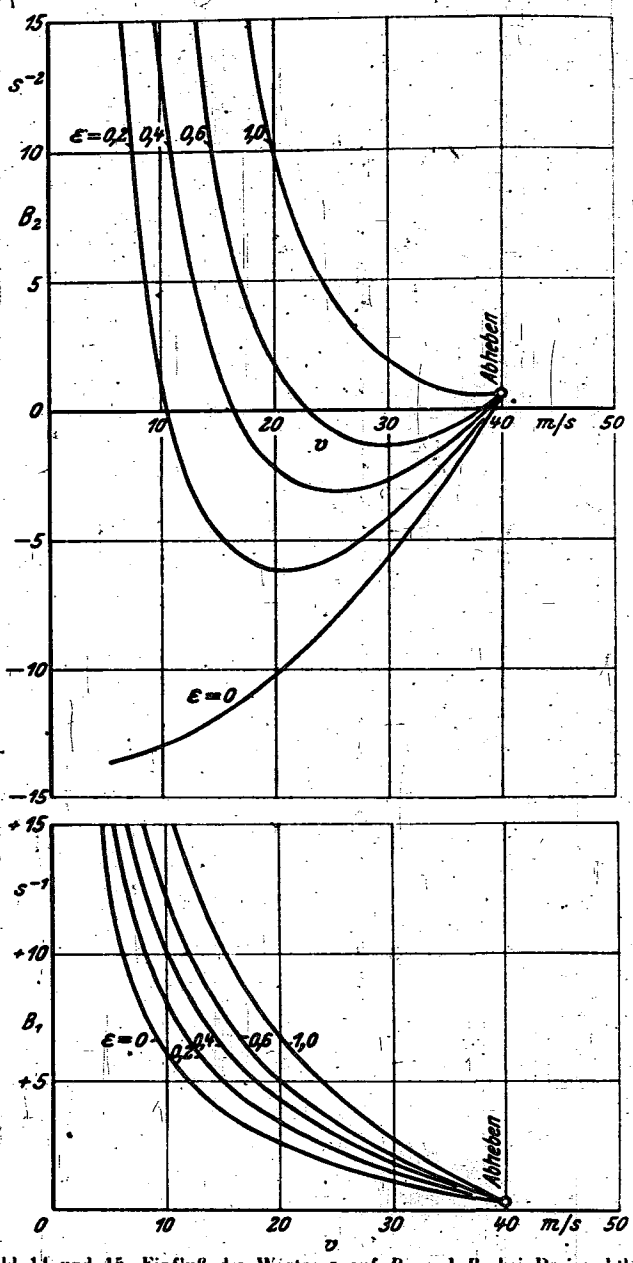


Bild 14 und 15. Einfluß des Wertes ε auf B_1 und B_2 bei Dreipunktlage. $w = 0$, $c_M = 0$

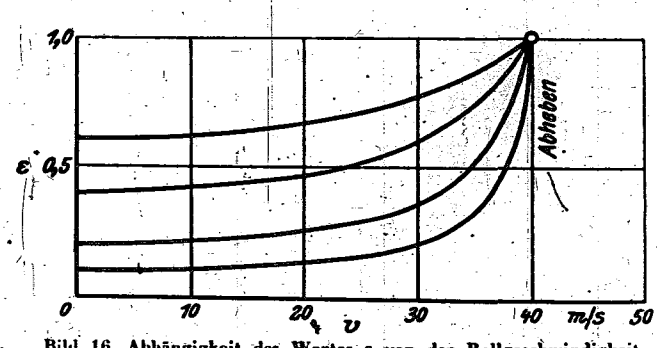


Bild 16. Abhängigkeit des Wertes ε von der Rollgeschwindigkeit ($c_M = 0$, $w = 0$)

Möglichkeit zur Erreichung $\varepsilon > 0$ besteht in der Neigung der Schwenkachse des Spornrades in Fahrtrichtung. Hierdurch können nur sehr kleine Beträge von ε erreicht werden, die aber von der Belastung unabhängig sind.

Wenn der Einfluß des Bremsens untersucht werden soll, so ist zu beachten, daß μ_b von der Radlast und damit vom Staudruck des Fahrtwindes abhängig ist, wenn an der Bremstrommel gleichbleibende Bremsmomente auf-

8013

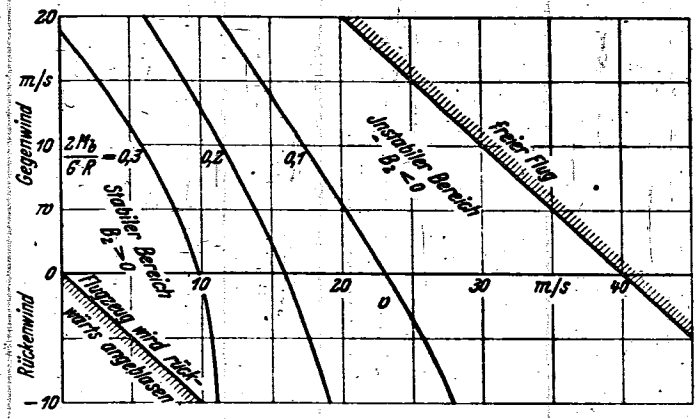


Bild 17. wv-Diagramm, Bedingung $B_2 = 0$ für verschiedene Bremszustände bei Dreipunktlage, $\chi = 0$, $c_M = 0$, $\varepsilon = 1{,}0$

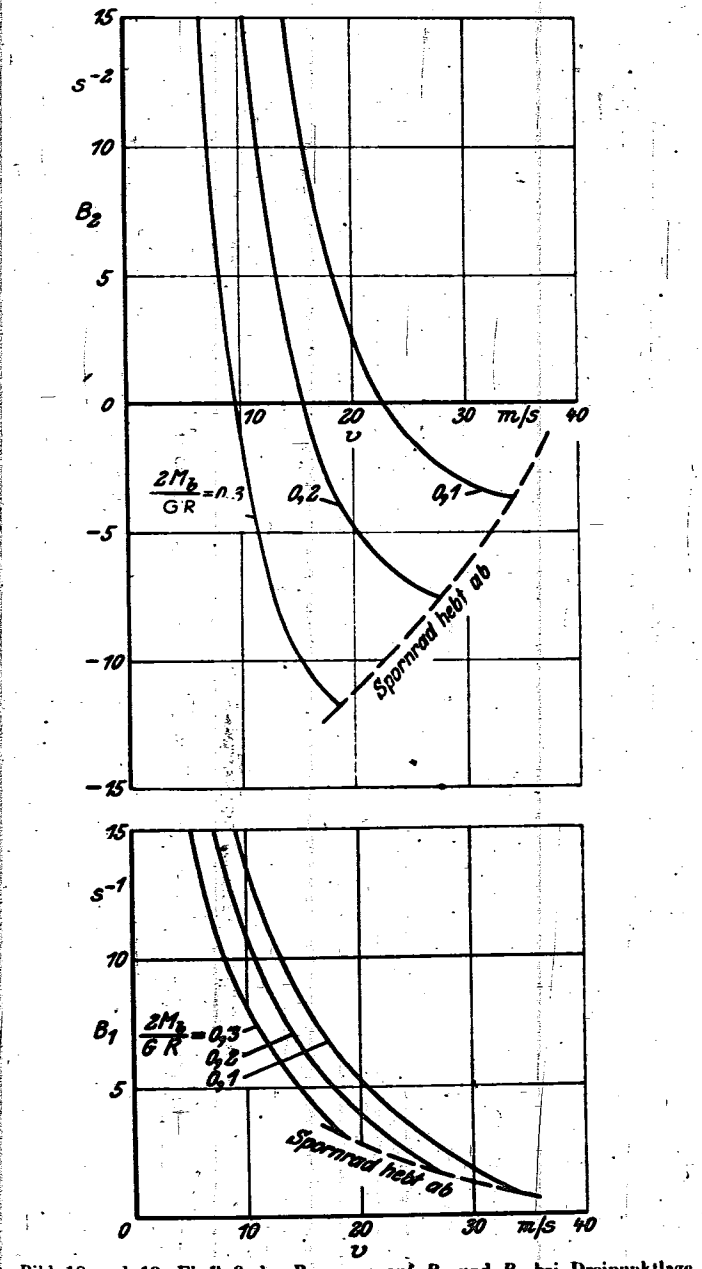


Bild 18 und 19. Einfluß des Bremsens auf B_1 und B_2 bei Dreipunktlage, $w = 0$, $\varepsilon = 1{,}0$, $c_M = 0$

gebracht werden. Nach den Ausführungen des ersten Teiles können wir schreiben:

$$\mu_b \sim \mu_r + \frac{2M_b}{G\left[1 - c_a \frac{q_v (1 + \xi^2 + 2\xi \cos\gamma)}{G/F}\right] R} \leq \mu_h$$

Es wurde nun in Bild 17 die Bedingung $B_2 = 0$ in Abhängigkeit von v und w für $c_M = 0$ und $\varepsilon = 1{,}0$ für einige Werte $\frac{2M_b}{GR}$ aufgetragen. Im übrigen lagen wieder die im vorigen Abschnitt angegebenen Zahlenwerte zugrunde. Bild 18 und 19 gibt einen Überblick über die Werte B_2 und B_1 als Funktion der Rollgeschwindigkeit. Es zeigt sich hier der schon bei Untersuchung des Flugzeugs unter Vernachlässigung der Luftkräfte beobachtete ungünstige Einfluß des Bremsens auf die Fahrtrichtungshaltung des Flugzeugs im vollen Maße. Der Stärke des Bremsens ist eine Grenze in der Überschlaggefahr des Flugzeugs gesetzt. Im Bild 18 und 19 wurde die Grenzkurve eingezeichnet, bei der das Spornrad vom Boden abhebt. Bei hoher Geschwindigkeit dürfen also die Bremsen nur mäßig angezogen werden, wenn $c_M = 0$ ist. Hat das Spornrad den Boden inmal verlassen, dann ist ein Überschlag gewöhnlich unvermeidlich, wie bisher noch unveröffentlichte Untersuchungen von G. Mathias und K. Schaaff zeigen.

Wir haben gesehen, daß das Flugzeug mit frei schwenkbarem Spornrad auch trotz Einflusses der Luftkräfte fast im ganzen in Frage kommenden Rollbereich instabil ist. Wenn eine freibewegliche Spornrolle beibehalten werden soll, kann man nur danach trachten, die vorhandene Ausbrechneigung zu verringern, d. h. den Betrag von B_2 möglichst klein zu halten. Hier spielt wohl die in dem Winkel $\varkappa$ berücksichtigte Lage des Flugzeugschwerpunktes in bezug auf die Räder des Hauptfahrwerks die wichtigste Rolle, auf die ebenfalls schon im ersten Teilbericht eingegangen wurde. Aus Bild 20 und 21 geht der Einfluß von $\varkappa$ hervor. B_2 ist bei nicht sehr großem v etwa proportional dem Wert von $\varkappa$, wie sich auch schon am Fahrzeug unter Vernachlässigung der Luftkräfte ergab. Durch die Überschlaggefahr ist dem Winkel $\varkappa$ ein unterer Grenzwert gesetzt. Die Grenze der statischen Fahrtrichtungsstabilität wird durch die Schwerpunktlage wenig beeinflußt, wie Bild 22 zeigt, in welchem der zur Erfüllung der Bedingung $B_2 = 0$ erforderliche Wert ε über der Rollgeschwindigkeit v aufgetragen ist. Die Tatsache steht in Einklang mit dem diesbezüglichen Ergebnis des ersten Teilberichtes. Allerdings gehört hier zu einem größeren $\varkappa$ ein etwas größeres ε, während es ohne Luftkräfte umgekehrt war. Dies ist auf die Wirkung der unsymmetrischen Luftkräfte zurückzuführen. Bei einem Flugzeug mit starrem Heckrad ist allerdings ein größerer Wert von $\varkappa$ empfehlenswert, da hierdurch der ungünstige Einfluß des Bremsens vermindert wird.

Günstig auf die Verzögerung der Ausbrechbewegung wirken sich kleine Seitenführungskräfte an den vor dem Schwerpunkt liegenden Rädern und ein größerer Trägheitsradius i_{red} des Flugzeugs aus. Die Koeffizienten B_2 und B_3 sind dem Quadrat von i_{red} umgekehrt verhältig; für B_1 ist die Abhängigkeit etwas geringer. Die Größe der Spurweite des Hauptfahrwerks hat hier ebenso wie am ungefederten Fahrzeug ohne Luftkräfte keinerlei Wirkung auf die Fahrtrichtungshaltung, solange man nur kleine Bewegungsänderungen betrachtet. Im übrigen nimmt die Ausbrechneigung mit der Größe des Flugzeugs ab, wenn man im gleichen Geschwindigkeitsbereich bleibt, wie schon bei [7] hervorgehoben wird.

VIII. Rollen des Flugzeugs in Zweipunktlage

Wir wollen jetzt noch die Stabilitätsbedingungen für die Zweipunktlage des Flugzeugs ableiten, für die sich

8014

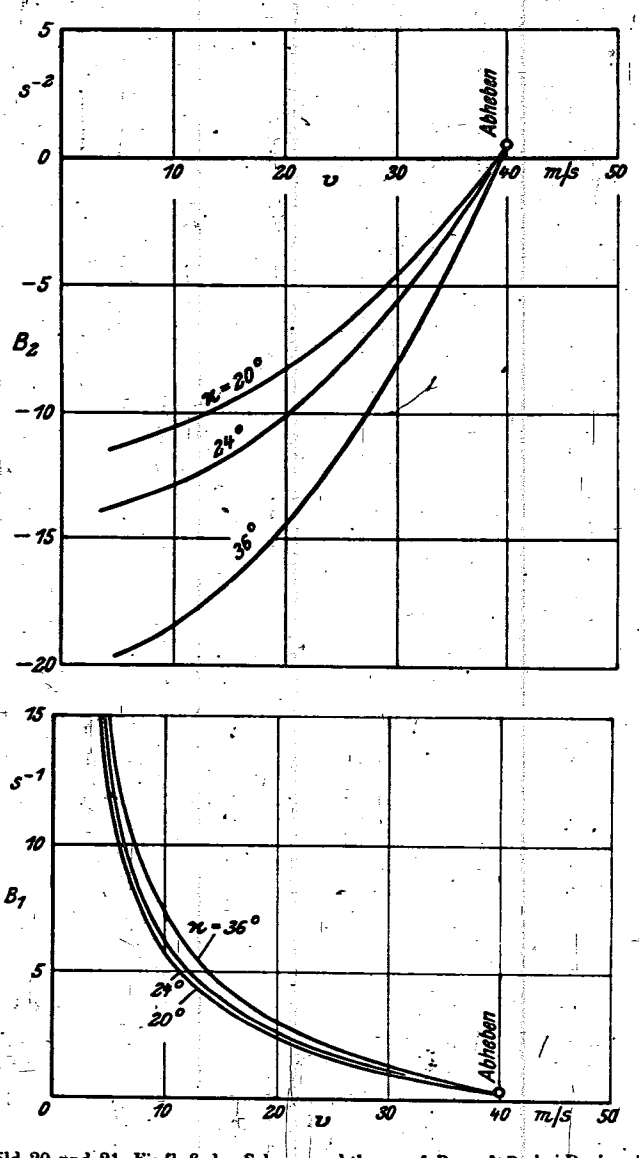


Bild 20 und 21. Einfluß der Schwerpunktlage auf B_1 und B_2 bei Dreipunktlage, $w = 0$, $\varepsilon = 0$, $c_M = 0$

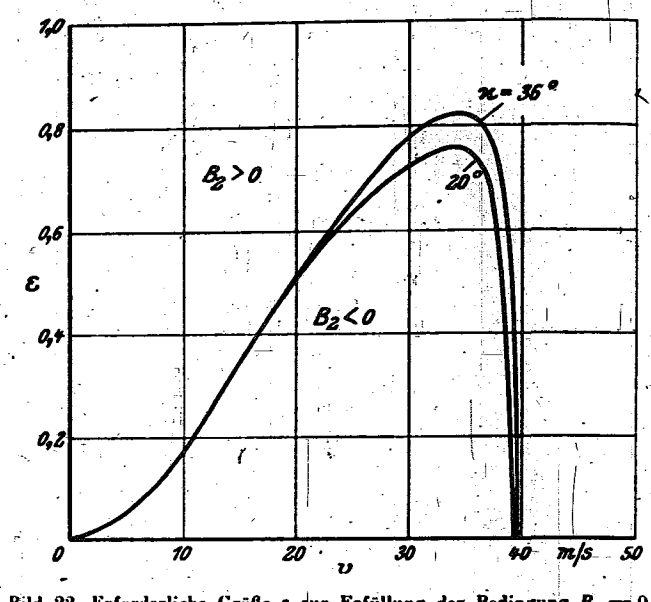


Bild 22. Erforderliche Größe ε zur Erfüllung der Bedingung $B_2 = 0$ für Dreipunktlage, $w = 0$, $c_M = 0$

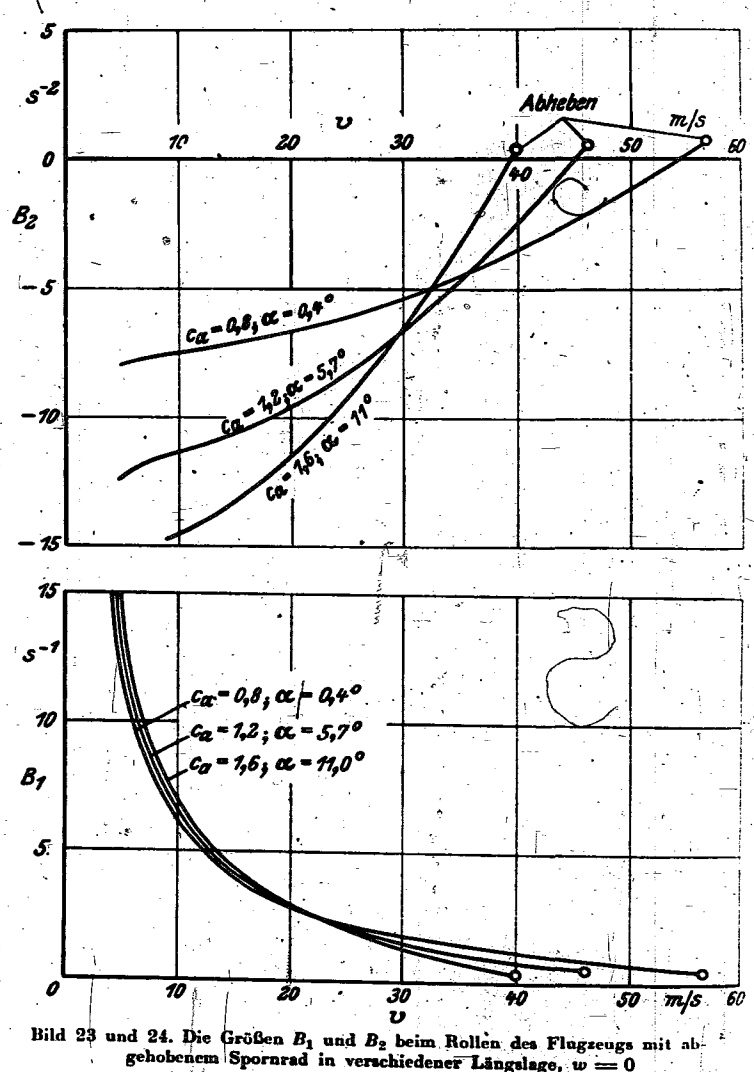


Bild 23 und 24. Die Größen B_1 und B_2 beim Rollen des Flugzeugs mit abgehobenem Spornrad in verschiedener Längslage, $w = 0$

zwar keine grundsätzlich anderen Verhältnisse ergeben; die Formelausdrücke werden jedoch beträchtlich übersichtlicher.

Die beiden Bewegungsgleichungen können in der Form (1) und (2) übernommen werden, nur ist $S_{Sp} = 0$ zu setzen. Die Ermittlung der Raddrücke P_{Rr} und P_{Rl} gestaltet sich etwas einfacher. Aus

$$P_{Rr} + P_{Rl} - G + A = 0$$

folgt

$$P_{Rr} + P_{Rl} = G - A.$$

Die Momentenbedingung bezüglich der y-Achse wird nun nur noch dazu benötigt, die erforderliche Größe von M zu berechnen, bzw. die zum Beharrungszustand gehörige Lage des Flugzeugs zu ermitteln, wenn bestimmte Stellungen von Landeklappen und Höhenruder vorgegeben sind.

Die sich bei Auflösung des Gleichungssystems ergebende charakteristische Gleichung und die darin vorkommenden Koeffizienten haben die gleiche Form, wie sie sich im IV. Abschnitt ergaben. Lediglich für die Zeitfaktoren ergeben sich die einfacheren Ausdrücke der Tafel III.

Bei einem Flugzeug, dessen Hauptfahrwerk vor dem Schwerpunkt liegt, rufen die Seitenführungskräfte an den Rädern beim Rollen mit abgehobenem Spornrad starke instabilisierende Momente hervor. Eine Stabilisierung durch Rückstellmomente an der Schwenkachse des Spornrades ist hier nicht mehr möglich. Es ist deshalb anzustreben, diese Momente klein zu halten, um die Ausbrechneigung zu vermindern. Grundsätzlich liegen hier ähnliche Verhältnisse vor wie beim Flugzeug mit

8015

Tafel III. Zeitfaktoren der dynamischen Gleichgewichtsbedingungen (ungefedertes Flugzeug). Flugzeug in Zweipunktlage (abgehobenes Bug- oder Spornrad).

Bezeichnung	Formel	Zeitfaktor für	Dimension
η_1	$T^{-1}\left\{\left[1-c_a\frac{q_v}{G/F}(1+\xi^2+2\cos\gamma)\right]\cdot\left[\frac{k_s R}{2}-\frac{y_b}{2}\right]+\frac{q_v}{G/F}\left[-\frac{c_w}{2}(1+\xi^2+2\xi\cos\gamma)+\frac{\partial c_y/\partial\beta_s}{2}(1+\xi\cos\gamma)\right]\right\}$	Schräglauf-Seitenkraft	s^{-1}
η_2	$T^{-1}\left\{\frac{q_v}{G/F}\cdot\frac{\partial c_y/\partial\beta_s}{2}(\xi^2+\xi\cos\gamma)\right\}$	Azimutal-Seitenkraft	s^{-1}
η_3	$\left\{1+\frac{k_s R}{2}\cdot\frac{\gamma r\sin\varkappa}{q_v}\left[1-c_a\frac{q_v(1+\xi^2+2\xi\cos\gamma)}{G/F}\right]-\frac{\gamma r\sin\varkappa}{G/F}\cdot\frac{\partial c_y/\partial\varphi_{zc}}{2}\nu\sqrt{1+\xi^2+2\xi\cos\gamma}\right\}$	Wende-Seitenkraft	—
η_4	$T^{-2}\left(\frac{r\sin\varkappa}{i_{red}}\right)^2\left\{\frac{q_v}{\gamma r\sin\varkappa}\cdot\frac{k_s R}{2}\left[1-c_a\frac{q_v(1+\xi^2+2\xi\cos\gamma)}{G/F}\right](1-\sigma_w)+\frac{q_v^2}{\gamma r\sin\varkappa\, G/F}\cdot\frac{\partial c_N/\partial\beta_s+k_w R\cdot\partial c_L/\partial\beta_s}{2}\nu(1+\xi\cos\gamma)\right\}$	Schräglauf-Wendemoment	s^{-2}
η_5	$T^{-2}\left(\frac{r\sin\varkappa}{i_{red}}\right)^2\left\{\frac{q_v^2}{\gamma r\sin\varkappa G/F}\cdot\frac{\partial c_N/\partial\beta_s+k_w R\cdot\partial c_L/\partial\beta_s}{2}\nu(\xi^2+\xi\cos\gamma)\right\}$	Azimutal-Wendemoment	s^{-2}
η_6	$T^{-1}\left(\frac{r\sin\varkappa}{i_{red}}\right)^2\left\{\frac{k_s R}{2}\left[1-c_a\frac{q_v(1+\xi^2+2\xi\cos\gamma)}{G/F}\right](1-\sigma_w)-\frac{q_v}{G/F}\cdot\frac{\partial c_N/\partial\varphi_{zc}+k_w R\cdot\partial c_L/\partial\varphi_{zc}}{2}\nu^2\sqrt{1+\xi^2+2\xi\cos\gamma}\right\}$	Wende-Dämpfungsmoment	s^{-1}

$$\sigma_w=\frac{k_w R}{tg\,\varkappa};\quad \nu=\frac{s}{r\sin\varkappa};\quad T=\frac{v}{2g};\quad \xi=w/v$$

frei schwenkbarem Spornrad in Dreipunktlage. Viele Maßnahmen, die dort zur Verlangsamung der Ausbrechbewegung geeignet sind, werden auch hier mit Erfolg angewandt. Hierzu gehören Verkleinerung der Seitenführung der Haupträder (gelenkige Anordnung der Räder, verdrehweiches Fahrwerk), kleine Vorlage der Räder vor dem Schwerpunkt, großer Trägheitshalbmesser i_{red}. Das Bremsen der Haupträder ist ohne Einfluß, wenn von einer unmittelbaren Wirkung des Bremsens auf die Seitenführung der Bereifung abgesehen wird. Es steht aber dem Flugzeugführer ein Mittel in der Änderung der Längsneigung des Flugzeugs durch Betätigung des Höhenruders zur Verfügung, durch welches er die Ausbrechneigung innerhalb gewisser Grenzen beeinflussen kann. Wenn das Flugzeug mit kleinem Anstellwinkel rollt, so ist der waagerechte Abstand der Räder vom Schwerpunkt kleiner, als wenn der Sporn dicht über dem Boden bleibt. Andererseits ist dann aber auch der Auftriebsbeiwert kleiner. Das Zusammenwirken dieser beiden verschiedenen Einflüsse zeigen die Bilder 23 und 24. Der Absolutwert von B_2 nimmt mit zunehmender Rollgeschwindigkeit ab und kurz vor dem Abheben wird B_2 positiv, ähnlich wie beim Flugzeug mit $s=0$ in Dreipunktlage. Solange die Rollgeschwindigkeit nun nicht sehr groß ist, ergeben sich bei kleinem Anstellwinkel günstigere Werte für B_2. Bei zunehmender Rollgeschwindigkeit gewinnt dann aber die entlastende Wirkung des Auftriebs das Übergewicht über den Einfluß der Schwerpunktlage. Die einzelnen Kurven überschneiden sich in diesem Gebiet. Hiernach wäre es günstig, wenn der Flugzeugführer beim Start das Flugzeug zunächst in eine möglichst horizontale Lage bringen und die Maschine erst bei hoher Rollgeschwindigkeit auf großen Anstellwinkel ziehen würde. Abgesehen von der Tatsache, daß es bei vielen Flugzeugen einfach nicht möglich ist, sie bei geringer Rollgeschwindigkeit in eine waagerechte Lage zu bringen, hat dies Verfahren jedoch Nachteile, auf die wir gleich zurückkommen wollen. Der Einfluß der Längsneigung des Flugzeugs auf die Größe von B_1 springt nicht so sehr in die Augen. Die tatsächlichen Verhältnisse beim Start werden durch den Luftschraubenstrahl meist insofern beeinflußt, als die Luftkräfte auch schon bei kleineren Rollgeschwindigkeiten stärker zur Wirkung kommen. Grundsätzlich bleibt jedoch dieselbe Tendenz wie bei vernachlässigtem Strahleinfluß erhalten.

Da die Ausbrechbewegungen des Flugzeugs mit den Bewegungen bezüglich der Querachse durch die Kreiselmomente der Luftschrauben gekoppelt sind, kann nun die Frage aufgeworfen werden, ob die Vernachlässigung der Längsbewegungen in diesem Fall, bei welchem das Flugzeug nur auf den Haupträdern rollt, gerechtfertigt ist. Eine durchgeführte Vergleichsuntersuchung, die hier nicht wiedergegeben werden soll, überzeugte davon, daß die Einflüsse der Luftschraubenkreiselmomente auf die Fahrtrichtungsstabilität von geringfügiger Bedeutung sind und daß sie stabilitätsverbessernd wirken. Dagegen erlangen die Kreiselmomente der Luftschrauben einige Wichtigkeit bei größeren, durch Höhenruderbetätigung hervorgerufenen Längsneigungsänderungen während des Rollens. Durch die hierdurch auftretenden Störmomente um die Hochachse kann eine Ausbrechbewegung unmittelbar eingeleitet werden. Es ist also im Gegensatz zu obigem Ergebnis zweckmäßig, größere Längsneigungsänderungen nach Möglichkeit zu vermeiden. Sind sie jedoch nicht zu umgehen, so sollen die Längsneigungsänderungen möglichst plötzlich vorgenommen werden, weil so die Aktionszeiten der Störmomente klein gehalten werden. Ungünstiger ist es, eine langsame, stetige Längsneigungsänderung auszuführen[5]). Eine Verbesse-

5) Diese Aussage steht im Widerspruch zu der von F. Scheubel auf der Stuttgarter Tagung (Oktober 1941) [6] vorgetragenen Ansicht. Tatsache ist jedoch, daß die dem Flugzeug infolge der Kreiselwirkung mitge-

8016

rung der Verhältnisse bringen hier Luftschrauben mit entgegengesetztem Drehsinn, die auch im Hinblick auf einige Flugeigenschaftsfragen vorteilhaft sind.

Beim Flugzeug mit Bugradfahrwerk wird die Fahrtrichtungsstabilität durch Abheben des Bugrades nicht gestört, weil die Räder des Hauptfahrwerks hinter dem Schwerpunkt liegen.

IX. Zusammenfassung

Im Anschluß an die Untersuchungen des ersten Teilberichtes wurden die dynamischen Gleichgewichtsbedingungen des ungefederten Flugzeugs für kleine Störungen des Geradeausrollens auf waagerechter Bodenebene eingehenden Betrachtungen unterzogen, denen eine kurze Behandlung der am Flugzeug wirkenden Luftkräfte unter Beachtung des Bodeneinflusses vorausging. Während sich das bei Windstille rollende Flugzeug ebenso wie im freien Fluge bezüglich der Bewegungsrichtung indifferent verhält, entstehen am rollenden Flugzeug bei vorhandenem Wind von der Fahrtrichtung abhängige Kräfte und Momente, die gewöhnlich bestrebt sind, das Flugzeug in seiner Fahrtrichtung zu halten, bzw. es nach einer Störung in diese zurückkehren zu lassen. Die durch diese Azimutalkräfte hervorgerufene aperiodische Bewegung, die mit Azimutalbewegung bezeichnet wurde, läßt sich getrennt von der schon im ersten Teilbericht betrachteten Schleuderbewegung behandeln und verläuft in der Regel unvergleichlich langsamer als letztgenannte. Für die Beurteilung der Fahrtrichtungsstabilität ist hauptsächlich die Schleuderbewegung maßgebend.

An einer Anzahl Beispielsrechnungen wurde die Wirkung der Luftkräfte und der übrigen Einflußgrößen auf die Fahrtrichtungshaltung und auf die Ausbrechneigung studiert. Der Einfluß der unsymmetrischen Luftkräfte infolge Schräganströmung und Wendebewegung des Flugzeugs ist wesentlich geringer als der der Auftriebskräfte. Die Wirkung der übrigen Baugrößen und Betriebsbedingungen entspricht durchaus den am Flugzeug unter Vernachlässigung der Luftkräfte erhaltenen Ergebnissen des ersten Teilberichtes.

Eine Betrachtung des Rollvorganges mit abgehobenem Spornrad zeigte, daß bei niedriger Rollgeschwindigkeit die Ausbrechneigung bei horizontaler Lage des Flugzeugs (Fluglage) geringer ist, als wenn der Sporn nur wenig vom Boden abgehoben ist; bei hoher Rollgeschwindigkeit ist ein großer Anstellwinkel günstiger. Änderungen der Längsneigung während des Rollens sind dagegen wegen der auftretenden Luftschraubenkreiselmomente möglichst zu vermeiden.

teilte Winkelgeschwindigkeit bezüglich der Hochachse nur von dem absoluten Wert der Längsneigungsänderung $\Delta\alpha$, nicht aber von dem zeitlichen Ablauf dieser Bewegung abhängig ist. Die seitliche Auslenkung $\Delta\psi$ des Flugzeugs ist dagegen von der Dauer der Schwenkbewegung um die y-Achse abhängig; sie bleibt am geringsten, wenn die Längsneigungsänderung ruckartig vorgenommen wird. Für eine langsame Längsneigungsänderung könnten höchstens physische Gesichtspunkte insofern sprechen, als der Flugzeugführer dann mehr Zeit hat, der Ausbrechbewegung durch Seitenruderbetätigung zu begegnen. Die übrigen, additional wirkenden Störmomete, die bei Längsneigungsänderungen zur Auswirkung kommen (z_e-Komponente des Motordrehmomentes, geänderte Anblasrichtung des Seitenleitwerks) sind unabhängig davon, ob der Anstellwinkel rasch oder langsam geändert wird.

X. Schrifttum

[1] M. Kohler: Luftkräfte und Momente an einem Seeflugzeug auf dem Wasser. ZFM Bd. 24 (1933).

[2] M. Kohler: Sechskomponenten-Messungen an einem Flugboot-Modell über einer den Wasserspiegel darstellenden Platte. Luftf.-Forschung Bd. 14 (1937) S. 583.

[3] O. Pabst: Sechskomponenten-Messungen an einem Seeflugzeugmodell. Luftf.-Forschung Bd. 18 (1941) S. 47.

[4] Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, II. Lieferung, S. 41.

[5] J. Rotta: Luftkräfte am Tragflügel mit einer seitlichen Scheibe. Ing.-Arch Bd. XIII (1942) S. 119.

[6] F. N. Scheubel: Ausbrechen bei Start und Landung. Bericht 140 (1942) der Lilienthal-Gesellschaft S. 14.

[7] Thomas: Beiträge zur Dynamik des rollenden Flugzeugs. ZWB-Forschungsbericht Nr. 1450.

[8] E. Maier: Das Ausbrechen von Spornradflugzeugen. LGL-Bericht 140 (1942) S. 19.

[9] L. Huber: Die Rollstabilität des Flugzeugfahrwerks und die sich daraus ergebenden Forderungen an das schwenkbare Rad. LGL-Bericht 140 (1942) S. 24.

[10] O. Dietz u. R. Harling: Modellversuche über das Verhalten des Flugzeugs mit Bug- oder Heckrad. ZWB-Forschungsbericht Nr. 1587.

[11] L. Huber, E. Maier, R. Harling: Verhalten des Flugzeugs auf dem Rollfeld bei Seitenwind. Filmbericht Nr. 8.

Berichtigungen zum I. Teilbericht

In dem in den Technischen Berichten Bd. 9 (1942) Nr. 2, S. 37 abgedruckten ersten Teilbericht sind folgende Änderungen vorzunehmen:

S. 38, Bild 1: Der Kraftvektor S_{Sp} muß entgegengesetzt gerichtet sein.
(Richtung der positiven y-Achse)

S. 39, links; letzte Gleichung: statt „M_z" lies „M_{ze}".

S. 41, rechts; Gleichung (4): Hinter B_2 lies „=" statt „+".

S. 44, Bild 7: Ausgezogene Kurve $\varkappa = 3{,}5°$
gestrichelte Kurve $\varkappa = 35°$

S. 46, links; Zeile 12: statt „erhöhen" lies „vermindern".

S. 46, rechts; letzte Gleichung: Das Glied „α" hinter der der Klammer ist zu streichen.

8017

Zusatz-Beanspruchungen in Stahl-Dural-Konstruktionen infolge Wärmeausdehnungen

R. Freyer, Bremen

Bericht der Focke-Wulf Flugzeugbau G. m. b. H., Bremen

A 22 2

Übersicht: Untersucht werden die bei Stahl-Duralquerschnitten und deren Nietverbindungen infolge der verschiedenen Wärmeausdehnungen auftretenden Zusatzbeanspruchungen. Die angestellten Untersuchungen gelten für den elastischen Bereich; im Anschluß daran werden Betrachtungen für den unelastischen Bereich gemacht. Zahlenbeispiele werden durchgerechnet.

Gliederung

I. Einleitung
II. Zusatzbeanspruchungen im elastischen Bereich
A. Zwei-Querschnittsanordnung
1. verhinderte Krümmung
2. nicht verhinderte Krümmung
3. Vergleich der Ergebnisse
B. Drei-Querschnittsanordnung
1. verhinderte Krümmung
2. nicht verhinderte Krümmung
3. Vergleich der Ergebnisse
III. Betrachtungen über die Zusatzbeanspruchungen im unelastischen Bereich
IV. Beispiele
V. Zusammenfassung
VI. Schrifttum

Bezeichnungen

n	= Anzahl
o	= oben
u	= unten
D	= Dural
St	= Stahl
$t_L°$	= Temperatur bei der Belastung
$t_0°$	= Temperatur beim Zusammenbau
α	= Wärmeausdehnungskoeffizient
δ	= Hautdicke
l	= Länge der Querschnitte
x	= Abstand aus der Mitte der Laschenlänge
s	= Nietteilung
Δl	= kleine Länge
ρ	= Krümmungsradius
F	= Querschnitt
I	= Flächenträgheitsmoment
E	= Elastizitätsmodul
B	= Biegesteifigkeit
N	= Nietkraft
τ	= Schubspannung
σ	= Längsspannung
$\varkappa$	= Nietsteifigkeit

I. Einleitung

Bei der gemeinsamen Verwendung von Stahl und Dural in der Konstruktion von Festigkeitsträgern ist nicht nur die Kenntnis der Beanspruchung aus den äußeren Lasten, sondern auch derjenigen aus den Wärmeausdehnungen erforderlich.

Die Beanspruchung aus der Wärmeausdehnung ist bedingt durch die verschiedenen Wärmeausdehnungskoeffizienten der Werkstoffe und durch den Unterschied der Temperatur beim Zusammenbau und während der Belastung. Dabei wird angenommen, daß in den Bauelementen jeweils die gleichen Temperaturen herrschen.

II. Zusatzbeanspruchungen im elastischen Bereich

Vernietet man einen Stahlquerschnitt mit einem Duralquerschnitt und unterwirft dann beide einer Temperaturänderung, so treten in den Querschnitten zusätzliche Beanspruchungen auf. Diese Beanspruchungen sind abhängig von den Wärmeausdehnungskoeffizienten der Werkstoffe, der Größe der Temperaturänderung, den Größen der Querschnitte, den Elastizitätsmodulen der Werkstoffe, der Steifigkeit der Niete, der Länge der Verbindung und der Art der Lagerung (Bettung) der Querschnitte. Die Zusatzbeanspruchungen sind Längskräfte und Biegemomente in den Querschnitten und Schubkräfte in den Nieten, wenn man die Biegung derselben vernachlässigt.

A. Zwei-Querschnittanordnung

1. Verhinderte Krümmung

Es gelten folgende Voraussetzungen:

1. Krümmung der Laschen wird verhindert: Krümmungsradius $\rho = \infty$.
2. Die Querschnitte sind über die Länge konstant.
3. Die Dehnungen in den Querschnitten sind über die Querschnitthöhen konstant.

Bei der Betrachtung ist vorausgesetzt, daß der Stahl- und Duralquerschnitt durch eine Nietreihe miteinander verbunden sind und der gleichen Temperaturänderung unterworfen werden. Die Längungen und somit auch die Dehnungen infolge $\Delta t < 0°$ sind im einzelnen folgende; vgl. Bild 1.

Längung:	infolge:	im:
$l_1 = \Delta l_{\alpha \Delta t}$	Temperaturdifferenz Δt	Dural
$l_2 = \Delta l_{LD}$	Längskraft L	Dural
$l_3 = \Delta l_N$	Nietnachgiebigkeit	Niet
$l_4 = \Delta l_{LSt}$	Längskraft L	Stahl
$l_5 = \Delta l_{\alpha \Delta t}$	Temperaturnachgiebigkeit Δt	Stahl

$$\Delta t = t_L - t_o < 0°.$$

$$\Delta l_{\alpha \Delta t} = \alpha \, \Delta t° \, \Delta l$$

$$\Delta l_L = \frac{L \, \Delta l}{E F}$$

$$\Delta L_N = \frac{N_N - N_{N+1}}{\varkappa}$$

Im Bereich eines Nietabstandes „s“ treten folgende Kräfte auf; vgl. Bild 2:

$$N = \Delta L \text{ und } \tau \delta_N = \frac{\Delta L}{s} = \frac{\Delta L}{\Delta l}$$

L (=) Längskraft im Querschnitt
N (=) Nietscherkraft
$\tau \delta_N$ (=) Nietscherkraft je cm Länge

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

8018

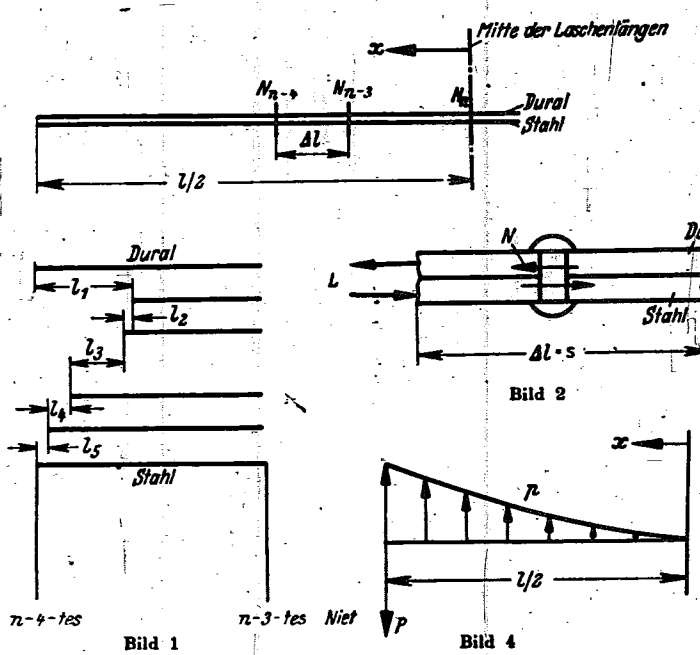


Bild 1 Bild 2

Bild 4

$$-(\alpha_D-\alpha_{St})\,\Delta t=\frac{L_{Dn}}{E_D F_D}-\frac{L_{St\,n}}{E_{St}F_{St}}+\frac{N_{n-1}-N_n}{\varkappa\cdot\Delta l} \qquad (1)$$

$$L_{Dn}=-L_{St\,n}=L_n \qquad (2)$$

$$L_{Dn}=\sum_1^n N_n \qquad (3)$$

Für n-Niete ergeben sich n-Gleichungen vom Typ:

$$-(\alpha_D-\alpha_{St})\,\Delta t=\left(\frac{1}{E_{St}F_{St}}+\frac{1}{E_D F_D}\right)\cdot\sum_1^n N_n+\frac{N_{n-1}-N_n}{\varkappa\,\Delta L} \qquad (4)$$

mit der Randbedingung: $N_n=0$. (Das *(n)-te* Niet ist das Niet in der Mitte der Laschenlänge und hat die Nietkraft $N_n=0$ zu übertragen).

Ist $\Delta l \ll l$ oder bildet man $\lim \Delta l \to 0$ und setzt $\tau\delta_N=-\frac{dL}{dx}$, somit $\frac{dN}{\varkappa\,dx}=+\frac{d\tau\cdot\delta_n}{\varkappa}=-\frac{d^2L}{dx^2}\cdot\frac{dx}{\varkappa}$

wobei man den Wert $\frac{dx}{\varkappa}$ nur aus Versuchen mit endlichen Nietabständen s ermitteln kann, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2L}{dx^2}-L\cdot\frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_{St}F_{St}}+\frac{1}{E_D F_D}\right)-\frac{\varkappa}{s}(\alpha_D-\alpha_{St})\,\Delta t=0 \qquad (5)$$

mit den Randbedingungen $L=0$ für $\varkappa=\frac{1}{2}$ und $-\frac{dL}{dx}=0$ für $x=0$.

Daraus ergibt sich folgende Lösung; vgl. Bild 3:

$$L=\frac{b\,\mathfrak{Cof}\,x\sqrt{a}}{a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{2}\sqrt{a}}-\frac{b}{a} \qquad b=\frac{\varkappa}{s}(\alpha_D-\alpha_{St})\,\Delta t$$

$$\tau\delta_N=\frac{-b\,\mathfrak{Sin}\,x\sqrt{a}}{\sqrt{a}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{2}\sqrt{a}} \qquad a=\frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_{St}F_{St}}+\frac{1}{E_D F_D}\right) \qquad (6)$$

und

$$L_{max}=\frac{b}{a\,\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{2}\sqrt{a}}-\frac{b}{a} \qquad \text{für } x=0$$

$$\tau\delta_{N\,max}=-\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot\mathfrak{Tg}\,\frac{l}{2}\sqrt{a} \qquad \text{für } x=\frac{1}{2} \qquad (6a)$$

dabei ist L die Längskraft im Duralquerschnitt.

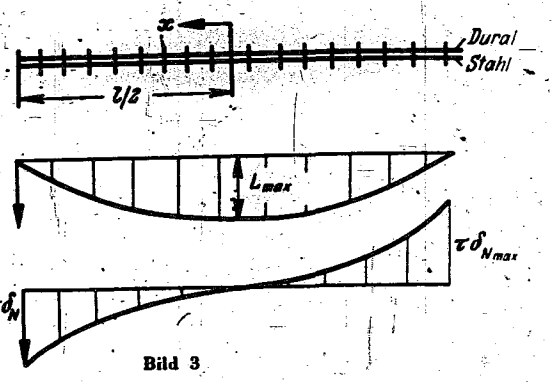


Bild 3

Der Verlauf der Bettungskräfte, welche die Laschen zwingen eben zu bleiben, ist folgender; vgl. Bild 4.

$$p=-\frac{d^2M}{dx^2}=-\frac{d^2L}{dx^2}\cdot\frac{(\delta_{St}+\delta_D)}{2}=\frac{-b\,\mathfrak{Cof}\,x\sqrt{a}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{2}\sqrt{a}}\cdot\frac{(\delta_{St}+\delta_D)}{2} \qquad (7a)$$

$$P=\int_0^{l/2}p\,dx=\frac{-b}{\sqrt{a}}\cdot\mathfrak{Tg}\left(\frac{l}{2}\sqrt{a}\right)\cdot\frac{\delta_{St}+\delta}{2}$$

$$P=+\tau\,\delta_{N\,max}\cdot\frac{\delta_{St}+\delta_N}{2} \qquad (7b)$$

Die aus der Differentialgleichung (5) abgeleiteten Formeln (6), (6a), (7a), (7b), ergeben bereits für die Nietzahl $n>2$ Werte, die mit denen aus der Differenzengleichung (4) gut übereinstimmen.

Betrachtet man den Fall sehr steifer Niete, so wird in Gleichung (4) das letzte Glied $\to 0$.
Man erhält dann die einfache Gleichung:

$$L_D=-L_{St}=\frac{-(\alpha_D-\alpha_{St})\cdot\Delta t}{\left(\frac{1}{E_{St}F_{St}}+\frac{1}{E_D F_D}\right)} \qquad (8)$$

das heißt, L_D ist konstant über die Länge der Lasche und es tragen nur die Endniete. Die Nietkraft für das Endniet ist $N=L_D$. Die Zusatzspannungen in den Querschnitten sind dann:

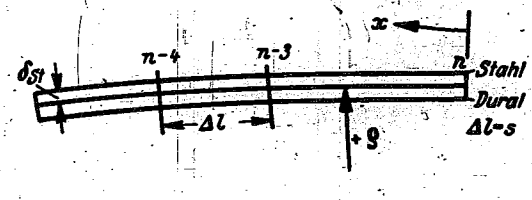
$$\sigma_D=\frac{+L}{F_D} \qquad \sigma_{St}=-\frac{L}{F_{St}} \qquad (9)$$

2. Zwei-Querschnittanordnung mit nicht verhinderter Krümmung

Es gelten folgende Voraussetzungen:

1. Krümmung längs der Querschnitte wird nicht verhindert.
2. Querschnitte über die Laschenlänge konstant.
3. Querschnitte bleiben eben, im Sinne von Navier.
4. $\delta \ll \rho$.

Zu den oben aufgeführten Längungen und Dehnungen kommen noch die Anteile aus der Biegung der einzelnen Querschnitte. Dabei ist der Krümmungsradius für beide Querschnitte derselbe, vgl. Bild 5.



Δt<0° Bild 5

Es gelten folgende Gleichungen:

$$-(\varkappa_D - \varkappa_{St})\,\Delta t = \frac{L_{Dn}}{E_D F_D} - \frac{L_{St\,n}}{E_{St} F_{St}} + \frac{1}{\varrho_n}\frac{\delta_D}{2} + \frac{1}{\varrho_n}\frac{\delta_{St}}{2} + \frac{N_{n-1} - N_n}{\varkappa \cdot \Delta l} \quad (10)$$

$$\frac{1}{\varrho_n} = \frac{L_n\,(\delta_{St} + \delta_D)}{2\,(B_{St} + B_D)} \quad (11)$$

darin bedeuten (vgl. Bild 6):

$$B_{St} = E_{St}\,J_{St} = E_{St} \cdot \frac{\delta_{St}^3}{12}\,d_{St}$$

$$B_D = E_D\,J_D = E_D \cdot \frac{\delta_D^3}{12} \cdot d_D$$

$$L_{Dn} = \sum_1^n N_n \quad (12)$$

$$L_{D\,n} = -L_{St\,n} = L_n \quad (13)$$

Bei n-Nieten ergeben sich n-Gleichungen vom Typ:

$$-(\varkappa_D - \varkappa_{St})\,\Delta t = \left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{1}{E_D F_D} + \frac{(\delta_{St} + \delta_D)^2}{4\,(B_{St} + B_D)}\right)\sum_1^n N_n + \frac{N_{n-1} - N_n}{\varkappa \cdot \Delta l} \quad (14)$$

mit der Randbedingung $N_n = 0$.

Daraus läßt sich wiederum die Differentialgleichung ableiten:

$$\frac{d^2 L}{d x^2} - \frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{1}{E_D F_D} + \frac{(\delta_{St} + \delta_D)^2}{4\,(B_{St} + B_D)}\right) L - \frac{\varkappa}{s}(\varkappa_D - \varkappa_{St})\,\Delta t = 0 \quad (15)$$

mit den Randbedingungen $L = 0$ für $x = \frac{l}{2}$ und $\frac{dL}{dx} = 0$ für $x = 0$.

Die Auflösung der Differentialgleichung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{b\,\mathfrak{Cof}\,x\sqrt{a_1}}{a_1\,\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{2}\sqrt{a_1}} - \frac{b}{a_1} \\ \tau\,\delta_N &= \frac{-b\,\mathfrak{Sin}\,x\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}\cdot\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{2}\sqrt{a_1}} \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

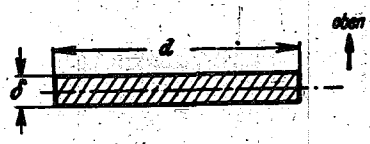
$\tau\,\delta_N$ (=) Schubfluß in der Nietverbindung:

$$a_1 = \frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{1}{E_D F_D} + \frac{(\delta_{St} + \delta_D)^2}{4\,(B_{St} + B_D)}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} L_{max} &= \frac{b}{a_1\,\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{2}\sqrt{a_1}} - \frac{b}{a_1} \\ \tau\,\delta_{N\,max} &= \frac{-b}{\sqrt{a_1}} \cdot \mathfrak{Tg}\,\frac{l}{2}\sqrt{a_1} \end{aligned}\right\} \quad (16a)$$

Für den Fall sehr steifer Niete erhält man analog zu Formel (8)

Bild 6



$$L_D = -L_{St} = \frac{-(\varkappa_D - \varkappa_{St})\,\Delta t}{\left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{1}{E_D F_D} + \frac{(\delta_{St} + \delta_D)^2}{4\,(B_{St} + B_D)}\right)} = \frac{-b}{a_1} \quad (17)$$

Die Zusatzspannungen in den äußersten Fasern der Querschnitte sind:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_D &= \frac{L}{F_D} + \frac{L\,(\delta_{St} + \delta_D)\,\delta_D}{4\,J_D} \cdot \frac{B_D}{B_D + B_{St}} \\ \sigma_{St} &= \frac{-L}{F_{St}} + \frac{L\,(\delta_{St} + \delta_D)\,\delta_{St}}{4\,J_{St}} \cdot \frac{B_{St}}{D_D + B_{St}} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

3. Vergleich der Ergebnisse nach 1. und 2.

Aus den erhaltenen Gleichungen kann man erkennen, daß bei großen Längen der Laschen die L_{max}-Werte bei endlicher Nietsteifigkeit ebenso groß werden wie bei sehr steifen Nieten ($\varkappa \to \infty$). Die Zusatz-Nietkräfte an den Enden der Laschen werden dann

$$\tau \cdot \delta_{N\,max} = \frac{-b}{\sqrt{a}} \text{ bzw. } \frac{-b}{\sqrt{a_1}}.$$

Außerdem kann man für große Laschenlängen folgende Beziehung ableiten:

$$\tau\,\delta_{N\,max\ Krümmung} = \tau \cdot \delta_{N\,max\ eben}\sqrt{\frac{L_{max\ Krümmung}}{L_{max\ eben}}}, \quad (19)$$

wobei $L_{max\ Krümmung} = L_{max}$ im Sinne des Abschnittes 2 und $L_{max\ eben} = L_{max}$ im Sinne des Abschnittes 1 ist.

Die Längskräfte bei eben bleibenden Querschnitten sind bei gleichen Abmessungen und Temperaturunterschieden größer als bei sich verkrümmenden Querschnitten; dasselbe gilt für die Zusatz-Nietkräfte, aber nicht für die maximalen Zusatzspannungen σ_D und σ_{St}.

B. Drei-Querschnittanordnung

1. verhinderte Krümmung

Es gelten wieder die Voraussetzungen wie unter A 1 und folgende Gleichungen; vgl. Bild 7:

$$-(\varkappa_D - \varkappa_{St})\,\Delta t = \frac{L_{Do}}{E_D F_{Do}} - \frac{L_{St}}{E_{St} F_{St}} + \frac{(N_{n-1} - N_n)_o}{\varkappa\,\Delta l} \quad (20)$$

$$\frac{L_{Do}}{E_D F_{Do}} = \frac{L_{Du}}{E_D \cdot F_{Du}} \quad (21)$$

$$-L_{St} = L_{Do} + L_{Du} \quad (22)$$

Für n-Niete ergeben sich n-Gleichungen vom Typ:

$$-(\varkappa_D - \varkappa_{St})\,\Delta t = \left(\frac{1}{E_D F_{Do}} + \frac{\left(1 + \frac{F_{Du}}{F_{Do}}\right)}{E_{St} F_{St}}\right)\sum_1^n N_{no} + \frac{(N_{n-1} - N_n)_o}{\varkappa \cdot \Delta l} \quad (23)$$

mit der Randbedingung $N_n = 0$.

Weiter erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 L_{Do}}{d x^2} - L_{Do}\,\frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_D F_{Do}} + \frac{\left(1 + \frac{F_{Du}}{F_{Do}}\right)}{E_{St} F_{St}}\right) - \frac{\varkappa}{s}(\varkappa_D - \varkappa_{St})\,\Delta t = 0. \quad (24)$$

für $x = 0$

für $x = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} L_{Do} &= \frac{b\,\mathfrak{Cof}\,x\sqrt{c_o}}{c_o\,\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{2}\sqrt{c_o}} - \frac{b}{c_o} \\ \tau\,\delta_{No} &= -\frac{b \cdot \mathfrak{Sin}\,x\sqrt{c_o}}{\sqrt{c_o}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{l}{2}\sqrt{c_o}} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

8020

$$c_o = \frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_D F_{Do}} + \frac{1+\frac{F_{Du}}{F_{Do}}}{E_{St} F_{St}}\right)$$

und

$$\left.\begin{aligned} L_{Do\,max} &= \frac{b}{c_o \operatorname{Cof}\frac{l}{2}\sqrt{c_o}} - \frac{b}{c_o} \quad \text{für } x = 0 \\ \tau\delta_{N_o max} &= \frac{-b}{\sqrt{c_o}} \cdot \operatorname{Tg} \cdot \left(\frac{l}{2}\sqrt{c_o}\right) \quad \text{für } x = \frac{l}{2} \end{aligned}\right\} \quad (25a)$$

Zur Ermittlung von L_{Du} und $\tau\delta_{Nu}$, ist in den Formeln der Index u statt o zu setzen.

Der Verlauf der Bettungskräfte läßt sich analog zu (7a) und (7b) wieder ermitteln, nur ist jetzt für

$$M = L_{Do} \cdot \frac{\delta_{St} + \delta_{Do}}{2} - L_{Du} \cdot \frac{\delta_{St} + \delta_{Du}}{2}$$

einzusetzen. Ist $M = 0$, dann werden die Bettungskräfte 0, das heißt die Querschnitte verkrümmen sich nicht.

Für den Fall sehr steifer Niete ($\varkappa \to \infty$) wird

$$L_{Do} = \frac{-(\alpha_D - \alpha_{St})\,\Delta t}{\frac{E_{St} F_{St} + E_D (F_{Do} + F_{Du})}{E_{St} F_{St} E_D F_{Do}}} \quad . \quad . \quad (26)$$

Für den Fall, daß die äußeren Laschen aus Stahl und die inneren aus Dural hergestellt wurden, sind in den Gleichungen (20) bis (26) die Indices *Du St* zu vertauschen und in den Gleichungen (25) bis (26) L_{Do} und $\tau\delta_N$ mit entgegengesetztem Vorzeichen zu versehen.

Die Zusatzspannungen in den Querschnitten sind dann:

$$\sigma_{St} = \frac{L_{St}}{F_{St}}; \quad \sigma_D = \frac{L_D}{F_D}. \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

2. Bei nichtverhinderter Krümmung

Es gelten dieselben Voraussetzungen wie unter A 2.

$$B_{Do} = E_D I_{Do}$$
$$B_{Du} = E_D I_{Du}$$

Entsprechend den Verformungen gelten folgende Gleichungen; vgl. Bild 8:

$$\left.\begin{aligned} -(\alpha_D - \alpha_{St})\,\Delta t &= \frac{L_{Dno}}{E_D F_{Do}} - \frac{L_{Stn}}{E_{St} F_{St}} + \frac{1}{\rho_n}\cdot\frac{\delta_{Do}}{2} + \frac{1}{\rho_n}\cdot\frac{\delta_{St}}{2} + \frac{(N_{n-1} - N_n)_o}{\varkappa \cdot \Delta l} \\ -(\alpha_D - \alpha_{St})\,t &= \frac{L_{Dnu}}{E_D F_{Du}} - \frac{L_{Stn}}{E_{St} F_{St}} - \frac{1}{\rho_n}\frac{\delta_{Du}}{2} - \frac{1}{\rho_n}\frac{\delta_{Do}}{2} + \frac{(N_{n-1} - N_n)_u}{\varkappa \cdot \Delta l} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$\frac{1}{\rho_n} = \left(L_{Dno}\cdot\frac{\delta_{St}+\delta_{Do}}{2} - L_{Dnu}\cdot\frac{\delta_{St}+\delta_{Du}}{2}\right)\cdot\frac{1}{B_{St}+B_{Do}+B_{Du}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

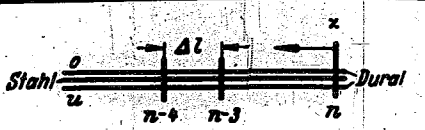
$$L_{Dno} + L_{Dnu} = -L_{St} \quad . \quad . \quad (30) \qquad \text{worin } \frac{1}{\rho_n} > 0.$$

Für n-Niete erhält man 2 n-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -(\alpha_D - \alpha_{St})\,\Delta t &= \left(\frac{1}{E_D F_{Do}} + \frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{(\delta_{St}+\delta_{Do})^2}{4(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right)\sum_1^n N_{No} \\ &\quad + \left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} - \frac{(\delta_{St}+\delta_{Do})(\delta_{St}+\delta_{Du})}{4(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right)\cdot\sum_1^n N_{nu} + \frac{(N_{n-1}-N_n)_o}{\varkappa\cdot\Delta l} \\ -(\alpha_D - \alpha_{St})\,\Delta t &= \left(\frac{1}{E_D F_{Du}} + \frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{(\delta_{St}+\delta_{Du})^2}{4(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right)\sum_1^n N_{nu} \\ &\quad + \left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} - \frac{(\delta_{St}+\delta_{Du})(\delta_{St}+\delta_{Do})}{4(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right)\sum_1^n N_{no} + \frac{(N_{n-1}-N_n)_u}{\varkappa\cdot\Delta l} \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

oder 2 Differentialgleichungen:

Bild 7 (rechts).
Bild 9 (unten).
l Laschenlänge in cm
s Nietteilung in cm
$\varkappa$ Nietsteifigkeit in kg/cm



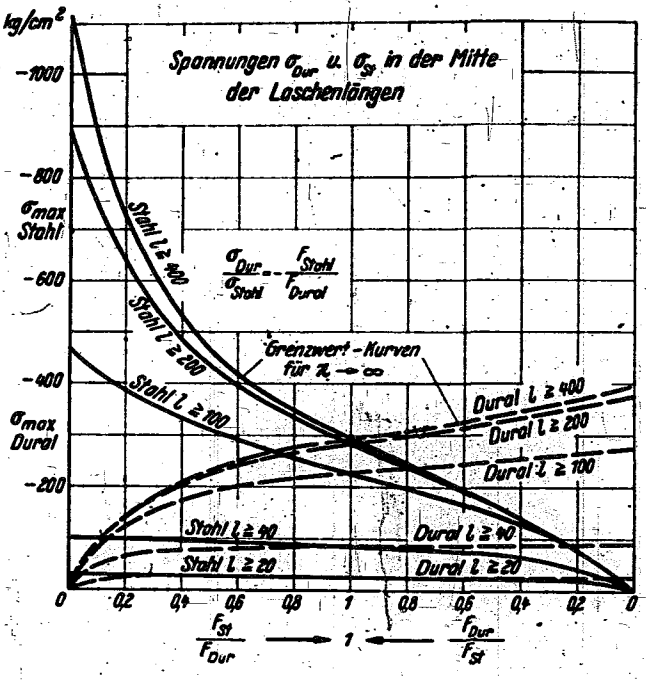
$a = \frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{1}{E_{Dur} F_{Dur}}\right)$ in cm^{-2}

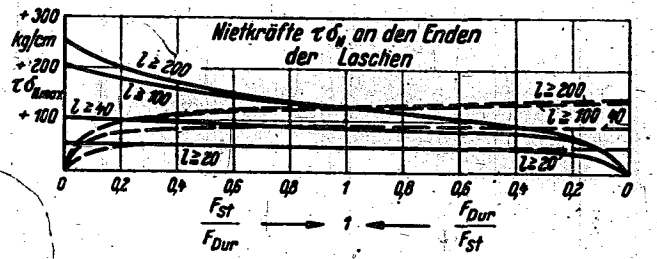
$b = \frac{\varkappa}{s}(\alpha_{Dur} - \alpha_{St})\,\Delta t$ in kg/cm²

$\left.\begin{matrix}\alpha_{Dur}\\ \alpha_{St}\end{matrix}\right\}$ nach Hütte I. 27. Aufl. S. 532

$\Delta t = t_L - t_o = -60°$ C

$t_o = 20°$ C





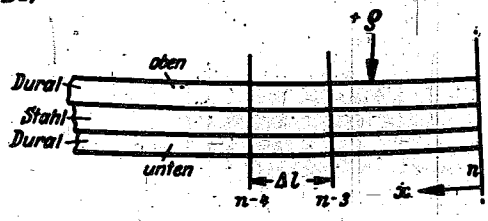
8021

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 L_o}{dx^2} - L_o \frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_D F_{Do}} + \frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{(\delta_{St}+\delta_{Do})^2}{4\,(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right) \\
&\qquad - L_u \cdot \frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} - \frac{(\delta_{St}+\delta_{Du})(\delta_{St}+\delta_{Do})}{4\,(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right) - \frac{\varkappa}{s}(\alpha_D - \alpha_{St})\,\Delta t = 0 \\
&\frac{d^2 L_u}{dx^2} - L_u \cdot \frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_D F_{Du}} + \frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{(\delta_{St}+\delta_{Du})^2}{4\,(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right) \\
&\qquad - L_o \cdot \frac{\varkappa}{s}\left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} - \frac{(\delta_{St}+\delta_{Do})(\delta_{St}+\delta_{Du})}{4\,(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right) - \frac{\varkappa}{s}(\alpha_D - \alpha_{St})\,\Delta t = 0
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Durch Eliminieren von L_u lassen sich die beiden Differentialgleichungen auf eine Differentialgleichung 4ter Ordnung zurückführen. Die Auflösung dieser Differentialgleichung liefert L_o und L_u, $\tau\delta_{No}$ und $\tau\delta_{Nu}$.

Für den Fall sehr großer Nietsteifigkeit $\varkappa \to \infty$ erhalten wir folgende 2 Gleichungen:

Bild 8



$$\left.\begin{aligned}
-(\alpha_D - \alpha_{St})\,\Delta t &= \left(\frac{1}{E_D F_{Do}} + \frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{(\delta_{St}+\delta_{Do})^2}{4\,(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right) L_o + \left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} - \frac{(\delta_{St}+\delta_{Du})(\delta_{St}+\delta_{Do})}{4\,(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right) L_u \\
-(\alpha_D - \alpha_{St})\,\Delta t &= \left(\frac{1}{E_D F_{Du}} + \frac{1}{E_{St} F_{St}} + \frac{(\delta_{St}+\delta_{Du})^2}{4\,(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right) L_u + \left(\frac{1}{E_{St} F_{St}} - \frac{(\delta_{St}+\delta_{Du})(\delta_{St}+\delta_{Do})}{4\,(B_{St}+B_{Do}+B_{Du})}\right) L_o
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

daraus kann man L_o, L_u, σ_D und σ_{St} ermitteln.

Für den Fall, daß die äußeren Querschnitte aus Stahl und der innere aus Dural bestehen, sind die Indices St und D miteinander zu vertauschen und L_o, L_u, $\tau\delta_{No}$, $\tau\delta_{Nu}$ sind entgegengesetzt zu bevorzeichen.

3. Vergleich der Ergebnisse nach 1 und 2.

Bei großen Längen der Querschnitte ist L_{max} von $\varkappa$ unabhängig und es gelten dann die Werte nach Gleichung (33).

Ebenso sind die Längskräfte und Nietkräfte bei den eben bleibenden Querschnitten größer als bei den sich verkrümmenden. Da eine genaue Nachrechnung dieser Zusatzkräfte bei den nicht eben bleibenden Querschnitten sehr zeitraubend ist, so wird man sich in der Praxis im allgemeinen mit den Zusatzkräften bei den eben bleibenden Querschnitten begnügen.

III. Betrachtungen über die Zusatzbeanspruchungen im unelastischen Bereich

Liegt die Gesamtbeanspruchung der Bauteile aus der äußeren Last und der Temperaturdifferenz $\Delta t°$ im unelastischen Bereich, so sind die Zusatzspannungen meist kleiner als im elastischen Bereich. — Der obere Grenzwert der Zusatzspannungen, der dem Wert im elastischen Bereich entspricht, tritt dann ein, wenn die Zusatzspannung infolge Δt selbst sehr groß ist und der Werkstoff im unelastischen Bereich nur eine geringe Dehnung hat. Der Werkstoff kann dann nur noch geringe äußere Lasten aufnehmen und die Zusatzspannung im unelastischen Bereich ist nicht viel kleiner als im elastischen Bereich.

Bei den meisten Stählen und Aluminiumlegierungen sind jedoch im unelastischen Bereich die Dehnungen groß, die Werte $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \ll E$ und damit auch die Zusatzspannungen kleiner als im elastischen Bereich.

Ist der Verlauf $\sigma = f(\varepsilon)$ (Spannungsdehnungsdiagramm) gegeben, so kann man die Zusatzspannungen durch Lösen der Gleichungen (1), (4) usw. finden, wenn man dort statt E den Wert $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ einsetzt.

IV. Beispiele

A. Beispiel für Zwei-Querschnittanordnung

1. Verhinderte Krümmung

Für $\Delta t = -60°$ C sind in Bild 9 aufgetragen die $\sigma_{St\,max}$, $\sigma_{Dur\,max}$ und $\tau\delta_{N\,max}$-Werte für verschiedene Querschnittsverhältnisse F_{St} und F_{Dur}, wobei jeweils

$F_{Dur} = 10$ cm²

und $F_{St} = 10$ cm² als Nennwerte

in Rechnung gesetzt werden.

In der Mitte der Lasche ist:

$$L_{max} = -\sigma_{St} \cdot F_{St} = +\sigma_{Dur} F_{Dur} = \frac{b}{a \operatorname{Cof}\left(\frac{l}{2}\sqrt{a}\right)} - \frac{b}{a} \text{ in kg}$$

Am Ende der Lasche ist:

$$\tau\delta_{N\,max} = \frac{-b}{\sqrt{a}} \cdot \operatorname{Tg}\left(\frac{l}{2}\sqrt{a}\right) \text{ in kg/cm}$$

$\frac{\varkappa}{s} = 10\,000$ kg/cm ($\varkappa$-Werte nach [3])

2. Nicht verhinderte Krümmung (vgl. Bild 10)

$\Delta t = -60°$; $t_o = 20°$ C

$F_{St} = 10$ cm²

$F_D = 10$ cm²

$B_{St} = 1{,}67 \cdot 10^6$ kg/cm²

$B_D = 5{,}83 \cdot 10^5$ kg/cm²

$\varkappa = 40\,000$ kg/cm

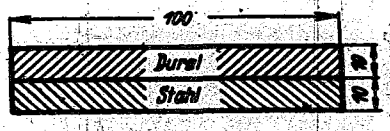
$s = 4$ cm

$l = 200$ cm

$$b = \frac{-40\,000}{4}\, 56{,}6 \cdot 10^{-5} = -5{,}66 \text{ kg/cm}^2$$

$$\alpha_1 = \frac{40\,000}{4}\left(\frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10^5 \cdot 10} + \frac{2^2}{4 \cdot 22{,}5 \cdot 10^5}\right)$$

Bild 10



8022

$$\alpha_1 = 0{,}637 \cdot 10^{-2} \cdot \mathrm{cm}^{-2}$$

Nach Gleichung (16a) wird

$$L_{D\,max} = \frac{-5{,}66}{0{,}637 \cdot 10^{-2} \cdot \mathfrak{Cof}\,8} + \frac{5{,}66}{0{,}637 \cdot 10^{-2}} = +890\ \mathrm{kg}$$

$$\tau\sigma_{N\,max} = \frac{+5{,}66}{0{,}0796} = +71\ \mathrm{kg/cm}$$

nach Gleichung (11):

$$\varrho = \frac{22{,}5 \cdot 10^5}{890 \cdot 1} = 25{,}4\ \mathrm{m} \text{ bei } x = 0$$

nach Gleichung (18):

$$\sigma_{St} = \frac{-890}{10} + \frac{890 \cdot 16{,}7 \cdot 12 \cdot 0{,}5}{22{,}5 \cdot 1^3 \cdot 10} =$$

$$-89 + 396 = -485\ \mathrm{kg/cm^2};\ +307\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$\sigma_D = +89 + \frac{890 \cdot 5{,}8 \cdot 12 \cdot 0{,}5}{22{,}5 \cdot 1^3 \cdot 10} =$$

$$+89 + 137 = +226\ \mathrm{kg/cm^2} - 48\ \mathrm{kg/cm^2}$$

B. Beispiel für Drei-Querschnittanordnung (vgl. Bild 11)

$\Delta t = -60°$ C. $t_o = 20°$ C

$F_{St\,o} = 10\ \mathrm{cm^2}$
$F_{St\,u} = 6\ \mathrm{cm^2}$
$F_D = 5\ \mathrm{cm^2}$
$E_{St} = 2 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$
$E_D = 7 \cdot 10^5\ \mathrm{kg/cm^2}$
$\Delta t = -60°$
α_{St}, α_D } Hütte I. 27 Aufl. S. 532
$s = 2{,}5$ cm
$l = 200$ cm

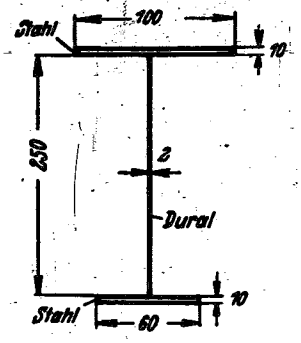


Bild 11

$$\tau\sigma_{N\,umax} = +\frac{-22{,}6}{\sqrt{0{,}0339}} = -123\ \mathrm{kg/cm}$$

$$b = \frac{100\,000}{2{,}5} \cdot -56{,}6 \cdot 10^{-5} = -22{,}6\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$c_o = \frac{100\,000}{2.5}\left(\frac{2 \cdot 10^6\,(10+6) + 7 \cdot 10^5 \cdot 5}{2 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 10^5 \cdot 5}\right)$$

$$c_o = 20{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm^{-2}}$$

$$c_u = \frac{100\,000}{2.5}\left(\frac{2 \cdot 10^6\,(10+6) + 7 \cdot 5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^6\ 6 \cdot 7 \cdot 10^5 \cdot 5}\right)$$

$$c_u = 33{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm^{-2}}$$

2. Nicht verhinderte Krümmung $\varkappa \to \infty$

Nach Gleichung (33) wird:

$$B_{St\,o} = 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1{,}0^3}{12} \cdot 10 = 1{,}67 \cdot 10^6\ \mathrm{kg\,cm^2}$$

$$B_{St\,u} = 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1{,}0^3}{12} \cdot 6 = 1 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$B_D = 7 \cdot 10^5 \cdot \frac{25^3}{12} \cdot 0{,}2 = 182 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$-56{,}6 \cdot 10^{-5} = L_{St\,o}\left(\frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10^5 \cdot 5} + \frac{26^2}{4 \cdot 185 \cdot 10^6}\right) + L_{St\,u}\left(\frac{1}{7 \cdot 10^5 \cdot 5} - \frac{26^2}{4 \cdot 185 \cdot 10^6}\right)$$

$$-56{,}6 \cdot 10^{-5} = L_{St\,u}\left(\frac{1}{2 \cdot 10^6 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 10^5 \cdot 5} + \frac{26^2}{4 \cdot 185 \cdot 10^6}\right) + L_{St\,o}\left(\frac{1}{7 \cdot 10^5 \cdot 5} - \frac{26^2}{4 \cdot 185 \cdot 10^6}\right)$$

$L_{St\,o} = -898$ kg
$L_{St\,u} = -878$ kg
$L_D = +1776$ kg
$M = -20 \cdot 13 = -260$ cmkg

$$\sigma_{St\,o} = -\frac{898}{10} = -90\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$\sigma_{St\,u} = -\frac{878}{6} = -146\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$\sigma_D = +\frac{1776}{5} \pm \frac{260 \cdot 12{,}5 \cdot 12}{25^3 \cdot 0{,}2} = +368\ \mathrm{kg/cm^2} \text{ bzw. } +344\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$\varrho = \frac{185 \cdot 10^6}{260} = -7100\ \mathrm{m}$$

1. Verhinderte Krümmung

a) $\varkappa \to \infty$

Nach Gleichung (26) wird:

$$L_{St\,o} = -\frac{+56{,}6 \cdot 10^{-5}}{\frac{2 \cdot 10^6\,(10+6) + 7 \cdot 10^5 \cdot 5}{2 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 10^5 \cdot 5}} = -1120\ \mathrm{kg}$$

Zusatzkräfte nach Gleichung (21) und (22):

$L_{St\,u} = -670$ kg
$L_D = +1790$ kg

Zusatzspannungen nach Gleichung (27):
$\sigma_{St\,o} = -112$ kg/^{2} $\sigma_{St\,u} = -112$ kg/cm^2
$\sigma_D = +358$ kg/cm^2

b) $\varkappa = 100\,000$ kg/cm; nach Gleichung (25a) wird:

$$L_{St\,o} = -\left(\frac{-22{,}6}{20{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot \mathfrak{Cof}\,14.2} - \frac{-22{,}6}{20{,}3 \cdot 10^{-3}}\right) = -1120\ \mathrm{kg}$$

$L_{St\,u\,max} = -670$ kg $\qquad L_D = +1790$ kg

$$\tau\sigma_{N\,o\,max} = +\frac{-22{,}6}{\sqrt{0{,}0203}} = -159\ \mathrm{kg/cm}$$

V. Zusammenfassung

Die Beanspruchungen infolge der Temperaturdifferenz Δt können in den einzelnen Bauelementen eine zusätzliche Belastung oder Entlastung bringen.

Die Größen dieser Beanspruchungen wurden für verschiedene Querschnittanordnungen rechnerisch ermittelt. Bei der Konstruktion der einzelnen Träger unter gemeinsamer Verwendung von Stahl und Dural ist auf diese Beanspruchungen zu achten, die besonders für die Zeit- und Dauerfestigkeit von Einfluß werden.

8023

VI. Schrifttum

[1] F. Bleich: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin 1924, S. 306.

[2] J. Cassens: Die Nietkräfte in den Verstärkungslaschen von Biegeträgern. Z. Flugtechn. Bd. 24 (1933) S. 103.

[3] O. Volkersen: Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. Luftf.-Forschg. Bd. 15 (1938) S. 41.

Verhalten der Außenluftthermometer bei hohen Fluggeschwindigkeiten in der gestörten Strömung am Flugzeug

(Berücksichtigung der Kompressibilität der Luft)

W. Hofmann, Berlin C 6

Gliederung

I. Bedeutung der Formelzeichen

II. Der Temperaturanstiegsbeiwert des Diffusorthermometers: $c = \frac{\vartheta_e}{\vartheta_{ad}}$

III. Verhalten der Außenluftthermometer in der gestörten Strömung am Flugzeug

IV. Nachprüfung durch Meßflüge

V. Zusammenfassung

I. Bedeutung der Formelzeichen

v_w [km/h] wirkliche Fluggeschwindigkeit (Relativgeschwindigkeit des Flugzeuges gegenüber Luft)

v_{aw} [km/h] Sollanzeige des Fahrtmessers (Anzeige eines fehlerlosen Instrumentes in ungestörter Strömung)

v_1 [km/h] örtliche Strömungsgeschwindigkeit der Luft in der gestörten Strömung am Flugzeug

v_{st} [km/h] Strömungsgeschwindigkeit der Luft im Stauraum des Diffusorthermometers

$a = 72{,}3 \sqrt{T_w}$ [km/h] Schallgeschwindigkeit

$M = v_w/a$ Machsche Zahl in der ungestörten Strömung

t_w [° C] wirkliche Temperatur der Luft in der ungestörten Strömung (T_w entsprechende absolute Temperatur)

t_L [° C] Anzeige des Thermometers in der ungestörten Strömung (T_L entsprechende absolute Temperatur)

t_1 [° C] örtliche wirkliche Temperatur in der gestörten Strömung am Flugzeug (T_1 entsprechende absolute Temperatur)

t_L' [° C] Anzeige des Thermometers in der gestörten Strömung am Flugzeug (T_L' entsprechende absolute Temperatur)

$\vartheta_{ad} = \frac{A\, v_w^2}{2g\, c_p\, 3{,}6^2}$ [° C] theoretischer Temperaturanstieg bei vollständiger adiabatischer Stauung der Strömung

$\vartheta_e = t_L - t_w$ [° C] effektiver Temperaturanstieg am Außenluftthermometer in ungestörter Strömung

$\vartheta_e' = t_L' - t_w$ [° C] effektiver Temperaturanstieg am Außenluftthermometer in der gestörten Strömung am Flugzeug

$c = \vartheta_e/\vartheta_{ad}$ Temperaturanstiegsbeiwert des Thermometers in ungestörter Strömung

$c' = \vartheta_e'/\vartheta_{ad}$ Temperaturanstiegsbeiwert des Thermometers in der gestörten Strömung am Flugzeug

$\sigma = c'/c$ Verhältnis des Temperaturanstiegsbeiwertes in der gestörten Strömung am Flugzeug zu dem in der ungestörten Strömung

q [kg/m²] Staudruck

p [kg/m²], B [mm QS] statischer Druck in der ungestörten Strömung

p_o [kg/m²] statischer Druck in der vollständig gestauten Strömung

p_{st} [kg/m²] statischer Druck im Stauraum des Diffusorthermometers

γ [kg/m³] Luftwichte in der ungestörten Strömung

γ_o [kg/m³] Luftwichte in der völlständig gestauten Strömung

γ_{st} [kg/m³] Luftwichte im Stauraum des Diffusorthermometers

$D, F, X, Y, \alpha, \beta, \xi, \xi', \lambda, \eta$ zur Vereinfachung der Rechnung eingeführte Substitutionswerte

G_{st} [kg/s] in der Zeiteinheit durch den Stauraum strömendes Luftgewicht

$A = 1/427$ [kcal/kgm] mechanisches Wärmeäquivalent

$g = 9{,}81$ [m/s²] Schwerebeschleunigung

$c_p = 0{,}241$ [kcal/kg ° C] spezifische Wärme der Luft bei gleichbleibendem Druck

$\varkappa = 1{,}4$ Adiabatenexponent der Luft

F [m²] Querschnitt des Stauraumes des Diffusorthermometers

f [m²] Querschnitt einer Stauraumbelüftungsbohrung

n Anzahl der Stauraumbelüftungsbohrungen

I. Einleitung

In Band 9 (1942) Nr. 6, S. 173, der Technischen Berichte wurde vom gleichen Verfasser ein einfaches nomographisches Verfahren zur Ermittlung der wirklichen Fluggeschwindigkeit und der wirklichen Außenlufttemperatur bei hohen Fluggeschwindigkeiten beschrieben und als eine Bedingung für seine praktische Anwendbarkeit die Unabhängigkeit des Temperaturanstiegsbeiwertes des Außenluftthermometers von der Fluggeschwindigkeit und vom Anbringungsort am Flugzeug sowie die Kenntnis seiner tatsächlichen Größe angegeben. Die in der oben angeführten Arbeit vorausgesetzte Erfüllbarkeit dieser Bedingung soll in den vorliegenden Ausführungen nachgewiesen werden.

8024

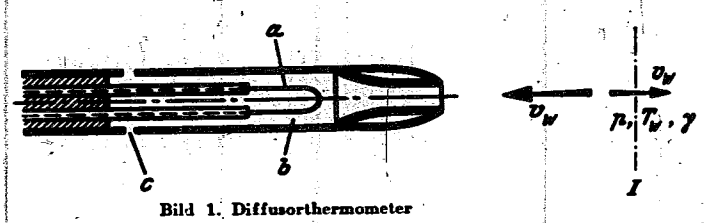


Bild 1. Diffusorthermometer
a Thermoelement
b Stauraum
c Belüftungsbohrungen

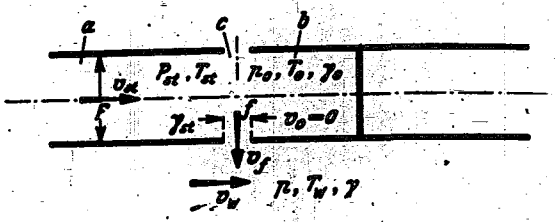


Bild 2. Zur Berechnung des Beiwertes c des Diffusorthermometers
a belüfteter Stauraum (mit Thermoelement)
b vollständige Stauung
c Belüftungsbohrungen (Anzahl n)

II. Der Temperaturanstiegsbeiwert des Diffusorthermometers: $c = \vartheta_e/\vartheta_{ad}$

Noch besser als bei parallel zur Strömungsrichtung angeordneten zylindrischen Thermometern ist nach den Untersuchungen von E. Eckert[1]) die Konstanz des Thermometerbeiwertes c gewährleistet bei Unterbringung des Temperaturmeßgerätes in einem zylindrischen nach vorne offenen und rückwärts durch kleine seitliche Bohrungen belüfteten Stauraum (Bild 1).

Diese Anordnung wird als Diffusorthermometer bezeichnet; hätte der Stauraum keine Belüftungsbohrungen, dann würde das Thermometer die volle Stautemperatur anzeigen, d. h. sein Beiwert c wäre gleich 1. Der Diffusor selbst ist ein parallel zur Strömung angeordneter Zylinder mit dem Beiwert $c = 0{,}85$. Die Diffusorwand hat also eine geringere Temperatur als die Luft im Stauraum, so daß ein die Temperaturanzeige fälschender Wärmeübergang von der Luft im Diffusor an die Diffusorwand stattfinden würde. Bei belüftetem Stauraum wird die in diesem befindliche Luftmenge dauernd erneuert und der Temperaturunterschied zwischen Wand und Luft kann praktisch keine Fälschung der Temperaturanzeige mehr hervorrufen. Da aber die Strömung jetzt nicht voll gestaut ist, wird der Beiwert c etwas kleiner als 1 sein, was auch Versuch und Rechnung bestätigt:

Die Temperatursteigerung bei vollständigem Stau der ungestörten Strömung ist

$$\vartheta_{ad} = T_o - T_w = \frac{A}{2g\,c_p\,3{,}6^2}\,v_w^2 = \lambda\,v_w^2 \quad . \quad . \quad (1)$$

(Substitution . . . $\dfrac{A}{2g\,c_p\,3{,}6^2} = \lambda = 0{,}000038215$)

bei vollständiger Stauung der Strömung des belüfteten Stauraumes (v_{st}) auf die Geschwindigkeit 0 würde analog

$$T_o - T_{st} = \lambda\,v_{st}^2$$

aus diesen beiden Gleichungen erhält man den Temperaturanstieg im belüfteten Stauraum gegenüber der unstörten Strömung

$$\vartheta_e = T_{st} - T_w = \lambda\,(v_w^2 - v_{st}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mit den Gleichungen (1) und (2) wird der Beiwert des Diffusorthermometers

$$c = \frac{\vartheta_e}{\vartheta_{ad}} = \frac{T_{st} - T_w}{T_o - T_w} = \frac{v_w^2 - v_{st}^2}{v_w^2} = 1 - (v_{st}/v_w)^2 \quad (3)$$

Zur Berechnung von c muß also für ein gegebenes Querschnittsverhältnis $n \cdot f/F$ der zugehörige Wert v_{st}/v_w bekannt sein (Bild 2). Da hier (ebenso wie bei der Staudruckmeßdüse) in der Strömung an der Stauraum-Außenwand dieselben Verhältnisse (p, T_w, γ und v_w) herrschen wie in der ungestörten Strömung (Querschnitt I), ist auch der Druck im Querschnitt f gleich dem in der ungestörten Strömung (p). Bei Annahme adiabatischer Zustandsänderung der Luft von I über F bis f (Bild 2) müssen die Temperatur und das spezifische Gewicht im Querschnitt f gleich den Werten in der ungestörten Strömung (T_w, γ) sein; daher wird für verlustfreie Strömung die Luftaustrittsgeschwindigkeit im Mündungsquerschnitt f gleich der Luftgeschwindigkeit in der ungestörten Strömung (wirkliche Fluggeschwindigkeit) $v_f = v_w$.

Da also die Verhältnisse im Querschnitt f (p, T_w, γ, v_w) bekannt sind, kann man daraus die Verhältnisse im Stauraum (Querschnitt F) berechnen. Dafür stehen drei Beziehungen zur Verfügung: erstens die Energiegleichung

$$T_{st} - T_w = \lambda\,(v_w^2 - v_{st}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zweitens die Kontinuitätsgleichung:
das durch den Stauraum strömende Luftgewicht $G_{st} = F\,v_{st}\,\gamma_{st} = n\,f\,v_w\,\gamma$, daraus $v_{st}/v_w \cdot F/(n \cdot f) = \gamma/\gamma_{st}$ (4)
drittens die Adiabatengleichung $T_{st}/T_w = (\gamma_{st}/\gamma)^{\varkappa - 1}$ (5)
Gleichung (4) in Gleichung (5) eingesetzt ergibt

$$T_{st}/T_w = (v_w/v_{st})^{\varkappa - 1} \cdot (n \cdot f/F)^{\varkappa - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Gleichung (2) umgeformt

$$T_w\,(T_{st}/T_w - 1) = \lambda\,v_w^2\,[1 - (v_{st}/v_w)^2]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

durch Einsetzen der Gleichung (6) in Gleichung (7) erhält man

$$(v_w/v_{st})^{\varkappa - 1} \cdot (n \cdot f/F)^{\varkappa - 1} - 1 = \lambda\,v_w^2/T_w\,[1 - (v_{st}/v_w)^2]$$

mit $T_w = \dfrac{a^2}{72{,}3^2}$ (a = Schallgeschwindigkeit), und mit $v_w/a = M$ = Machsche Zahl in der ungestörten Strömung wird $\lambda\,\dfrac{v_w^2}{T_w} = 0{,}000038215 \cdot 72{,}3^2\,\dfrac{v_w^2}{a^2} = 0{,}2\,M^2$

und folglich

$$(v_w/v_{st})^{\varkappa - 1} \cdot (n \cdot f/F)^{\varkappa - 1} - 1 = 0{,}2\,M^2\,[1 - (v_{st}/v_w)^2];$$

für Luft ist der Adiabatenexponent $\varkappa_{Luft} = 1{,}4$, also

$$(v_w/v_{st})^{0{,}4} \cdot (n \cdot f/F)^{0{,}4} - 1 = 0{,}2\,M^2\,[1 - (v_{st}/v_w)^2] \quad . \quad (8)$$

v_{st}/v_w wird aus dieser Gleichung graphisch ermittelt: Man zerlegt sie zu diesem Zweck in zwei Teilgleichungen $X = (v_w/v_{st})^{0{,}4} \cdot (n \cdot f/F)^{0{,}4} - 1$ und $Y = 0{,}2\,M^2\,[1 - (v_{st}/v_w)^2]$, trägt die so gefundenen Werte X und Y in Abhängigkeit von v_{st}/v_w mit dem Parameter $n \cdot f/F$ bzw. M in einem Diagramm auf und erhält zwei sich schneidende Kurvenscharen (Bild 3).

Für $X = Y$ ist Gleichung (8) erfüllt; demnach geben die Schnittpunkte der beiden Kurvenscharen die nach Gleichung (8) zusammengehörigen Werte v_{st}/v_w, $n \cdot f/F$ und M an. Aus dieser Darstellung läßt sich jetzt ein Diagramm für v_{st}/v_w als Funktion von M mit $n \cdot f/F$ als Parameter ableiten (Bild 4).

v_{st}/v_w und damit c (nach Gleichung (3)) ist außer vom Querschnittsverhältnis $n \cdot f/F$ noch von der Machschen Zahl M abhängig, d. h. der Beiwert des Diffusorthermometers ist eine Funktion der Machschen Zahl und somit keine Konstante!

1) E. Eckert: Temperaturmessung in schnell strömenden Gasen. Z. VDI. Bd. 84 (1940) S. 318.

8025

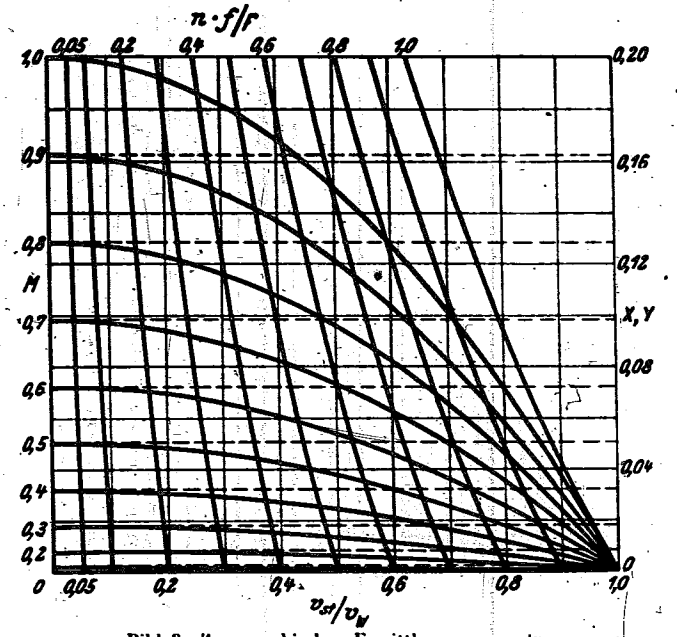


Bild 3. Zur graphischen Ermittlung von v_{st}/v_w

Bei zweckmäßiger Ausführung des Diffusorthermometers ist jedoch $(n \cdot f/F)^2 \ll 1$ und damit nach Bild 4 auch $(v_{st}/v_w)^2 \ll 1$.

Man kann also in dem Klammerausdruck der Gleichung (8) $(v_{st}/v_w)^2$ gegen 1 vernachlässigen; dann wird $(v_w/v_{st})^{0,4} \cdot (n \cdot f/F)^{0,4} - 1 = 0{,}2\,M^2$, umgeformt

$$(v_{st}\ v_w)^2 = \frac{(n \cdot f/F)^2}{(1 + 0{,}2\,M^2)^5} \quad \ldots \quad (9)$$

Die beiden Teilgleichungen (entsprechend Bild 3) lauten jetzt $X = (v_w/v_{st})^{0,4} \cdot (n \cdot f/F)^{0,4} - 1$ und

$Y = 0{,}2\,M^2$ Scheiteltangente an die Parabel

$$Y = 0{,}2\,M^2\ [1 - (v_{st}/v_w)^2]$$

Die Näherung nach Gleichung (9) bedeutet also Ersetzen der Schnittpunkte der Hyperbeln Y mit den Parabeln X durch die Schnittpunkte der Hyperbeln Y mit den Scheiteltangenten an die Parabeln X. Wie Bild 3 zeigt, ist diese Näherung im Bereich $n \cdot f/F = 0$ bis 0,2 erlaubt.

Durch Einsetzen der Gleichung (9) in Gleichung (3) erhält man den Beiwert des Diffusorthermometers

$$c = 1 - \frac{(n \cdot f/F)^2}{(1 + 0{,}2\,M^2)^5} \quad \ldots \quad (10)$$

Für den vorliegenden Zweck kommen die Werte $M = 0$ bis 1 in Betracht. Die Extremwerte dieses Bereiches sind

$$c_{max} = 1 - \frac{(n \cdot f/F)^2}{1{,}2^5} = 1 - \frac{(n \cdot f/F)^2}{2{,}488} \quad \text{entsprechend } M = 1,$$

und

$$c_{min} = 1 - \frac{(n \cdot f/F)^2}{1^5} = 1 - (n \cdot f/F)^2 \quad \text{entsprechend } M = 0.$$

Definiert man einen Mittelwert so, daß die prozentuellen Maximalabweichungen am Anfang und Ende des Bereiches gleich groß sind

$\frac{c_{max} - c_{mittel}}{c_{mittel}} = \frac{c_{mittel} - c_{min}}{c_{mittel}}$, dann wird dieser Mittelwert

$$c_{mittel} = \frac{c_{max} + c_{min}}{2} = 1 - 0{,}70\,(n \cdot f/F)^2 \quad \ldots \quad (11)$$

und die Maximalabweichung

$$(\Delta c)_{max,\,min} = \pm \frac{c_{max} - c_{min}}{2} = \pm 0{,}30\,(n \cdot f/F)^2 \quad \ldots \quad (12)$$

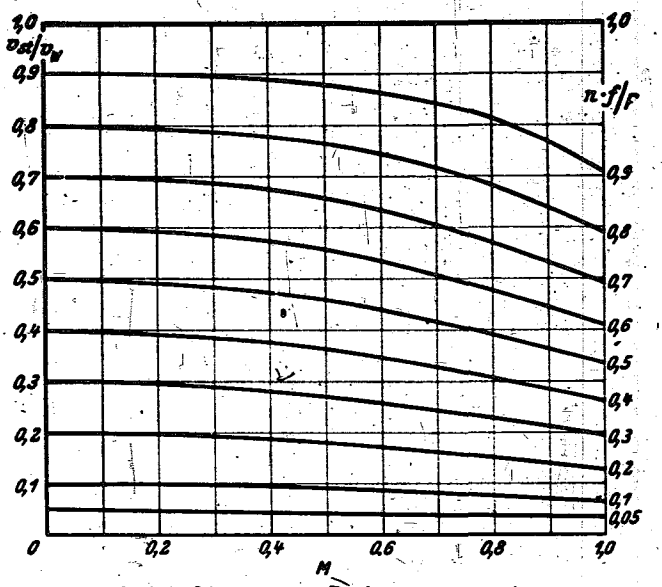


Bild 4. Diagramm zur Bestimmung von v_{st}/v_w

Diese Beziehungen sind in Bild 5 dargestellt. Danach ist die Maximalabweichung im ungünstigsten Fall (d. h. für $n \cdot f/F = 0{,}2 = 1/5$) erst etwas größer als 1 %.

Um beurteilen zu können, ob eine Inkonstanz dieser Größe für den vorliegenden Zweck vernachlässigt werden kann, muß die Auswirkung der Abweichung des tatsächlich vorliegenden Beiwertes c' von dem der Rechnung (Nomogramm bzw. Rechenschieber) zugrunde gelegten c auf das Resultat der Geschwindigkeitsrechnung untersucht werden:

Zu dieser Betrachtung verwendet man die Gleichung[2])

$v_w^2/T_L = F$ und formt sie wie folgt um

$$v_w^2 = T_L \cdot F = (T_w + \vartheta_e) \cdot F \quad \ldots \quad (13)$$

dabei ist[2]) $F = \frac{\alpha\,[\sqrt{1 + \beta D} - 1]}{1 + \alpha\zeta\,[\sqrt{1 + \beta D} - 1]}$

und[2]) $D = \frac{v_{aw}^2}{B}$

Ist der tatsächliche Thermometerbeiwert c' und damit der Wert $\zeta' = c' \cdot 0{,}000038215$ ein anderer als der dem Nomogramm bzw. Rechenschieber zugrunde gelegte Wert c bzw. $\zeta = c \cdot 0{,}000038215$, so weicht der vom Thermometer angegebene Temperaturanstieg (ϑ_e') von demjenigen (ϑ_e) ab, den ein nach dem bei der Rechnung vorausgesetzten c arbeitendes Thermometer anzeigen müßte;

2) siehe Technische Berichte Bd. 9 (1942) Nr. 6, S. 173.

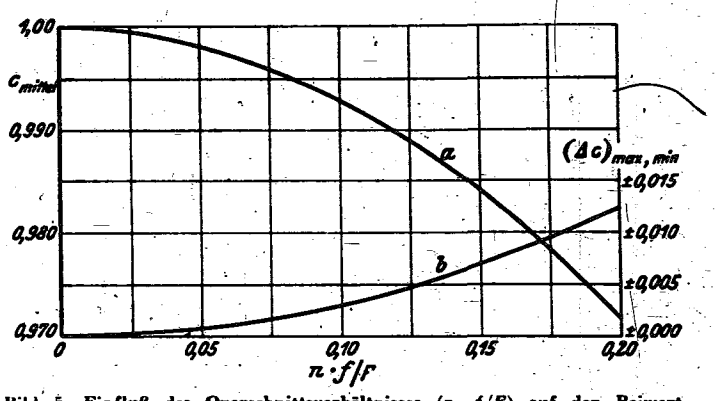


Bild 5. Einfluß des Querschnittsverhältnisses $(n \cdot f/F)$ auf den Beiwert des Diffusorthermometers

a Kurve für c_{mittel}
b Kurve für $(\Delta c)_{max,\,min}$

8026

d. h. die tatsächliche Thermometerablesung (t'_L) differiert von der mit dem Wert c gebildeten (t_L). Der Wert F, der mittels Nomogramm bzw. Rechenschieber mit dem vorliegenden v_{aw} und B berechnet wird, bleibt von der Abweichung des Thermometerbeiwertes unberührt.

Die theoretische Temperatursteigerung

$$\vartheta_{ad} = 0{,}000038215 \cdot v_w^2$$

ist nur eine Funktion der wirklichen Geschwindigkeit und wird daher von der Veränderung des Thermometerbeiwertes nicht beeinflußt. Es ist somit $\vartheta'_e = c' \vartheta_{ad}$ und $\vartheta_e = c \vartheta_{ad}$, d. h. der tatsächliche Temperaturanstieg ändert sich proportional c, also auch proportional ζ. Die Rechnung wird daher einen von der tatsächlichen vorliegenden wirklichen Geschwindigkeit $v_w^2 = (T_w + \vartheta_e) \cdot F$ abweichenden Wert ergeben $v'^2_w = (T_w + \vartheta'_e) \cdot F$ (13a)

Setzt man $\eta_1 = T_w/\vartheta_e = T_w/\zeta v_w^2 = \dfrac{1}{0{,}2 \cdot c \cdot M^2}$ (14)

so erhält Gleichung (13) die Form $v_w^2 = (1 + \eta_1) \cdot \vartheta_e \cdot F$; (15)

mit der weiteren Substitution $\sigma = c'/c = \zeta'/\zeta$ wird $\vartheta'_e = \sigma \cdot \vartheta_e$ und Gleichung (13a) geht über in

$v'^2_w = (T_w + \vartheta'_e) \cdot F = (\eta_1 + \sigma) \cdot \vartheta_e \cdot F$; (15a)

aus den Gleichungen (15) und (15a) folgt

$$\frac{v'^2_w}{v_w^2} = \frac{1 + \eta_1}{\sigma + \eta_1} = \frac{1 + 1/(0{,}2 \cdot c \cdot M^2)}{\sigma + 1/(0{,}2 \cdot c \cdot M^2)}$$

$$\frac{v'_w}{v_w} = \sqrt{\frac{1 + \eta_1}{\sigma + \eta_1}} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}2 \cdot c \cdot M^2}{1 + \sigma \cdot 0{,}2 \cdot c \cdot M^2}} \quad (16)$$

Nach Gleichung (16) nimmt $|v'_w/v_w - 1|$ (d. h. der Fehler in der Berechnung der wirklichen Fluggeschwindigkeit) zu, wenn $|\sigma - 1|$, M und das dem Rechenschieber bzw. Nomogramm zugrunde gelegte c steigt.

Setzt man näherungsweise $c = 1$, so stellt Bild 6 den zu erwartenden maximalen Fehler in der Geschwindigkeitsrechnung (v'_w/v_w) entsprechend $M = 1$ als Funktion der Abweichung (σ) des Thermometerbeiwertes von dem der Rechnung zugrunde gelegten dar.

Danach kommt einem $\sigma_{max} = 1{,}0123$ (entsprechend einem $\Delta c_{max} = 0{,}0123$ für $n \cdot f/F = 0{,}2$ nach Bild 6) äußersten Falls (für $M = 1$) ein $(v'_w/v_w)_{max} = 0{,}999$ zu, d. h. die Inkonstanz des Beiwertes eines Diffusorthermometers ergibt im Resultat der Geschwindigkeitsrechnung einen Fehler von höchstens 0,1 %, der vollkommen vernachlässigt werden kann.

Der Beiwert eines Diffusorthermometers mit einem Querschnittsverhältnis $n \cdot f/F \leqq 0{,}2$ ist also praktisch als absolut konstant anzusehen!

Die gute Übereinstimmung der Rechnung mit dem Versuch zeigt die von E. Eckert ermittelte Eichkurve des Diffusorthermometers (Bild 7). Danach ist der versuchsmäßig ermittelte Beiwert $c = 0{,}9930 =$ konst. Dem entspricht nach Bild 5 ein Querschnittsverhältnis $n \cdot f/F = 1/10$. Nach der der Eichkurve in der Arbeit von E. Eckert beigefügten Skizze (wiedergegeben in Bild 1) dürfte das dort verwendete Diffusorthermometer auch ungefähr dieses Querschnittsverhältnis haben. Die theoretische Inkonstanz läßt sich durch den Versuch gar nicht nachweisen, da sie weit unter der Streuung der Meßwerte liegt (vgl. Bild 7).

Die praktisch günstigste Größe des Querschnittsverhältnisses $n \cdot f/F$ ergibt sich aus den nachstehenden Überlegungen: Der Beiwert c soll möglichst nahe an 1 liegen, da seine Inkonstanz mit Annäherung an 1 sinkt. Die Geschwindigkeit im Diffusor soll einerseits nicht zu groß sein, damit das in ihm angeordnete Thermometer auch tatsächlich die im Stauraum herrschende Lufttemperatur anzeigt; andererseits darf sie aber nicht zu klein sein, da sonst der Wärmeübergang von der Luft im Stauraum an die Diffusorwand wieder eine Fälschung der Temperaturanzeige bewirken würde. Für ein Querschnittsverhältnis $n \cdot f/F = 0{,}1$ wird nach Bild 4 bei kleinen Machschen Zahlen die Geschwindigkeit im Diffusor ungefähr 1/10 und bei großen Machschen Zahlen ungefähr 1/15 der Geschwindigkeit in der freien Strömung (Fluggeschwindigkeit). Sie steigt demnach äußersten Falls bis rd. 80 km/h bei der Schallgeschwindigkeit und dürfte den beiden letzten oben angeführten Forderungen vollkommen entsprechen. Da für $n \cdot f/F = 1/10$ der Beiwert $c = 0{,}9930$ ist, wird auch die erste Bedingung sehr gut erfüllt.

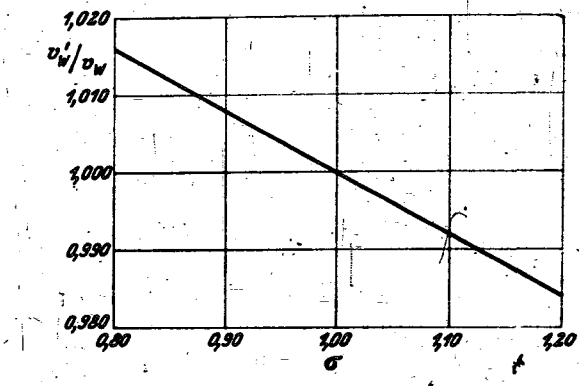


Bild 6. Der in der Geschwindigkeitsrechnung zu erwartende Fehler in Abhängigkeit von der Abweichung σ des Thermometerbeiwertes

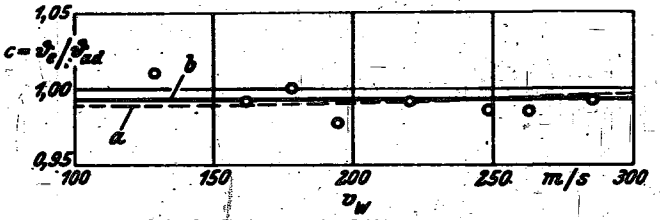


Bild 7. Eichkurve des Diffusorthermometers
a gerechneter (theoretischer) Verlauf
b Mittelwert
c Versuchswerte nach Eckert

Das Diffusorthermometer wird also am besten mit einigen (über den Umfang verteilten) Belüftungsbohrungen mit dem Gesamtquerschnittsverhältnis $n \cdot f/F = 1/10$ ausgeführt; da eine kleine Änderung des Querschnittsverhältnisses, wie Bild 5 zeigt, die Genauigkeit der Temperaturmessung nur in vernachlässigbar geringem Maß beeinflußt, braucht dieses nicht mit absoluter Genauigkeit eingehalten werden.

III. Verhalten der Außenlufttthermometer in der gestörten Strömung am Flugzeug

Der hier rechnerisch und von E. Eckert versuchsmäßig ermittelte Beiwert c gilt für Anordnung des Thermome-

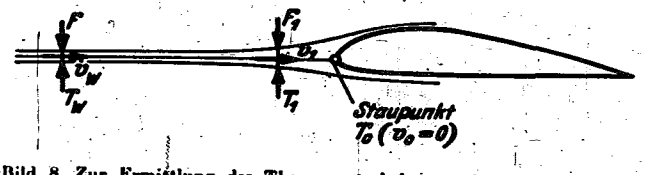


Bild 8. Zur Ermittlung des Thermometerbeiwertes in der gestörten Strömung

8027

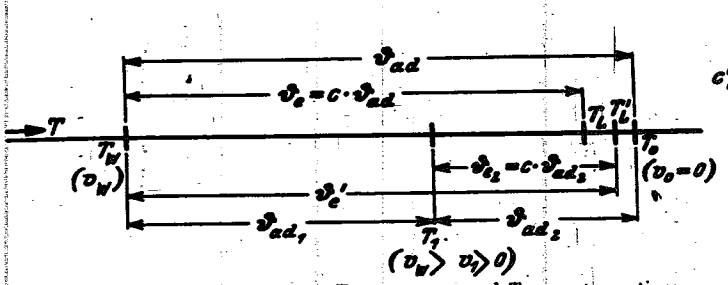


Bild 9. Graphische Darstellung der Temperaturen und Temperaturanstiege

ters in ungestörter Strömung (Querschnitt F in Bild 8). Da die Strömung in der Nähe des Flugzeuges im allgemeinen verzögert oder beschleunigt sein wird, ist noch zu untersuchen, wie sich der Beiwert bei Anordnung des Thermometers in der gestörten Strömung am Flugzeug (etwa im Querschnitt F_1 des Bild 8) ändert.

Diese Zusammenhänge sind am einfachsten zu übersehen, wenn man die Temperaturen bzw. Temperatursteigerungen graphisch darstellt, vgl. Bild 9.

Das Thermometer gibt an jeder beliebigen Stelle der Strömung immer die Temperatur an dieser Stelle vermehrt um den c-fachen Wert des adiabatischen Temperaturanstieges bei vollständiger Stauung, d. h. um den c-fachen Unterschied zwischen der Temperatur bei der Geschwindigkeit $v_o = 0$ und der Temperatur an dieser Stelle, an. Da c für das Diffusorthermometer praktisch von der Machschen Zahl unabhängig ist, kann man schreiben

$$c = \frac{\vartheta_e}{\vartheta_{ad}} = \frac{\vartheta_{e2}}{\vartheta_{ad2}} = const.$$

Der Beiwert bei Anordnung des Instrumentes im Querschnitt F_1 bezogen auf den adiabatischen Temperaturanstieg bei voller Stauung der ungestörten Strömung ist

$$c' = \frac{\vartheta'_e}{\vartheta_{ad}} = \frac{T'_L - T_w}{T_o - T_w}$$

weiter ist $\vartheta_{e'} = \vartheta_{ad\,1} + c \cdot \vartheta_{ad\,2}$

(ϑ_{ad_1} ist die adiabatische Temperaturänderung in der freien Strömung von F bis F_1),

so daß man schreiben kann

$$c' = \frac{\vartheta_{ad\,1} + c \cdot \vartheta_{ad\,2}}{\vartheta_{ad}} = \frac{(T_1 - T_w) + c \cdot (T_o - T_1)}{T_o - T_w}$$

$$c' = \frac{\lambda\,(v_w^2 - v_1^2) + c\,\lambda\,v_1^2}{\lambda\,v_w^2}$$

$$c' = \frac{v_w^2 + v_1^2\,(c - 1)}{v_w^2}$$

$$c' = 1 - (1 - c)\,(v_1/v_w)^2; \quad \ldots \quad (17)$$

damit wird das Verhältnis des Beiwertes in der gestörten zu dem in der ungestörten Strömung

$$\frac{c'}{c} = \frac{1 - (1 - c)\,(v_1/v_w)^2}{c} = \frac{1 - (1 - c)\,(v_1/v_w)^2}{1 - (1 - c)} \quad (18)$$

Für das Diffusorthermometer ist $(1 - c) = 1 - 0{,}9930 = 0{,}007$,

also $c'_{Diff.} = 1 - 0{,}007\,(v_1/v_w)^2$

und $(c'/c)_{Diff.} = \dfrac{1 - 0{,}007\,(v_1/v_w)^2}{0{,}9930}$ (vergl. Bild 10).

für das zylindrische Thermometer ist $(1 - c) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$,

demnach $c'_{Zyl.} = 1 - 0{,}15\,(v_1/v_w)^2$

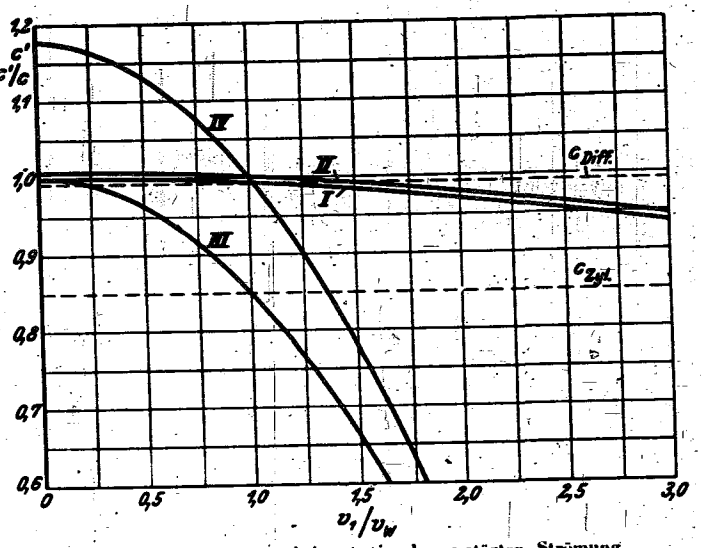


Bild 10. Thermometerbeiwerte in der gestörten Strömung
I Kurve für $c'_{Diff.}$ III Kurve für $c'_{Cyl.}$
II Kurve für $(c'/c)_{Diff.}$ IV Kurve für $(c'/c)_{Cyl.}$

und $(c'/c)_{Zyl.} = \dfrac{1 - 0{,}15\,(v_1/v_w)^2}{0{,}85}$ (vergl. Bild 10).

Bild 10 zeigt, daß der Beiwert des Diffusorthermometers, da er sehr nahe an 1 liegt, an allen Stellen der Strömung fast genau denselben Wert beibehält. Er steigt bei Annäherung des Thermometers an das Staugebiet vor Rumpf oder Tragfläche und wird im Staupunkt gleich 1. Bei Anordnung des Thermometers in beschleunigter Strömung (etwa seitlich am Rumpf) sinkt der Beiwert etwas. Diese Abweichungen sind derart gering, daß sie nach den vorher durchgeführten Untersuchungen über die zulässigen Abweichungen des Beiwertes hinsichtlich der dadurch bedingten Fehler in der Geschwindigkeitsrechnung (Bild 6) für verzögerte Strömung auf jeden Fall und für beschleunigte selbst noch bis zur dreifachen Geschwindigkeit der ungestörten Strömung vernachlässigt werden können.

Beim zylindrischen Thermometer (dessen Beiwert ebenfalls von der Machschen Zahl fast unabhängig ist) sind die Verhältnisse grundsätzlich dieselben (Bild 10), jedoch werden hier die Abweichungen bei Anordnung des Thermometers in gestörter (besonders in beschleunigter) Strömung ganz unzulässig groß.

IV. Nachprüfung durch Meßflüge

Eine Kontrolle vorstehender theoretischer Erkenntnisse durch Meßflüge ist leicht durchzuführen. Zunächst kann der Beiwert c wie folgt bestimmt werden. Man rüstet ein Flugzeug außer mit dem zu untersuchenden Thermometer noch mit einem Log aus. Die wirkliche Geschwindigkeit (v_w) wird mittels Log bestimmt und die zugehörige Temperatur (t_L) am Thermometer abgelesen. Diese Messungen sind für mehrere (etwa 3 bis 4) Geschwindigkeiten durchzuführen. Wichtig ist dabei, daß die Meßflüge in nicht zu geringer Höhe (d. h. nicht in Bodennähe) gemacht werden und diese Höhe für alle Meßflüge genau eingehalten wird, da nur dann die Gewähr gegeben ist, daß die wirkliche Temperatur (t_w) bei allen Meßflügen dieselbe ist. Man erhält die folgender Meßergebnisse:

	1. Meßflug	2. Meßflug	3. Meßflug	4. Meßflug
Geschwindigkeit	$v_{w,1}$	$v_{w,2}$	$v_{w,3}$	$v_{w,4}$
Temperatur	$t_{L,1}$	$t_{L,2}$	$t_{L,3}$	$t_{L,4}$

8028

Der Zusammenhang zwischen t_L und v_w lautet

$$(273 + t_L) = (273 + t_w) + c \frac{A}{2g\, c_p\, 3{,}6^2} v_w^2, \text{ also}$$

$$(273 + t_{L,1}) = (273 + t_w) + c \frac{A}{2g\, c_p\, 3{,}6^2} v_{w,1}^2,$$

und ebenso

$$(273 + t_{L,2}) = (273 + t_w) + c \frac{A}{2g\, c_p\, 3{,}6^2} v_{w,2}^2;$$

aus den beiden letzten Gleichungen läßt sich t_w eliminieren:

$$t_{L,1} - t_{L,2} = c \frac{A}{2g\, c_p\, 3{,}6^2} (v_{w,1}^2 - v_{w,2}^2)$$

$$= 0{,}000038215\, c\, (v_{w,1}^2 - v_{w,2}^2);$$

daraus kann man den Beiwert c berechnen und findet

$$c_{1,2} = \frac{t_{L,1} - t_{L,2}}{0{,}000038215\, (v_{w,1}^2 - v_{w,2}^2)};$$

analog erhält man durch Vergleich der Meßergebnisse des ersten und dritten Meßfluges

$$c_{1,3} = \frac{t_{L,1} - t_{L,3}}{0{,}000038215\, (v_{w,1}^2 - v_{w,3}^2)} \text{ usw.}$$

Wenn die Meßflüge richtig durchgeführt wurden und der Thermometerbeiwert konstant ist (was ja beim Diffusorthermometer der Fall ist) muß

$c_{1,2} = c_{1,3} = c_{1,4} = c_{2,3} = c_{2,4} = c_{3,4} = \ldots\ldots = c$ sein.

Ordnet man am Flugzeug mehrere Diffusorthermometer an verschiedenen Stellen an, so müssen sie alle stets praktisch dieselbe Temperatur anzeigen[3]). Hinsichtlich der Änderung des Beiwertes bei Anordnung des Instrumentes in beschleunigter oder verzögerter Strömung muß sich Theorie und Versuch vollkommen decken, da die freie Strömung nicht reibungsbehaftet ist und daher die in der Rechnung angenommene adiabatische Zustandsänderung zutrifft. Hingegen kann der theoretische Wert von c infolge der Reibung an den Diffusorwänden (vor allem an den Belüftungsbohrungen wegen der dort hohen Ausströmgeschwindigkeit) von dem versuchsmäßig ermittelten Wert etwas differieren; jedoch sind diese Abweichungen, wie der Vergleich des Versuchswertes nach E. Eckert mit dem hier errechneten theoretischen zeigt, nur minimal.

V. Zusammenfassung

Vorstehende Untersuchungen führen zu folgender Erkenntnis: Für das unmittelbare Geschwindigkeits- und Temperaturermittlungsverfahren, bei dem der Thermometerbeiwert seiner Größe nach bekannt und auch bei Anordnung des Thermometers an verschiedenen Flugzeugbaumustern (also an verschiedenen Stellen der Strömung) denselben oder mindestens annähernd denselben Wert behalten muß, ist im Gegensatz zum zylindrischen das Diffusorthermometer hervorragend geeignet. Es ist an sich ganz gleichgültig, wo es am Flugzeug angebracht wird. Da im Stauraum hinter den Belüftungsbohrungen die Strömung vollständig gestaut ist, also dort der volle Staudruck herrscht, könnte man das Diffusorthermometer mit der Staudruckmeßdüse kombinieren, ohne daß sich beide Instrumente gegenseitig stören würden. Das hätte jedoch folgenden Nachteil: Bei Vereisungsgefahr wird das Staurohr elektrisch beheizt, was die Temperaturanzeige in unkontrollierbarer Weise fälschen würde.

Bild 11. Einfluß der Schräganblasung

Die beste Anordnung dürfte die im Staugebiet vor dem Flügel oder Rumpf sein. Vereist nämlich dann das Thermometer, so wird es zu einem zylindrischen, dessen Beiwert in ungestörter Strömung $\sim 0{,}85$ wäre; da das Instrument aber im Staugebiet, also in verzögerter Strömung steht, wird der Beiwert etwas größer, etwa 0,90 sein. Er weicht demnach nur um rd. 10% von dem der Rechnung zugrunde gelegten des Diffusorthermometers ab; das gibt jedoch in der Geschwindigkeitsrechnung (nach Bild 6) einen äußersten Fehler von 1%. Das Ergebnis der Geschwindigkeitsrechnung ist also auch bei vereistem Diffusorthermometer noch einigermaßen genau.

Ein allzunahes Heranrücken des Thermometers an den Staupunkt ist aus folgendem Grund schlecht: in unmittelbarer Nähe des Staupunktes ändert sich die Strömungsgeschwindigkeit schon auf ganz kurze Distanzen nach Größe und Richtung beträchtlich. Wandert nun der Staupunkt infolge Anstellwinkeländerung, so kann dadurch das Instrument unter Umständen mit großer Geschwindigkeit stark schräg angeblasen werden, was natürlich eine Fälschung der Temperaturanzeige zur Folge hätte; dagegen entspricht in einigem Abstand vor dem Staupunkt die Richtungsänderung der Strömung ungefähr der Anstellwinkeländerung und hat so für die Anzeige des Thermometers keine nachteiligen Folgen (Bild 11). Nach den Untersuchungen von E. Eckert bleibt bei Änderung des Anströmwinkels bis $\pm$ 10° der Beiwert praktisch konstant, ändert sich jedoch darüber hinaus rasch.

3) Die Thermometer dürfen natürlich nicht in durchwirbelter bzw. durch Reibung veränderter Strömung, also etwa im Schraubenstrahl oder am Rumpfheck usw. angebracht werden.

Fortsetzung von S. 229

Am Ende des Anschlußschlauches verlaufen die Werte, die hier nicht wiedergegeben sind, ähnlich wie die dargestellten. — Die Flasche selbst sowie die Anschlußteile kühlen sich dabei natürlich — besonders auf der Unterseite — ebenfalls stark ab.

Bei besonders raschem Öffnen sowie bei niedrigen Außentemperaturen sind noch stärkere Unterkühlungen zu erwarten, die u. U. im Verein mit den stoßartigen Beanspruchungen durch die Druckwellen zur Zerstörung des Schlauchmaterials infolge Kaltsprödigkeit führen können.

Da, wie die Versuche ergeben haben, die Temperaturen durch geringeres Öffnen und demzufolge langsameres Ausströmen in erträglichen Grenzen gehalten werden können, wurde eine entsprechende Anweisung herausgegeben, die zur Schonung des Schlauchmaterials führte, während andererseits natürlich für derartige Zwecke Werkstoffe zu verwenden sind, die auch bei niedriger Temperatur noch eine ausreichende Haltbarkeit besitzen.

DVL, Berlin-Adlershof
Institut für Gasdynamik
E. Strauß

8029

Verfahren zum Messen auch von sehr kleinen (Thermo-) Spannungen über Schleifringe

G. Fleißner und H. Viehmann, Berlin-Adlershof

C 7

Mitteilung der deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Institut für Elektrophysik

Übersicht: Mit Hilfe einer Graphitbürste, die, ohne an der Stromführung beteiligt zu sein, auf dem Schleifring mitläuft, ist es möglich, Metallbürsten mit einem so niedrigen und konstanten Übergangswiderstand auf Schleifringen laufen zu lassen, wie ihn eine gute, ruhende Steckverbindung besitzt. Zu erreichen sind Übergangswiderstände von etwa 0,001 bis 0,01 Ohm, die vom Strom praktisch unabhängig sind (nachgeprüft zwischen 0,003 und 10 Ampere. Der Spannungsabfall ist frei von überlagerten Wechselspannungen. Dauerbetrieb ist über mehrere Tage ohne weiteres möglich.

Gliederung

I. Allgemeines
II. Das neue Verfahren
III. Versuchsläufe
IV. Schrifttum

I. Allgemeines

Die Messung von Spannungen an bewegten Maschinenteilen über Schleifringe wird umso ungenauer, je kleiner diese Spannungen sind. Der hierbei auftretende Fehler wird bedingt durch den Spannungsabfall, der zwischen Bürste und Schleifring auftritt. Dieser Spannungsabfall beträgt je nach den verwendeten Baustoffen etwa 0,1 bis 1 Volt. Er ist außerdem nicht konstant sondern starken, praktisch nicht erfaßbaren Schwankungen unterworfen. Der Spannungsabfall entsteht durch die Fremdschichten auf den Schleifflächen der Bürste und des Ringes, die hauptsächlich aus Oxyden, Graphitschuppen und aus einer Wasserhaut bestehen. Die schnellen Schwankungen des Spannungsabfalles entstehen durch den mit Unterbrechungen verbundenen Stromübergang durch die Fremdschicht, der in der Art eines elektrischen Durchschlages erfolgt. Langsame Änderungen des Spannungsabfalles ergeben sich durch die Dickenänderung der Fremdschicht. Durch den mechanischen Abrieb wird die Fremdschicht verringert, durch die Neubildung von Oxyd z. B. verstärkt.

Auf die Fremdschicht kann aber bei Dauerbetrieb im allgemeinen nicht verzichtet werden, da sonst übermäßig starke Bürstenabnutzung durch Fressen eintritt.

Beim Fressen beträgt die Abnutzung bei graphithaltigen Bürsten einige mm/h; bei Ganzmetallbürsten ist die erreichbare Betriebsdauer noch geringer. Während der hohen Abnutzung ist allerdings der Spannungsabfall zwischen Bürste und Schleifring niedriger und bei Graphitbürsten auch frei von Schwankungen. Der Übergangswiderstand beträgt nur einige tausendstel Ohm. Die Beseitigung der Fremdschicht kann z. B. durch ungewöhnlich hohen Bürstendruck erzwungen werden. Auf diese Weise gelingt es immerhin, wenigstens kurzzeitig kleine Spannungen, z. B. Thermospannungen, über Schleifringe zu messen, ohne daß hierdurch eine merkliche Vergrößerung des Meßfehlers eintritt [1][1]).

Nach Kloblauch [2] ist es bis zu Umfangsgeschwindigkeiten von 3 m/s noch möglich, mit einem konstant bleibenden Fehler von 0,6 bis 0,9° C Thermospannungen eines Kupfer-Konstanten Elementes über Schleifringe auch bei längeren Betriebszeiten zu messen.

Bei Vorhandensein einer Fremdschicht, wie sie zur Vermeidung des Fressens erforderlich ist, nimmt dagegen der Übergangswiderstand mit abnehmendem Strom zu. Dies ist aus dem Elektromaschinenbau allgemein bekannt. Der Übergangswiderstand ist ferner wesentlich größer als ohne Fremdschicht.

Um auch über längere Zeiten kleine Spannungen an bewegten Maschinenteilen messen zu können, wurde von Gnam und Kühl das Induktionsverfahren ausgearbeitet [3]. Die zu messenden elektrischen Spannungen erzeugen in einer mitbewegten Spule Ströme, deren Magnetfeld in feststehenden Spulen entsprechende Spannungen induziert.

Ein weiteres Verfahren zur Messung von Spannungen an bewegten Maschinenteilen ist die Nullpunktsmethode, wie sie von Keyser und Miller für Kolbentemperaturmessungen angegeben und von Egge und Niedermayer sowie von Glaser für eine längere Betriebszeit brauchbar entwickelt wurde [4]. Hierbei wird der zu messenden Spannung eine bekannte Spannung entgegengeschaltet, die solange geändert wird, bis ein in den Meßkreis eingeschaltetes Galvanometer auf Null einspielt.

Das nachfolgend beschriebene Verfahren gestattet, die einfache und unmittelbare Messung von kleineren Spannungen über Schleifringe auch dauernd auszuführen, also den oben genannten Nachteil der unmittelbaren Messung über Schleifringe zu vermeiden.

II. Das neue Verfahren

Bei dem neuen Verfahren wird der zu messende Strom durch eine Metallbürste vom Schleifring abgenommen. Für Bürste und Schleifring müssen Baustoffe gewählt werden, die miteinander keine Thermospannungen liefern. Man wird sie daher zweckmäßig aus demselben Baustoff herstellen (z. B. aus Kupfer). Die Metallbürste (aus Kupferlitze oder Kupfergewebe) arbeitet bei normalem Anpreßdruck (100 bis 400 Gramm/cm² (g/cm²)). Sie soll so elastisch wie möglich sein, damit eine größere Anzahl von (dafür kleineren) Berührungsflächen zwischen Bürste und Schleifring entsteht. Hierdurch und bei dem oben angegebenen (normalen) Bürstendruck bilden sich auf den Schleifflächen Fremdschichten, so daß ein Fressen nicht eintritt. Dafür ergibt sich aber ein hoher Spannungsabfall zwischen Bürste und Schleifring von etwa 0,7 Volt (V) bei 1 Ampere (A).

Dieser zum Messen kleiner Spannungen nicht geeignete Zustand wird nun durch Anwendung einer Hilfsbürste beseitigt, die auf derselben Bahn des Schleifringes läuft wie die Metallbürste. Die Hilfsbürste ist an der Stromführung nicht beteiligt. Sie hat zwei Aufgaben:

Erstens dient sie zum Putzen der Schleiffläche, d.h., sie unterstützt die Metallbürste beim Entfernen der

1) Die Angaben in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttumverzeichnis am Ende der Arbeit.

8030

Fremdschicht. Die übrigbleibende Fremdschicht ist so gering, daß der Spannungsabfall bei 1 A nur noch etwa 0,001 V beträgt. Der Übergangswiderstand ist dann ungefähr 0,001 Ohm (Bild 1). Er ist hierbei unabhängig vom Strom, d. h., er gehorcht dem Ohmschen Gesetz. Das ist bei dickeren Fremdschichten nicht der Fall. Bis jetzt haben sich Hilfsbürsten aus Elektrographit und Naturgraphit bewährt.

Bei stark putzenden Metallbürsten sind weniger putzende Hilfsbürsten auszusuchen und umgekehrt.

Die Hilfsbürste hat zweitens die Aufgabe, die Schleifflächen zu schmieren und dadurch eine zusätzliche Sicherung gegen das Fressen von Metallbürste und Schleifring zu bieten. Hierdurch ist ein ununterbrochener Dauerbetrieb von mehreren Tagen möglich.

Nach einer Betriebszeit von etwa 4 Tagen ist eine Überprüfung des Übergangswiderstandes erforderlich. Für den Fall, daß sich inzwischen die Fremdschichten verstärkt haben[2]), genügt ein kurzer Druck auf die Metallbürste, also eine kurzzeitige Erhöhung des Bürstendruckes, um wieder eine hinreichend dünne Fremdschicht zu erhalten.

III. Versuchsläufe

Bild 1 zeigt Meßergebnisse während eines Versuchslaufes von $2^1/_2$ Stunden. Die Hilfsbürste bestand aus gefettetem Elektrographit. Sämtliche Bürsten hatten einen Querschnitt von 14 · 7 mm². Bei den Metallbürsten sind die niedrigeren Bürstendrücke zu bevorzugen, da dann die Freßneigung am geringsten ist. Höhere Bürstendrücke sind nur dann anzuwenden, wenn sonst die Fremdschicht zu dick werden sollte oder wenn der Schleifring unruhig läuft. Die Umfangsgeschwindigkeit betrug etwa 9 m/s, Die Schleifringtemperatur von 170° C wurde durch künstliche Heizung erzeugt. Ohne Heizung ergab sich eine Schleifringtemperatur von etwa 80° C bei etwa 20° C Raumtemperatur. Innerhalb dieser Temperaturen ließ sich kein Temperatur-Einfluß auf den Übergangswiderstand feststellen.

Die Schleifflächen brauchen nicht besonders gegen Fett geschützt zu werden. Geringe Fettmengen stören nicht, was schon daraus hervorgeht, daß die Hilfsbürste bei dem in Bild 1 gezeigten Versuch etwa 6 Gewichtsprozent Fett enthielt. Bei einem anderen Versuchslauf wurde auf die Schleiffläche Heiß-Dampf-Zylinderöl getropft, um den Einfluß größerer Fettmengen festzustellen, wie sie z. B. bei Meßanordnungen an Verbrennungsmotoren auftreten können. Der Übergangswiderstand ging hierdurch um etwas mehr als eine Größenordnung herauf. Die in verschiedenen Zeitabständen nach dem Ölen gemessenen Übergangswiderstände zeigt Bild 2. Etwa 5 Stunden nach der Ölung (Kurve 3 in Bild 2) ist der Zustand, wie er vor der Ölung war, wieder erreicht. Die Anordnung wurde hierbei nicht künstlich geheizt. Die Temperatur der Schleiffläche betrug daher nur etwa 80° C bei 20° C Raumtemperatur.

Aber auch kurzzeitige Schwankungen des Übergangswiderstandes treten an Schleifkontakten dieser Art nicht auf, wie Bild 3 zeigt. Hier wurde mit einem Kathodenstrahl-Oszillographen der Spannungsabfall zwischen einer Kupfergewebe-Bürste und einem Kupferschleifring aufgenommen. Er beträgt 2 mV bei 1 A. Der Verstärker des Oszillographen arbeitet bis 100000 Hz linear und

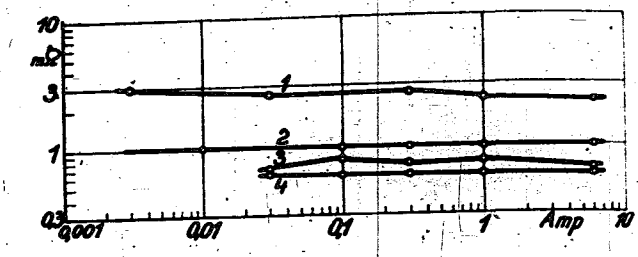


Bild 1. Übergangswiderstand von zwei Kupfergewebebürsten auf Kupferschleifring (57 mm Dmr.) bei 3000 U/min in Abhängigkeit vom Strom. Hilfsbürste aus Elektrographit (432 M 6). Bürstendruck stets 950 g/cm². Bürstendruck der Kupferbürsten: 100 g/cm², Kurve 1; 200 g/cm², Kurve 2; 300 g/cm², Kurve 3; 400 g/cm², Kurve 4. Temperatur des Schleifringes etwa 170 ° C

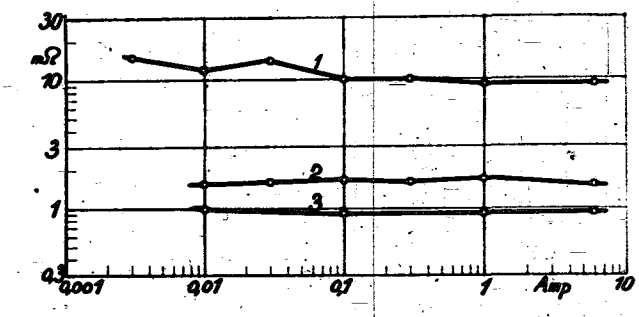


Bild 2. Wie Bild 1, Kurve 2 (Bürstendruck der Kupferbürsten 200 g/cm²), jedoch zu verschiedenen Zeiten nach Ölung des Schleifringes. Schleifringtemperatur etwa 80 ° C.
Kurve 1 : 1/2 Stunde nach dem Ölen
Kurve 2 : 2 Stunden nach dem Ölen
Kurve 3 : 5 Stunden nach dem Ölen

gibt daher Wechselspannungen bis zu dieser Frequenz unverzerrt wieder. Solche Wechselspannungen sind aber in dem Oszillogramm, Bild 3, nicht zu erkennen.

Bei praktischen Messungen von Thermo-Spannungen zwischen 0,2 und 3 mV (entsprechend 5° und 73° C bei einem Kupfer-Konstantan-Thermoelement) war die Ablesegenauigkeit des Anzeigegerätes ± 0,01 mV (± 1/10 Teilstrich der Skala). Innerhalb dieser Ablesegenauigkeit konnte durch das Hinzukommen der Schleifringe keine Änderung der Anzeige festgestellt werden. Dies ist ohne weiteres verständlich, wenn man den niedrigen Übergangswiderstand an den Schleifringen mit dem Gesamtwiderstand des Meßkreises vergleicht.

Bei einer solchen Anordnung hatten die Kupfergewebebürsten zunächst einen Bürstendruck von 100 g/cm².

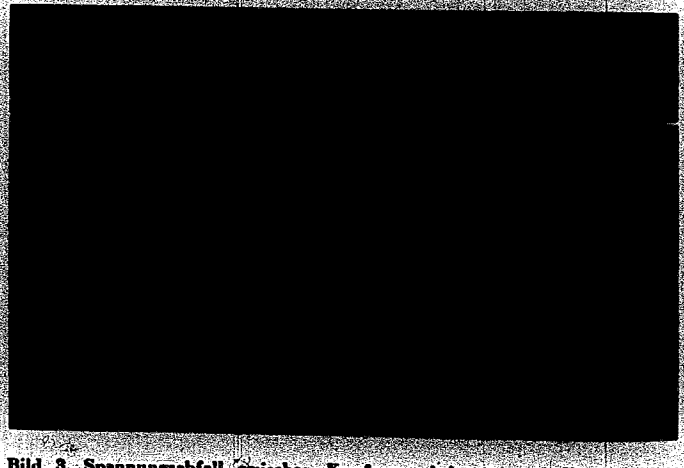


Bild 3. Spannungsabfall zwischen Kupfergewebebürste und Kupferschleifring bei einem Strom von 1 A, aufgezeichnet mit einem Kathodenstrahl-Oszillograph

2) Bei Thermo-Spannungsmessungen ist dies z. B. am Unruhigwerden der Galvanometeranzeige zu erkennen.

8031

Die Hilfsbürste war eine Naturgraphitbürste (RU 10). Sie arbeitete mit 600 g/cm² Bürstendruck. Nach 3 Tagen wurde die Anzeige des Meßgerätes unruhig. Durch einen kurzen Druck auf die Metallbürste verschwand die Unruhe. Nach weiteren 3 Tagen wiederholte sich dieser Vorgang. Jetzt wurde der Druck der Metallbürste auf 150 g/cm² erhöht. Nunmehr lief die Anordnung ohne Störung weiter, bis der Versuch nach 5 Tagen abgebrochen wurde.

Die Stromübergänge über Schleifringe, d. h. der Spannungsabfall und der Übergangswiderstand, sind also bei dieser Anordnung ähnlich gut wie bei einer Steckverbindung.

IV. Schrifttum

[1] K. Leist, E. Knörnschild: Temperaturmessung an rasch umlaufenden Maschinenteilen. Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung 1937, S. II. 289 — II. 294.

[2] H. Knoblauch: Versuche über den Wärmeaustausch zwischen Bremstrommel und Felge bei Lastkraftwagen und Omnibussen. Dr.-Ing. Dissertation. München 1932.

[3] Gnam: Technische Berichte, erscheint demnächst.

[4] Egge, Niedermayer: Gerät zur Messung der Kolbentemperatur. ZWB-Bericht UM 664 vom März 1942.

Glaser: Messung der Kolbentemperatur am laufenden Motor. ZWB-Bericht UM 695 vom November 1942.

Glaser: Messung der Kolbentemperatur am laufender Betriebsstoffdauerprüfung. Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung 1942.

Messungen beim Ausströmen von Wasserstoff

A 35 2

Auf Veranlassung der Amtsgruppe für Flakentwicklung beim Heereswaffenamt wurden in der DVL Untersuchungen über die beim Ausströmen von Wasserstoffgas aus Stahlflaschen, wie sie zum Füllen von Sperrballonen verwendet werden, auftretenden Drücke und Temperaturen vorgenommen, da sich im Betrieb vielfach Brüche der Anschlußschläuche — vermutlich infolge der starken Abkühlung — ergeben hatten[1]).

Die nebenstehenden Abbildungen zeigen einige Ergebnisse dieser Messungen und zwar Bild 1 die Drücke unmittelbar hinter dem Reduzierventil am Anfang des Anschlußschlauches in Abhängigkeit der Zeit für verschiedene Öffnung des Ventils und Bild 2 die entsprechenden Temperaturen, die mittels eines in den Gasstrom gebrachten Thermoelementes gemessen wurden.

Der Druck in den gefüllten Flaschen vor Beginn der Versuche betrug etwa 150 bis 180 at. Er fällt natürlich, besonders wenn das Ventil voll geöffnet wird, sofort rasch und dann langsamer ab. Die gemessenen Drücke sind um den Drosselverlust sowie den Staudruck des Gasstromes niedriger als der Druck in der Flasche. Bei geringer Ventilöffnung erfolgt die Druckabnahme zufolge der Drosselung bedeutend langsamer als bei voller Öffnung, so daß dann mehr Zeit zum Entleeren benötigt wird und infolgedessen auch diese Kurven die bei voller Öffnung überschneiden.

Die Temperaturen nehmen ebenfalls sofort nach dem Öffnen zufolge der Expansion des Gases schnell ab. Dabei ist zu bemerken, daß die an dem ruhenden Thermoelement im Gasstrom gemessenen Werte, die auch ungefähr mit den Temperaturen der Innenwand des Schlauches übereinstimmen dürften, bekanntlich fast gleich der Gesamttemperatur des strömenden Gases d. h. hier der jeweiligen Temperatur des ruhenden Gases in der Flasche sind. Während bei unendlich schneller Drucksenkung die Ausdehnung adiabatisch erfolgen würde, nehmen in Wirklichkeit die Temperaturen nicht so stark ab, da dem Gas von außen sowie aus der Kapazität des Flaschenmaterials Wärme zugeleitet wird. Nach Überschreiten eines Minimums steigen sie sogar, wie auch die Versuche zeigen, bald wieder an. Da umsomehr Wärme vom Gas aufgenommen wird, je langsamer das Ausströmen erfolgt, werden bei geringer Öffnung des Ventils bei weitem nicht so tiefe Temperaturen erreicht wie bei voller Öffnung.

Fortsetzung S. 226

1) Der ausführliche Bericht kann Interessenten zugänglich gemacht werden.

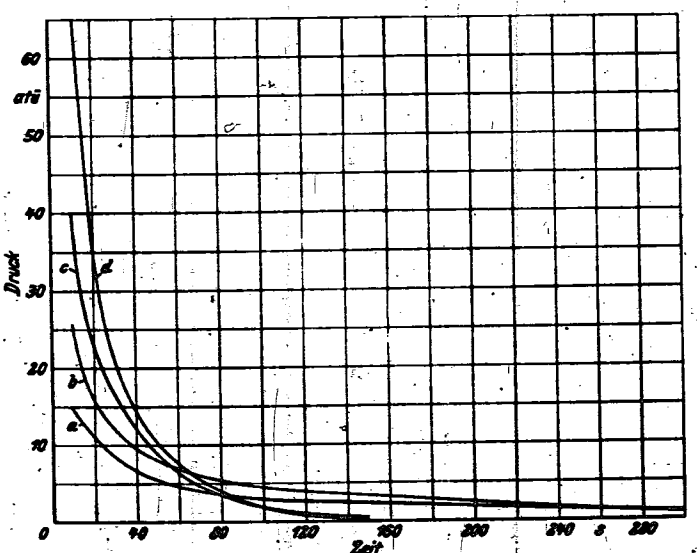


Bild 1. Drücke hinter dem Ventil in Abhängigkeit von der Zeit
a Versuch Nr. 1: Ventil wenig geöffnet
b Versuch Nr. 2: Ventil etwas mehr geöffnet
c Versuch Nr. 3: Ventil noch etwas mehr geöffnet
d Versuch Nr. 4: Ventil ganz geöffnet

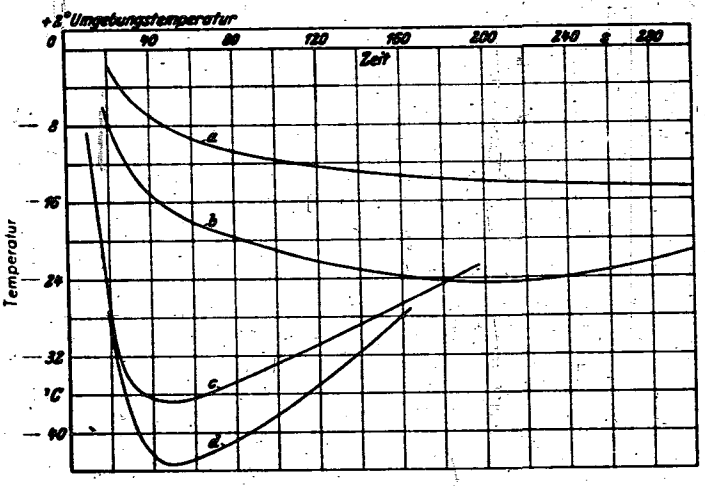


Bild 2. Temperaturen hinter dem Ventil in Abhängigkeit von der Zeit
Bedeutung von a, b, c, d wie bei Bild 1.

8032

Aus deutschen Forschungsanstalten

A Grundwissenschaften

FB 1649; Schilhansl/Möck (I. M. Voith, Heidenheim): **Die mittragende Breite bei ringscheibenförmigen Rippen an Hohlzylindern.**

Zum Zwecke der Berechnung trennt man zunächst die Rippe vom Hohlzylinder und stellt ihre Verformung fest. Dann bringt man an der Rippe sowohl als auch am Hohlkörper ein System von statisch unbestimmten Kräften in radialer und tangentialer Richtung an und stellt die dadurch hervorgerufene Verformung beider Teile fest. Die Wiederherstellung des stofflichen Zusammenhangs zwischen Rippe und Zylinder liefert die Bedingungen für die Ermittlung der statisch unbestimmten Kräfte. Ihre Kenntnis ermöglicht die Berechnung der tatsächlichen Verformung der verrippten Schale. Der Vergleich dieser Verformung mit der Verformung eines Ringes von T-förmigem Querschnitt liefert dann Zahlenwerte für die mittragende Breite.

48 S., 4 Abb. 10 Zahlent.

FB 1652; Fourné (DVL): **Korrekturfaktoren für Windkanäle.**

Die Korrekturfaktoren für Windkanäle elliptischen Querschnitts werden in drei Sonderfällen untersucht. Der Einfluß einer unter dem Modell angebrachten Bodenplatte auf die Meßergebnisse im Windkanal wird für einen elliptischen Freistrahl mit dem Achsenverhältnis $A/B = \sqrt{2}$ ermittelt. Zur Untersuchung von Modellen in natürlicher Größe werden Tragflügel behandelt, die einseitig von einer Endscheibe begrenzt werden (Kreiskanal!). Im letzten Teil wird die Strahlkorrektur für normale Tragflügel auf den Fall des Pfeilflügels ausgedehnt.

27 S., 8 Abb., 7 Kurvenbl.

FB 1670; Leiss (DVL): **Einfluß der Rudersteuerung auf das Flattern.**

Infolge des Mitschwingens der Rudersteuerung treten folgende Flatterzustände auf: Bei weicher Steuerung Flattern des Systems mit gegenläufigem Ausschlag von Steuerorgan und Ruder, bei steifer Steuerung mit gleichläufigem Ausschlag beider Glieder.

Die rechnerische Erfassung der mitschwingenden Steuerung beim Flattern wird unter Benutzung geeigneter Transformationen so gestaltet, daß praktisch kein Mehraufwand an Rechenarbeit entsteht gegenüber Rechnungen, in denen das Mitschwingen der Steuerung vernachlässigt ist.

65 S., 26 Abb.

FB 1671; Marguerre (DVL): **Stabilität der Zylinderschale veränderlicher Krümmung.**

Die Arbeit stellt einen ersten Versuch dar, das Beulverhalten von Zylinderschalen veränderlicher Krümmung rechnerisch zu erfassen. Das Problem tritt z. B. auf bei der Dimensionierung von Flügelnasen, auf deren Stabilitätsverhalten die Veränderlichkeit der Krümmung von ausschlaggebendem Einfluß ist. — Die Rechnung wird ermöglicht durch eine für die schwachgekrümmte Schale zulässige Vereinfachung der Stabilitätsgleichungen. Ausgewertet sind die Formeln für den Sonderfall des ellipsenähnlichen Halbovals mit einem Achsenverhältnis $1/3 \leqq s \leqq 1$ unter Druck in der Längsrichtung, Schub und Schub-Druck.

47 S., 12 Abb.

FB 1664; F. Walter (DVL): **Flatterversuche über den Einfluß des aerodynamischen Ruder-Innenausgleichs.**

An einem Flügel mit Ruder wird der Einfluß des aerodynamischen Ruder-Innenausgleichs auf die kritische Geschwindigkeit geprüft. Verändert wird die Lage der Ruderdrehachse, die Form der Flossenhinterkante, die Rudereigenfrequenz und die Lage der Ruderschwerachse.

Es ergibt sich, daß der Innenausgleich die kritische Geschwindigkeit qualitativ ähnlich beeinflußt wie der aerodynamische Ausgleich durch Weg-gesteuertes Hilfsruder. Eine quantitative Übertragung der Ergebnisse von einer auf die andere Ausgleichsart ist jedoch nicht ohne weiteres möglich.

41 S., 1 Taf., 8 Abb.

FB 1580; Dimpker (E. Heinkel Flugzeugwerke GmbH): **Weitere ebene Versuche über den Einfluß der angefachten Frequenz auf die Schwingungssicherheit.**

Weitere Versuche mit ebenen Modellen über den Einfluß der angefachten Frequenz auf die Schwingungssicherheit bez. der Freiheitsgrade Flügelbiegung — Ruderdrehung zur Bestätigung der im FB 1296 gefundenen Ergebnisse.

Erweiterung der Versuchsergebnisse auf andere Freiheitsgradkombinationen.

Einfluß der Turbulenz des Luftstroms auf die Schwingungssicherheit.

86 S., 48 Abb.

FB 1675/1; Sauer (Institut für praktische Mathematik der T. H. Aachen): **Theorie der nichtstationären Gasströmung I: Ebene stetige Gaswellen.**

Ausgehend von den bekannten Gesetzen der Akustik wird die Theorie der ebenen stetigen Gaswellen großer Schwingungsweite anschaulich entwickelt. Für die Konstruktion dieser Wellen ergibt sich ein auf der Charakteristikentheorie beruhendes einfaches Näherungsverfahren. Als Anwendung wird u. a. die Reflexion an einer festen oder beweglichen Wand, die Ausbildung stehender Wellen zwischen zwei festen Wänden und die Fortpflanzung einer Störung in einem beiderseits unendlich langen Rohr behandelt.

58 S., 23 Abb.

UM 670; A. Müller (Focke-Wulf Flugzeugbau GmbH): **Scherbruchlasten von Nietverbindungen mit dem Niet 3115.4, neue Legierung.**

Die mit der Einführung der neuen Nietlegierung 3115 notwendige Neuaufstellung der Bruchlasttabellen, veranlaßte bei der Firma Focke-Wulf Großzahluntersuchungen zur Ermittlung der Scherfestigkeit und der

8033

Natur der Brucherscheinung. Die Auswertung von etwa 4000 Versuchswerten ergab, daß die früher durch Übereinkunft festgelegte Scherfestigkeit von 26 kg/mm² beibehalten werden kann. Weiter wird die Empfehlung einer weicheren Nietlegierung von 24 kg/mm² Festigkeit für Nietung dünner Bleche eingehend begründet.

26 S., 5 Abb., 2 Kurvenblätter, 3 Zahlentafeln

UM 683; Walz (AVA): **Ein waageähnliches Gerät für harmonische Analyse und Synthese.**

Es wird ein von bisher üblichen Bauarten abweichender harmonischer Analysator beschrieben, der sich durch besonders bequeme Handhabung (kein Nachfahren von Kurven), kleinen Zeitbedarf, hohe Genauigkeit und unmittelbare Eignung auch für harmonische Synthesen auszeichnet.

14 S., 8 Abb.

C Meßtechnik

FB 1637; F. Hoppe (DVL): **Die bordmäßige Ermittlung der Anblaswinkel aus Staudruck und Beschleunigungswerten.**

Nach kurzer Erörterung der Aufgaben eines bordmäßigen Anblaswinkelmessers und der verschiedenen möglichen Meßprinzipien wird ein von Staudruck- und Beschleunigungsmessungen ausgehendes Verfahren entwickelt. Durch Ausführungsbeispiele für die Geräte werden Erläuterungen und konstruktive Anregungen gegeben. Die mit dem Verfahren erreichbare Genauigkeit wird an Hand von Meßergebnissen abzuschätzen versucht. Flug-Meßgeräte zur schnelleren und zuverlässigeren Gewinnung der erforderlichen Flugzeugdaten werden beschrieben.

39 S., 18 Abb.

E Werkstoffe

FB 1636; G. Lochmann/K. Leschewski (Anorg.-chem. Inst. der T. H. Berlin): **Grundsätzliches über die Zusammensetzung von Brandgemischen und ihre Wirkung, insbesondere auf Holz.**

Allgemeine Forderungen, die an Brandbomben gestellt werden. — Entzündungs- und Brenneigenschaften von Holz. — Grundsätzliches über die Wirkung von Brandmassen auf Holz. — Beurteilung von Brandmassen. — Übersicht über die wichtigsten Brandmassen und ihre Bestandteile.

46 S., 2 Abb., 2 Tab.

G Betriebsstoffe

UM 677; F. Seeber (DVL): **Überladevergleichsversuche im BMW 132 N-Flugmotoren-Einzylinder, IV. Versuchsreihe.**

Nachdem das DVL-Überladeprüfverfahren offiziell zur Beurteilung der motorischen Kraftstoffbewertung hinsichtlich der Klopffestigkeit Eingang gefunden hat, hat es sich bei der ständig steigenden Anzahl von Prüfstellen als notwendig erwiesen, Vergleichsversuche durchzuführen. Es liegen nunmehr von insgesamt 6 Prüfstellen mit 8 Motoren und zwar 5 mit Stern- und 3 mit Blockaufbau, Klopfgrenzkurven für zwei besonders interessierende Kraftstofftypen bei den verschiedensten Bedingungen vor. Auf diese Weise konnten erstmalig einwandfreie Fehlergrenzen für einen vorwiegend aromatischen Kraftstoff sowie für ein überwiegend paraffinisch-isoparaffinisches Kaftstoffgemisch festgestellt werden.

70 S., 46 Abb., 2 Zahlent.

K Bauelemente, Maschinenelemente

FB 1653; W. Hampp (Forsch. Inst. f. Kraftfahrw. u. Fahrzeugmot. T. H. Stuttgart): **Verhalten der L-Ring-Wälzlagerung gegenüber Rattermarkenbildung.**

Ergänzend zu den an anderen Stellen durchgeführten Versuchen mit dem für Flugwerkslagerungen bestimmten L-Ring-Wälzlager-Einbauverfahren der Gerhard Fieseler-Werke wurde untersucht, welchen Einfluß unter Umständen die mit dem L-Ring-Einbau verbundenen elastischen Eigenschaften auf die Rattermarkenbildung an den Walzläger-Laufflächen bei Erschütterungen im Stillstand ausüben können. Während durch die anderen Untersuchungen nachgewiesen wurde, daß das Verfahren den in erster Linie beabsichtigten Zweck des einfachen, austauschbaren und hinsichtlich der Erhaltung guter Laufeigenschaften einwandfreien Einbaus bei gleichzeitig besserer Ausnützung der axialen Tragfähigkeit erfüllt, ergaben die Versuche im FKFS, daß die Rattermarkenbildung nicht vermindert wird. Die geringe Federung und Dämpfung der bei dem Verfahren verwendeten dünnen Gummizwischenringe kann die zur Rattermarkenbildung führenden Rüttelbewegungen sowie das Abheben und die Druckwechsel zwischen Wälzkörpern und Laufbahnen nicht unterbinden. Eine derart weiche Federung, daß Schüttelbewegungen innerhalb des Lagerspiels verhindert werden und Druckwechsel auf eine unschädliche Höhe absinken, ist bei Flugwerkslagerungen mit Rücksicht auf die gesamte Wirkungsweise und die insbesondere bei Verwendung von Gummi erhebliche Vergrößerung der Abmessungen in den meisten Fällen nicht zulässig.

Eine gewisse Bedeutung für die Kleinhaltung der Rattermarkenbildung hat dagegen der Oxydationsschutz und die Abdichtung des Schmiermittels durch die Dichtkappen, weil Oxydationsvorgänge die Verschleißwirkung bei den Rattermarken stark erhöhen und insbesondere weniger zähe Schmiermittel eine dämpfende und die Oberflächen trennende Wirkung ausüben.

28 S., 11 Abb., 5 Tafeln

M Verbrennungsmotoren, Dampfmotoren und sonstige Antriebe

FB 1642; O. Dietz/A. Held (Inst. f. Kraftfahrwes. u. Fahrzeugmot. T. H. Stuttgart): **Untersuchng des Axial-Laders eines Abgas-Turboladers, Bauart Rateau.**

Der sechsstufige Axiallader eines Abgas-Turboladersatzes der Bauart Rateau wurde bei Anschluß der Austrittsseite der Abgasturbine an die Saugseite der Verdichter einer Höhenanlage betrieben und untersucht.

Das Betriebsverhalten des Turboladers wurde geprüft, die Kennwerte des Laders sind aus den Meßergebnissen berechnet worden.

Der Lader hat sich als baulich einfache Ausführung mit befriedigenden Leistungen und noch annehmbaren Wirkungsgraden erwiesen.

23 S., 15 Abb.

8034

UM 679; H. Denkmeier / K. Groß (DVL): **Beschreibung des amerikanischen Allison-Flugmotors V 1710-C 15.**

Es wird der Aufbau, die konstruktive und bearbeitungstechnische Seite des flüssigkeitsgekühlten 12 Zyl.-Allison-Flugmotors beschrieben. Da der Motor für Prüfstandsläufe vorgesehen war, konnten keine Materialuntersuchungen durchgeführt werden. Der Motor war in dem Jäger „Curtiss P-40" eingebaut.

Bei der Überholung wurde festgestellt, daß das Flugzeug durch Bruch des Antriebsritzels für die Kraftstoff-Förderpumpe zur Notlandung gezwungen wurde. Weitere Beschädigungen waren nicht festzustellen.

40 S., 22 Abb., 9 Skizzen

UM 687; H. Bartmann / A. Eckel (DVL): **Untersuchungen an einer Zahnradpumpe hoher Drehzahl für den Höhenbetrieb.**

Die Hauptabmessungen einer schnellaufenden Zahnradpumpe ($n_{max} = 9000$ U/min) und die ohne und mit Unterdruckkammer gemessenen Fördermengen in Abhängigkeit von der Drehzahl, vom Druck vor und hinter der Pumpe und von der Öltemperatur werden mitgeteilt. Es wird außerdem über Druckmessungen im Pumpengehäuse berichtet, durch welche versucht werden sollte, einen Einblick in die Vorgänge beim Auffüllen der Zahnlücken zu gewinnen.

21 S., 10 Abb.

P Luftfahrt

FB 1583; E. Beck (Forschungsanstalt Graf Zeppelin): **Einige Näherungsverfahren zur Bestimmung einer Geschoßflugbahn.**

Es wird eine Methode zur näherungsweisen Lösung eines Systems von Differentialgleichungen angegeben und auf das außenballistische Hauptproblem angewendet. Zwei Hauptgruppen von Näherungsverfahren werden eingehend behandelt, bei welcher die Zeit als Hauptveränderliche gewählt wurde und eine zweite mit der Bogenlänge als Hauptveränderliche. Die graphischen Verfahren lassen sich in rasch arbeitende numerisch-graphische Näherungsverfahren umwandeln. Bei quadratischem Luftwiderstandgesetz werden diese besonders einfach.

64 S., 22 Abb.

FB 1602; O. Knappe (E. Heinkel Flugzeugwerke GmbH): **Dreikomponentenmessungen an einem Modell der He 177 im Schnellkanal der DVL, Adlershof.**

Die He 177 erreicht in größeren Höhen Geschwindigkeiten, die einen erheblichen Kompressibilitätseinfluß vermuten lassen. Um einen Überblick über die dabei auftretenden Gefahrenquellen zu bekommen, wurden im Schnellkanal der DVL, Berlin, Messungen durchgeführt.

148 S., 3 Abb., 42 Kurvenblätter, 73 Tabellen

FB 1629; Jacobs (Aerodyn. Inst. T. H. Braunschweig): **Sechskomponentenmessungen an drei Pfeilflügeln.**

Der Bericht enthält Drei- und Sechskomponentenmessungen an drei Pfeilflügeln von konstanter Tiefe mit den Pfeilwinkeln 15, 30 und 45°. Weiterhin werden Druckverteilungsmessungen an einem Pfeilflügel mit 15° Pfeilstellung bei Geradanblasung durchgeführt. Die Ergebnisse werden verglichen mit theoretischen Rechnungen.

73 S., 40 Abb., 20 Tab.

FB 1632; Bußmann (Aerodyn. Inst. T. H. Braunschweig): **Die laminare Reibungsschicht an Joukowsky-Profilen.**

Im Anschluß an den Forschungsbericht FB 1503, in welchem für eine Serie von Joukowsky-Profilen der Umschlagsbeginn laminar/turbulent theoretisch berechnet wurde, werden im vorliegenden Bericht noch eingehendere Ergebnisse mitgeteilt über die Berechnung der laminaren Grenzschicht für die gleiche Serie von Joukowsky-Profilen. Diese umfaßt Profile mit der relativen Dicke $d/t = 0$ bis 0,25 und der relativen Wölbung $f/t = 0$ bis 0,80 im Bereich der c_a-Werte von 0 bis 1. Die Berechnung der laminaren Reibungsschicht wurde nach der Methode von K. Pohlhausen ausgeführt.

45 S., 27 Abb., 3 Zahlent.

FB 1643; W. Becker (DVL): **Die Leitfähigkeit von Flugzeug-Spornradreifen und deren Änderung im praktischen Betrieb.**

Es wird beschrieben, wie der Widerstand von elektrisch-leitfähigen Spornradreifen zu messen ist und welche Forderungen hinsichtlich des Widerstandes an solche Reifen zu stellen sind.

Eine Reihe von Spornradreifen verschiedener Hersteller wurde im praktischen Betrieb erprobt, um festzustellen, in welchem Maße die früher an solchen Reifen gemessene Widerstandserhöhung bei den einzelnen Reifenfabrikaten in Abhängigkeit von der Betriebszeit und der hierbei entstehenden Beanspruchung auch heute noch auftritt und worauf diese Widerstandserhöhung zurückzuführen ist. Die Untersuchung erfolgte an Reifen aus Naturkautschuk und an solchen mit Buna-Laufflächen. Einige Versuchsreifen bestanden zu 100% aus Perbunan. Die Ursache für die Widerstandszunahme liegt hauptsächlich in dem in elektrischer Einsicht unzweckmäßigen Aufbau der heutigen Reifen.

16 S., 7 Abb., 2 Zahlent.

FB 1647; M. Schirmer (Luftschiffbau Zeppelin): **Aerodynamische Modellversuche an deutschen und ausländischen Luftschiffbaumustern im Windkanal des Luftschiffbau Zeppelin in Friedrichshafen.**

Um die Probleme des Luftschiffbaues mit den Mitteln der modernen Strömungsforschung einer weitgehendsten Klärung entgegenzuführen, wurden beim Luftschiffbau Zeppelin umfangreiche Untersuchungen an Modellen durchgeführt. Die vorliegende Abhandlung gibt eine zusammenfassende Übersicht über die Grundlagen der meßtechnischen Einrichtungen und ihrer Anwendung, sowie einen Vergleich der Meßergebnisse an sechs deutschen und drei ausländischen Luftschiffbaumustern, wie sie im Windkanal des Luftschiffbaues Zeppelin festgestellt wurden.

132 S., 82 Abbildungsbl.

FB 1655; Wysocki (T. H. Warschau): **Windkanaluntersuchungen an Flügeln mit Klappen, Vorflügeln und Bremsen.**

Die vorliegende Arbeit berichtet über Dreikomponentenmessungen (an einigen Flügeln nur Zweikomponenten: Auftrieb und Widerstand) an Flügeln mit verschiedenen Klappen, Vorflügeln und Bremsen, die in den Windkanälen des Aerodynamischen Instituts an der Technischen Hochschule Warschau durchgeführt wurden.

319 S., 172 Abb., 114 Taf.

8035

Vorabdrucke
aus
Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung
5. Lieferung

Inhalt:

Der Strömungswiderstand im geraden, ebenen Spalt unter Berücksichtigung der Einlaufverluste. Von H. Hahnemann und L. Ehret . . . 2

Mit Überschallgeschwindigkeit angeblasene Kegelspitzen. Von W. Hantzsche und H. Wendt 24

Über Zusammenhänge von Plasmaelektronenschwingungen in einem Vakuumbogen mit Laufzeitgeneratoren. Von G. Wehner 35

Radiosondenpeilung mit spiegelgebündelten 25-cm-Wellen. Von H. Kinder 44

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof

8033

Der Strömungswiderstand im geraden, ebenen Spalt unter Berücksichtigung der Einlaufverluste*).

Von H. Hahnemann und L. Ehret.

Bericht aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Die Impulstheorie gibt den Druckverlust der Laminarströmung durch ebene und fast ebene, gerade und am Einlauf gut abgerundete Spalte recht gut wieder; ebenso auch den Druckverlust in solchen Spalten bei überkritischen Reynoldsschen Zahlen, sofern empirische Daten über die laminare Vorstrecke bekannt sind. Für scharfrandige Spalteinläufe tritt eine Erhöhung des Druckabfalls in den Einlaufpartien auf, die den Zusatzverlusten durch Kontraktion und Wirbeleinrollungen am Spaltanfang zuzuschreiben sind. Diese Verluste wurden für eine scharfrandige Einlaufform versuchsmäßig bestimmt, ebenso die Umschlaglängen für eine abgerundete und eine scharfrandige Einlaufform.

Gliederung.

I. Einleitung und Aufgabenstellung.
II. Der Druckverlust im laminar durchströmten geraden, ebenen Spalt.
III. Die Theorie der rein turbulenten Einlaufströmung des geraden, ebenen Spaltes.
1. Die Geschwindigkeitsverteilung.
2. Das Widerstandsgesetz.
IV. Die Theorie der turbulenten Spalteinlaufströmung mit laminarer Vorstrecke.
1. Die verschiedenen durch die Lage des Umschlagquerschnittes gekennzeichneten Fälle.
2. Zurückführung der Einzelfälle auf die Standardkurven.
V. Versuchseinrichtung und Versuchsdurchführung.
VI. Darstellung der Meßergebnisse.
1. Gebrauchsformeln.
2. Der Spalt mit abgerundetem Einlauf.
3. Der Spalt mit scharfrandigem Einlauf.
4. Schlußbemerkungen.
VII. Schrifttum.

I. Einleitung und Aufgabenstellung.

In den letzten Jahrzehnten hat die Strömung durch Spalte von rechteckigem Querschnitt stark an Bedeutung gewonnen. Gewisse technische Probleme sind aus thermodynamischen, mechanischen oder fertigungstechnischen Gründen zwangläufig auf den Rechteckquerschnitt angewiesen. Erinnert sei nur z. B. an die Strömung durch umkleidete Zylinderrippen an luftgekühlten Flug- oder Fahrzeugmotoren, durch Rippen an Rohren von Luft- oder Rauchgasvorwärmern, oder auch an entsprechende Fälle auf dem Gebiete der flüssigen Lagerreibung und der Flüssigkeitsgetriebe. Selbst in Fällen, in denen Rohre von Kreisquerschnitt infolge geringerer Druckverluste wirtschaftlicher wären als Kanäle von Rechteckquerschnitt, z. B. besonders bei der offenen Verlegung von Luftkanälen für Lüftungs-, Heiz- oder Trockenanlagen, zieht man heute aus architektonischen Gründen den Rechteckquerschnitt vor [1][1]). Solche Rechteckkanäle für Klimaanlagen lassen sich sehr einfach aus Preßplatten herstellen und haben dadurch auch noch den großen Vorteil guter Wärmeisolierung. Die nach der Gehäuseform meist rechteckig ausgelegten Ausblasstutzen von Radialgebläsen kommen dieser Forderung entgegen.

Zur Abkürzung wird im folgenden das Rohr von Kreisquerschnitt einfach als »Rohr«, das Rohr von Rechteckquerschnitt einfach als »Spalt« bezeichnet. Der ebene Spalt wird von zwei sich quer zur Strömungsrichtung ins Unendliche erstreckenden Platten begrenzt.

Eine genaue Berechnung des Druckabfalls der Strömung durch Spalte auf beliebige Teilstrecken ist zur Zeit nicht möglich, da gewisse Einflüsse — wie z. B. Einlaufverluste, Krümmungsverluste — theoretisch und experimentell nicht genügend erforscht sind. Es erscheint daher nach einer Anregung von E. Schmidt angebracht, diese Einflüsse grundlegend zu untersuchen[2]).

Für das gerade Rohr haben Schiller [3] eine Theorie der laminaren und Latzko [4] eine Theorie der turbulenten Einlaufströmung unter idealisierenden Anfangsbedingungen aufgestellt. Versuche von Schiller [1], Kirsten [5] und Nikuradse [6] stimmen im laminaren Gebiete gut, im turbulenten Gebiete wenig gut mit diesen Theorien überein.

Die theoretische Behandlung der Einlaufströmung in Spalten mit endlichen Seitenverhältnissen wird durch das Auftreten von Sekundärbewegungen quer zur Hauptströmungsrichtung in der Nähe der Ecken erschwert. Solche Sekundärbewegungen, von Nikuradse [7] näher untersucht, treten nach einer Deutung Prandtls [8] bei Flüssigkeitsströmungen durch gerade Leitungen in allen Fällen auf, in denen die Querschnittsbegrenzung nicht kreisförmig ist.

Das laminare Einlaufgebiet des geraden, ebenen Spaltes behandelte Schlichting [9] durch Integration der Bewegungsgleichung für die Hauptströmungsrichtung. Versuche über den Druckverlauf im laminar durchströmten Spalt wurden von den Verfassern [10] durchgeführt und sowohl mit der Schlichtingschen Theorie als auch mit einer unter Anwendung des Impulssatzes aufgestellten Einlauftheorie verglichen. Eine Theorie der turbulenten Spalteinströmung oder systematische Versuche hierüber sind den Verfassern nicht bekannt.

Im folgenden werden zunächst die Ergebnisse der zitierten Arbeit [10], soweit sie zum Verständnis der späteren Ausführungen erforderlich sind, zusammengestellt. Anschließend wird mit Hilfe des Impulssatzes eine Theorie des »turbulenten Einlaufs« für den geraden, ebenen Spalt gegeben und mit neuen Messungen des Druckabfalls an luftdurchströmten Spalten verglichen.

II. Der Druckverlust im laminar durchströmten geraden, ebenen Spalt.

In der vorgenannten Arbeit [10] wurde die stationäre, inkompressible und isotherme Strömung zwischen zwei glatten, ebenen und sich im Abstande $2b$ parallel gegenüberstehenden Platten betrachtet. Die Platten sollen einen ebenen Spalt vom hydraulischen Durchmesser $d_h = \frac{4F}{U} = 4b$ bilden (F = Querschnittsfläche, U = benetzter Umfang). Die Achse des Spaltes verlaufe horizontal, eingeprägte Kräfte oder Fremdkräfte im Innern der Strömung seien nicht vorhanden.

*) A 35 23, P 31 15.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schrifttum am Ende der Arbeit.

[2]) Eine Zusammenstellung von Gebrauchsformeln für den Entwurf von Rohr- und Spaltleitungssystemen bringt z. B. J. R. Zwicky [2], in der auch die Stoß- und Reibungsverluste in Krümmern hinter genügend langen Einlaufstrecken abgeschätzt werden.

Das Strömungsfeld in einem solchen Spalt läßt sich in zwei grundsätzlich verschiedene Bereiche zerlegen: In die Einlaufströmung und in die ausgebildete Strömung. In der ausgebildeten Strömung gilt unabhängig davon, in welcher Entfernung x vom Einlauf sich der betrachtete Querschnitt befindet, für die Geschwindigkeitsverteilung

$$u = u_{max}\left[\frac{2y}{b} - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right], \quad \ldots\ldots (1)$$

wenn u die Geschwindigkeit in der Entfernung y von der Wand und u_{max} die Geschwindigkeit in der Spaltmitte bedeuten.

Da keine Quergeschwindigkeiten auftreten sollen, ist der statische Druck über den Querschnitt konstant; die Geschwindigkeit u_{max} ist, wenn $\bar{u}$ die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit bezeichnet,

$$u_{max} = \frac{3}{2}\bar{u}, \quad \ldots\ldots (2)$$

und die dem Druckabfall $-\frac{dp}{dx}$ das Gleichgewicht haltende Wandreibung kann aus

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad \ldots\ldots (3)$$

ermittelt werden (τ_0 = Schubspannung an der Wand, μ = Reibungskoeffizient).

Der lokale Widerstandsbeiwert $c_f = -\frac{dp}{dx}\cdot\frac{d_h}{\varrho\,\bar{u}^2/2}$ (dx = Längenelement in Strömungsrichtung, ϱ = Dichte) ist gleich dem mittleren Widerstandsbeiwert $c_{f_{1,2}} = \frac{p_1 - p_2}{x_2 - x_1}\cdot\frac{d_h}{\varrho\,\bar{u}^2/2}$ (p_1 und p_2 bzw. x_1 und x_2 bedeuten den statischen Druck bzw. die Entfernung vom Spaltanfang an den Querschnitten 1 und 2) und errechnet sich leicht zu

$$c_f = \frac{96}{Re}, \quad \ldots\ldots (4)$$

wobei $Re = \frac{\bar{u}\,d_h}{\nu}$ = Reynoldssche Zahl, $\nu = \mu/\varrho$ = kinematische Zähigkeit ist.

In der Einlaufströmung, die infolge einer idealen Abrundung vor dem eigentlichen Spalt mit über den ganzen Eintrittsquerschnitt konstanter Geschwindigkeit $\bar{u}$ einfließen möge, vollzieht sich der Übergang auf die parabolische Verteilung nach Gleichung (1). Dabei werden die in der Spaltmitte befindlichen Flüssigkeitsteilchen, welche die stromabwärts immer schmäler werdende »Kernströmung« bilden, praktisch reibungsfrei beschleunigt, bis ihre Geschwindigkeit den Wert u_{max} erreicht hat; die wandnahen Teilchen werden verzögert und bilden die Reibungsschicht. Der »Einlauf« ist beendet, wenn die Grenzschichten von beiden Seiten bis zur Spaltmitte vorgedrungen sind. Nähert man die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht analog Gleichung (1) durch eine Parabel

$$u = u_k\left[\frac{2y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] \text{ für } 0 < y \leq \delta \quad \ldots\ldots (5)$$

und in der Kernströmung durch ein konstantes Profil

$$u = u_k \text{ für } \delta < y < b \quad \ldots\ldots (6)$$

an (δ = Dicke der Grenzschicht, u_k = über den Querschnitt der Kernströmung in der Entfernung x vom Einlauf konstante Geschwindigkeitskomponente in der Hauptstromrichtung), und nimmt man weiterhin an, daß der statische Druck in der Kernströmung auch der Grenzschicht aufgeprägt sei, so liefert eine Impulsbetrachtung folgende Ergebnisse.

Die auf den hydraulischen Durchmesser d_h bezogene Grenzschichtdicke δ in einer Entfernung x vom Einlauf (wobei x kleiner als die Einlaufstrecke x_a bis zur Profilausbildung sein muß) ist

$$\frac{\delta}{d_h} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\bar{u}}{u_k}\right) \quad \ldots\ldots (7)$$

Das Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{u_k}{\bar{u}}$ der Kernströmung ist allein eine Funktion der dimensionslosen Kenngröße $\frac{x}{d_h\,Re}$, also:

$$\frac{u_k}{\bar{u}} = g\left(\frac{x}{d_h\,Re}\right), \quad \ldots\ldots (8)$$

wobei die Funktion $g\left(\frac{x}{d_h\,Re}\right)$ als Umkehrung aus der graphischen Darstellung der Funktion

$$\frac{x}{d_h\,Re} = f\left(\frac{u_k}{\bar{u}}\right) = \frac{3}{10}\left[\ln\left(\frac{1}{u_k/\bar{u}}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{u_k/\bar{u}}\right)\left(7 + 9\,\frac{u_k}{\bar{u}}\right)\right] \quad \ldots\ldots (9)$$

abgelesen werden kann, Bild 1. Für $\frac{u_k}{\bar{u}} = \frac{u_{max}}{\bar{u}} = \frac{3}{2}$ ergibt sich hieraus die bezogene Einlaufstrecke $\frac{x_a}{d_h}$ bis zur Profilausbildung zu

$$\frac{x_a}{d_h\,Re} = 0{,}00649 \quad \ldots\ldots (10)$$

Für den zwischen zwei beliebigen, durch die Fußzeiger 1 und 2 gekennzeichneten Querschnitten im Einlaufgebiet gemittelten Widerstandsbeiwert $c_{f_{1,2}}$ folgt

$$Re\cdot c_{f_{1,2}} = \left(\frac{u_{k2}^2}{\bar{u}^2} - \frac{u_{k1}^2}{\bar{u}^2}\right)\frac{1}{\frac{x_2 - x_1}{d_h\,Re}}, \quad \ldots\ldots (11)$$

worin die Geschwindigkeitsverhältnisse nach Gleichung (8) und (9) eingesetzt werden können. Der mit der Reynoldsschen Zahl Re multiplizierte Widerstandsbeiwert $c_{f_{1,2}}$ ist also eine Funktion von nur einer Veränderlichen, der dimensionslosen Kenngröße $\frac{x}{d_h\,Re}$. Insbesondere gilt für den mittleren Widerstandsbeiwert $c_{f_{0,x}}$ zwischen dem Einlaufquerschnitt $x = 0$ und einem beliebigen Querschnitt $x \leq x_a$

$$Re\cdot c_{f_{0,x}} = \left[\left(\frac{u_k}{\bar{u}}\right)^2 - 1\right]\frac{1}{x/d_h\,Re} \text{ für } 0 < \frac{x}{d_h\,Re} < 0{,}00649 \quad (12)$$

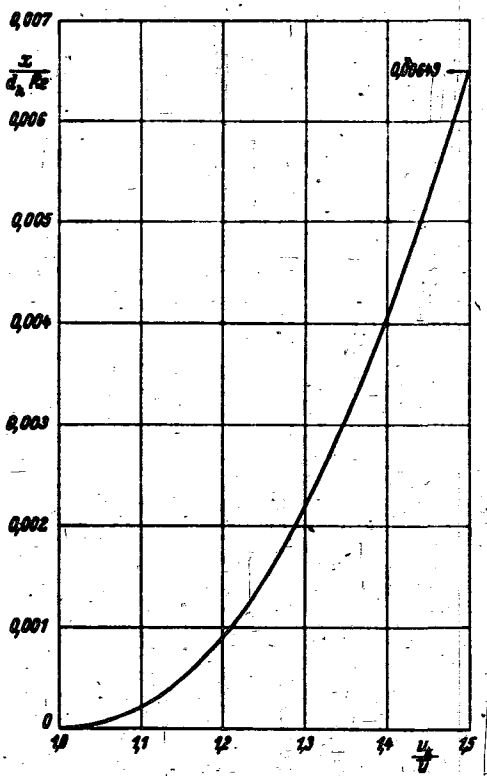


Bild 1. Zur laminaren Einlauftheorie der Spaltströmung: $\frac{x}{d_h\,Re}$ in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsverhältnis $u_k/\bar{u}$.
x = Entfernung vom Eintrittsquerschnitt,
d_h = hydraulischer Durchmesser,
Re = Reynoldssche Zahl des Spaltes,
u_k = Geschwindigkeit der Kernströmung,
$\bar{u}$ = über den Spaltquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit.

8038

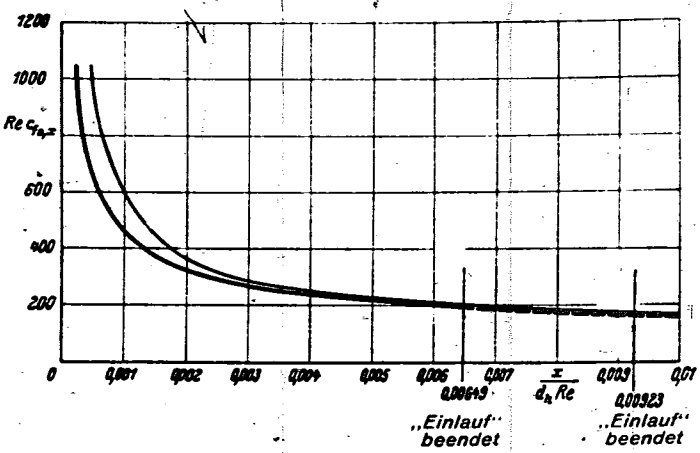


Bild 2. Theoretischer Widerstandsbeiwert der laminaren, ebenen Spaltströmung.

$\frac{x}{d_h}$ = relative Einlauflänge, bezogen auf den hydraulischen Durchmesser d_h,

$Re = \frac{\bar{u}\, d_h}{\nu}$ = Reynoldssche Zahl des Spaltes,

$c_{f_{0,x}}$ = zwischen Spaltanfang und der beliebigen Stelle x gemittelter Widerstandsbeiwert,

$< \frac{x}{d_h Re} \leq 0{,}00649$ Einlaufgebiet des Spaltes mit Einlaufdüse, Kurve ——— nach Gl. (12),

$0{,}00649 \leq \frac{x}{d_h Re} < \infty$ ausgebildete Strömung des Spaltes mit Einlaufdüse, Kurve — — — nach Gl. (15), abgebrochen bei $\frac{x}{d_h Re} = 0{,}010$;

$0{,}0004 < \frac{x}{d_h Re} \leq 0{,}00923$ Einlaufgebiet des Spaltes mit »scharfem« Einlauf, Kurve — — nach Gl. (17);

$0{,}00923 \leq \frac{x}{d_h Re} < \infty$ ausgebildete Strömung des Spaltes mit »scharfem« Einlauf, Kurve . . . . nach Gl. (18), abgebrochen bei $\frac{x}{d_h Re} = 0{,}010$.

In Bild 2 stellt Gleichung (12) die stark ausgezogene Kurve dar. Der Widerstandsbeiwert für den ganzen »Einlauf« ist

$$c_{f_{0,x_a}} = \frac{192{,}6}{Re} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Dies entspricht einem zusätzlichen Druckverlust durch die Einlaufbeschleunigung von

$$-\Delta p = 0{,}626\, \varrho \frac{\bar{u}^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Damit wird für Spaltlängen, die größer sind als die Einlauflänge x_a,

$$Re \cdot c_{f_{0,x}} = 96 + \frac{0{,}626}{x/d_h Re} \text{ für } 0{,}00649 < \frac{x}{d_h Re} < \infty \quad (15)$$

Gleichung (15) entspricht der gestrichelten Kurve in Bild 2. Im Punkte $\frac{x}{d_h Re} = 0{,}00649$ stoßen die beiden Kurven nach Gleichung (12) und (15) mit leichtem Knick zusammen. Wird der Druckabfall $p_1 - p_x$ für eine beliebige Teilstrecke gesucht, wobei der Querschnitt 1 nicht mit dem Spaltanfang zusammenfällt, so benutzt man dazu die Reduktionsformel

$$Re \cdot c_{f_{1,x}} = Re \frac{p_1 - p_x}{x - x_1} \cdot \frac{d_h}{\varrho\, \bar{u}^2/2} = \frac{Re \cdot c_{f_{0,x}} \frac{x}{d_h Re} - Re \cdot c_{f_{0,x_1}} \frac{x_1}{d_h Re}}{\frac{x}{d_h Re} - \frac{x_1}{d_h Re}} \quad (16)$$

Die rechts stehenden $Re \cdot c_f$-Werte lassen sich für bekannte $\frac{x}{d_h Re}$-Werte sofort aus der Auftragung gemäß Bild 2 ablesen. Die Kurven nach Gleichung (12) und (15) seien mit Standardkurve der ebenen, laminaren Spaltströmung bezeichnet.

Die Versuche an einem Spalt von 2 × 100 mm² Querschnitt, also einem Seitenverhältnis von 1 : 50, ergaben befriedigende Übereinstimmung mit den oben zusammengestellten theoretischen Beziehungen, wenn vor dem Spalteinlauf (von dem ab die Meßstrecke x und der Druckabfall gerechnet werden) eine gut abgerundete Einlaufdüse gesetzt war. Bei scharfrandigem Spalteinlauf und Umlenkung der Randstromlinie am Einlauf um etwa 90° traten an Stelle von Gleichung (12) bzw. Gleichung (15) mit guter Annäherung an die Versuchspunkte die Gleichungen

$$Re \cdot c_{f_{0,x}} = \left\{\left[g\left(\frac{x}{d_h Re} - 0{,}0004\right)\right]^2 + 1\right\} - \frac{1}{\frac{x}{d_h Re} - 0{,}0004} \quad (17)$$

für den Bereich $0{,}0004 < \frac{x}{d_h Re} \leq 0{,}00923$, bzw.

$$Re \cdot c_{f_{0,x}} = 96 + \frac{0{,}774}{x/d_h Re} - \frac{0{,}000891}{(x/d_h Re)^2} \quad (18)$$

für den Bereich $0{,}00923 \leq \frac{x}{d_h Re} \leq \infty$, worin der zur Ordinate $\frac{x}{d_h Re} - 0{,}0004$ gehörige $g\,[(x/d_h Re) - 0{,}0004]$-Wert wieder aus einer Auftragung nach Bild 1 abgelesen werden kann. Gleichung (17), die nur formale Bedeutung hat, ist in Bild 2 als schwach ausgezogene, Gleichung (18) als punktierte Kurve eingetragen. Die beiden empirischen Kurven schneiden sich im Punkte

$$\frac{x_a}{d_h Re} = 0{,}00923, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

den man daher in Analogie zu Gleichung (10) in erster Näherung als bezogene Einlaufstrecke des Spaltes mit scharfrandigem Einlauf auffassen kann, insbesondere da das dritte Glied auf der rechten Seite von Gleichung (18) für $\frac{x}{d_h Re} \gg 0{,}00923$ praktisch keine Rolle mehr spielt.

Zu dem aus Gleichung (17) bzw. (18) errechneten Druckabfall muß noch der Staudruck $\frac{\varrho\, \bar{u}^2}{2}$ hinzugefügt werden, wenn der gesamte Druckabfall vom Außenraum an bestimmt werden soll.

Über die Geschwindigkeitsverteilung im Einlaufgebiet des ebenen Spaltes mit scharfrandigem Einlauf kann ohne besondere Messungen nichts ausgesagt werden, da dieselbe wesentlich durch die Einlaufkontraktion und Wirbelbildungen im unterkritischen Gebiet beeinflußt wird.

III. Die Theorie der rein turbulenten Einlaufströmung des geraden, ebenen Spaltes.

1. Die Geschwindigkeitsverteilung.

Wir betrachten wieder die stationäre, inkompressible und isotherme Strömung zwischen zwei glatten, ebenen, unendlich breiten und sich parallel im Abstande $2\,b$ gegenüberstehenden Platten, die an der Einlaufseite so gut abgerundet sind, daß die Strömung im Querschnitt $x = 0$ des Spaltanfangs die konstante Geschwindigkeit $\bar{u}$ über den ganzen Einlaufquerschnitt besitzt.

Die im vorangehenden Abschnitt ausgedrückten Vorstellungen über das Verhalten der ausgebildeten Strömung, die Entwicklung der Grenzschicht und die Reibungsfreiheit der Kernströmung im Einlaufgebiet wollen wir beibehalten, jedoch sei die Reynoldssche Zahl der Strömung so groß, daß bereits vom Einlaufquerschnitt $x = 0$ an die Grenzschicht sich turbulent verhält. Natürlich kann unter diesen Annahmen von vornherein keine gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen erwartet werden, da bei Versuchen niemals die Stelle des Umschlags von der laminaren in die turbulente Strömung in den Spaltanfang rücken wird, und da bei noch so guter Abrundung im überkritischen Gebiet am Einlauf Wirbel entstehen, welche nur statistischen Gesetzen gehorchen (vgl. Kurzweg [11] und Hahnemann [12]). Trotzdem soll die Theorie der rein turbulenten Einlaufströmung aufgestellt werden, da sie für die im nächsten Abschnitt behandelte turbulente Einlaufströmung mit laminarer Vorstrecke gebraucht wird.

Für die Geschwindigkeitsverteilung in der ausgebildeten, turbulenten Strömung werde mit den gleichen Bezeichnungen

8039

wie in Abschnitt II und in der gleichen Weise wie von Latzko [4] für das Rohr die Beziehung

$$u = u_{max}\left[1 + \left(1 - \frac{y}{b}\right)^n\right]^{1/7}, \quad \ldots\ldots (20)$$

angesetzt. Wir wollen speziell $n = 2$ wählen und erhalten

$$u = u_{max}\left[\frac{2y}{b} - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^{1/7}. \quad \ldots\ldots (21)$$

Nach Versuchen von Davies und White [13] an sehr engen Spalten mit Seitenverhältnissen von 1 : 37 bis 1 : 170 sowie zahlreichen Versuchen anderer Autoren an Spalten größerer Seitenverhältnisse bis zum quadratischen Spalt (vgl. Schrifttumsangaben bei Schiller [14]) kann für die ausgebildete, turbulente Spaltströmung das Blasiussche Gesetz für Rohre

$$c_f = \frac{0{,}316}{\sqrt[4]{Re}} \quad \ldots\ldots (22)$$

bei nicht zu großen Reynoldsschen Zahlen als gültig angesehen werden. Dieses Widerstandsgesetz wollen wir auch für die ebene Spaltströmung zugrunde legen.

Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht des Einlaufs nähern wir, ebenfalls wie Latzko [4] beim Rohr, durch

$$u = u_k\left[\frac{8}{7}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} - \frac{1}{7}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{8/7}\right] \quad \ldots\ldots (23)$$

für $0 < y < \delta$ an, während in der Kernströmung

$$u = u_k \quad \ldots\ldots (24)$$

für $\delta < y < b$ sein soll.

Die Kontinuitätsbedingung für einen Streifen der Breite 1 zwischen den Querschnitten $x = 0$ und x liefert

$$\bar{u}\,b = \int_{y=0}^{y=b} u\,dy = (b - \delta)\,u_k + \int_{y=0}^{y=\delta} u\,dy \quad \ldots (25)$$

Aus Gleichung (25) folgt nach Einsetzen von Gleichung (23)

$$\delta = 15\,b\left(1 - \frac{\bar{u}}{u_k}\right). \quad \ldots\ldots (26)$$

Das Geschwindigkeitsprofil ist ausgebildet, wenn $\delta = b$ und damit

$$u_k = u_{max} = \frac{15}{14}\,\bar{u} \quad \ldots\ldots (27)$$

geworden ist. Weiter stromabwärts ist das Profil durch Gleichung (21) gegeben, welche durch Reihenentwicklung in Gleichung (23) für $b = \delta$ übergeht. Damit sind Einlauf- und ausgebildetes Profil genügend genau ineinander übergeführt.

Nunmehr soll das Kräftegleichgewicht für das Einlaufgebiet aufgestellt werden, in welchem folgende Kräfte auftreten: Die Druckkraft ΔP, die Impulsänderung ΔJ je Zeiteinheit und die Reibungskraft R an den Begrenzungsflächen.

Die Druckdifferenz $p_0 - p$ zwischen Eintrittsquerschnitt $x = 0$ und Querschnitt x erzeugt eine Druckkraft

$$\Delta P = b\,(p_0 - p_x) = b\,\frac{\varrho}{2}\,(u_k^2 - u^2), \quad \ldots\ldots (28)$$

wenn eine Fläche der Breite 1 zwischen Wand und Spaltmitte herangezogen und wegen der Reibungsfreiheit der Kernströmung die Druckhöhen durch die Geschwindigkeitshöhen ersetzt werden.

Die Änderung des Impulses zwischen den betrachteten Querschnitten läßt sich als Summe der Anteile von Kern- und Grenzschichtströmung durch

$$\Delta J = \varrho \int_{y=\delta}^{y=b} u_k\,(u_k - \bar{u})\,dy + \varrho \int_{y=0}^{y=\delta} u\,(u - \bar{u})\,dy,$$

oder nach Einsetzen von Gleichung (23), Ausintegrieren, und Ersetzen der Grenzschichtdicke δ nach Gleichung (26) durch

$$\Delta J = \varrho\,b\left(\frac{125}{69}\,\bar{u}\,u_k - \bar{u}^2 - \frac{56}{69}\,u_k^2\right) \quad \ldots\ldots (29)$$

ausdrücken.

Diese Impulsänderung ΔJ stellt eine Zunahme des Impulses im Querschnitt x gegenüber dem im Eintrittsquerschnitt dar. Insbesondere ist dort, wo der Einlaufvorgang beendet ist, die mittlere Impulszunahme je Flächeneinheit gleich $\frac{3}{161}\,\varrho\,\frac{\bar{u}^2}{2}$, also $\frac{3}{161}$ des Staudrucks.

Die Druckkraft ΔP muß nun der Impulsänderung ΔJ und der an einem Wandstreifen der Breite 1 und der Länge x angreifenden Reibungskraft das Gleichgewicht halten, also:

$$\frac{b\,\varrho}{2}\,(u_k^2 - \bar{u}^2) = b\,\varrho\left(\frac{125}{69}\,\bar{u}\,u_k - \bar{u}^2 + \frac{56}{69}\,u_k^2\right) + R \quad (30)$$

Hierin ist die Reibungskraft R noch unbekannt. Würde sich die Wandreibung längs des Weges x nicht ändern, so könnte mit Hilfe der Schubspannung τ_0 an der Wand einfach $R = \tau_0\,x$ geschrieben werden. So aber muß Gleichung (30) in differentieller Form weiterbehandelt werden. Es ist

$$dR = \tau_0\,dx = b\,\varrho\left(\frac{181}{69}\,u_k - \frac{125}{69}\,\bar{u}\right)du_k \quad \ldots (31)$$

Im Falle laminarer Strömung konnte hier die Schubspannung τ_0 nach Gleichung (3) eingesetzt werden, jetzt bedeutet jedoch τ_0 die »turbulente« Schubspannung an der Wand. Nach Prandtl [15] ist die scheinbare Schubspannung durch den Ausdruck

$$\tau = \varrho\,l^2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y} \quad \ldots\ldots (32)$$

darstellbar, in welchem l den »Mischungsweg«, $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ den absoluten Betrag von $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\varrho l^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ den turbulenten Zähigkeitsbeiwert darstellen. Da der Mischungsweg an der Wand Null wird, ergibt sich für τ_0 nach Einsetzen von Gleichung (23) ein unbestimmter Ausdruck. Einen Lösungsweg, den auch Latzko [4] beging, zeigte Kármán [16] auf. Danach gilt für die Grenzschicht unter Zugrundelegung des empirischen $\frac{1}{7}$-Potenzgesetzes genügend genau

$$u = B\left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{4/7}\left(\frac{y}{\nu}\right)^{1/7}, \quad \ldots\ldots (33)$$

worin B eine das Geschwindigkeitsprofil kennzeichnende dimensionslose Konstante bedeutet. Weiterhin gilt für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht die Gleichung (23), welche genügend nahe an der Wand in

$$u = \frac{8}{7}\,u_k\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \ldots\ldots (34)$$

übergeht.

Aus Gleichung (33) und (34) folgt die Gleichung

$$\tau_0 = \varrho\left(\frac{8\,u_k}{7\,B}\right)^{7/4}\left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{1/4}. \quad \ldots\ldots (35)$$

Die noch unbekannte Konstante B wird folgendermaßen ermittelt: Gleichung (33) gilt auch für die ausgebildete Strömung, deren Geschwindigkeitsverteilung durch Gleichung (21) dargestellt wird. Diese kann für Stellen nahe der Wand durch

$$u = u_{max}\left(\frac{2\,y}{b}\right)^{1/7}, \quad \ldots\ldots (36)$$

ersetzt werden. Somit wird:

$$B = \frac{2^{1/7}\left(\frac{\nu}{b}\right)^{1/7}}{\left(\frac{\tau_{0\infty}}{\varrho}\right)^{4/7}}\,u_{max}, \quad \ldots\ldots (37)$$

wobei aber jetzt $\tau_{0\infty}$ die Schubspannung an der Wand in der ausgebildeten Strömung bezeichnet. Für diese gilt mit Gleichung (22) wegen des Gleichgewichtes zwischen Druckkraft und Wandreibung

$$\tau_{0\infty} = 0{,}158\,\frac{b\,\varrho\,\bar{u}^2}{d_h\,Re^{1/4}} \quad \ldots\ldots (38)$$

oder mit

$$Re = \frac{4\,b\,\bar{u}}{\nu},$$

$$\frac{\tau_{0\infty}}{\varrho} = \frac{0{,}158}{2^{5/4}}\,\bar{u}^{7/4}\left(\frac{\nu}{b}\right)^{1/4} \quad \ldots\ldots (39)$$

8040

Gleichung (39), in Gleichung (37) eingesetzt, liefert schließlich:

$$B = 4\,\frac{u_{max}}{\bar{u}}\left(\frac{2}{0{,}316^4}\right)^{1/7} \approx 8{,}52\,\frac{u_{max}}{\bar{u}} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

Zum Vergleich sei die Konstante B_0 für das Rohr angegeben:

$$B_0 = \frac{4}{0{,}316^{4/7}}\,\frac{u_{max}}{\bar{u}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40\,a)$$

Nach Gleichung (27) ist $\frac{u_{max}}{\bar{u}} = \frac{15}{14}$, und damit wird $B = 9{,}13$. Nunmehr kann τ_0 nach Gleichung (35) bei vorgegebenem u_k in bekannten Größen geschrieben werden, wenn gleichzeitig δ nach Gleichung (26) ersetzt wird, nämlich:

$$\tau_0 = \left(\frac{8}{7\cdot 15^{1/7}\,B}\right)^{7/4} \frac{\varrho\, u_k^{7/4}\, \nu^{1/4}}{\left(1-\frac{\bar{u}}{u_k}\right)^{1/4} b^{1/4}} \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Das Kräftegleichgewicht nach Gleichung (31) ergibt, wenn die Veränderlichen getrennt und τ_0 nach Gleichung (41) eingesetzt werden, folgende Differentialgleichung für u_k:

$$dx = \frac{15^{1/4}}{69}\left(\frac{7\,B}{8}\right)^{7/4}\left(\frac{b^5}{\nu}\right)^{1/4} \frac{(181\,u_k - 125\,\bar{u})\,(u_k-\bar{u})^{1/4}}{u_k^2}\,du_k \quad (42)$$

Führt man hier noch die Reynoldssche Zahl ein, so erhält man durch Integration zwischen Eintrittsquerschnitt ($x = 0$, $u_k = \bar{u}$) und einem beliebigen Querschnitt (x, u_k)

$$\frac{x}{4\,b\left(\frac{4\,b\,\bar{u}}{\nu}\right)^{1/4}} = \frac{x}{d_h\,Re^{1/4}}$$

$$= \frac{15^{1/4}}{4\cdot 69}\left(\frac{7\,B}{8\cdot 4^{1/7}}\right)^{7/4} \int_{\bar{u}}^{u_k} \left(\frac{181}{u_k} - 125\,\frac{\bar{u}}{u_k^2}\right)\left(\frac{u_k}{\bar{u}}-1\right)^{1/4} du_k \quad (43)$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung galt lange Zeit als in geschlossener Form unauflösbar. Werden jedoch geeignete Substitutionen gewählt, so ergibt die strenge Integration[3]):

$$\frac{x}{d_h\,Re^{1/4}} = \frac{\left(\frac{15}{4}\right)^{1/4}}{4\cdot 69}\left(\frac{7\,B}{8}\right)^{7/4}\left\{\left(\frac{u_k}{\bar{u}}-1\right)^{1/4}\left(4\cdot 181 + 125\,\frac{\bar{u}}{u_k}\right) - \right.$$

$$4\cdot 181 + 125\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\frac{u_k}{\bar{u}}-1\right)^{1/2} + \sqrt{2}\left(\frac{u_k}{\bar{u}}-1\right)^{1/4}+1}{\left(\frac{u_k}{\bar{u}}-1\right)^{1/2} - \sqrt{2}\left(\frac{u_k}{\bar{u}}-1\right)^{1/4}+1}\right.$$

$$\left.\left. + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\left(\frac{u_k}{\bar{u}}-1\right)^{1/4}}{1-\left(\frac{u_k}{\bar{u}}-1\right)^{1/2}}\right]\right\} = h\left(\frac{u_k}{\bar{u}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

In Bild 3 ist Gleichung (44) dargestellt, Zahlentafel 1 gibt einige Zahlenwerte der Funktion $h\left(\frac{u_k}{\bar{u}}\right)$ an. Der Einlaufvorgang ist beendet, wenn $\frac{u_k}{\bar{u}} = \frac{15}{14}$ und damit

$$\frac{x_a}{d_h\,Re^{1/4}} = h\left(\frac{15}{14}\right) = 0{,}330 \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

geworden ist. Hierin bedeutet x_a wieder die Entfernung vom Eintrittsquerschnitt, in der die Grenzschichten von beiden Seiten her die Spaltmitte erreicht haben.

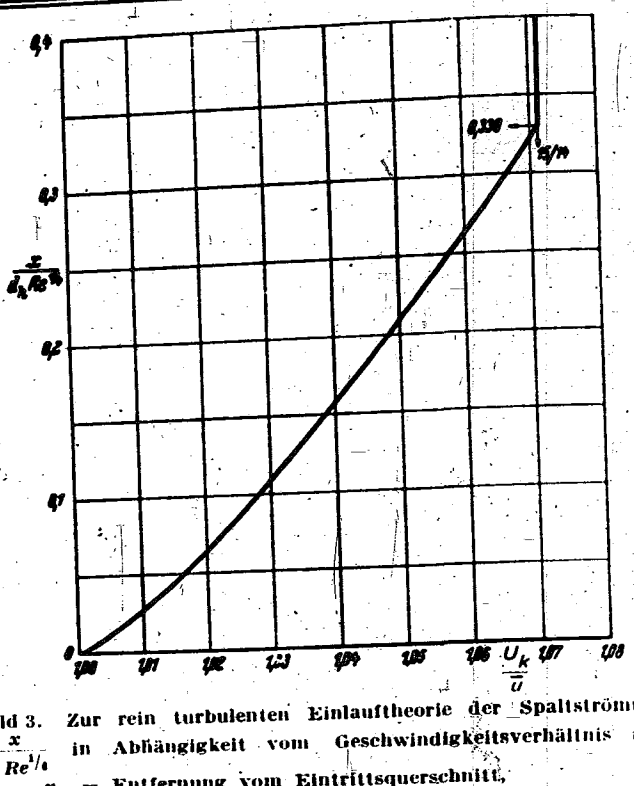


Bild 3. Zur rein turbulenten Einlauftheorie der Spaltströmung: $\frac{x}{d_h\,Re^{1/4}}$ in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsverhältnis $u_k/\bar{u}$.
x = Entfernung vom Eintrittsquerschnitt,
d_h = hydraulischer Durchmesser,
Re = Reynoldssche Zahl des Spaltes,
u_k = Geschwindigkeit der Kernströmung,
$\bar{u}$ = über den Spaltquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit.

Nach der Impulstheorie ist also mit den eingeführten Näherungen und modellmäßigen Vorstellungen die Geschwindigkeitsverteilung in der rein turbulent durchströmten Einlaufstrecke des ebenen Spaltes gegeben durch Gleichung (23) und (26) für die Grenzschichtströmung, durch Gleichung (44) bzw. Bild 3 für die Kernströmung. Stromabwärts von $\frac{x_a}{d_h} = 0{,}330\,Re^{1/4}$ stellt Gleichung (21) das Geschwindigkeitsprofil dar.

2. Das Widerstandsgesetz.

Mit den bisherigen Ergebnissen läßt sich das Widerstandsgesetz für den rein turbulenten Einlaufvorgang angeben. Da reibungsfreie Kernströmung vorausgesetzt wird, ist die Differenz der statischen Drücke in zwei beliebigen Querschnitten 1 und 2 der Einlaufstrecke bestimmt durch die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten in der Kernströmung, also:

$$\frac{p_1 - p_2}{\varrho\,\bar{u}^2/2} = \frac{u_{k2}^2 - u_{k1}^2}{\bar{u}^2}, \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

wobei die Fußzeiger 1 und 2 die Strecken x_1 und x_2 andeuten. Der mittlere Widerstandsbeiwert $c_{f_{1,2}}$ für die Strecke $x_2 - x_1$ wird

[3]) Es ist $\int \frac{(az-c)\sqrt[4]{z-1}}{z^2}\,dz = \sqrt[4]{z-1}\left(4\,a + \frac{c}{z}\right) - \frac{4a+c}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{z-1}+\sqrt{2}\sqrt[4]{z-1}+1}{\sqrt{z-1}-\sqrt{2}\sqrt[4]{z-1}+1} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{z-1}}{1-\sqrt{z-1}}\right]$,
wobei $z = \frac{u_k}{\bar{u}}$, $a = 181$, $c = 125$ gesetzt ist.

Zahlentafel 1. Die auf die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ bezogene Geschwindigkeit u_k der Kernströmung in Abhängigkeit von $\frac{x}{d_h\,Re^{1/4}}$.

$\frac{x}{d_h\,Re^{1/4}}$	0	0,000512	0,00111	0,00276	0,00840	0,0356	0,0455	0,0654	0,108	0,157	0,209	0,278	0,330	∞
$\frac{u_k}{\bar{u}}$	1	1,0004165	1,0007716	1,00160	1,00391	1,01235	1,015	1,020	1,030	1,040	1,050	1,0625	1,071429	1,071429

$$c_{f_{1,2}} = \frac{p_1 - p_2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{d_h}{\varrho\, \bar{u}^2/2} = \left[\left(\frac{u_{k_2}}{\bar{u}}\right)^2 - \left(\frac{u_{k_1}}{\bar{u}}\right)^2\right] \frac{d_h}{x_2 - x_1} \quad (47)$$

Nach Gleichung (44) sind die Geschwindigkeitsverhältnisse $\frac{u_k}{\bar{u}}$ allein bestimmt durch die bezogene Einlauflänge $\frac{x}{d_h\, Re^{1/6}}$. Man kann setzen:

$$\frac{u_k}{\bar{u}} = i\left(\frac{x}{d_h\, Re^{1/6}}\right), \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

und die Funktion i kann aus Bild 3 als Umkehrung der Funktion $h\left(\frac{u_k}{\bar{u}}\right)$ abgelesen werden. Wird Gleichung (47) auf beiden Seiten mit $Re^{1/6}$ multipliziert, so hängt der Ausdruck

$$Re^{1/6} \cdot c_{f_{1,2}} = \left\{\left[i\left(\frac{x_2}{d_h\, Re^{1/6}}\right)\right]^2 - \left[i\left(\frac{x_1}{d_h\, Re^{1/6}}\right)\right]^2\right\} \frac{1}{\frac{x_2 - x_1}{d_h\, Re^{1/6}}} \quad (49)$$

nur noch von der dimensionslosen Kenngröße $\frac{x}{d_h\, Re^{1/6}}$ ab. Insbesondere entspricht der mittlere Widerstandsbeiwert $c_{f_{0,x}}$ zwischen dem Einlaufquerschnitt $x = 0$ und einem beliebigen Querschnitt x dem Ausdruck

$$Re^{1/6} \cdot c_{f_{0,x}} = \left\{\left[i\left(\frac{x}{d_h\, Re^{1/6}}\right)\right]^2 - 1\right\} \frac{1}{x/d_h\, Re^{1/6}} \quad \ldots \quad (50)$$

Wie die Auftragung der Gleichung (12) für die laminare, so stellt die Auftragung der Gleichung (50) in einem $\left(Re^{1/6} c_{f_{0,x}};\ \frac{x}{d_h\, Re^{1/6}}\right)$-Bild eine Standardkurve für die turbulente Einlaufströmung dar. Die ausgezogene Kurve in Bild 4 zeigt mit $B = 9{,}13$ diese Abhängigkeit von $\frac{x}{d_h\, Re^{1/6}} \approx 0{,}035$ bis $\frac{x}{d_h\, Re^{1/6}} = 0{,}330$, wo der Einlaufvorgang beendet ist und $\frac{u_k}{\bar{u}}$ den Wert $\frac{15}{14}$ erreicht hat. Für den Widerstandsbeiwert des gesamten »Einlaufs« errechnet sich damit $c_{f_{0,x_a}} = \left[\left(\frac{15}{14}\right)^2 - 1\right] \frac{1}{0{,}330\, Re^{1/6}} = \frac{0{,}448}{Re^{1/6}}$. Dies entspricht einem zusätzlichen Druckverlust $-\Delta p$ zwischen $x = 0$ bis $x = x_a$ allein durch die Einlaufbeschleunigung von

$$-\Delta p = 0{,}0436\, \varrho\, \frac{\bar{u}^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad (51)$$

Für Spaltlängen, welche größer sind als die Einlauflänge x_a, muß der Druckabfall nach Blasius um diesen Zusatzdruckverlust vergrößert werden. Es gilt damit

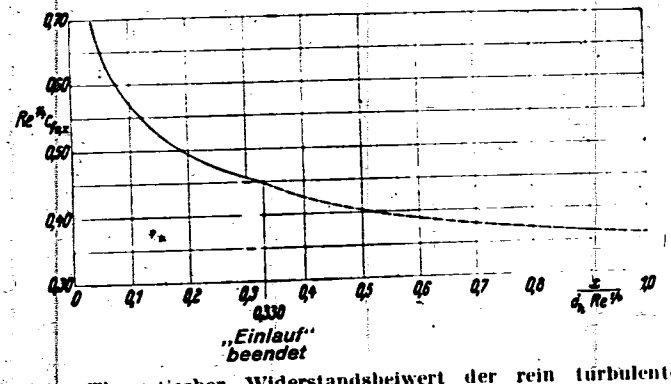


Bild 4. Theoretischer Widerstandsbeiwert der rein turbulenten, ebenen Spaltströmung.

$\frac{x}{d_h}$ = relative Einlauflänge, bezogen auf den hydraulischen Durchmesser d_h,

$Re = \frac{\bar{u}\, d_h}{\nu}$ = Reynoldssche Zahl des Spaltes,

$c_{f_{0,x}}$ = zwischen Spaltanfang und der beliebigen Stelle x gemittelter Widerstandsbeiwert,

$0 \leq \frac{x}{d_h\, Re^{1/6}} \leq 0{,}330$ Einlaufgebiet des Spaltes mit Einlaufdüse, Kurve —— nach Gl. (50),

$0{,}330 \leq \frac{x}{d_h\, Re^{1/6}} < \infty$ ausgebildete Strömung des Spaltes mit Einlaufdüse, Kurve — — — — nach Gl. (52).

$$Re^{1/6} \cdot c_{f_{0,x}} = 0{,}316 + \frac{0{,}0436}{x/d_h\, Re^{1/6}} \quad \ldots \ldots \quad (52)$$

für $0{,}330 \leq \frac{x}{d_h\, Re^{1/6}} \leq \infty$.

Die hierzu gehörige Kurve ist in Bild 4 ebenfalls eingezeichnet (gestrichelte Kurve), sie schließt sich mit einem Knick beim Werte $\frac{x}{d_h\, Re^{1/6}} = 0{,}330$ an die Kurve nach Gleichung (50) für das Einlaufgebiet an. Die beiden Kurven nach Gleichung (50) und (52) in Bild 4 seien als Standardkurve der ebenen, turbulenten Spaltströmung bezeichnet.

Soll der Widerstand für eine beliebige Teilstrecke $x - x_1$ stromabwärts vom Eintrittsquerschnitt bestimmt werden, so kann die Beziehung

$$Re^{1/6} \frac{p_1 - p_x}{x - x_1} \frac{d_h}{\varrho\, \bar{u}^2/2} = Re^{1/6} \cdot c_{f_{1,x}} = \frac{Re^{1/6} \cdot c_{f_{0,x}} \frac{x}{d_h\, Re^{1/6}} - Re^{1/6} \cdot c_{f_{0,1}} \frac{x_1}{d_h\, Re^{1/6}}}{\frac{x}{d_h\, Re^{1/6}} - \frac{x_1}{d_h\, Re^{1/6}}} \quad (53)$$

herangezogen werden, in welcher links außer dem Druckabfall nur bekannte Daten stehen, während die entsprechenden $Re^{1/6} \cdot c_f$- und $\frac{x}{d_h\, Re^{1/6}}$-Werte auf der rechten Seite sofort aus Bild 4 entnommen werden können.

Andererseits lassen sich Versuchsdaten für eine Strecke $x - x_1$ mit der Theorie vergleichen und nach Bild 4 übertragen, wenn man Gleichung (53) nach $Re^{1/6} \cdot c_{f_{0,x}}$ auflöst:

$$Re^{1/6} \cdot c_{f_{0,x}} = Re^{1/6} \cdot c_{f_{0,1}} \frac{x_1}{x} + R^{1/6} \frac{p_1 - p_x}{\varrho\, \bar{u}^2/2} \cdot \frac{d_h}{x} \quad (54)$$

Hierin steht links der gesuchte Wert; das zweite Glied rechts verknüpft die Versuchsdaten, im ersten Glied rechts wird die Größe $Re^{1/6} \cdot c_{f_{0,1}}$ aus der Standardkurve abgelesen.

IV. Die Theorie der turbulenten Spalteinlaufströmung mit laminarer Vorstrecke.

1. Die verschiedenen durch die Lage des Umschlagquerschnittes gekennzeichneten Fälle.

Wie eingangs des vorangehenden Abschnittes angedeutet wurde, und wie die nachfolgend beschriebenen Messungen zeigen, dürfte naturgemäß die Theorie der rein turbulenten Einlaufströmung erheblich von Versuchswerten abweichen. Daher wird im folgenden versucht, die Theorie der Wirklichkeit dadurch besser anzunähern, daß vor die turbulente Strömung eine laminare Vorstrecke geschaltet wird. Selbst starke Zuflußstörungen vor dem Spalteinlauf können bei überkritischen Reynoldsschen Zahlen den laminaren Charakter der Strömung am Spaltanfang nicht völlig aufheben. Erst weiter stromabwärts erfolgt in einer gewissen Übergangszone der Umschlag zur Turbulenz. Erfahrungsgemäß liegt dieser Umschlag um so näher am Einlauf, je größer die Störungen im Zufluß und durch die Einlaufkanten (z. B. Abrundung, scharfrandiger Einlauf, Einlauf mit aufgesetzter Schlitzblende) und je größer die Reynoldsschen Zahlen sind. Danach erscheint es gerade bei dem hier theoretisch behandelten Spalt mit abgerundetem Einlauf und den später beschriebenen Versuchen unter $Re = 20000$ angebracht, diese laminare Vorstrecke in Rechnung zu stellen. Leider fehlen bisher anwendbare Angaben darüber, in welcher Weise diese Vorstrecke — im folgenden mit x_v bezeichnet — von den geometrischen Verhältnissen des Einlaufs und der Reynoldsschen Zahl abhängt. Die Vorstrecke muß daher versuchsmäßig bestimmt werden, wobei zu erwarten ist, daß $\frac{x_v}{d_h}$ für den Spalt mit idealer Einlaufabrundung nur von der Reynoldsschen Zahl abhängt.

Die Vorstrecke x_v denken wir uns durch folgende, die wirklichen Verhältnisse angenähert wiedergebenden Annahmen gekennzeichnet: Die Strömung schlage nicht allmählich, sondern in einem bestimmten Querschnitt in der

8042

Entfernung x_v vom Einlauf plötzlich um. In diesem Querschnitt wird ohne Übergang das Laminarprofil durch das turbulente Profil ersetzt. Liegt der Umschlagquerschnitt noch innerhalb der laminaren Profilentwicklung, so springe die laminare Grenzschicht in die turbulente um, und zwar derart, daß die Grenzschichtdicke δ_l der laminaren Vorstrecke in der Entfernung x_v gleich der Grenzschichtdicke δ_t des nun noch folgenden turbulenten Einlaufstückes ist. Dies bedeutet aus Kontinuitätsgründen eine Reduktion der Kernströmungsgeschwindigkeit im Umschlagquerschnitt. (Eine andere Annahme, die reibungsfreie Kernströmung stetig zu lassen und dafür einen Sprung in δ einzuführen, ist deswegen unbrauchbar, weil das Verhältnis $u_k/\bar{u}$ des laminaren Einlaufs viel größere Werte erreichen kann als das des turbulenten Einlaufs.)

Mit diesen Annahmen ergeben sich die folgenden verschiedenen Möglichkeiten, die zunächst der Reihe nach behandelt werden. Dabei ist, soweit angebracht, zum besseren Verständnis an die Größen der reinen Laminartheorie ein weiterer Fußzeiger l, an die der reinen Turbulenztheorie der Fußzeiger t angehängt, während die Größen im beliebig liegenden Beobachtungsquerschnitt ohne Zusatzfußzeiger bleiben.

Fall 1: Die Meßstrecke von $x = 0$ bis x liegt stromaufwärts vom Umschlagquerschnitt und in der ausgebildeten Laminarströmung. Wenn für die Vorstrecke x_v eine Funktion $\frac{x_v}{d_h} = \varphi(Re)$ bekannt ist, so läßt sich leicht nachprüfen, ob die notwendigen Bedingungen

$$\frac{x_{a_l}}{d_h\,Re} = 0{,}00649 \leqq \frac{x}{d_h\,Re} \leqq \frac{x_v}{d_h\,Re} = \frac{\varphi(Re)}{Re}$$

erfüllt sind.

Für diesen Fall gelten die in Abschnitt II zusammengestellten Gleichungen der ausgebildeten Laminarströmung. Man muß also, um den Widerstandsbeiwert $c_{f_0,x}$ zu erhalten, zu der Größe $96/Re$ noch ein Korrekturglied $\Delta c_{f_0,x}$ hinzufügen, welches aus

$$\Delta c_{f_0,x} \cdot \frac{x}{d_h} = 0{,}626 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

folgt.

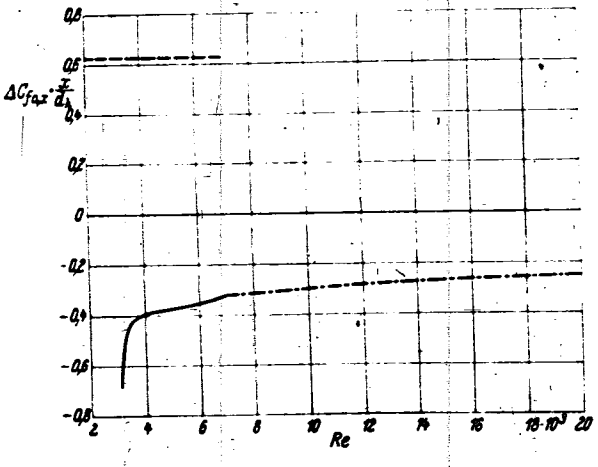


Bild 5. Die Größe $\Delta c_{f_0,x} \cdot \frac{x}{d_h}$ in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl Re bei verschiedener Lage des Umschlagspunktes.

$\frac{x}{d_h}$ = in hydraulischen Durchmessern d_h gemessene Spaltlänge,

$\Delta c_{f_0,x}$ = Unterschied zwischen dem vom Eintrittsquerschnitt bis zur Stelle x gemittelten Widerstandsbeiwert und dem entsprechenden Widerstandsbeiwert der ausgebildeten Strömung,

———— = Fall 1 nach Gl. (55). Fall 1 kann nur eintreten, solange $0{,}00649\ Re < \frac{364}{(Re-3000)^{1/4}}$, also $0 < Re \leqq \sim 7000$ ist,

– – – – = Fall 3 nach Gl. (57), Fall 3 kann ebenfalls nur für $Re \leqq \sim 7000$ eintreten, also für $3000 < Re \leqq \sim 7000$,

– · – · – = Fall 4 nach Gl. (59). Fall 4 kann ab $Re \approx 7000$ eintreten.

In Bild 5 ist $\Delta c_{f_0,x} \cdot \frac{x}{d_h}$ über der Reynoldsschen Zahl aufgetragen, und Gleichung (55) stellt hierin die horizontale strichlierte Gerade dar. Die anderen Kurven dieses Bildes werden weiter unten besprochen.

Fall 2: Die Meßstrecke von $x = 0$ bis x liegt stromaufwärts vom Umschlagquerschnitt und innerhalb des laminaren Einlaufgebietes. Es muß also

$$\frac{x_{a_l}}{d_h\,Re} = 0{,}00649 \geqq \frac{x}{d_h\,Re} \quad \text{und} \quad \frac{x}{d_h} \leqq \frac{x_v}{d_h} = \varphi(Re)$$

sein. Dann sind die Gleichungen für den laminaren Einlaufvorgang in Abschnitt II anzuwenden. In Bild 5 kann dieser Fall nicht als einheitlicher Kurvenzug eingetragen werden, da $\Delta c_{f_0,x} \cdot \frac{x}{d_h}$ hier außer von Re noch von $\frac{x}{d_h}$ abhängt.

Fall 3: Der Umschlagquerschnitt liegt stromaufwärts vom Meßquerschnitt x und stromabwärts von der laminaren Einlaufstrecke x_a. Es ist also

$$\frac{x_{a_l}}{d_h\,Re} = 0{,}00649 < \frac{x_v}{d_h\,Re} < \frac{x}{d_h\,Re}.$$

Der Druckabfall $p_0 - p_x$ läßt sich aufteilen in einen Anteil $p_{x_v} - p_x$, welcher dem Blasiusschen Widerstandsgesetz, und in einem Anteil $p_0 - p_{x_v}$, welcher dem Widerstandsgesetz der ausgebildeten Laminarströmung entspricht. Somit ist

$$c_{f_0,x} = \frac{p_0 - p_x}{\varrho\,\bar{u}^2/2} \cdot \frac{d_h}{x} = \frac{0{,}316}{Re^{1/4}}\left(1 - \frac{x_v}{x}\right) + \frac{96}{Re} \cdot \frac{x_v}{x} + \frac{0{,}626}{x/d_h} \qquad \ldots \quad (56)$$

Mit $x_v/d_h = \varphi(Re)$ unterscheidet sich $c_{f_0,x}$ vom Blasiusschen Widerstandsbeiwert um einen Betrag $\Delta c_{f_0,x}$, welcher aus

$$\Delta c_{f_0,x} \cdot \frac{x}{d_h} = 96\,\frac{\varphi(Re)}{Re} + 0{,}626 - 0{,}316\,\frac{\varphi(Re)}{Re^{1/4}} \qquad (57)$$

berechnet werden kann. Ist die Funktion $\varphi(Re)$ bekannt, so läßt sich Gleichung (57) in Bild 5 eintragen.

Fall 4: Der Meßquerschnitt in der Entfernung x vom Spaltanfang befindet sich in der ausgebildeten, turbulenten Strömung, der Umschlagquerschnitt jedoch bereits im laminaren Einlaufgebiet. Hierzu ist neben

$$\frac{x_v}{d_h\,Re} = \frac{\varphi(Re)}{Re} < \frac{x_{a_l}}{d_h\,Re} = 0{,}00649 \text{ und } \frac{x}{d_h} > \frac{x_v}{d_h} = \varphi(Re)$$

noch eine weitere Bedingung nötig, die leicht an Hand des schematisierten und stark verzeichneten Bildes 6 gefunden werden kann. In dem Bild, welches einen in hydraulischen Durchmessern vermaßten Längsschnitt durch den Spalt von der Wand bis zur Spaltmitte darstellt, bedeutet die stark ausgezogene, geknickte Linie die idealisierte Begrenzung der Grenzschicht (im Knick liegt der Umschlagquerschnitt), die strichpunktierte Linie die gedachte Fort-

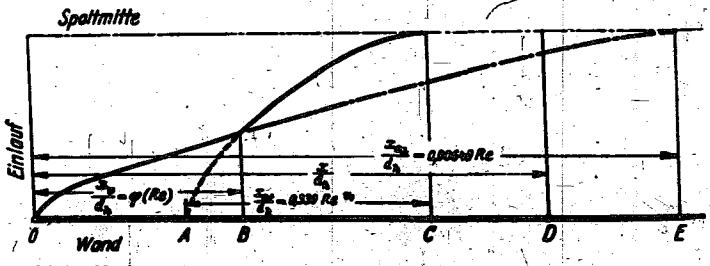


Bild 6. Nichtmaßstäbliches Schema der Grenzschichtausbreitung mit Idealisierung des Umschlages zur Turbulenz.

d_h = hydraulischer Spaltdurchmesser,

Re = Reynoldssche Zahl des Spaltes,

$\frac{x_{a_l}}{d_h}$ = relative laminare Einlaufstrecke, wenn kein Umschlag erfolgen würde,

$\frac{x_v}{d_h}$ = relative Umschlaglänge,

$\frac{x_{a_t}}{d_h}$ = relative Einlauflänge einer äquivalenten turbulenten Einlaufströmung,

$\frac{x}{d_h}$ = relative Meßlänge.

8043

s tzung der laminaren Grenzschicht bis zur Spaltmitte, die s richlierte Linie die gedachte Fortsetzung der turbulenten Grenzschicht bis zur Wand. Damit sind folgende Strecken festgelegt:

$$OE = \frac{x_{a_l}}{d_h} = 0{,}00649\,Re; \quad AC = \frac{x_{a_t}}{d_h} = 0{,}330\,Re^{1/4};$$

$$OB = \frac{x_v}{d_h} = \varphi(Re); \quad OD = \frac{x}{d_h} = \text{Meßstrecke}.$$

Nun ist

$$OC = OB + AC - AB = \varphi(Re) + 0{,}330\,Re^{1/4} - AB.$$

Die Teilstrecke AB ist durch die Voraussetzung bestimmt, daß im Querschnitt B die Grenzschichtdicke δ_t der gedachten rein turbulenten Einlaufstrecke AB gleich der Grenzschichtdicke δ_l der laminaren Einlaufstrecke $OB = x_v/d_h$ sein soll. Nach Gleichung (8) herrscht im Querschnitt B ein laminares Geschwindigkeitsverhältnis

$$\left(\frac{u_{k_r}}{\bar{u}}\right)_l = g\left[\frac{\varphi(Re)}{Re}\right],$$

mit welchem sich nach Gleichung (7) eine Grenzschichtdicke

$$\frac{\delta_l}{d_h} = \frac{3}{4}\left\{1 - \frac{1}{g\left[\frac{\varphi(Re)}{Re}\right]}\right\} = \frac{\delta_t}{d_h}$$

errechnen läßt. Durch Einsetzen in Gleichung (26) folgt das turbulente Geschwindigkeitsverhältnis, auf welches die Strömung im Querschnitt B umspringt, zu

$$\left(\frac{u_{k_r}}{\bar{u}}\right)_t = \frac{g\left[\frac{\varphi(Re)}{Re}\right]}{0{,}8\,g\left[\frac{\varphi(Re)}{Re}\right] + 0{,}2} = \psi(Re),$$

und damit nach Gleichung (44) die Strecke AB zu

$$AB = h[\psi(Re)]\,Re^{1/4}.$$

Es ist also:

$$OC = \varphi(Re) + Re^{1/4}\,[0{,}330 - h[\psi(Re)]],$$

und damit die gesuchte Zusatzbedingung:

$$\frac{x}{d_h} > \varphi(Re) + Re^{1/4}\,[0{,}330 - h[\psi(Re)]].$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird der Druckabfall $p_0 - p_x$ zweckmäßig zerlegt in einen Anteil $p_0 - p_{x_v}$, der dem laminaren Einlaufgesetz, einen Anteil $p_{x_v} - p_{x_{a_t}}$, der dem turbulenten Einlaufgesetz, und einen Anteil $p_{x_{at}} - p_x$, der dem Blasiusschen Gesetz gehorcht. Nach den Ableitungen in Abschnitt II und III folgt dann für den Widerstandsbeiwert

$$c_{f_{o,x}} = \left\{\left[g\left(\frac{\varphi(Re)}{Re}\right)\right]^2 - 1\right\}\frac{1}{x/d_h} + \left\{\left(\frac{15}{14}\right)^2 - [\psi(Re)]^2\right\}\frac{1}{x/d_h} + \frac{0{,}316}{Re^{1/4}}\left\{1 - \frac{\varphi(Re) + Re^{1/4}\,(0{,}330 - h[\psi(Re)])}{x/d_h}\right\} \quad (58)$$

Der Unterschied $\Delta c_{f_{o,x}}$ gegenüber dem Blasiusschen Widerstandsbeiwert ist durch die Gleichung

$$\Delta c_{f_{o,x}} \cdot \frac{x}{d_h} = \left[g\left(\frac{\varphi(Re)}{Re}\right)\right]^2 - [\psi(Re)]^2 + 0{,}316\,h[\psi(Re)] - 0{,}316\,\frac{\varphi(Re)}{Re^{1/4}} + \left[\left(\frac{15}{14}\right)^2 - 0{,}316 \cdot 0{,}330 - 1\right],$$

oder nach Elimination von $\psi(Re)$ durch

$$\Delta c_{f_{o,x}} \cdot \frac{x}{d_h} = \left[g\left(\frac{\varphi(Re)}{Re}\right)\right]^2\left\{1 - \frac{1}{\left(0{,}8\,g\left[\frac{\varphi(Re)}{Re}\right] + 0{,}2\right)^2}\right\} + 0{,}316\,h\left\{\frac{g\left[\frac{\varphi(Re)}{Re}\right]}{0{,}8\,g\left[\frac{\varphi(Re)}{Re}\right] + 0{,}2}\right\} - 0{,}316\,\frac{\varphi(Re)}{Re^{1/4}} + \left[\left(\frac{15}{14}\right)^2 - 0{,}316 \cdot 0{,}330 - 1\right] \quad (59)$$

gegeben und in Bild 5 darstellbar.

Fall 5: Der Umschlagquerschnitt liegt im laminaren Einlaufgebiet, der Meßquerschnitt in der Entfernung x vom Spaltanfang im turbulenten Einlaufgebiet. Diese Forderung erfüllen die Bedingungen

$$\frac{x_{a_l}}{d_h} = 0{,}00649 > \frac{x_v}{d_h} < \frac{x}{d_h} \quad \text{und}$$

$$\frac{x}{d_h} < \varphi(Re) + Re^{1/4}\,[0{,}330 - h[\psi(Re)]].$$

Für den Druckabfall läßt sich schreiben:

$$p_0 - p_x = (p_0 - p_{x_v}) + (p_{x_v} - p_x),$$

und, mit Gleichung (48), entsprechend für den Widerstandsbeiwert

$$c_{f_{o,x}} \cdot \frac{x}{d_h} = \left[g\left(\frac{\varphi(Re)}{Re}\right)\right]^2 - 1 + \left[i\left\{\frac{x}{d_h}\,Re^{1/4}, \frac{\varphi(Re)}{Re^{1/4}} + h[\psi(Re)]\right\}\right]^2 - [\psi(Re)]^2, \quad (60)$$

worin die Funktion i durch Gleichung (48) definiert ist.

Dieser Fall läßt sich, wie Fall 2, nicht ohne Aufspaltung in Bild 5 darstellen.

Nachdem der Einfluß der Lagenbeziehungen von Umschlag- und Meßquerschnitt untereinander und zu den Einlaufgebieten auf den Widerstandsbeiwert unter speziellen Annahmen untersucht und in fünf Einzelfälle zerlegt wurde, soll versucht werden, alle fünf Fälle in einer einzigen Darstellung zu vereinen. Zuvor seien einige Bemerkungen angeschlossen:

a) Nach den vorstehenden Ausführungen ist es leicht, für die einzelnen Strömungsabschnitte der einzelnen Fälle auch die angenommenen Geschwindigkeitsverteilungen anzugeben. Darauf wird hier verzichtet, weil sich diese Verteilungen infolge der stark idealisierenden Annahmen weit mehr von der Wirklichkeit entfernen dürften als die errechneten Druckabfälle.

b) In den Fällen 4 und 5, in denen die laminare Vorstrecke x_v kleiner ist als die laminare Einauflänge x_{a_l}, wurden für das Anwachsen der turbulenten Grenzschicht nach dem Umschlag die Ergebnisse der rein turbulenten Einlauftheorie nach Abschnitt III zugrunde gelegt. Dies bedeutet, daß sich die turbulente Grenzschicht so entwickeln soll, als ob im Querschnitt durch A des Bildes 6 die Strömungsgeschwindigkeit über den ganzen Querschnitt konstant und gleich $\bar{u}$ wäre. Von dieser »Einlaufgrenzschicht« wird das Stück AB einfach abgeschnitten und der verbleibende Rest im Querschnitt durch B an das laminare Stück OB angesetzt. In Wirklichkeit wird die Ausbildung der Grenzschichten mehr dem in Bild 7 skizzierten Verlauf entsprechen. In diesem schematisierten Bild stellen die stark ausgezogenen Linien den wahren Verlauf der Grenzschichten dar, die stark strichlierten Linien dagegen den in Bild 6 angenommenen Verlauf. Der Umschlagquerschnitt braucht also nicht im Querschnitt durch den Punkt K, sondern kann an irgendeiner Stelle B im Übergangsgebiet liegen.

Die Annahme eines Umschlagquerschnittes hat einen Impulssprung an dieser Stelle zur Folge. Dieser ist am größten in der ausgebildeten Strömung (Fall 3). In Wirklichkeit findet eine Impulsreduktion in dem Übergangsgebiet $K - L$ (Bild 7) statt. Ohne nähere Kenntnis des Strömungsmechanismus in diesem Übergangsgebiet können daher die beiden Strömungsformen (laminar-turbulent) nicht, wie bei einseitig berandeten Grenzschichtströmungen üblich, mit Hilfe konstanter Impulsdicke für beide Strömungszustände im Umschlagquerschnitt zusammengeschlossen werden. Der Impulsinhalt der Strömung würde sonst noch weiter zunehmen (Umschlag im Einlaufgebiet) oder konstant bleiben (Umschlag in der ausgebildeten Strömung), so daß der Endwert über dem wirklichen Impulsinhalt der ausgebildeten turbulenten Strömung liegt.

c) In den Versuchspunkten $c_{f_{o,x}}$ sind Einlaufstörungen, z. B. durch nicht ideale Abrundung vor dem Spaltanfang,

8044

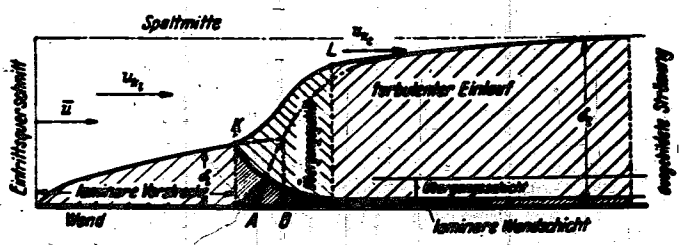


Bild 7. Nichtmaßstäbliches Schema der wahren Grenzschichtausbreitung.
$\bar{u}$ = über den Spaltquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit.
u_{k_l} = Geschwindigkeit der Kernströmung bei laminarer Grenzschicht,
u_{k_t} = Geschwindigkeit der Kernströmung bei turbulenter Grenzschicht,
δ_l = laminare Grenzschichtdicke.
δ_t = turbulente Grenzschichtdicke, von der Wand an gerechnet,
K bzw. L deuten Beginn bzw. Ende des Umschlags an.

in voller Höhe enthalten. Um sie zum Teil auszuschalten, kann wieder auf eine Meßstelle 1 stromabwärts vom Spaltanfang bezogen werden. Wird dafür gesorgt, daß im ganzen Meßbereich der Querschnitt 1 vor dem Umschlagquerschnitt liegt, so wird

$$\Delta c_{f_{0,x}} = c_{f_{0,1}} \frac{x_1}{x} + \frac{p_1 - p_x}{\varrho\,\bar{u}^2/2} \cdot \frac{d_h}{x} \quad \begin{cases} 96/Re \text{ für Fall 1} \\ 0{,}316/Re^{1/4} \text{ für Fall 3, 4} \end{cases} \quad \ldots\ldots (61)$$

Der Wert $c_{f_{0,1}}$ ergibt sich aus der Standardkurve nach Bild 2, die übrigen Größen aus Versuchswerten.

$$Re^{1/4} \cdot c_{f_{0,\xi}} = \frac{1}{\xi/d_h\, Re^{1/4}} \left[\frac{p_1 - p_x}{\varrho\,\bar{u}^2/2} - \left(Re \cdot c_{f_{0,x_v}} \cdot \frac{x_v}{d_h\, Re} - Re \cdot c_{f_{0,1}} \cdot \frac{x_1}{d_h\, Re} \right) + Re^{1/4} \cdot c_{f_{0,\xi_v}} \cdot \frac{\xi_v}{d_h\, Re^{1/4}} \right] \quad (64)$$

Das letzte Glied in der eckigen Klammer hängt nur von der Reynoldsschen Zahl ab, ebenso der Ausdruck in der runden Klammer. Die bezogenen Teildruckabfälle

$$Re \cdot c_{f_{0,x_v}} \cdot \frac{x_v}{d_h\, Re} = \frac{p_0 - p_{x_v}}{\varrho\,\bar{u}^2/2} \text{ und } Re \cdot c_{f_{0,1}} \cdot \frac{x_1}{d_h\, Re} = \frac{p_0 - p_1}{\varrho\,\bar{u}^2/2}$$

lassen sich sofort aus der Standardkurve der ebenen, laminaren Spaltströmung nach Bild 2 bestimmen.

Nun ist, wie an Hand von Bild 6 abgeleitet wurde,

$$\frac{\xi_v}{d_h\, Re^{1/4}} = h\,[\psi\,(Re)],$$

für welchen Wert aus der Standardkurve der rein turbulenten Spaltströmung der zugehörige Wert $Re^{1/4} \cdot c_{f_{0,\xi_v}}$ abgelesen wird, und weiterhin ist

$$\frac{\xi}{d_h\, Re^{1/4}} = \frac{x}{d_h\, Re^{1/4}} + h\,[\psi\,(Re)] - \frac{x_v}{d_h\, Re^{1/4}}.$$

Somit kann mit der Meßgröße $\frac{p_1 - p_x}{\varrho\,\bar{u}^2/2}$ die Theorie der turbulenten Spaltströmung unter Berücksichtigung der laminaren Vorstrecke nach Gleichung (64) geprüft und der bezogene Druckabfall auf die Standardkurven zurückgeführt werden.

Umgekehrt folgt aus Gleichung (64) für den Widerstandsbeiwert $c_{f_{1,x}}$ die Gleichung

$$c_{f_{1,x}} = \frac{p_1 - p_x}{\varrho\,\bar{u}^2/2} \cdot \frac{d_h}{x - x_1} = \frac{d_h}{x - x_1} \left\{ Re^{1/4} \cdot c_{f_{0,x}} - d_h\, \eta\,(Re) + d_h\, Re^{1/4}\, h\,[\psi\,Re)] \right\} \cdot \left\{ \frac{x}{d_h\, Re^{1/4}} - \frac{\varphi\,(Re)}{Re^{1/4}} + h\,[\psi\,(Re)] \right\} + \left[Re \cdot c_{f_{0,d_h}\eta\,(Re)} \cdot \frac{\varphi\,(Re)}{Re} - Re \cdot c_{f_{0,1}} \cdot \frac{x_1}{d_h\, Re} \right] - Re^{1/4} \cdot c_{f_{0,d_h}\, Re^{1/4}\, h\,[\psi\,(Re)]} \cdot h\,[\psi\,(Re)] \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots (65)$$

oder speziell für den Widerstandsbeiwert vom Eintrittsquerschnitt an

$$c_{f_{0,x}} = \frac{p_0 - p_x}{\varrho\,\bar{u}^2/2} \cdot \frac{d_h}{x} = \frac{d_h}{x} \left[Re^{1/4} \cdot c_{f_{0,x}} - d_h\, \eta\,(Re) + d_h\, Re^{1/4}\, h\,[\psi\,(Re)] \right] \cdot \left\{ \frac{x}{d_h\, Re^{1/4}} - \frac{\varphi\,(Re)}{Re^{1/4}} + h\,[\psi\,(Re)] \right\} + Re \cdot c_{f_{0,d_h}\eta\,(Re)} \cdot \frac{\varphi\,(Re)}{Re} - Re^{1/4} \cdot c_{f_{0,d_h}\, Re^{1/4}\, h\,[\psi\,(Re)]} \cdot h\,[\psi\,(Re)] \Big] \quad \ldots\ldots\ldots (66)$$

2. Zurückführung der Einzelfälle auf die Standardkurven.

Ist die empirische Beziehung $x_v/d_h = \varphi\,(Re)$ bekannt, so lassen sich alle fünf Fälle auf die Standardkurven zurückführen. Dazu werde ohne Rücksicht darauf, welcher Fall vorliegt, der Druckabfall $p_1 - p_x$ längs der Meßstrecke $x - x_1$, in derem Innern der Umschlagquerschnitt liege, zerlegt in einen laminaren Druckabfall $p_1 - p_{x_v}$ und einen turbulenten Anteil $p_{x_v} - p_x$. Der laminare Teil kann, z. B. nach Gleichung (16), als

$$\frac{p_1 - p_{x_v}}{\varrho\,\bar{u}^2/2}\, d_h = c_{f_{1,x_v}} \cdot (x_v - x_1) = c_{f_{0,x_v}} \cdot x_v - c_{f_{0,1}} \cdot x_1, \quad (62)$$

und der turbulente Teil entsprechend als

$$\frac{p_{x_v} - p_x}{\varrho\,\bar{u}^2/2}\, d_h = c_{f_{\xi_v,\xi}} \cdot (\xi - \xi_v) = c_{f_{0,\xi}} \cdot \xi - c_{f_{0,\xi_v}} \cdot \xi_v \quad (63)$$

geschrieben werden, wenn ξ die Einlaufentfernung einer äquivalenten rein turbulenten Strömung bis zum Meßquerschnitt x ist, deren Eintrittsquerschnitt gegen den wahren Spaltanfang derart verschoben ist, daß die turbulente Theorie für die Strecke ξ_v die gleiche Grenzschichtdicke δ liefert wie die Laminartheorie für die Entfernung x_v des Umschlagquerschnittes vom wahren Spaltanfang. Es ist also für $x > x_v$

$$\xi = (x - x_v) + \xi_v \left(\text{bzw. in Bild 6: } \frac{\xi_v}{d_h} = AB,\ \frac{\xi}{d_h} = AD \right).$$

Nach einfachen Umformungen ergibt sich aus der Addition von Gleichung (62) und (63)

Die Funktion $\varphi\,(Re)$ und damit auch die Funktionen $\psi\,(Re)$ und $h\,[\psi(Re)]$ wurden, wie weiter unten beschrieben ist, aus den Messungen bestimmt.

Ist $x \leq x_v$, so treten an Stelle der Gleichungen (65) und (66) die Gleichungen (16) und (12), (15) der Laminartheorie.

V. Versuchseinrichtung und Versuchsdurchführung.

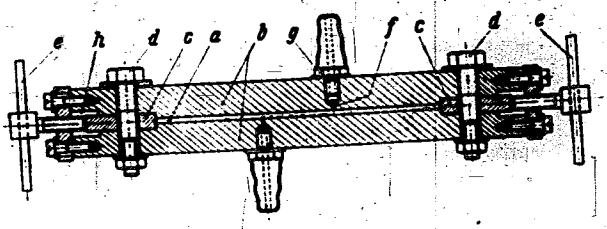
Die Versuchsanordnung zur Prüfung der turbulenten Einlauftheorie war die gleiche wie die in der zitierten Arbeit [10] beschriebene und soll daher nur in ihren wesentlichsten Merkmalen wiedergegeben werden. Bild 8 zeigt einen Querschnitt durch den Spalt, Bild 9 Ansicht und Aufsicht der Einrichtung. Der Spalt a (2,005 × 100,10 mm², Seitenverhältnis 1 : 50, hydraulischer Durchmesser d_h = 3,93 mm, Länge 1000 mm), aus den brünierten, 12 mm starken Stahlplatten b und den Abstandsstücken c gebildet (Platten und Abstandsstücke auf $\frac{1}{100}$ mm plangeschliffen), wurde mittels der Schraubenbolzen d und Kurbelschrauben e zusammengehalten. Über Druckanbohrungen f, Schlauchnippel g und starkwandige Schlauchleitungen wurde der Druck einem Mikromanometer zugeleitet. Die Hohlräume h und die Mutternköpfe der Bolzen d waren mit Klebwachs abgedichtet. Vor den scharfkantig geschliffenen Spaltanfang konnten mittels Paßstiften Abrundungsformen (Düsen) i gesetzt werden.

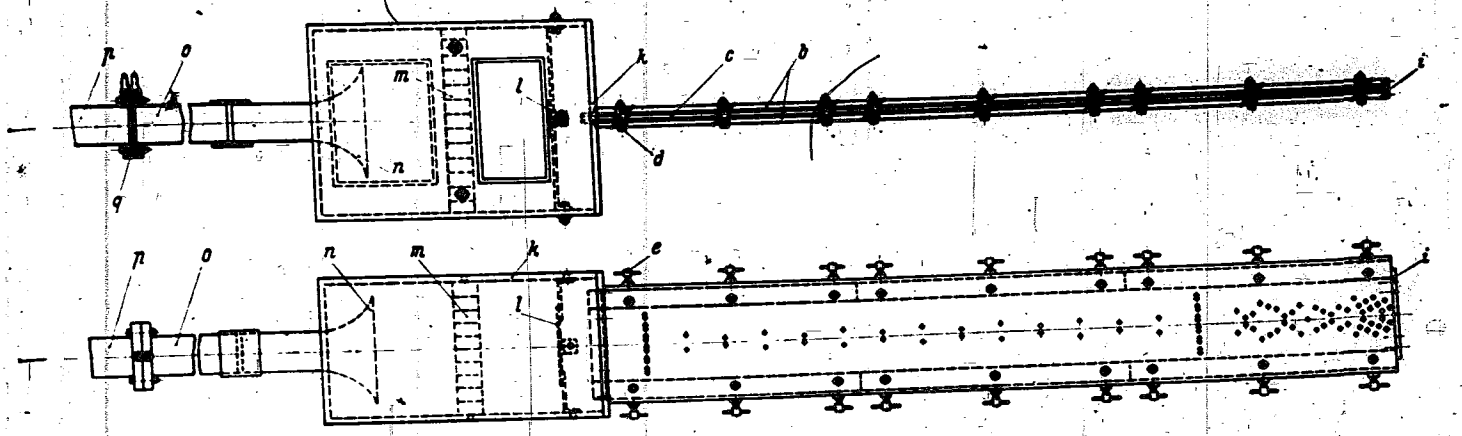
Das Ende des Spaltes ragte in einen Gleichrichterkasten k, in welchem der Luftstrahl durch ein Prallblech l zerstreut und anschließend durch eine Gleichrichterstrecke m gleich-

8045

Bild 8 (rechts) und 9 (unten). Querschnitt durch den Versuchsspalt (Bild 8); Ansicht und Aufsicht der Versuchsanlage (Bild 9).

a	Versuchsspalt,	*h*	Hohlräume zum Abdichten,
b	Spaltbegrenzungsplatten,	*i*	Einlaufdüse,
c	Abstandshalter,	*k*	Gleichrichterkasten,
d	Schraubenbolzen zum Zu-	*l*	Prallblech,
	sammenpressen der Platten,	*m*	Gleichrichterstrecke,
e	Kurbelschrauben zum An-	*n*	Einlaufdüse,
	drücken der Abstandshalter,	*o*	Blendeneinlaufstrecke,
f	Druckentnahmebohrungen,	*p*	Blendenauslaufstrecke,
g	Schlauchnippel,	*q*	Meßblende.





gerichtet wurde. Über einen Auffangtrichter *n* strömte die Luft in eine Blendenmeßstrecke (innerer Blendenrohrdmr. rd. 51 mm, Einlaufstrecke *o* von 20 Dmr., Auslaufstrecke *p* von 10 Dmr.) mit der Blende *q*, deren Auslaufstrecke *p* in eine engere Leitung (rd. 30 mm Innendmr.) mit Hofer-Eckventil von 10 mm Durchgang zur Mengenregelung überging. Eine Wasserringpumpe von 288 m³/h Fördermenge (bezogen auf den Ansaugzustand vor dem Stutzen) bei etwa 120 mm QS absolutem Druck saugte über die Vakuumleitung des Gebäudes Luft durch die Versuchsanordnung.

Für den gesamten Durchflußbereich wurden vier verschiedene Blenden aus Messing benutzt, die so ausgelegt waren, daß bei etwa gleichem Wirkdruckbereich ihre Durchflußmengen sich lückenlos aneinander reihten. Die freien Blendendurchmesser d waren $d_1 = 6{,}95$ mm, $d_2 = 15{,}16$ mm, $d_3 = 25{,}50$ mm, $d_4 = 35{,}92$ mm, ihre Öffnungsverhältnisse m entsprechend $m_1 = 0{,}0186$, $m_2 = 0{,}0886$, $m_3 = 0{,}250$ und $m_4 = 0{,}495$. Die Blenden waren nach den Durchflußregeln [17] normgerecht hergestellt und eingebaut. Da jedoch die benötigten Durchflußzahlen α weit unterhalb der Toleranzgrenze lagen, wurden alle vier Blenden in einer eigens dafür gebauten Anordnung mit Wasser geeicht.

Die Eichkurven der vier Blenden zeigt Bild 10. Zum Vergleich sind, soweit möglich, aus den Regeln [17] und nach Ruppel [18] inter- bzw. extrapolierte Werte als strichlierte Kurven angegeben. Die gemittelten Eichkurven liegen teilweise aus nicht feststellbaren Gründen um etwa 1% über den Interpolationskurven, auch sind letztere etwas stärker gegen die Abszissenachse geneigt. Die Eichkurve der Blende mit m_2 liegt infolge geringer Kantenunschärfe um einige Prozent über der Interpolationskurve.

Die Begrenzungsplatten des Spaltes enthielten je 50 Druckentnahmebohrungen, deren Verteilung aus Bild 9 hervorgeht. Je zwei im gleichen Querschnitt gegenüberliegende Bohrungen (für die eine Platte durch o, für die andere durch ● gekennzeichnet) wurden bei laufendem Versuch auf Druckgleichheit geprüft und dann paarweise durch Schläuche verbunden. So entstanden die Meßstellen Nr. 1 bis 50. Meßstelle 1 lag 5,35 mm von der Eintrittskante entfernt, die ersten 10 Meßstellen lagen rd. 5 mm, die Meßstellen 10 bis 25 rd. 10 mm, die Stellen 31 bis 45 rd. 50 mm in der Strömungsrichtung auseinander. Rd. 250 mm und 950 mm von der Einlaufkante entfernt waren 5 Meßstellen in verschiedenem Abstand von der Spaltmitte angeordnet, um zu prüfen, ob sich der Druck über den Querschnitt änderte. Es sei gleich an dieser Stelle bemerkt, daß in dem untersuchten Bereich Reynoldsscher Zahlen innerhalb der Meßgenauigkeit keine Änderung des statischen Druckes über den Querschnitt festgestellt werden konnte.

Von jeder Meßstelle führten zwei Schlauchleitungen zu einer Druckverteileranordnung, mit deren Hilfe durch jeweiliges Öffnen von zwei Hähnen jede beliebige Gegeneinanderschaltung der Meßstellen untereinander oder gegen die Außenluft an einem Mikromanometer abgelesen werden konnte. Schiller [19] hat zwar vorgeschlagen, die Genauigkeit solcher Druckabfallmessungen dadurch zu erhöhen, daß an den verschiedenen Meßstellen mehrere Beobachter gleichzeitig ablesen, da bei Nacheinandermessungen Schwankungs- oder (z. B. bei Temperaturgang) auch systematische Fehler nicht zu vermeiden sind. Bei der Vielzahl der bei uns vorhandenen Meßstellen mußten diese Ungenauigkeiten in Kauf genommen werden. Die dadurch bedingten Fehler sind die größten, welche den unten beschriebenen Meßergebnissen anhaften.

Die Druckabfallmessungen waren so angelegt, daß bei unterkritischen Reynoldsschen Zahlen längs einer gewissen Meßstrecke gegen das Spaltende hin die bekannten Widerstandsbeiwerte der ausgebildeten Laminarströmung bestätigt wurden. Erst dann wurden unter Dichtproben vor und nach jedem Versuch die Messungen auf über-

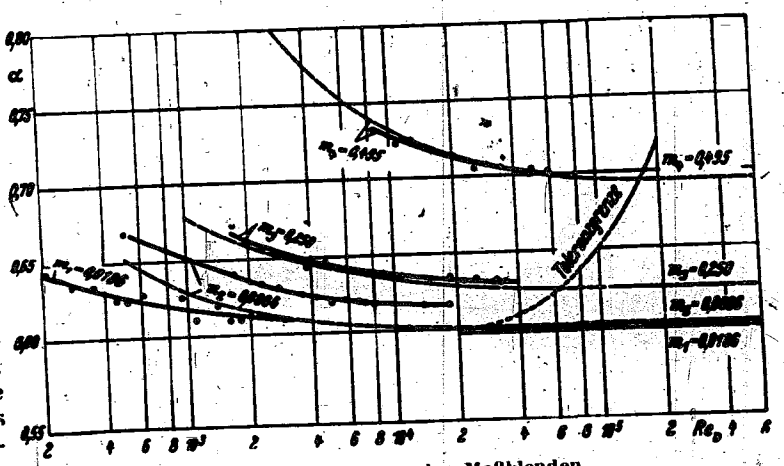


Bild 10. Eichkurven der Meßblenden.

m = Öffnungsverhältnis,
α = Durchflußzahl,
Re_0 = Reynoldssche Zahl des Blendenrohres,
—— Mittelkurven der Messungen,
— — — inter- bzw. extrapolierte Kurven nach den Durchflußmeßregeln [17] und nach Ruppel [18].

8046

kritische Reynoldssche Zahlen ausgedehnt und für das Einlaufgebiet ausgewertet. Hierzu waren neben dem Druckabfall im Spalt folgende Meßgrößen zu ermitteln:

Der Wirkdruck $P_1 - P_2$ in mm WS an der Meßblende;
der Unterdruck p_K in mm WS im Gleichrichterkasten;
der Barometerstand b' in mm QS von 0° C im Versuchsraum;
die Temperatur t_B in °C, der absolute Druck p_B in mm WS und die relative Feuchte φ_B der strömenden Luft im stromaufwärts gelegenen Blendenquerschnitt.

Ohne merklichen Fehler in der Berechnung der Stoffwerte konnte der Druckabfall zwischen dem Gleichrichterkasten und dem Blendenquerschnitt vernachlässigt, also der Druck p_B vor der Blende gleich dem Barometerstand b', vermindert um den Unterdruck p_K (in mm QS) im Gleichrichter gesetzt werden. Die Temperatur längs der Versuchsstrecke wurde als konstant angesehen und in der Nähe des Spalteinlaufs an einem in $\frac{1}{10}$ °C geteilten, strahlungsgeschützten Quecksilberthermometer abgelesen. Feuchte und Barometerstand wurden mittels eines Aßmannschen Aspirationspsychrometers bzw. eines Barographen gemessen.

Ein Versuch mit einer an den Hofer-Ventilen eingestellten Geschwindigkeit beanspruchte etwa drei Stunden, in denen sich die Raumtemperatur maximal um etwa 1,2°C änderte. Der Auswertung wurden die über die Versuchsdauer gemittelten Werte der Temperatur, der Feuchte und des Barometerstandes zugrunde gelegt.

VI. Darstellung der Meßergebnisse.

1. Gebrauchsformeln.

Mit den Bezeichnungen:

Q = Volumdurchfluß in m³/h beim Betriebszustand P_1, T_1 der Blende,
P_1 = absoluter Druck an der Druckentnahmestelle vor dem Drosselgerät in mm WS, hier gleich $(b' - p_K)$ in mm WS gesetzt,
T_1 = absolute Temperatur vor dem Drosselgerät, hier gleich absolute Raumtemperatur,
α = Durchflußzahl des Drosselgerätes nach Bild 10,
ε = Expansionszahl der Luft, z. B. nach Arbeitsblatt 6 der Durchflußmesserregeln [17],
d = freier Durchmesser in mm des Drosselgerätes im Betriebszustand T_1,
φ = relative Feuchte des Raumes in %,
γ = Raumgewicht der Luft in kg/m³ im Betriebszustand P_1, T_1, φ,
$P_1 - P_2$ = Wirkdruck in mm WS,

gilt für den Volumdurchfluß

$$Q = 0{,}01252\,\alpha\,\varepsilon\,d^2\sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\gamma}}\ [\mathrm{m^3/h}] \quad \ldots \quad (67)$$

Das Raumgewicht trockener Luft von 760 mm QS wurde aus Landolt-Börnstein entnommen und nach Kohlrausch [20] mit der Gleichung

$$\gamma = \gamma_{T_1;\ P_1;\ \varphi} = \gamma_{T_1;\ 760;\ 0} \cdot \frac{P_1 - \frac{3}{8}\varphi P_D}{760}\ [\mathrm{kg/m^3}] \quad (68)$$

auf den Betriebszustand umgerechnet. Hierin bedeutet P_D in mm QS den Sättigungsdruck des Wasserdampfes bei der Temperatur T_1; P_1 ist in Gleichung (68) ebenfalls in mm QS einzusetzen. Die drei Fußzeiger an γ geben Temperatur, Druck und Feuchte an.

Die auf das Blendenrohr vom Durchmesser $D = 0{,}05095$ m und die über den Blendenrohrquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit $\bar{w}$ in m/s bezogene Reynoldssche Zahl Re_D errechnet sich aus

$$Re_D = \frac{\bar{w} D}{\nu} = \frac{Q}{900\,\pi D \nu}, \quad \ldots \quad (69)$$

wobei ν die kinematische Zähigkeit der Luft in m²/s bei Betriebszustand bedeutet und nach

$$\nu = \nu_{T_1;\ P_1} = \nu_{T_1;\ 760} \cdot \frac{760}{P_1}\ [\mathrm{m^2/s}] \quad \ldots \quad (70)$$

wieder aus Landolt-Börnstein-Werten entnommen werden kann. Der Druck P_1 ist wieder in mm QS einzusetzen; der Einfluß der Luftfeuchte ist vernachlässigt.

Schließlich ergibt sich für die Reynoldssche Zahl Re des Spaltes

$$Re = \frac{D\pi}{4\,(a+b)}\,Re_D = \frac{Q}{3600\,(a+b)\,\nu} \quad \ldots \quad (71)$$

mit b bzw. a = halbe Höhe bzw. halbe Breite des Spaltes in m.

Hieraus folgt, wenn d_h = hydraulischer Durchmesser in m, F = Spaltquerschnitt in m² ist, die mittlere Geschwindigkeit im Spalt $\bar{u}$ in m/s zu

$$\bar{u} = \frac{Re\,\nu}{d_h} = \frac{Q}{3600\,F}\ [\mathrm{m/s}] \quad \ldots \quad (72)$$

Da die Durchflußzahlen α nach Bild 10 noch von der Reynoldsschen Zahl Re_D abhängen, empfiehlt es sich, die Kurven in ein Schaubild mit der Ordinate Re_D/α und der Abszisse Re_D umzuzeichnen. Dann kann zunächst

$$\frac{Re_D}{\alpha} = 4{,}430\,\frac{\varepsilon\,m\,D}{\nu}\sqrt{\frac{P_1 - P_2}{\gamma}} \quad \ldots \quad (73)$$

(mit m = Öffnungsverhältnis der Blende, D = Rohrdurchmesser in m) berechnet und hierfür in dem neuen Schaubild Re_D abgelesen und nach Gleichung (71) in die Reynoldssche Zahl Re des Spaltes umgerechnet werden.

Die Dichte der Luft wurde aus der Beziehung

$$\varrho = \varrho_{T_1;\ P_1;\ \varphi} = 0{,}10204\,\gamma_{T_1;\ P_1;\ \varphi}\ [\mathrm{kg\,s^2/m^4}] \quad \ldots \quad (74)$$

bestimmt, wobei γ nach Gleichung (68) einzusetzen ist. Die am Spalt gemessenen Druckdifferenzen wurden mit Hilfe von Gleichung (72) nach

$$c_{f_{1,2}} = \frac{p_1 - p_2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{d_h}{\varrho\,\bar{u}^2/2}$$

in mittlere Widerstandsbeiwerte umgerechnet und in Beziehung zur Reynoldsschen Zahl Re gesetzt.

Da für die Berechnung der Stoffwerte der absolute Druck im Gleichrichter, der nahezu gleich dem Druck am Spaltende ist, eingesetzt wurde, ist der mit Gleichung (72) und (74) errechnete Staudruck $\varrho\bar{u}^2/2$ nur nahe am Spaltende richtig. Am Spaltanfang ist $\varrho\bar{u}^2/2$ etwas kleiner, und zwar bei $Re \approx 2000$ um etwa 0,6%. Bei den Berechnungen des Widerstandsbeiwertes im turbulenten Strömungsbereich wurden daher die Staudrücke für jede Entfernung x entsprechend dem Druckverhältnis aus absolutem Druck im Gleichrichter zu absolutem Druck an der Meßstelle korrigiert.

2. Der Spalt mit abgerundetem Einlauf.

Vor dem Einlauf des in der Versuchsanordnung beschriebenen Spaltes wurde eine 5 mm lange Düse von rechteckigem Querschnitt stoßfrei angebracht. Sie setzte tangential mit einer Krümmung von 6 mm Halbmesser, welche sich auf etwa 43½ Winkelgrade erstreckte, an die Spaltwände an und ging mit einer zweiten Krümmung (Halbmesser 2,8 mm) in Ebenen über, die senkrecht zur Spaltachse standen. Zwecks Verminderung der Raumstörungen ragte die Düse in einen Schutzkasten von rd. 300 × 300 × 500 mm³, in dem quer zur Strömungsrichtung eine Wand aus Baumwollsamt gespannt war. Daher lag der Druck p_e vor der Düse in diesem Einlaufschutzkasten, gemessen an einer seitlichen Wandanbohrung, etwas unter dem Barometerstand b'.

Eine der Meßreihen an diesem Spalt für überkritische Reynoldssche Zahlen ($Re = 8835$) zeigt Zahlentafel 2. Aus derartigen Meßblättern wurden nach den oben aufgestellten Gebrauchsformeln die Stoffwerte, die Reynoldssche Zahl Re des Spaltes und der ortsabhängige Staudruck $\varrho\bar{u}^2/2$ errechnet. Für eine nahe dem Spaltende gelegene Meßstrecke wurde der lokale Widerstandsbeiwert c_f bestimmt und in Bild 11 logarithmisch über der Reynoldsschen Zahl Re aufgetragen. Die ausgezogenen Geraden entsprechen

8047

Zahlentafel 2. Beispiel eines Meßblattes (Spalt mit Einlaufdüse).

Meßblatt Nr.: 82 Tag: 29. 1. 1941 | Meßzweck: Spalt $b/a = 1/50$ mit 5 mm Düse von $r_1 = 6$ mm, $r_2 = 2{,}8$ mm

Zimmertemperatur: 20,7 . . . 21,0° C | Barometerstand: 761,8 mm Hg

psychometrische Differenz: 7,8 . . . 8,0° C | relative Feuchte im Raum: 40%

Unterdruck im Gleichrichterkasten: 803 − 144 = 659 mm WS

Blendenmessung: Blende II mit $d_2 = 15{,}16$ mm in Rohr 2 mit $D = 50{,}95$ mm; $m_2 = 0{,}0886$

Manometer: Präz.-U-Rohr | Füllung: Wasser | spez. Gewicht: 0,998 $\frac{gr}{cm^3}$ bei 21° C

Gradbogenfaktor: ⊥ | Nullstellung: —

Betriebsablesung: 650,5 − 403,0 = 247,5 mm | Mittelwert: 247,5 mm

Wirkdruck: $P_1 - P_2 = 247{,}0$ mm WS

Spaltmessung*): Spalt mit Einlaufschutzkasten

Manometer: AVAG Nr. 2/265, System: Betz | Füllung: Wasser | spez. Gewicht: 0,998 $\frac{gr}{cm^3}$

Gradbogenfaktor: ⊥ | Nullstellung: 1,0 mm; 1,0 mm

Meßstelle: / Meßstelle:	0	E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1,0	6,99	90,73 (5,35)										
E		1,0	84,78 (5,35)	89,41 (10,49)	92,58 (14,9)	96,02 (20,4)	98,93 (25,1)	101,31 (30,1)	103,80 (34,95)	106,33 (40,1)	108,4 (44,9)	110,2 (50,0)	115,0 (60,45)

Meßstelle: / Meßstelle:	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
E	118,93 (70,12)	123,76 (80,1?)	128,08 (90,4)	133,29 (100,1)	141,48 (110,2)	141,73 (120,1)	144,8 (129,9)	148,3 (140,2)	151,2 (150,05)	154,2 (160,2)	157,2 (169,7)	160,4 (180,2)	163,8 (190,1)

Meßstelle: / Meßstelle:	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
E	167,7	191,4	192,0	192,0	191,5	191,7	192,0	219,5	250,9	282,4	315,0	348,0	379,9
37.	(200,25)	(249,9)	(250,1)	(249,9)	(250,1)	(250,15)	(250,05)	(299,3)	(349,9)	(400,3)	(450,0)	(500,1)	1,0 (550,7)

Meßstelle: / Meßstelle:	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
37	32,45 (600,9)	65,59 (650,6)	99,5 (700,6)	131,9 (750,5)	167,5 (800,5)	201,1 (850,6)	234,1 (900,6)	265,7 (950,9)	265,3 (950,5)	265,8 (950,3)	265,1 (950,8)	265,5 (950,4)	265,6 (950,8)

Bemerkungen: Dichtprobe ergab nach 5 min keine Drucksenkung.

*) Die Außenluft ist im folgenden mit Meßstelle 0, die Meßstelle im Einlaufschutzkasten dicht vor der Düse mit E bezeichnet. Die nichteingeklammerten Werte geben die Ablesung am Manometer in mm, die eingeklammerten die zugehörigen Spaltlängen in mm (gerechnet vom Spaltanfang ohne Düse) an. Die den Differenzen anhaftenden Streufehler können größtenteils ausgeschaltet werden, wenn vor der Auswertung des Meßblattes der Druckabfall über der Entfernung x vom Spaltanfang aufgetragen und eine glatte Mittelkurve gezeichnet wird. Dieser Ausgleich der Meßergebnisse wurde bei der Auswertung der hier beschriebenen Versuche nicht vorgenommen.

...fem Widerstandsgesetz $c_f = 96\,Re$ der ausgebildeten, ...ebenen, laminaren Spaltströmung (linke Kurve) und dem ...Blasiusschen Widerstandsgesetz $c_f = \frac{0{,}316}{Re^{1/4}}$ der ausgebil...deten, turbulenten Rohrströmung (rechte Kurve). Die ...bereits in der früheren Arbeit [10] besprochenen Meßwerte ...der ausgebildeten Laminarströmung liegen genau auf der ...theoretischen Kurve für den ebenen Spalt, also, wahrscheinlich infolge von Rauhigkeitseinflüssen, etwa 3% über der Kurve $c_f = 93{,}5/Re$ nach Lea und Tadros [21] für den Spalt vom Seitenverhältnis 1 : 50. Die kritische Reynoldssche Zahl des Spaltes liegt bei $Re_{krit} \approx 3000$. Die für das überkritische Gebiet eingetragenen Meßpunkte entsprechen einer Meßstrecke zwischen den Einlaufentfernungen von $x/d_h \approx 160$ bis 230. Diese Meßpunkte erreichen bei $Re = 4000$ die Blasiussche Gerade und liegen von $Re \approx 9000$ ab etwa 6% über dieser.

In der zitierten Arbeit [10] hatte es sich als vorteilhaft erwiesen, die Messungen im Einlaufgebiet des Spaltes mit abgerundetem Einlauf nicht auf den Eintrittsquerschnitt, sondern mit Hilfe der Reduktionsformel (16) auf den Querschnitt der ersten Meßstelle ($x_1/d_h = 1{,}36$) zu beziehen. Damit wurden am Einlauf vorhandene Störungen weitgehend ausgeschaltet, und die Messungen lassen sich nach

$$Re \cdot c_{f_{o,x}} = Re \cdot c_{f_{o,1}} \cdot \frac{x_1}{x} + Re \frac{p_1 - p_x}{x} \cdot \frac{d_h}{\varrho\, u^2/2} \qquad (75)$$

in Bild 2 zum Vergleich mit der Standardkurve eintragen, wobei die Größe $Re \cdot c_{f_{o,1}}$ dieser selbst entnommen wird.

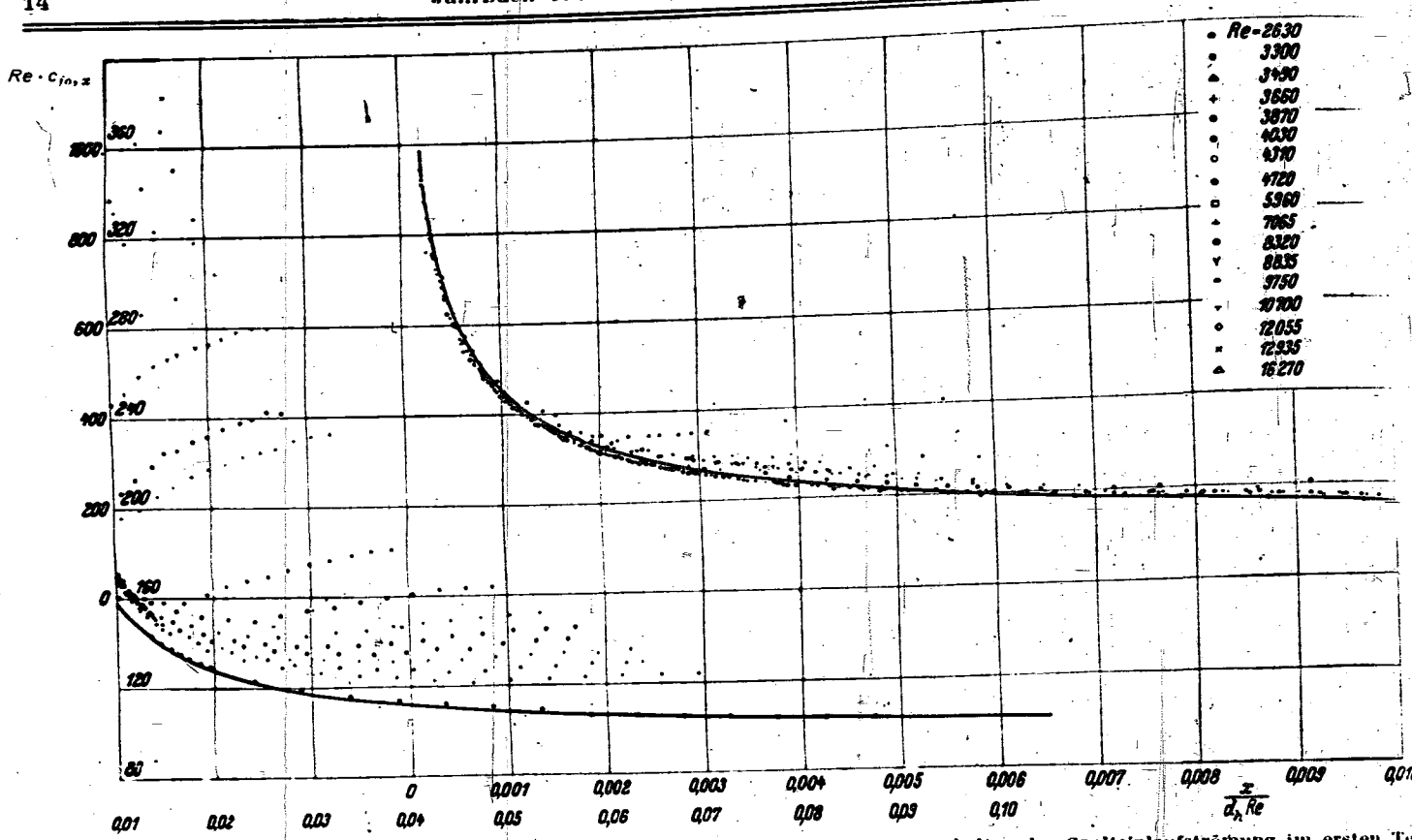


Bild 12. Laminarverhalten der Spalteinlaufströmung im ersten Teil der Einlaufstrecke. $Re \cdot c_{fo,x}$ in Abhängigkeit von $\frac{x}{d_h\,Re}$ (Einlaufdüse vor dem Spaltanfang).
——— theoretische Kurve nach der Impulstheorie.
Die verschiedenen Zeichen beziehen sich auf die eingetragenen verschiedenen Reynoldsschen Zahlen. (Pause ist bei der ZWB zu beziehen.)

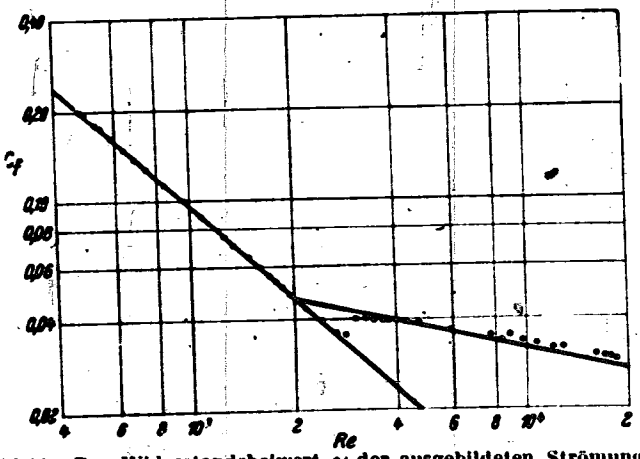


Bild 11. Der Widerstandsbeiwert c_f der ausgebildeten Strömung in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl Re (Spalt mit abgerundetem Einlauf).

Da zu erwarten war, daß im Spalt mit abgerundetem Einlauf die Strömung sich auch bei überkritischen Reynoldsschen Zahlen auf eine längere Strecke stromabwärts vom Einlauf laminar verhält, wurden in Bild 12 nach Gleichung (75) einige Meßreihen als $Re \cdot c_{fo,x}$ über $\frac{x}{d_h\,Re}$ aufgetragen. Die Abszissenachse ist hierbei einmal bei $\frac{x}{d_h\,Re} = 0{,}01$ unterteilt, die Maßstäbe der beiden Bereiche sind verschieden gewählt. Die ausgezogene Kuve stellt die Ergebnisse der Impulstheorie für die laminare Spalteinlaufströmung dar, die Zeichen ⊙ eine Meßreihe für eine Reynoldssche Zahl $Re = 2630$ nahe der kritischen. Diese Meßpunkte folgen noch genau dem allgemeinen Kurvenzug, welcher sich durch die Gesamtheit der Meßpunkte bei unterkritischen Reynoldsschen Zahlen legen läßt und im Einlaufgebiet $\left(\frac{x}{d_h\,Re} \leq 0{,}00649\right)$ etwas unter der theoretischen Kurve liegt (vgl. auch Bild 9 der früheren Arbeit [10]). Die Werte für überkritische Reynoldssche Zahlen, eingetragen zwischen $Re = 3300$ bis $Re = 16270$, folgen bei kleinen $\frac{x}{d_h\,Re}$ dem laminaren Kurvenzug und verlassen ihn um so früher, je größer die Reynoldssche Zahl ist. Der Umschlagpunkt rückt also mit wachsender Reynoldsscher Zahl gegen den Spaltanfang vor, und die laminare Vorstrecke x_v kann für Re wenig größer als Re_{krit} beträchtlich sein. Mit den Annahmen, daß für $Re = \infty$ die Vorstrecke x_v gegen Null und für die beobachtete kritische Zahl $Re_{krit} = 3000$ des untersuchten Spaltes gegen unendlich geht, kann man diese Vorstrecke z. B. durch eine Gleichung von der Form

$$\frac{x_v}{d_h} = \frac{c}{(Re - 3000)^m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

annähern, wobei c und m für gewisse Bereiche Reynoldsscher Zahlen konstant gesetzt werden können. Aus der Auftragung nach Bild 12 läßt sich diese Abhängigkeit nur schlecht ermitteln, da sich die Kurven durch die einzelnen Meßreihen unter sehr kleinen Winkeln aufspalten. Dies bedeutet aber auch, daß der Umschlag von der rein laminaren in die rein turbulente Strömungsform eine ziemlich lange Strecke erfordert, innerhalb deren ein geeigneter Umschlagquerschnitt zu wählen ist.

Daher wurden, wie es in Bild 13 für einige Reynoldssche Zahlen durchgeführt ist, die entsprechend Gleichung (75) vom Eintrittsquerschnitt an gemittelten Widerstandsbeiwerte $c_{fo,x}$ über der Einlaufentfernung $\frac{x}{d_h}$ mit der Reynoldsschen Zahl als Parameter logarithmisch aufgetragen. Die ausgezogenen Kurven geben den Verlauf des laminaren Widerstandsbeiwertes $c_{fo,x}$ nach Gleichung (12) bzw. (15) der Impulstheorie an. Die Meßpunkte liegen wie in Bild 12 bei kleinen $\frac{x}{d_h}$ (laminare Einlaufströmung) etwas unter den theoretischen Kurven. In der Gegend von $\frac{x}{d_h} \approx 15$ bis 2

8049

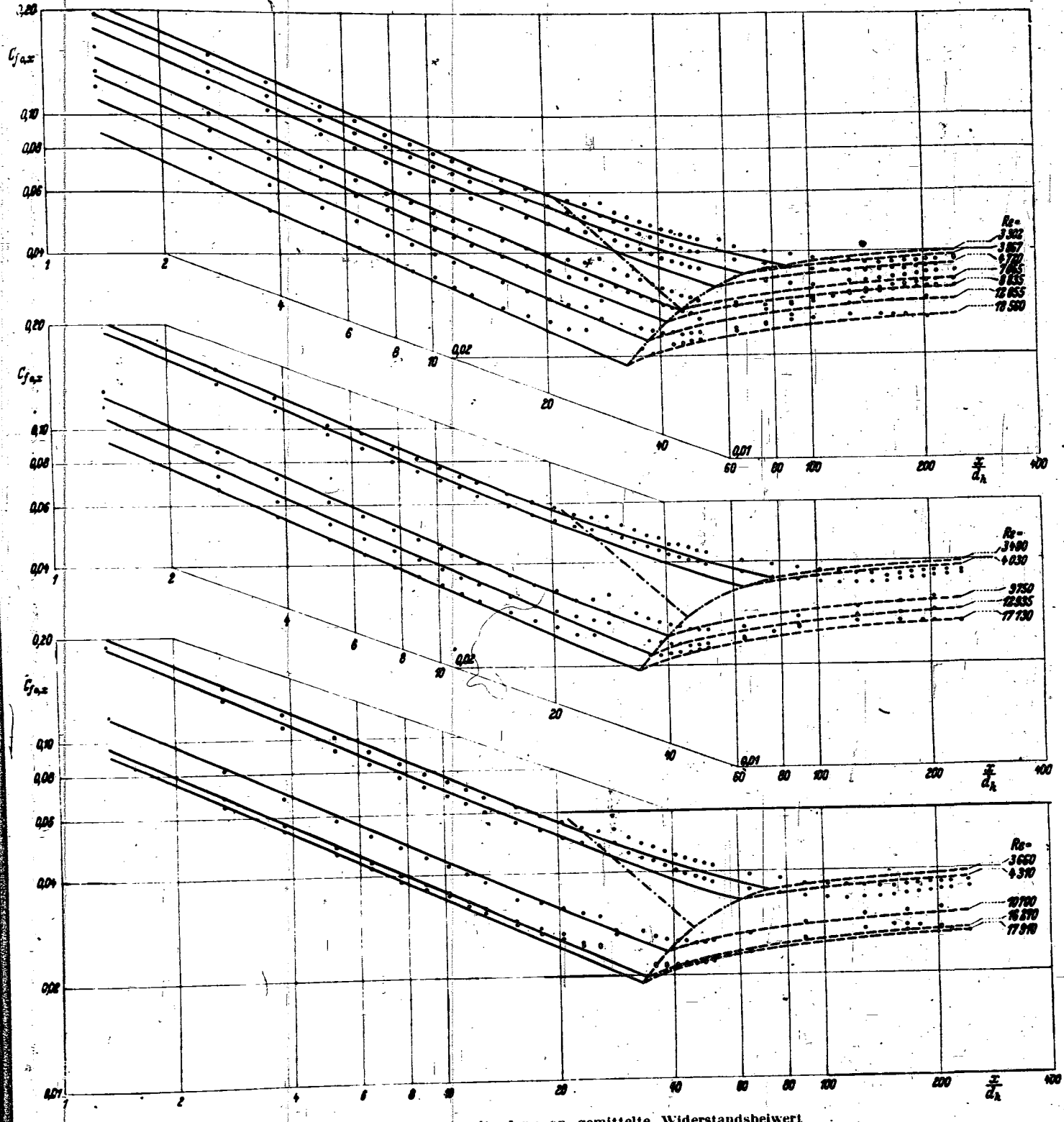


Bild 13. Der vom Spaltanfang an gemittelte Widerstandsbeiwert $c_{f_0,x}$ in Abhängigkeit von der bezogenen Spaltlänge $\frac{x}{d_h}$ bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen *Re*.

——— theoretischer Widerstandsbeiwert der Laminarströmung,
– – – theoretischer Widerstandsbeiwert der turbulenten Strömung mit laminarer Vorstrecke,
– · – · – Begrenzungskurve der laminaren Einlaufströmung.
– · · – · · – Begrenzungslinie der laminaren Vorstrecken,
– – – – – Asymptoten der ausgebildeten turbulenten Strömung nach Blasius,
○ ● gemessene Widerstandsbeiwerte.

8050

beginnen die Meßpunkte, sich von den Kurven nach oben zu entfernen. (Die Punkte bei $x/d_h \approx 28$ an der Meßstelle Nr. 16 fallen heraus. Dies ist, wie sich nach Abschluß der Versuche zeigte, auf kleine Rosträndер zurückzuführen, welche sich, vgl. Zahlentafel 2, zwischen den Meßstellen 15/16 und 40/41 gebildet hatten.) Der lokale Widerstandsbeiwert, gemittelt zwischen zwei benachbarten Meßstellen, erreicht den Wert der ausgebildeten Strömung nach Bild 11 erst zum Teil nach weit über 50 Durchmessern. Der Umschlagquerschnitt kann also für $Re \approx 3000$ bis 20000 zwischen $\frac{x}{d_h} \approx 15$ bis weit über 50 angenommen werden. Die strichlierten Linien sind weiter unten erklärt.

Nach einem gewissen Übergangsbereich wird die Neigung der durch die Meßpunktreihen in Bild 13 gedachten Mittelkurven positiv. Extrapoliert man diese Teile der Mittelkurven mit positiver Neigung unter Nichtbeachtung der Übergangszone bis zu den Schnittpunkten mit den theoretischen Kurven für reine Laminarströmung, und faßt man diese Schnittpunkte als theoretische Umschlagstellen auf, so erhält man für die laminaren Vorstrecken angenähert die Beziehung

$$\frac{x_r}{d_h} \approx \frac{364}{(Re - 3000)^{1/2}} \quad \ldots\ldots\ldots (77)$$

In Bild 14 sind die aus Bild 13 entnommenen $\frac{x_r}{d_h}$-Werte über der Reynoldsschen Zahl Re als Kreise aufgetragen. Die ausgezogene Kurve stellt Gleichung (77) dar. Die ab $Re \approx 7000$ etwas oberhalb der ausgezogenen Kurve verlaufende punktierte Kurve gibt die theoretische »Einlaufstrecke« OC (vgl. Bild 6) bis zur Ausbildung des turbulenten Profils an. Diese Einlaufstrecke ist also für Reynoldssche Zahlen unter 7000 gleich der laminaren Vorstrecke (Umschlaglänge) und weicht über $Re \approx 7000$ anfänglich nur wenig von dieser ab. Ein großer Teil der Übergangsstrecke (zwischen laminarer und turbulenter Strömung), die in Wirklichkeit an Stelle des Umschlagquerschnittes tritt, liegt also nach der vorgenommenen Aufteilung vor diesem.

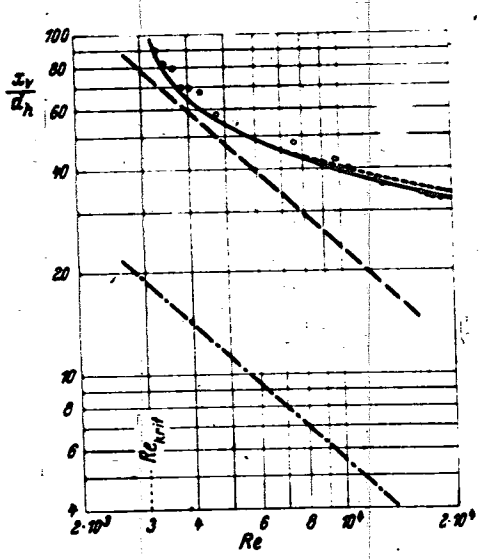


Bild 14. Die laminäre Vorstrecke (Umschlaglänge) $\frac{x_r}{d_h}$ in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl Re des Spaltes.

x_r = Entfernung des Umschlagquerschnittes vom Spaltanfang,
d_h = hydraulischer Durchmesser des Spaltes,
— — — — auf d_h bezogene laminare Vorstrecke im Spalt nach Gl. (77),
— — — auf d_h bezogene größtmögliche Umschlaglänge der längs angeströmten Platte nach Gl. (78),
— · — · — auf d_h bezogene kleinstmögliche Umschlaglänge der längs angeströmten Platte nach Gl. (78),
— · — · — · — theoretische Einlauflänge $\frac{x_a}{d_h}$ bis zur Ausbildung des turbulenten Profils im Spalt,
○ laminare Vorstrecke im Spalt nach Versuchen.

Es ist von Interesse, die Gleichung (77) mit den Ergebnissen an der ebenen, parallel angeströmten Einzelplatte zu vergleichen. Mit x als Entfernung von der Plattenvorderkante, u_0 als ungestörte Anströmgeschwindigkeit und $Re_x = \frac{u_0 x}{\nu}$ als Reynoldssche Zahl der Platte ergibt sich nach Versuchen von Gebers, Burgers und in der Hegge Zijnen sowie Hansen (vgl. z. B. [22]) folgendes.

Als höchste erreichbare kritische Zahl der Platte für Wasserströmung fand Gebers $Re_{x\,krit} = 5 \cdot 10^5$. Für Luftströmung längs einer dünnen, vorn zugeschärften Platte wurde höchstens $Re_{x\,krit} = 3{,}5 \cdot 10^5$ erreicht, welcher Wert durch Verdicken der Platte und Abrunden der Vorderkante sowie Vorschalten von Turbulenzgittern bis auf etwa $8{,}4 \cdot 10^4$ gedrückt werden konnte. Die Umschlaglänge x_{krit} der von Luft angeströmten Platte liegt also zwischen den Grenzen

$$\frac{8{,}4 \cdot 10^4\ \nu}{u_0} \leqslant x_{krit} \leqslant \frac{3{,}5 \cdot 10^5\ \nu}{u_0} \quad \ldots\ldots\ldots (78)$$

Die beiden Grenzkurven nach Gleichung (78) sind in Bild 14 eingetragen (obere Grenzkurve, als $\frac{x_c}{d_h} = \frac{2{,}33 \cdot 10^5}{Re}$, strichliert; untere, als $\frac{x_v}{d_h} = \frac{5{,}6 \cdot 10^4}{Re}$, strichpunktiert), wobei u_0 durch die maximale Geschwindigkeit $u_{max} = 1{,}5\,\bar{u}$ des laminar durchströmten Spaltes ersetzt und x_{krit} mit dem hydraulischen Durchmesser d_h des Spaltes dimensionslos gemacht ist. Die Kurve für den Spalt liegt erstens, abgesehen vom kritischen Bereich, flacher als die Kurven für die unbeeinflußte Einzelplatte, weil die Wände des Spaltes infolge des Druckgefälles aufeinander stabilisierend wirken, und zweitens näher an der oberen Grenzkurve, weil durch den Einlaufschutzkasten und die Abrundungsdüse vor dem Spalt der Fall der vorn zugeschärften und laminar angeströmten Platte besser angenähert ist.

Die nach Gleichung (77) definierte laminare Vorstrecke x_r bis zum Umschlagquerschnitt muß kleiner als die Einlaufstrecke x_a der turbulenten Strömung bis zur Ausbildung des Profils sein. Letztere ergab sich für den ebenen Spalt nach der rein turbulenten Einlauftheorie in Gleichung (45) zu: $x_a/d_h = 0{,}330\ Re^{1/4}$, während für das Rohr von Kreisquerschnitt entsprechend nach der Latzkoschen Theorie [4] $x_a/d_h = 0{,}693\ Re^{1/4}$ (d_h hier Rohrdurchmesser) sein sollte. Die Versuche von Kirsten [5] am Kreisrohr hatten gegenüber der Latzko-Formel zwischen $Re \approx 10000$ bis 50000 mindestens drei- bis fünffache Einlauflängen x_a ergeben. Nach Versuchen von Hermann [23] kann von $Re \approx 8 \cdot 10^4$ bis 10^6 der Einlaufvorgang nach 50 Rohrdurchmessern praktisch als beendet angesehen werden. Nach Messungen von Möbius [19] bei Reynoldsschen Zahlen zwischen $32 \cdot 10^4$ und $80 \cdot 10^4$ an Kreisrohren mit scharfem bzw. abgerundetem Einlauf liegt der lokale Widerstandsbeiwert erst in etwa 35 bzw. 70 Durchmessern Entfernung vom Einlauf nur noch 1% über dem Wert der ausgebildeten Strömung.

Auf Grund dieses Mißverhältnisses zwischen den theoretischen Einlauflängen x_a nach der rein turbulenten Einlauftheorie und den Meßwerten ergibt sich eine starke Aufspaltung in der Auftragung $Re^{1/4} \cdot c_{f,x}$ über $\frac{x}{d_h\,Re^{1/4}}$. Dies zeigt Bild 15 für einige Meßreihen bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen. Die ausgezogene Kurve, bei $\frac{x}{d_h\,Re^{1/4}} = 1{,}0$ unterteilt, stellt die Standardkurve der turbulenten Einlaufströmung nach Gleichung (50) und (52) dar. Die Versuchspunkte einer Meßreihe liegen bei kleinen Abszissenwerten über der Standardkurve, und zwar um so mehr, je kleiner die Reynoldssche Zahl ist. Mit wachsendem $\frac{x}{d_h\,Re^{1/4}}$ wird die Standardkurve erreicht und unterschritten. Später nähern sich die Versuchswerte der Standardkurve wieder von unten her, und zwar um so eher, je größer die Reynoldssche Zahl ist. Die Doppelkreise geben die nach Gleichung

8051

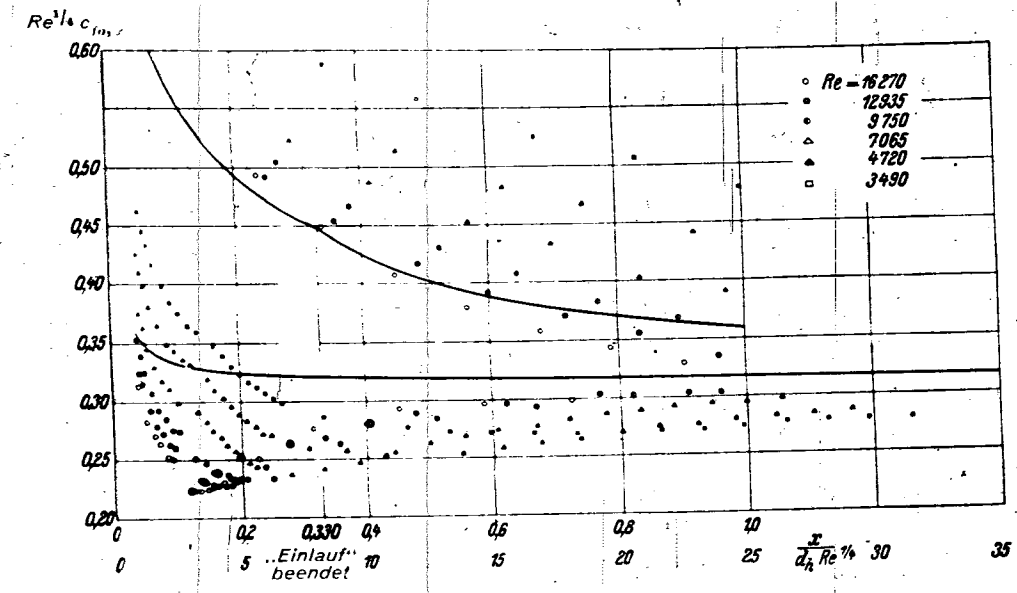


Bild 15. Prüfung der rein turbulenten Einlauftheorie. Die Funktion $Re^{1/4} c_{f_m,x}$ in Abhängigkeit von $\frac{x}{d_h Re^{1/4}}$.
theoretische Kurve nach der Impulstheorie.
Die verschiedenen Zeichen gelten für die eingetragenen Reynoldsschen Zahlen.
⊙ bezeichnet die angenommenen Umschlagstellen.

(77) errechnete »laminare Vorstrecke« für die betreffenden Reynoldsschen Zahlen an[4]).

Nunmehr sollen die Versuchswerte mit der kombinierten Theorie (turbulenter Einlauf mit laminarer Vorstrecke) verglichen werden. Nach den früheren Ausführungen und mit Gleichung (77) sollen für den mittleren Widerstandsbeiwert $c_{f_m,x}$ zwischen Eintrittsquerschnitt und dem Querschnitt in der Entfernung x die Beziehungen der Laminartheorie gelten, wenn $x/d_h \leq \frac{364}{(Re-3000)^{1/4}}$ ist (ausgezogene Kurven in Bild 13). Sobald $x/d_h > 364/(Re-3000)^{1/4}$ wird, tritt an Stelle von Gleichung (12) und (15) die Gleichung (66), in welcher nunmehr

$$\varphi(Re) = \frac{364}{(Re-3000)^{1/4}} \quad \text{und}$$

$$h[\varphi(Re)] = h\left\{\begin{matrix} g\left[\frac{364}{Re\,(Re-3000)^{1/4}}\right] \\ 0{,}8\,g\left[\frac{364}{Re\,(Re-3000)^{1/4}}\right]+0{,}2 \end{matrix}\right\} \text{ ist}^5).$$

Die gestrichelten Kurven in Bild 13 stellen die Auswertung der Gleichung (66) dar; sie setzen mit scharfem Knick in den nach Gleichung (77) definierten Umschlagquerschnitten an die Widerstandskurven nach der laminaren Einlauftheorie an und nähern sich in größerer Einlaufentfernung asymptotisch dem jeweiligen Endwert nach dem Blasiusschen Rohrreibungsgesetz. Die Versuchspunkte folgen recht befriedigend den unter stark idealisierenden Bedingungen gewonnenen theoretischen Kurven. Abgesehen von der bereits oben und in der zitierten Arbeit [10] besprochenen Verschiebung nach etwas kleineren Widerstandsbeiwerten gegen die Ergebnisse der Impulstheorie im laminaren Gebiet treten Abweichungen auf:

a) in der Gegend der Umschlagstelle, wo die Natur den scharfen Knick nach der Theorie offenbar durch einen sanften Bogen ausgleicht,

b) bei kleinen Reynoldsschen Zahlen stromabwärts von der Umschlagstelle, wo nach Bild 11 der Blasiussche Endwert auch am Spaltende noch nicht erreicht ist (kritisches Gebiet der Reynoldsschen Zahlen),

c) bei hohen Reynoldsschen Zahlen, stromabwärts von der Umschlagstelle, liegen die Versuchspunkte, wie auch in Bild 11, wahrscheinlich durch Rauhigkeitseinflüsse um einige % über den Kurven. Die letzten Punkte mit $\frac{x}{d_h} > 200$ sinken zum Teil wieder etwas ab. Dies kann auf einer Rückwirkung des Druckanstieges am Spaltende beruhen.

Diese Ergebnisse, an denen gleichzeitig der Einfluß kleiner Störungen des glatten Wandverlaufs zutage tritt, dürften besonders wertvoll sein für die grundsätzliche Untersuchung der Strömung um verkleidete, berippte Flugmotoren, da die Reynoldsschen Zahlen der Spaltströmung zwischen den Rippen in der gleichen Größenordnung liegen (10000 bis 20000). Natürlich kommt dort der Einfluß der Zentrifugalkräfte hinzu, welcher infolge der Sekundärbewegungen einer theoretischen Behandlung nur schwer zugänglich ist.

In Bild 13 sind am rechten Bildrand als punktierte, horizontale Geradenstücke die Endwerte nach Blasius aus Gleichung (22), denen die strichlierten Widerstandskurven zustreben, angegeben. Je nach der Größe der Reynoldsschen Zahl kann man für Spaltlängen, die größer als etwa 45 Durchmesser (bei kleinen Re) bzw. 18 Durchmesser (bei großen Re) sind, für erste Abschätzungen diese Blasiuswerte als obere Grenze des Widerstandsbeiwertes $c_{f_m,x}$ zugrunde legen. Bei noch kleineren Spaltlängen ist jedoch $c_{f_m,x}$ trotz des laminaren Charakters erheblich größer. Dieses zunächst vielleicht etwas überraschende Ergebnis ist einfach dadurch erklärt, daß bei Laminarströmung die Kernströmung am Einlauf auf viel größere Beträge beschleunigt werden muß als später in der turbulenten Strömung stromabwärts vom Umschlag auftreten.

Da aus Bild 13 die Brauchbarkeit der im Abschnitt IV entwickelten Theorie hervorgeht, kann man für Spalte mit großen Seitenverhältnissen, abgerundetem Einlauf und technisch glatten Wänden den Druckabfall von Spaltstrecken beliebiger Länge berechnen. Für die Fälle 1, 3 und 4 in Abschnitt IV, 1, bei denen der Meßquerschnitt in der ausgebildeten Strömung liegt, kann die Berechnung besonders einfach gestaltet werden. In Bild 5 sind nach

[4]) Die Versuchspunkte für die Meßstelle 16 sind hier ausgelassen. Sie liegen in Bild 15 zwischen $\frac{x}{d_h Re^{1/4}} \approx 2{,}5$ bis 3,5. Man erkennt, daß auch die nachfolgenden Meßwerte durch den Rostfleck noch um ein geringes in Mitleidenschaft gezogen sind.

[5]) Vor der Auswertung von Gleichung (66) können diejenigen auf der rechten Seite der Gleichung befindlichen Ausdrücke, welche nur von der Reynoldsschen Zahl abhängen, als Hilfsfunktionen aufgezeichnet werden (vgl. Bild 16).

8052

Gleichung (55), (57) und (59) die Werte $\Delta c_{f_{0,x}} \cdot \frac{x}{d_h}$ für diese drei Fälle unter Zugrundelegung der Gleichung (77) für die laminare Vorstrecke aufgezeichnet. Der Gültigkeitsbereich der einzelnen Kurven ist durch das Verschieben der laminaren Einlaufstrecke x_a nach Gleichung (10) und der laminaren Vorstrecke x_v nach Gleichung (77) gegeneinander eingeschränkt. Nach diesen Lagenbeziehungen ist festzustellen, welcher Fall einem vorgegebenem Spalt bei vorgegebener Reynoldsscher Zahl zuzuordnen ist. Dann wird der Widerstandsbeiwert für die gesamte Spaltlänge so errechnet, als ob die Strömung auf der ganzen Länge ausgebildet wäre (laminar in Fall 1, turbulent in Fall 3 und 4). Zu diesem Beiwert wird einfach ein dem Bild 5 zu entnehmendes Korrekturglied hinzugefügt.

Dieses Korrekturglied $\Delta c_{f_{0,x}}$ ist nach Bild 5 positiv für Fall 1 und negativ für die Fälle 3 und 4. In Bild 13 entspricht $\Delta c_{f_{0,x}}$ dem Unterschied zwischen den Horizontalen $96/Re$ bzw. $0{,}316/Re^{1/4}$ (erstere sind nicht eingezeichnet gegen die theoretischen Kurven. Die strichpunktierte Kurve in Bild 13 gibt das Ende der laminaren Einlaufströmung an, und die fünf Einzelfälle nach Abschnitt IV, 1 teilen sich in der Bildebene folgendermaßen auf:

Fall 1 ist möglich in dem Zwickel, welcher durch die strichpunktierte Kurve $\frac{x_a}{d_h} = 0{,}00649\ Re$ und die Verbindungslinie der Umschlagpunkte gebildet wird. Beide Kurven schneiden sich etwa auf der Beiwertskurve für $Re = 7000$.

Fall 2 beschränkt sich auf das Gebiet links der strichpunktierten Kurve und links der Verbindungslinie der Umschlagpunkte.

Fall 3 kommt in dem Gebiete rechts der Verbindungslinie der Umschlagpunkte und oberhalb der Beiwertskurve für $Re \approx 7000$ vor.

Fall 4 und 5 sind rechts der Verbindungslinie der Umschlagpunkte, aber unterhalb der Beiwertskurve für $Re \approx 7000$ möglich.

In jedem Falle läßt sich der Widerstandsbeiwert $c_{f_{0,x}}$ auf dem Wege über die Standardkurven bestimmen:

Ist $\frac{x}{d_h} < \frac{x_v}{d_h}$ (Bild 14), so wird aus Bild 2 für $\frac{x}{d_h Re}$ die Kenngröße $Re \cdot c_{f_{0,x}}$ entnommen und daraus durch Division mit der Reynoldsschen Zahl Re der Widerstandsbeiwert erhalten.

Für $\frac{x}{d_h} > \frac{x_v}{d_h}$ sind aus Bild 16, in welchem die nur von Re abhängigen Glieder der Gleichung (66) über Re aufgetragen wurden, die Werte für die Ausdrücke

$$A = Re \cdot c_{f_{0,d_h}\,\varphi(Re)} \cdot \frac{\varphi(Re)}{Re} \cdots Re^{1/4} \cdot c_{f_{0,d_h}\,Re^{1/4}\,h[\psi(Re)]} \times h[\psi(Re)] \quad \ldots \quad (79)$$

und

$$h[\psi(Re)] = \frac{\varphi(Re)}{Re^{1/4}} \quad \ldots \quad (80)$$

zu entnehmen.

Durch Addition des letzteren zu $\frac{x}{d_h Re^{1/4}}$ wird der Ausdruck

$$B = \frac{x}{d_h Re^{1/4}} + h[\psi(Re)] - \frac{\varphi(Re)}{Re^{1/4}}$$

gewonnen, für welchen aus Bild 4 die Kenngröße

$$C = Re^{1/4} \cdot c_{f_{0,x}\,-\,d_h\varphi(Re)\,+\,\frac{1}{4}d_h Re^{-1}\,h[\psi(Re)]}$$

abgelesen wird.

Der Widerstandsbeiwert $c_{f_{0,x}}$ nach Gleichung (66) ist damit:

$$c_{f_{0,x}} = \frac{d_h}{x}(BC + A) \quad \ldots \quad (81)$$

Die vorstehend beschriebenen Versuche zeigen, daß der Widerstandsbeiwert von ebenen Spalten mit abgerundeter Einlaufform näherungsweise nach der aufgestellten Theorie ermittelt werden kann.

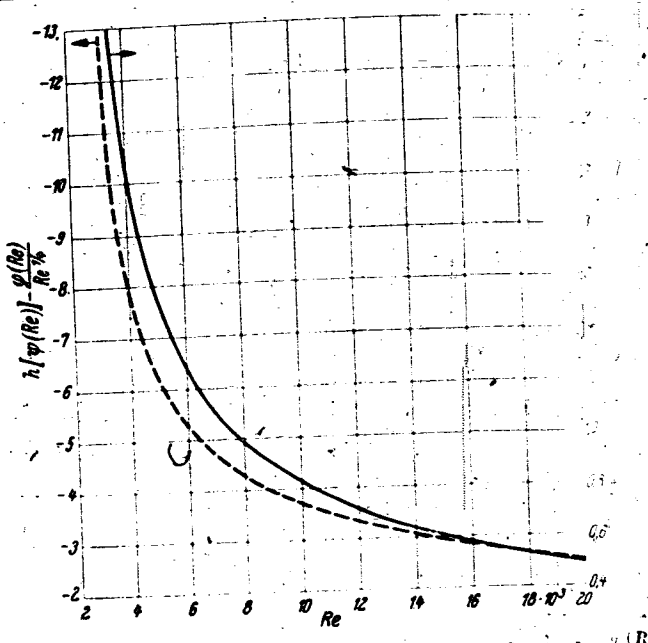


Bild 16. Die Hilfsfunktionen A nach Gl. (79) und $h[\psi(Re)] = \frac{\varphi(Re)}{Re^{1/4}}$ in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl Re des Spaltes, errechnet mit der empirischen Beziehung $\varphi(Re) = \frac{364}{(Re - 3000)^{1/4}}$ für die laminare Vorstrecke.

3. Der Spalt mit scharfrandigem Einlauf.

Der gleiche Spalt wie oben wurde ohne Einlaufdüse vor dem Spaltanfang und ohne Einlaufschutzkasten untersucht; dieser Fall sei als Spalt mit »scharfrandigem Einlauf« bezeichnet. Am Spaltanfang wurde, da die den Spalt bildenden Platten rd. 6 Spalthöhen dick waren, die Randstromlinie um etwa 90° umgelenkt.

Zahlentafel 3 zeigt eine der Meßreihen für überkritische Reynoldssche Zahlen an diesem Spalt ($Re = 12665$) und Bild 17 die Messungen des Widerstandsbeiwertes c_f für eine Meßstrecke in der Nähe des Spaltendes in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl wieder im Vergleich mit der Kurve $c_f = 96/Re$ (linke ausgezogene Kurve) und dem Blasiusschen Rohrreibungsgesetz (rechte Kurve). Die Meßpunkte in Bild 11 und 17 weichen kaum voneinander ab, die ausgebildete Strömung hängt also nicht von der Form des Spalteinlaufs ab.

Die vom Eintrittsquerschnitt an gemittelten Widerstandsbeiwerte $c_{f_{0,x}}$ wurden nach den folgenden Überlegungen theoretisch aufgeteilt. Bei guter Einlaufabrundung, also rein laminarer Einströmung, würde der statische Druck p_{xl} zunächst mit der Einlaufentfernung x nach den Gesetzen der Laminartheorie absinken. Bei scharfrandigem Einlauf ist diese Absenkung bis zur engsten Einschnürungsstelle der Strömung viel stärker. Im Diffusorgebiet des einströmenden Strahles wird Druck zurückgewonnen, so daß die Differenz der statischen Drücke $p_{xl} - p_x$ (p_x ist hier gemessener statischer Druck im Spalt mit scharfrandigem Einlauf an der Stelle x, p_{xl} ist errechneter Druck an der gleichen Stelle bei idealer Einströmung) in diesem Gebiet wieder abnimmt. Noch weiter stromabwärts wird $p_{xl} - p_x$ wieder zunehmen, da die Strömung im Spalt mit scharfrandiger Einlaufform früher turbulent wird als die ideale Einströmung. Diese Überlegungen wurden durch die Meßauswertung bestätigt. Es wurden, wie dies in Bild 18 für das Beispiel der Zahlentafel 3 durchgeführt ist, die gegen den Außenraum gemessenen Druckunterschiede $-\Delta p_x$, vermindert um den errechneten Druckabfall $-\Delta p_{xl}$, über der relativen Entfernung x/h_h vom Spaltanfang für alle untersuchten Reynoldsschen Zahlen aufgetragen. Die Mittelkurven durch die Meßreihen verlaufen in der Gegend des

8053

Zahlentafel 3. Beispiel eines Meßblattes (Spalt mit scharfrandigem Einlauf).

Meßblatt Nr.: 90 Tag: 19. 2. 1941 | Meßzweck: Spalt $b/a = 1/50$ ohne Einlaufdüse und -schutzkasten

Zimmertemperatur: 20,6° C | Barometerstand: 734,3 mm Hg

psychrometrische Differenz: 6 ... 6,6° C | relative Feuchte im Raum: 51 %

Unterdruck im Gleichrichterkasten: 567,5 — 452,0 = 115,5 mm Hg

Blendenmessung: Blende II mit $d_2 = 15{,}16$ mm in Rohr 2 mit $D = 50{,}95$ mm; $m_2 = 0{,}0886$

Manometer: Präz.-U-Rohr | Füllung: Wasser | spez. Gewicht: 0,998 g/cm³

Gradbogenfaktor: ⊥ | Nullstellung: —

Betriebsablesung: 785,0 — 183,5 = 601,5 mm | Mittelwert: 601,5 mm

Wirkdruck: $P_1 - P_2 = 600$ mm WS

Spaltmessung*): Ansaugen aus freier Zimmerluft bei $Re = 12665$

Manometer: AVAG Nr. 2/265, System: Betz | Füllung: Wasser | spez. Gewicht: 0,998 g/cm³

Gradbogenfaktor: ⊥ | Nullstellung: 1,0 mm — 1,0 mm

Meßstelle:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Meßstelle:													
0	1,0	218,50 (5,35)											
1		1,0	6,48 (10,49)	13,40 (14,9)	22,00 (20,4)	27,78 (25,1)	34,87 (30,1)	42,07 (34,95)	49,46 (40,1)	54,95 (44,9)	62,30 (50,0)	75,48 (60,45)	87,78 (70,12)

Meßstelle:	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Meßstelle:													
1	102,19 (80,15)	114,3 (90,4)	131,3 (100,1)	156,1 (110,2)	— (120,1)	— (129,9)	— (140,2)	193,8 (150,05)	206,9 (160,2)	221,3 (169,7)	233,7 (180,2)	246,3 (190,1)	259,3 (200,25)

Meßstelle:	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
Meßstelle:													
1	324,7 (249,9)	329,7 (250,1)	327,3 (249,9)	326,3 (250,1)	325,3 (250,15)	325,0 (250,05)	393,5 (299,3)						
32							1,0	71,10 (349,9	— (400,3)	— (450,0)	278,43 (500,1)		
36											1,0	— (550,7)	— (600,9)

Meßstelle:	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Meßstelle:												
36	207,6 (650,6)											
39	1,0	— (700,6)	— (750,5)	224,0 (800,5)								
42				1,0	— (850,6)	— (900,6)	218,2 (950,9)	217,6 (950,5)	218,2 (950,3)	216,5 (950,8)	218,5 (950,4)	218,3 (950,8)

Bemerkungen:

*) Die Außenluft im Zimmer ist im folgenden mit Meßstelle 0 bezeichnet. Die nichteingeklammerten Werte geben die Ablesungen am Manometer in mm, die eingeklammerten die zugehörigen Entfernungen vom Spaltanfang an.

8054

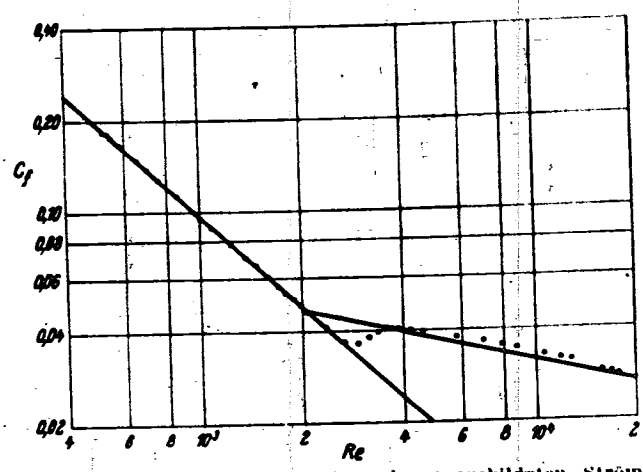


Bild 17. Der Widerstandsbeiwert c_f der ausgebildeten Strömung in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl Re (Spalt mit scharfrandigem Einlauf).

Minimums fast horizontal, d. h. trotz der verschiedenen Einlaufformen der beiden verglichenen Spalte verlaufen die Druckabfallkurven ein Stück weit nahezu parallel, besonders bei Reynoldsschen Zahlen, die nicht viel über 3000 liegen. Der Kleinstwert der Druckabfalldifferenz $(-\Delta p_x + \Delta p_{x_l})$ wurde daher als bleibender Kontraktions-Druckverlust $-\Delta p_w$, hervorgerufen durch die Energieverluste in der Kontraktionszone, aufgefaßt.

Die Einlaufentfernungen, in denen die $(-\Delta p_x + \Delta p_{x_l})$-Kurven in der Auftragung gemäß Bild 18 etwas stromabwärts vom Minimum bei größeren Reynoldsschen Zahlen wieder ansteigen, wurden als laminare Vorstrecken x_v bezeichnet. Sie lassen sich zwischen etwa $Re = 4000$ bis 18000 durch die Beziehung

$$\frac{x_v}{d_h} = \frac{1250}{(Re - 3000)^{3/4}} = \varphi_1(Re) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

annähern, welche daher als empirisches Gesetz für die Umschlaglänge den späteren Rechnungen zugrunde gelegt wurde.

Der bleibende Kontraktions-Druckverlust $-\Delta p_w$, dimensionslos gemacht durch den Staudruck q_{x_v} im Umschlagquerschnitt, ist in Bild 19 in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl aufgetragen, wobei q_{x_v} unter der Annahme isothermer Strömung aus den Versuchsdaten berechnet wurde.

In Bild 20 sind die experimentellen, vom Eintrittsquerschnitt an gemittelten und auf den Staudruck q_x an der Meßstelle x bezogenen Widerstandsbeiwerte $c_{f_{o,x}}$ gegen x/d_h für verschiedene überkritische Reynoldssche Zahlen als Punktreihen eingetragen. An den Meßreihen fällt vor allem auf, daß in dem Gebiet Reynoldsscher Zahlen in der Nähe von $Re_{krit} = 3000$ Überschneidungen vorkommen, offenbar, weil wenig über der kritischen Zahl der Umschlag so weit stromabwärts erfolgt, daß die Strömung sehr lange überwiegend von den Laminargesetzen beherrscht wird. Durch geringe Erhöhung der Reynoldsschen Zahl schnellt aber der Umschlagquerschnitt in diesem Re-Bereich sehr stark einlaufwärts, so daß der mittlere Widerstandsbeiwert dann in gleicher Einlaufentfernung bei der höheren Reynoldsschen Zahl höher liegen kann als der der niedrigeren Reynoldsschen Zahl entsprechende.

Mit Hilfe der Standardkurven, der Umschlagfunktion nach Gleichung (82) und dem Kontraktions-Druckverlust nach Bild 19 kann nun der Widerstandsbeiwert $c_{f_{o,x}}$ auch für den Spalt mit scharfrandiger Einlaufform theoretisch ermittelt werden.

Ist $x/d_h < \frac{x_v}{d_h}$, so wird aus Bild 2 für x/d_h Re die Kenngröße $(Re \cdot c_{f_{o,x}})_l$ entnommen, wobei der Fußzeiger l hier die ideale, laminare Einströmung bezeichnet. Durch entsprechendes Hinzufügen des Kontraktions-Druckverlustes folgt der gesuchte Widerstandsbeiwert aus

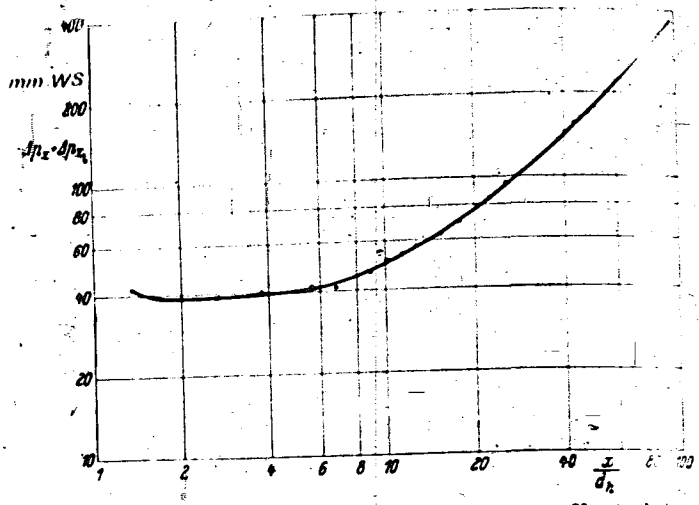


Bild 18. Beispiel zur Bestimmung des bleibenden Kontraktions-Druckverlustes $-\Delta p_w$.

Die Druckabfalldifferenz $(-\Delta p_x + \Delta p_{x_l})$ aus Versuch und Theorie in Abhängigkeit von der bezogenen Einlaufentfernung x/d_h für eine Reynoldssche Zahl $Re = 12665$.

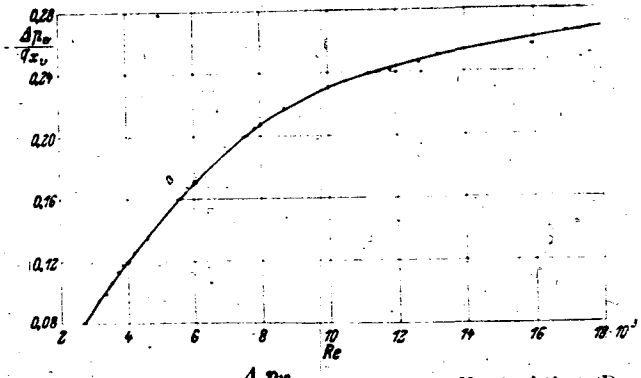


Bild 19. Das Verhältnis $-\frac{\Delta p_w}{q_{x_v}}$ aus bleibendem Kontraktions-Druckverlust und Staudruck im Umschlagsquerschnitt in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl Re.

$$c_{f_{o,x}} = \frac{(Re \cdot c_{f_{o,x}})_l}{Re} + \frac{\Delta p_w}{q_{x_v}} \cdot \frac{d_h}{x} \cdot \frac{q_{x_v}}{q_x} \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

Die Größe $\frac{\Delta p_w}{q_{x_v}}$ ist aus Bild 19 zu entnehmen. Das Verhältnis q_{x_v}/q_x ist praktisch gleich eins.

Die nach Gleichung (83) errechneten Widerstandsbeiwerte sind in Bild 20 als ausgezogene Kurven eingezeichnet. Bei sehr kleinen Entfernungen x/d_h liegen die Versuchswerte erheblich über diesen Kurven, da letztere erst vom Ende der Kontraktionszone an sinnvoll werden. Bei $Re \approx 3000$ reichen diese Kontraktionseinflüsse nach Bild 20 etwa bis $\frac{x}{d_h} = 5$, bei $Re \approx 18000$ sind sie offenbar bei $\frac{x}{d_h} = 2$ bereits beendet.

Für $\frac{x}{d_h} > \frac{x_v}{d_h}$ wird wieder die Gleichung (66) herangezogen, deren nur von der Reynoldsschen Zahl abhängige Glieder in Bild (21) dargestellt sind.

In diesem Bild bedeutet:

$$A_1 = Re \cdot c_{f_{o,d_h}\varphi_1(Re)} \cdot \frac{\varphi_1(Re)}{Re} = Re^{3/4} \cdot c_{f_{o,d_h}Re^{3/4}h[\varphi_1(Re)]} \times h[\varphi_1(Re)] \quad . \quad . \quad (84)$$

mit

$$\varphi_1(Re) = \frac{g\left[\frac{\varphi_1(Re)}{Re}\right]}{0{,}8\, g\left[\frac{\varphi_1(Re)}{Re}\right] + 0{,}2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Für die bekannte Reynoldssche Zahl wird aus Bild (21) A_1 und $h[\varphi_1(Re)]$ — $\frac{\varphi_1(Re)}{Re^{1/4}}$ abgelesen, und aus letzterem

8055

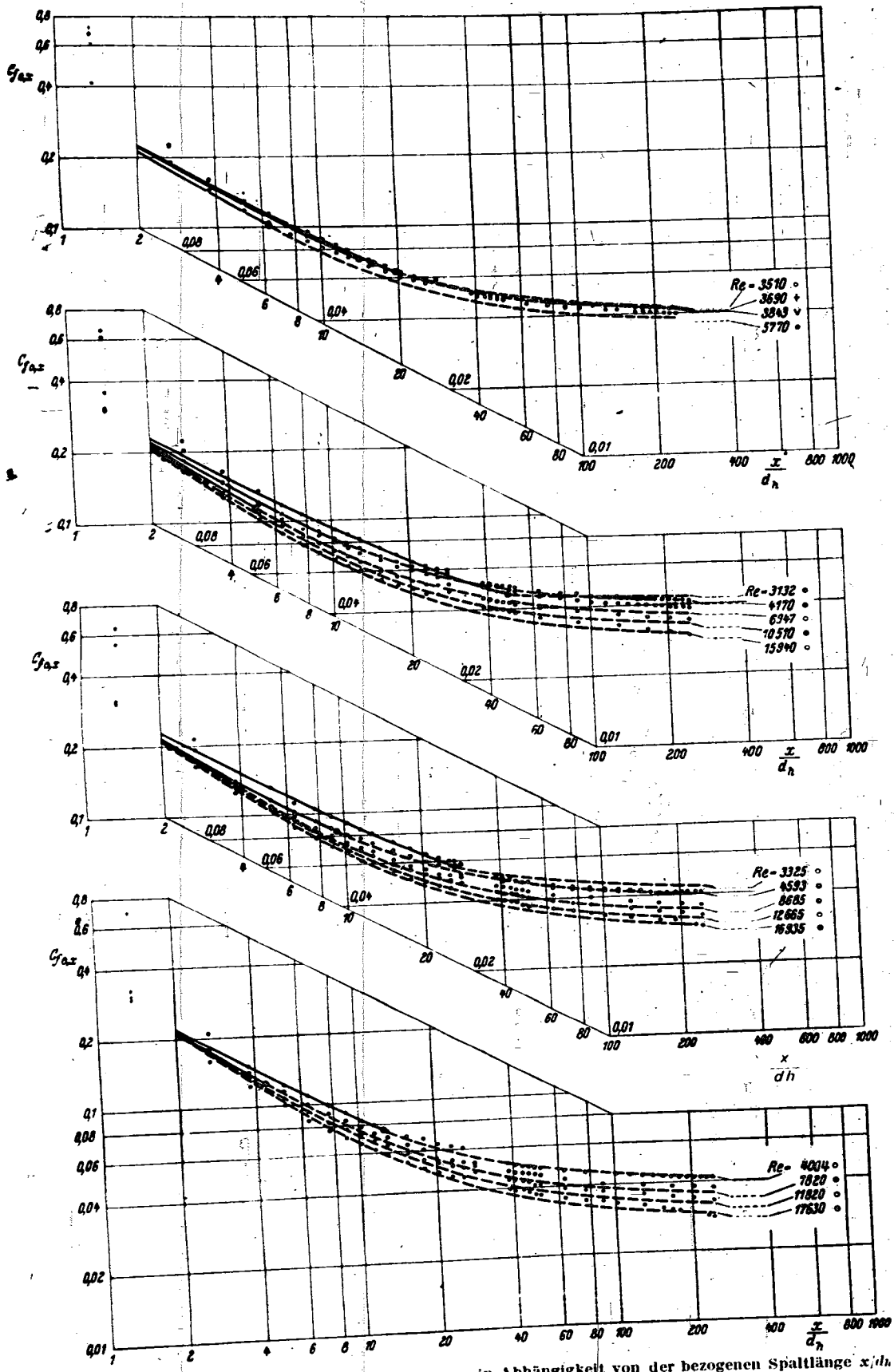


Fig. 20. Der vom Spaltanfang an gemittelte Widerstandsbeiwert $c_{fa,x}$ in Abhängigkeit von der bezogenen Spaltlänge x/d_h bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen Re.

– theoretischer Widerstandsbeiwert einer Laminarströmung mit bleibendem Kontraktions-Druckverlust durch Strahleinschnürung.

theoretischer Widerstandsbeiwert der turbulenten Strömung mit laminarer Vorstrecke, Asymptoten für große x/d_h nach Blasius.

angenommene Umschlagstellen,

○ ● ◐ + V gemessene Widerstandsbeiwerte. (Pause ist bei der ZWB zu beziehen.)

8056

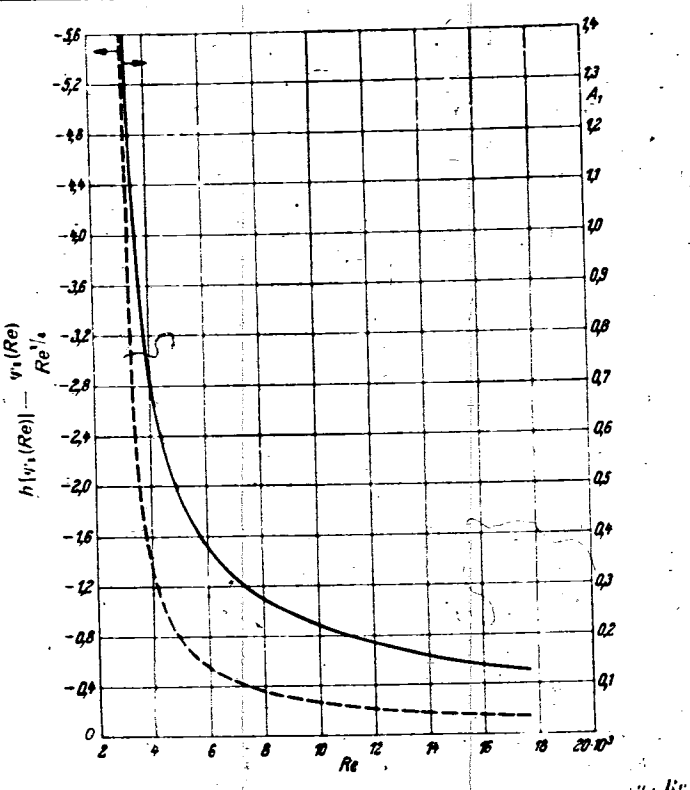


Bild 21. Die Hilfsfunktionen A_1 nach Gl. (84) und $h[\psi_1(Re)] - \frac{\psi_1 Re}{Re^{1/4}}$ in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl des Spaltes, errechnet mit der empirischen Beziehung $\psi_1(Re) = \frac{1250}{(Re-3000)^{1/3}}$

durch Hinzufügen von $x/d_h Re^{1/4}$ die Größe

$$B_1 = \frac{x}{d_h Re^{1/4}} + h[\psi_1(Re)] - \frac{\psi_1(Re)}{Re^{1/4}}$$

erhalten. Für die Abszisse B_1 wird aus Bild 4 die Kenngröße:

$$C_1 = Re^{1/4} \cdot c_{f_0,x} - a_h \psi_1(Re) + a_h Re^{1/4} h[\psi_1(Re)]$$

abgelesen.

Der gesuchte Widerstandsbeiwert $c_{f_0,x}$ ist dann nach Gl. (66) unter Einbeziehung des bleibenden Kontraktionsdruckverlustes:

$$c_{f_0,x} = \frac{d_h}{x}\left[B_1 C_1 + A_1 + \frac{\Delta p_v}{q_x} \cdot \frac{q_{x_v}}{q_x}\right] \quad (86)$$

wobei wieder $\frac{q_{x_v}}{q_x}$ praktisch gleich eins gesetzt werden kann.

Die Ergebnisse nach Gl. (86) sind in Bild 20 als gestrichelte Kurven eingetragen, welche in den durch Doppelkreise gekennzeichneten »Umschlagspunkten« beginnen. Diese Kurven nähern den Kurvencharakter der Meßergebnisse recht gut an. Insbesondere treten auch die Überschneidungen bei nur wenig über 3000 liegenden Reynoldsschen Zahlen auf. Bei höheren Reynoldsschen Zahlen liegen die Versuchspunkte stromabwärts vom Umschlag etwas zu hoch. Dies wird von uns, wie bereits an Hand von Bild 11 und 17 besprochen, als Rauhigkeitseinfluß gedeutet. Im Gegensatz zu Bild 13 nähern sich in Bild 20 die Widerstandskurven den Blasiusschen Endwerten, die als kurzgestrichelte Horizontale am rechten Bildrand eingezeichnet sind, durchweg asymptotisch von oben her.

4. Schlußbemerkungen.

a) Solange eine wirkliche Strömung durch einen Spalt noch als isotherm und inkompressibel angesehen werden kann, ist mit dem Widerstandsbeiwert $c_{f_0,x}$ zugleich auch der den Praktiker allein interessierende Druckabfall $p_0 - p_x$ zwischen Spaltanfang und Meßquerschnitt an der Stelle x nach

$$p_0 - p_x = c_{f_0,x} \cdot \frac{x}{d_h} q_x \quad (87)$$

bekannt, da der Staudruck q_x unabhängig von x ist.

Bei isothermer, aber kompressibler Strömung ändert sich der Staudruck bei nicht zu hohen Geschwindigkeiten gemäß

$$q_x = \frac{p_0}{p_x} q_0 \quad (88)$$

wenn der Fußzeiger 0 den Eintrittsquerschnitt bezeichnet. Hieraus folgt für den bezogenen Druckabfall

$$\frac{p_0 - p_x}{p_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - c_{f_0,x} \cdot \frac{x}{d_h} \cdot \frac{q_0}{p_0}\right) \quad (89)$$

wonach der Druckabfall berechnet werden kann, sobald nach den vorstehenden Ausführungen der Widerstandsbeiwert $c_{f_0,x}$ ermittelt ist. Für

$$c_{f_0,x} \cdot \frac{x}{d_h} \cdot \frac{q_0}{p_0} = 0{,}1$$

liegt der bezogene Druckabfall der kompressiblen Strömung bereits um etwa 13% höher als der einer inkompressiblen Strömung.

b) Wird nicht der von $x = 0$ an gemittelte Widerstandsbeiwert $c_{f_0,x}$, sondern der örtliche Widerstandsbeiwert $c_{f,x}$ für eine Meßstelle x im Einlaufgebiet gesucht, so läßt sich Gleichung (66) sehr einfach zu einer Differenzenrechnung verwenden. Es ist angenähert

$$c_{f,x} = \frac{x_2 c_{f_0,x_2} - x_1 c_{f_0,x_1}}{x_2 - x_1} \quad (90)$$

wenn die Fußzeiger 1 und 2 eine Spaltstrecke bezeichnen, in deren Mitte gerade $c_{f,x}$ bestimmt werden soll.

Wählt man z. B.

$$\frac{x_2}{d_h} = \frac{x}{d_h} + 1 \quad \text{und} \quad \frac{x_1}{d_h} = \frac{x}{d_h} - 1,$$

so wird:

$$c_{f,x} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{d_h} + 1\right) c_{f_0,x+d_h} - \left(\frac{x}{d_h} - 1\right) c_{f_0,x-d_h}\right] \quad (91)$$

Bei einer solchen Differenzbildung fallen (betrachtet sei nur der Fall $x > x_v$) die Glieder A für einen Spalt mit Einlaufabrundung [vgl. Gleichung (79)] bzw. A_1 für einen Spalt mit scharfrandigem Einlauf [vgl. Gleichung (84)] aus Gleichung (66) heraus, beim letzteren auch noch die bleibenden Kontraktions-Druckverluste, wenn der betrachtete Querschnitt stromabwärts vom Ende der Kontraktionszone liegt. Dann ist:

$$c_{f,x} = \frac{1}{2}\left[Re^{1/4} \cdot c_{f_0,x+d_h-x_v+d_h Re^{1/4} h[\psi(Re)]} \left\{\frac{x + d_h}{d_h Re^{1/4}} - \frac{x_v}{d_h Re^{1/4}} + h[\psi(Re)]\right\} - Re^{1/4} \cdot c_{f_0,x-d_h-x_v+d_h Re^{1/4} h[\psi(Re)]} \left\{\frac{x - d_h}{d_h Re^{1/4}} - \frac{x_v}{d_h Re^{1/4}} + h[\psi(Re)]\right\}\right] \quad (92)$$

Für Spalte mit scharfrandigem Einlauf ist überall in Gleichung (92) an Stelle von ψ die Funktion ψ_1 zu setzen.

Nach dieser Differenzengleichung (92) wurden örtliche Widerstandsbeiwerte c_{fx} von $Re = 107000$ bis 426000 errechnet und mit noch unveröffentlichten Messungen von H. Reichert (Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring) an einem Rohr von Kreisquerschnitt verglichen. Die Reichertsche Meßstelle lag bei $\frac{x}{d_h} = 5{,}83$. Die Kenngröße $\frac{x}{d_h Re}$ war also bei diesen Versuchen so klein, daß das Rohr

8957

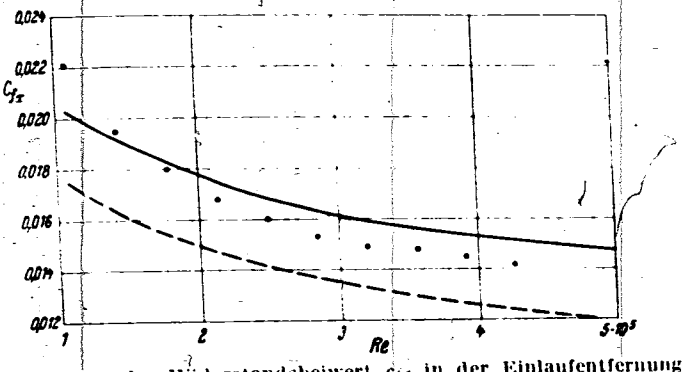


Bild 22. Lokaler Widerstandsbeiwert c_{fx} in der Einlaufentfernung $\frac{x}{d_h} = 5{,}83$ bei hohen Reynoldsschen Zahlen:
— — nach Blasius für die ausgebildete Rohrströmung,
○ nach Versuchen von Reichert an einem Rohr,
nach der Theorie Hahnemann-Ehret am Spalt.

sich in Einlaufnähe spaltähnlich verhalten sollte. Bild 22 stellt unsere Rechnung den Reichertschen Versuchen gegenüber. Die Übereinstimmung ist befriedigend[9]). Es erweist sich also, daß die in dieser Abhandlung entwickelte Theorie auch für hohe Reynoldssche Zahlen brauchbar ist. Die Auswertung der Gleichung (92) vereinfacht sich hierfür noch weiter, da $h\,[\psi(Re)]$ bei so hohen Re gegen Null geht.

VII. Schrifttum.

[1] E. Glücklich, Klimaanlagen, gesehen vom Standpunkte des Architekten. Haustechn. Rdsch. Bd. 46 (1941), S. 105/109.

[2] J. R. Zwickl, The flow of air and its distribution through ducts. Heat. a. Ventil. Bd. 36 (1939), Nr. 2, S. 15/17; Nr. 3, S. 49/52; Nr. 4, S. 51/53; Nr. 5, S. 48/50; Nr. 6, S. 44/45 u. Nr. 7, S. 64/66.

[3] L. Schiller, Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 2 (1922), S. 96/106; auch Hdb. d. Exp. Phys. IV, 4, S. 48/53.

[4] H. Latzko, Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom. Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921), S. 268/290.

[5] H. Kirsten II, Experimentelle Untersuchung der Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung bei der turbulenten Rohrströmung. Leipziger Diss. 1927.

[6] J. Nikuradse, Die entsprechenden Messungen sind noch nicht veröffentlicht worden.

[7] J. Nikuradse, Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. Forsch.-Arb. a. d. Geb. d. Ing.wes. H. 281 (1926).

[8] L. Prandtl, Über die ausgebildete Turbulenz. Verhandl. d. 2. internat. Kongr. f. techn. Mech. Zürich 1926. Orell Füßli, Zürich 1927. S. 62.

[9] H. Schlichting, Laminare Kanaleinlaufströmung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 14 (1934), S. 368/373.

[10] H. Hahnemann und L. Ehret, Der Druckverlust der laminaren Strömung in der Anlaufstrecke von geraden ebenen Spalten. Jahrbuch 1941 der deutschen Luftf.-Forschg., S. I 21/32.

[11] H. Kurzweg, Neue Untersuchungen über die Entstehung der turbulenten Rohrströmung. Ann. Phys. Bd. 18 (1933), S. 193/216.

[12] H. Hahnemann, Neue experimentelle Untersuchungen über die Entstehung der turbulenten Rohrströmung. Forschung Bd. 8 (1937), S. 226/237.

[13] S. J. Davies und C. M. White, An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular section. Proc. Roy. Soc. Lond. (A) Bd. 119 (1928), S. 92.

[14] L. Schiller, Strömung in Rohren. Hdb. d. Exp. Phys. IV, 4, S. 148.

[15] L. Prandtl, Abriß der Strömungslehre. Vieweg, Braunschweig 1935. 2. Aufl., S. 94.

[16] Th. v. Kármán, Über laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921), S. 233/252.

[17] VDI, Regeln für die Durchflußmessung mit genormten Düsen und Blenden. VDI-Verlag (1937), DIN 1952.

[18] G. Ruppel, Amerikanische Durchflußmessungen. Forschung Bd. 2 (1931), S. 340/341.

[19] L. Schiller, Strömung in Rohren. Hdb. d. Exp. Phys. IV, 4, S. 91/92.

[20] F. Kohlrausch, Praktische Physik. 17. Aufl. (1935), S. 199.

[21] F. C. Lea und A. G. Tadros, Flow of water through a circular tube with a central core and through rectangular tubes. Phil. Mag. (7) Bd. 11 (1931), S. 1235/1244.

[22] Hdb. d. Exp. Phys. IV, 2, S. 278/283.

[23] R. Hermann, Experimentelle Untersuchung zum Widerstandsgesetz des Kreisrohres bei hohen Reynoldsschen Zahlen und großen Anlauflängen. Leipziger Dissertation 1929; auch R. Hermann u. Th. Burbach, Strömungswiderstand und Wärmeübergang in Rohren. Akadem. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1930.

[9]) Die Reichertschen Versuchswerte müssen etwas unter der theoretischen Kurve liegen, da das Versuchsrohr die plötzliche Verengung eines weiteren Rohres darstellte. Das Geschwindigkeitsprofil am Rohranfang war daher bereits etwas gewölbt.

8058

Mit Überschallgeschwindigkeit angeblasene Kegelspitzen*).

Von W. Hantzsche und H. Wendt.

Bericht aus dem Institut für Gasdynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, E. V., Braunschweig.

Für die Behandlung der Überschallströmung gegen Keilschneiden eignet sich eine Zusammenstellung der bei den Verdichtungsstößen auftretenden Geschwindigkeiten, das sog. Stoßpolarendiagramm, besonders gut. Im entsprechenden rotationssymmetrischen Falle der für die Ballistik wichtigen Überschallströmung gegen Kegelspitzen findet im kegeligen Felde nach dem Verdichtungsstoß bis zum Kegelmantel noch eine adiabatische Kompression statt. Die dabei am Kegelmantel erreichbaren Geschwindigkeiten liegen jetzt auf einer die Stoßpolare umschließenden Linie, der sog. Apfelkurve, deren Diagramm Busemann kürzlich veröffentlichte. Zur genauen Kenntnis der Überschallströmung gegen Kegelspitzen sind aber noch die der adiabatischen Kompression entsprechenden Verbindungskurven zwischen Stoßpolaren und Apfelkurven notwendig. Sie werden in der vorliegenden Arbeit angegeben. Sie wurden durch graphisch-numerische Integration der Differentialgleichung des achsensymmetrischen kegeligen Feldes im Hodographen für alle Kegelöffnungswinkel und Anblasegeschwindigkeiten gewonnen. Die daraus ermittelten Drücke am Kegelmantel werden in Diagrammen dargestellt und mit dem ebenen Falle verglichen. Zum besseren Verständnis wird einleitend ein elementarer Überblick zur Theorie der kegeligen Felder gegeben.

Gliederung.

1. Überschallströmung gegen einen Keil.
2. Überschallströmung gegen einen Kegel.

Die Annahme, daß bei Gasströmungen mit Überschallgeschwindigkeit ein Geschwindigkeitspotential existiert, ist nur in wenigen Sonderfällen erfüllt. Seit langem bekannt ist die Expansion eines Gases um eine Ecke[1]) — ein geschlossen integrierbares Beispiel einer Überschallströmung — und die Strömung gegen einen Keil. Bei der letzteren tritt zwar ein Verdichtungsstoß auf, die Strömung nach dem Stoß ist aber wenigstens in den Fällen, wo der Stoß an der Keilspitze beginnt, wieder eine Parallelströmung. 1929 gab Busemann[2]) noch die axiale Strömung gegen kegelförmige Spitzen an. Hier ist, wenn bei fester Machscher Zahl der Öffnungswinkel des Kegels nicht zu groß wird, die Strömung nach dem Stoß der einfachste Fall eines später von Busemann[3]) genauer behandelten allgemeineren Typs, der sog. kegeligen Felder. Es sind dies (nicht notwendig rotationsfreie) maßstabslose Strömungen, die durch ähnliche Verzerrung von einem bestimmten Punkt aus auf sich abgebildet werden. Alle Geraden durch das Ähnlichkeitszentrum sind Träger gleicher Gaszustände (Geschwindigkeit, Druck, Dichte). Das sich an eine Parallelströmung anschließende axiale kegelige Feld tritt außer bei der Strömung gegen Kegelspitzen noch bei einer bestimmten Art von Verdichtungsdüsen auf.

Die vorliegende Arbeit knüpft eng an die von Busemann über axiale kegelige Felder an, behandelt aber nur die Strömung gegen Kegelspitzen. Es werden die genauen Unterlagen und die weitere Auswertung der im Überblick schon von Busemann veröffentlichten Apfelkurven angegeben.

1. Überschallströmung gegen einen Keil.

Tritt in einer zweidimensionalen stationären Gasströmung ein Verdichtungsstoß auf, so bestehen an der Stoßfläche, wenn man mit dem Index 1 die Größen vor dem Stoß und dem Index 2 die nach dem Stoß bezeichnet, die aus der Kontinuität, der Bilanz des Impulses und der Energie folgenden Gleichungen:

$$\varrho_1 w_{1n} = \varrho_2 w_{2n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$p_1 + \varrho_1 w_{1n}^2 = p_2 + \varrho_2 w_{2n}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2a)$$

$$\varrho_1 w_{1n} w_{1t} = \varrho_2 w_{2n} w_{2t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2b)$$

$$i_1 + \frac{1}{2} w_1^2 = i_2 + \frac{1}{2} w_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

w_n und w_t sind dabei die Geschwindigkeitskomponenten normal und parallel zur Stoßfläche, ϱ die Dichte, p der Druck und i der Wärmeinhalt, (Bild 1). Die Gl. (2b) zeigt zusammen mit (1), daß $w_{t1} = w_{t2}$ ist, die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit beim Stoß also unverändert bleibt.

Den Stoßvorgang verfolgt man am besten im Hodographen, wo wir uns kartesische Koordinaten u, v eingeführt denken. Die von einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit aus, die hier in der u-Achse liege (u_1), durch Stoß erreichbaren Zustände (u_2, v_2) liegen auf dem geschlossenen Zweige eines kartesischen Blattes, der Stoßpolaren (Bild 2), deren Gleichung für ein ideales Gas leicht aus den Beziehungen (1) bis (3) hergeleitet werden kann:

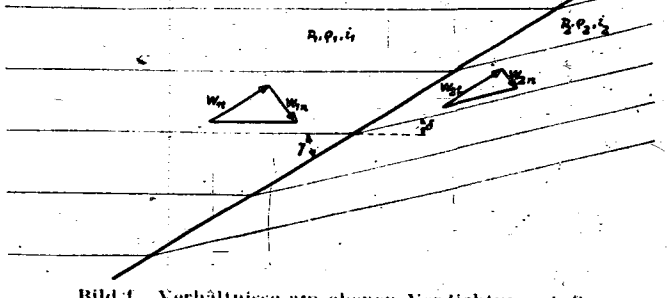


Bild 1. Verhältnisse am ebenen Verdichtungsstoß.

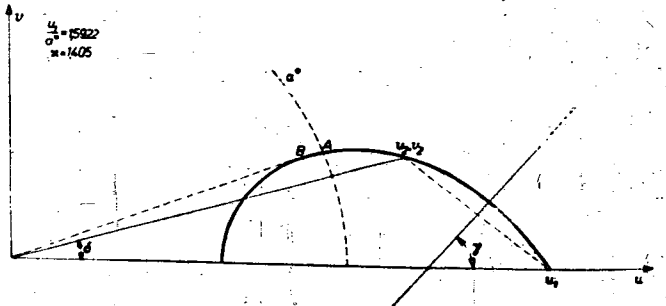


Bild 2. Stoßpolare.

*) A 35 4.

[1]) Th. Meyer, Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt. Dissert. Göttingen, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, VDI Heft 62 (1908).

[2]) A. Busemann, Drücke auf kegelförmige Spitzen bei Bewegung mit Überschallgeschwindigkeit. Z. angew. Math. Mech. Bd. 9 (1929), S. 496.

A. Busemann, Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung. Luftf.-Forschg. Bd. 19 (1942), S. 137—144.

[3]) A. Busemann, Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit. Convegno di sci. fis. mat. nat., Roma 1935, S. 345 und Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935), S. 217.

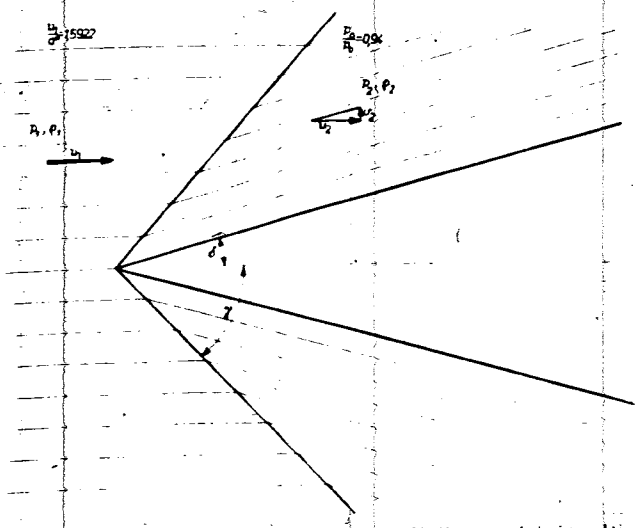


Bild 3. Überschallströmung gegen einen Keil ($\varkappa = 1{,}405$). Die zugehörige Stoßpolare ist in Bild 2 dargestellt.

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\varkappa} \left| \frac{\frac{a^{*2}}{u_1} - \frac{u_2}{\varkappa+1}}{\frac{a^{*2}}{u_1} - \frac{u_1}{\varkappa+1}} \right|^{\varkappa} \quad \ldots \quad (4)$$

a^* bedeutet dabei die kritische Geschwindigkeit, $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und Volumen. Die Normale auf der Verbindungsstrecke des Zustandes vor und nach dem Stoße, einer Sehne des Blattes, gibt, weil beim Stoß nur die Normalkomponente einen Sprung erleidet, offenbar die Richtung γ der Stoßfläche gegen die Anströmung an. So entspricht z. B. die in Bild 3 gezeichnete Strömung gegen einen Keil mit dem Winkel $2\,\delta$ den in Bild 2 dargestellten Verhältnissen. Der Grenzwert, dem der Winkel γ bei abnehmender Stärke des Verdichtungsstoßes zustrebt, ist folglich der Machsche Winkel. Die obere Schranke für γ ist 90^0 und tritt bei einem geraden Verdichtungsstoß ($u_2 = \frac{a^{*2}}{u_1}$, $\frac{p_2}{p_1} = 0$) auf. Bild 2 zeigt noch, daß es bei fester Machscher Zahl eine maximale Umlenkung, also einen größtmöglichen Keilwinkel gibt. Für Keile mit geringerem Winkel gibt es zwei mögliche Verdichtungsstöße, wovon im allgemeinen einer nach Überschall und einer nach Unterschall führt. Die praktisch eintretende und daher als »stabil« bezeichnete Lösung ist die Überschallösung. Die Unterschallösung läßt sich aber auch, wie Herr G. Guderley zeigen konnte, experimentell nachweisen. Da der Berührungspunkt B der Tangente vom Hodographennullpunkt an die Stoßpolare im allgemeinen nicht mit dem Schnittpunkt A des Kreises der kritischen Geschwindigkeit zusammenfällt, sondern noch im Unterschallgebiet liegt, gibt es für Keilwinkel auf dem allerdings sehr kleinen Bogen zwischen A und B zwei Unterschallösungen. Bläst man einen Keil mit größerem Winkel als dem maximalen an, so erhält man eine vor dem Keil liegende gekrümmte Stoßfläche. Die Strömung nach dem Stoß ist keine Potentialströmung mehr, der Entropiesprung ist längs jeder Stromlinie verschieden (Bild 4). Dabei werden alle Punkte der Stoßpolaren realisiert. Weitweg vom Keil läuft der Verdichtungsstoß in eine Machsche Welle aus, dies entspricht dem Überschallende der Stoßpolaren. Auf der Symmetrielinie vor dem Keil haben wir einen geraden Verdichtungsstoß, also das Unterschallende der Stoßpolaren. Zwischen beiden Zuständen liegen in stetiger Folge die übrigen Punkte, insbesondere der Punkt A der kritischen Geschwindigkeit und B der maximalen Umlenkung. Über die Loslösung der Stoßfläche von der Spitze hat L. Crocco[4]) für den Fall leicht gekrümmter Keilflächen durch eine genaue theoretische Untersuchung die interessante Feststellung gemacht, daß diese bereits vor dem Erreichen des maximalen Winkels erfolgen muß, und zwar für einen Punkt der Stoßpolaren zwischen A und B. Dabei ist allerdings eine wesentliche Bedingung, daß die Krümmung an der Keilschneide von Null verschieden ist. Betrachtet man den Croccoschen kritischen Punkt auf der vom Körper losgelösten Stoßfläche, so kann die Stromlinie dort also nur mit der Krümmung Null beginnen.

[4]) L. Crocco, Singolarità della corrente gassosa iperacustica nell' intorno di una prora a diedro. Aerotecnica Bd. 17 (1937), S. 519.

Schließlich sei noch die Änderung der Druckdifferenz $p_2 - p_1$ bezogen auf den Staudruck $\frac{1}{2}\varrho_1 u_1^2$ und das Verhältnis $\frac{p_0'}{p_0}$ der Kesseldrücke nach und vor dem Stoß angegeben:

$$\frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\varrho_1 u_1^2} = 2\left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) \quad \ldots \quad (5)$$

$$\frac{p_0'}{p_0} = \left| \frac{(\varkappa+1)\operatorname{tg}(\gamma-\delta) - (\varkappa-1)\operatorname{tg}\gamma}{(\varkappa+1)\operatorname{tg}\gamma - (\varkappa-1)\operatorname{tg}(\gamma-\delta)} \right|^{\frac{1}{\varkappa-1}} \cdot \left[\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}(\gamma-\delta)}\right]^{\varkappa} \quad \ldots \quad (6)$$

Mit Gl. (6) ist gleichzeitig der Entropiesprung

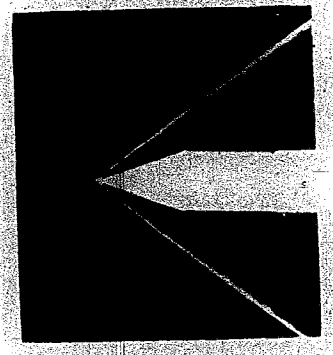
$$\Delta s = R \ln \frac{p_0}{p_0'} \qquad (R \text{ Gaskonstante})$$

bekannt.

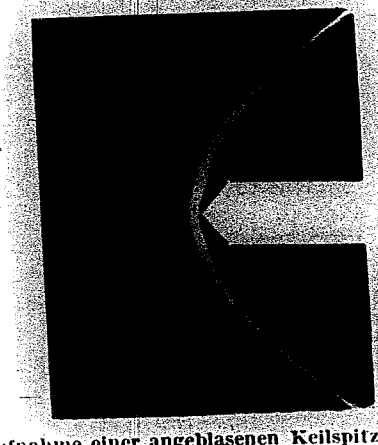
Nach diesen Vorbemerkungen über die ebene Strömung mit Verdichtungsstoß wollen wir uns nun den mit Überschallgeschwindigkeit angeblasenen Kegelspitzen zuwenden.

2. Überschallströmung gegen einen Kegel.

Beim gerade angeblasenen Rotationskegel ist, wenn die Stoßfläche an der Kegelspitze anhaftet, die Strömung nach dem Stoße ein kegeliges Feld. Die Stoßfläche ist ein zum angeblasenen koaxialer Rotationskegel (Bild 5). Der Verdichtungsstoß hat am ganzen Kegelmantel die gleiche Stärke.

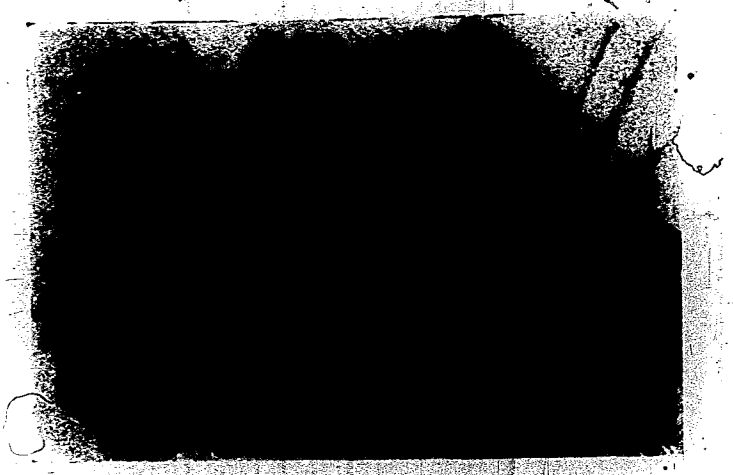


Schlierenaufnahme einer angeblasenen Keilspitze bei anhaftendem Verdichtungsstoß.



Schlierenaufnahme einer angeblasenen Keilspitze bei losgelöstem Verdichtungsstoß.
Bild 4.

8060



Schlierenaufnahme einer angeblasenen Kegelspitze bei anhaftendem Verdichtungskegel.

Schlierenaufnahme einer angeblasenen Kegelspitze bei losgelöster Verdichtungsstoßfläche.

Bild 5.

In allen Punkten einer jeden Geraden durch den Kegelursprung ist die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung konstant, der Gaszustand derselbe. Die Stoßbilanzen (1) bis (3) sind, wenn man wieder unter w_t und w_n die Geschwindigkeitskomponenten parallel und senkrecht zur Stoßfläche versteht, genau die gleichen wie bei ebener Strömung. (Wegen der Rotationssymmetrie liegen w_t und w_n in einem Achsenschnitte des Kegels.) Zu ihrer Aufstellung ist ja nur das ebene Tangentialelement an die Stoßfläche nötig. Die nach dem Stoße beginnende Potentialströmung ist natürlich im Achsenschnitt jetzt keine Parallelströmung mehr — dies wäre ja mit der Kontinuität nicht verträglich —, sondern die Stromlinien werden asymptotisch enger, (Bild 6). Verfolgen wir die Verhältnisse im Hodographen für einen Achsenschnitt (Bild 7). u und v seien jetzt die Geschwindigkeitskomponenten parallel zur Rotationsachse und senkrecht dazu. Die Stromlinien werden wegen des kegeligen Charakters der Strömung im Hodographen alle durch die gleiche Kurve dargestellt. Die Geschwindigkeit vor dem Stoß ist wieder in Richtung der Abszissenachse (u_1). Am Stoßkegel mit dem Öffnungswinkel 2γ tritt eine Umlenkung der Stromlinien um den Winkel δ ein, wie man der zu u_1 gehörigen Stoßpolaren entnimmt. Der neue Zustand u_2, v_2 wird nun durch adiabatische Kompression in den Zustand u_3, v_3 am Kegelmantel übergeführt. Der Winkel β ist dann der halbe Öffnungswinkel des Kegels. Eine genauere Betrachtung[5]) des kegeligen Feldes zeigt, daß die Normale in einem bestimmten Punkte P' der Meridiankurve parallel zu der Geraden durch die Kegelspitze läuft, die den durch P' festgelegten Gaszustand trägt. In Bild 6 und 7 ist die für den Zustand u', v' mit der Normalen der Neigung φ' angedeutet. Für den Endpunkt u_3, v_3 fallen im Einklang damit Geschwindigkeitsrichtung und Normalenneigung zusammen. Wegen dieser Zuordnung von Stromlinie und Meridianlinie ist durch die Angabe einer Meridianlinie ein achsial angeblasener Kegel charakterisiert. Um einen Überblick über alle Kegelströmungen zu gewinnen, kann einmal bei derselben Anblasegeschwindigkeit und damit gleichen Stoßpolaren der Kegelöffnungswinkel oder, was dasselbe ist, die Stärke des Verdichtungsstoßes variiert werden (Bild 8). Der geometrische Ort der dabei erreichbaren Zustände am Kegelmantel, die Verbindungslinie der Endpunkte der einzelnen Meridianlinien, wird wegen ihrer besonderen Form »Apfelkurve« genannt. Zum anderen kann noch die Anblasegeschwindigkeit variiert werden, zu jeder Stoßpolaren oder jeder Machschen Zahl der Anströmung gehört eine andere Apfelkurve.

Bevor wir auf die Ergebnisse eingehen, wollen wir noch etwas über die Integration der Meridiankurven sagen. Das kegelige Feld nach dem Verdichtungsstoße hat ein Potential und ist, wenn u und v wieder die Geschwindigkeitskomponenten im Achsenschnitt parallel und senkrecht zur Achse bedeuten, durch die Differentialgleichung

$$v\,v'' = 1 + v'^2 - \frac{(u + v\,v')^2}{a^2} \qquad (7)$$

charakterisiert. Dabei geben die Striche Ableitungen nach u an. a^2 bedeutet das Quadrat der örtlichen Schallgeschwindigkeit, die für ideale Gase durch die Beziehung

$$a^2 = \frac{\varkappa + 1}{2}\,a^{*2} - \frac{\varkappa - 1}{2}\,(u^2 + v^2) \qquad (8)$$

mit der Geschwindigkeit verknüpft ist. Die Meridiankurven sind Integralkurven von (7) mit der Randbedingung (Bild 7) in dem Punkte u_2, v_2 der Stoßpolaren mit der Neigung der Verbindungslinie von $(u_1, 0)$ nach (u_2, v_2) zu beginnen. Das heißt die Potentialströmung muß von dem durch den Verdichtungsstoß hervorgebrachten Gaszustand ausgehen. Da weiter die Normale auf der Meridiankurve den Polarwinkel des betreffenden Zustandes im Ortsplan angibt, ist die Bedingung für die Anfangsneigung aus Stetigkeitsgründen nötig. Das Ende der Meridianlinie ist durch die Forderung gegeben, das die Normale durch den Nullpunkt des Hodographen geht: $u + v\,v' = 0$. Wie schon oben erwähnt,

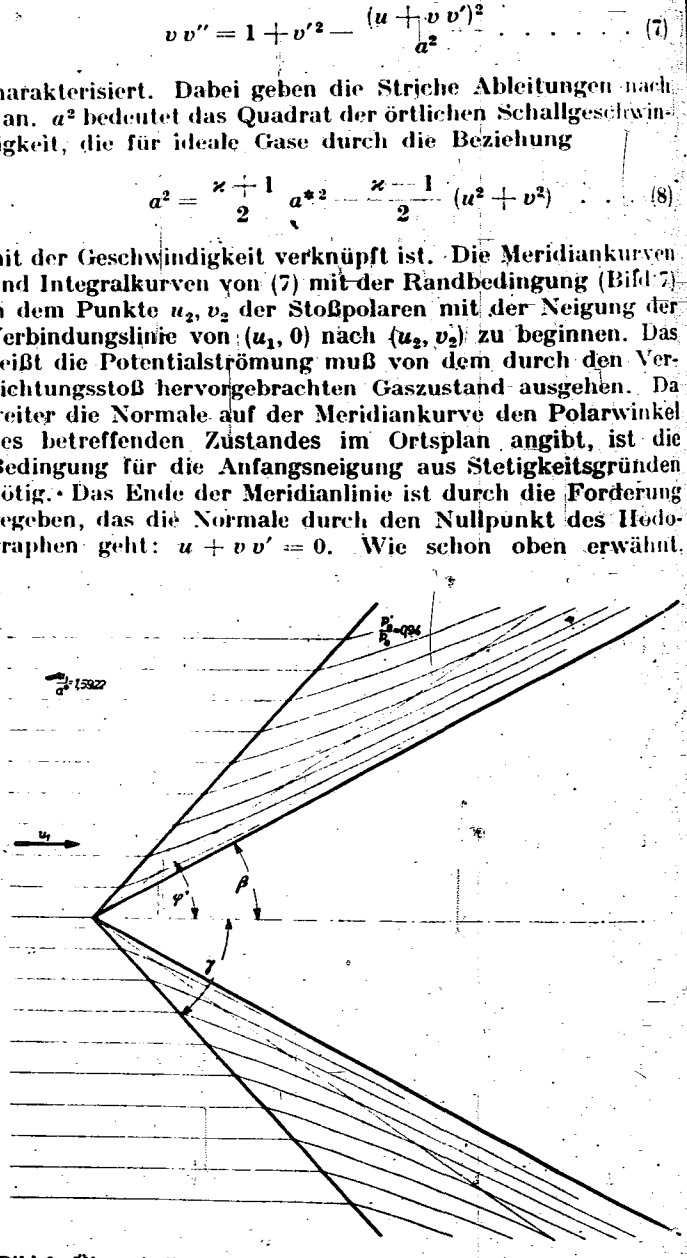


Bild 6. Überschallströmung gegen eine Kegelspitze im Achsenschnitt ($\varkappa = 1{,}405$). Bild 7 zeigt den zugehörigen Hodographen.

[5]) Vgl. die in den Fußnoten 2 und 3 zitierten Arbeiten.

8061

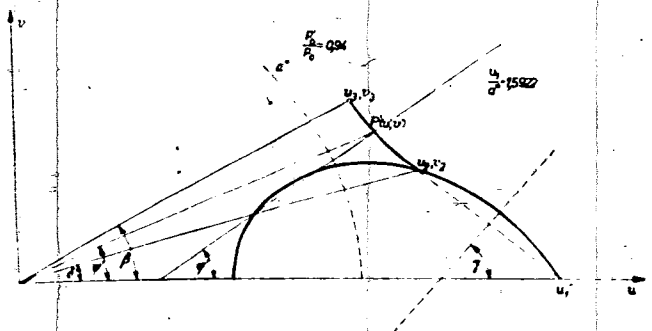


Bild 7. Hodograph eines Achsenschnittes eines angeströmten Kegels.

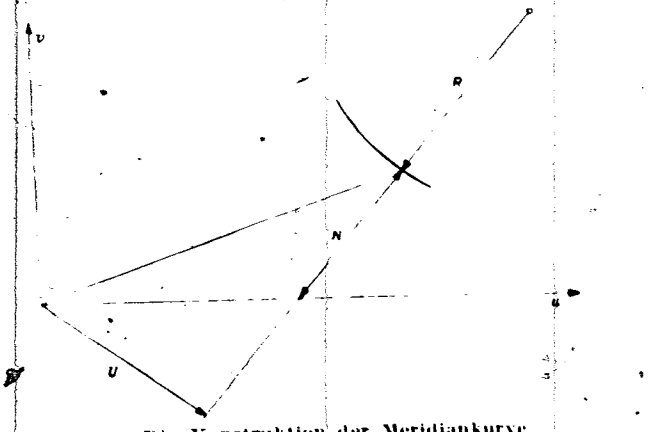


Bild 9. Die Konstruktion der Meridiankurve.

müssen dann nämlich Geschwindigkeitsrichtung und Normalenrichtung identisch sein.

Für die praktische Ermittlung der Meridiankurve eignet sich ein zeichnerisches Verfahren, das auf die mit (7) identische Gestalt ihrer Differentialgleichung

$$R = \frac{N}{1 - \frac{U^2}{a^2}} \qquad (9)$$

gegründet ist. Dabei bedeutet (Bild 9), R den Krümmungsradius, N den Normalabschnitt zwischen Meridiankurve und u-Achse und U die Länge des Lotes $U = \frac{u + v\,v'}{\sqrt{1 + v'^2}}$ vom Hodographennullpunkt auf die Normale. Da a eine Funktion des Geschwindigkeitsbetrages (Formel (8)) ist, kann man in einem Punkt der Meridiankurve durch Abgreifen von U, N und $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ den Krümmungsradius R berechnen.

Bei der praktischen Durchführung dieser schrittweisen Konstruktion zeigt sich, daß die Meridianlinien im allgemeinen recht genau erhalten werden. Wir haben dies durch Integration von (7) nach dem Runge-Kuttaschen Näherungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen geprüft. Eine Abweichung in Zeichengenauigkeit tritt nur für die Meridiankurven ein, die nahe den Enden der Stoßpolare, also in der Nähe der Achse entspringen. Am leichtesten unsicher wird bei der zeichnerischen Ermittlung die Lage des Endpunktes u_3, v_3 auf der Meridiankurve und damit der Kegelöffnungswinkel. Um auch diesen relativ genau zu bekommen, haben wir auch dort einzelne Meridianlinien rechnerisch geprüft, wo ihr Verlauf durch die Konstruktion gut wiedergegeben wird. Für die Meridiankurven in der Nähe der Achse ist praktisch auch die Anwendungsmöglichkeit des Runge-Kuttaschen Verfahrens beschränkt. Dafür bekommt man aber aus der Differentialgleichung (7) Näherungen, wenn man das letzte Glied rechts gleich dem konstanten Anfangswert $\frac{u_1^2}{a_1^2}$ in der Umgebung von $(u_1, 0)$ bzw. $\frac{\bar{u}_1^2}{\bar{a}_1^2}$ in der Umgebung von $(\bar{u}_1 = \frac{a^{*2}}{u_1}, 0)$ setzt. a_1 bzw. $\bar{a}_1$ sind die zu $(u_1, 0)$ bzw. $(\bar{u}_1, 0)$ gehörigen Schallgeschwindigkeiten. Dann ergeben sich für die Meridiankurven die Gestalten

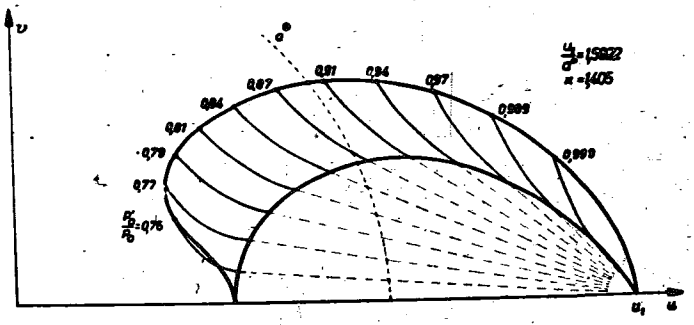


Bild 8. Apfelkurve mit Meridianlinien und Stoßpolare.

$$v = A \sqrt{\frac{u_1^2}{a_1^2} - 1}\ \mathfrak{Sin}\ \frac{u_1 - u}{A} \quad \text{für Überschall} \qquad (10a)$$

$$v = v_2 \mathfrak{Cos}\ \frac{\bar{u}_1 - u}{v_2} \sqrt{1 - \frac{\bar{u}_1^2}{\bar{a}_1^2}} \quad \text{für Unterschall} \qquad (10b)$$

Den starken Näherungscharakter dieser Formeln ersieht man daraus, daß in (10a) für alle Werte des Parameters A die Kurven durch den Punkt $u = u_1$, $v = 0$ gehen, dieselbe Anfangsneigung $\sqrt{\frac{u_1^2}{a_1^2} - 1}$ und die Anfangskrümmung Null haben. In (10b) gehen die Kurven zwar durch die Anfangspunkte $(\bar{u}_1, v_2)$, haben aber die gleiche Anfangsneigung Null. Trotzdem reichen die Näherungen aus, um das Verhalten der Apfelkurven in der Nähe der »Blüte« und des »Stieles« wiederzugeben. Es tritt dort eine logarithmische Singularität auf:

$$u_3 = u_1 - \frac{v_3^2}{u_1} \ln \frac{2}{\sqrt{\frac{u_1^2}{a_1^2} - 1}} \frac{u_1}{v_3} \quad \text{für Überschall} \qquad (11a)$$

$$u_3 = \bar{u}_1 - \frac{v_3^2}{\bar{u}_1} \ln \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{\bar{u}_1^2}{a_1^2}}} \frac{\bar{u}_1}{v_3} \quad \text{für Unterschall} \qquad (11b)$$

Vergleicht man noch die zeichnerische Integration bei den verschiedenen Stoßpolaren, so zeigt sich, daß sie am besten für die mittleren Geschwindigkeiten ausfällt. Für die höheren Machschen Zahlen werden die Krümmungsradien zu groß, um gut konstruieren zu können. Man kann sich aber dabei allerdings oft dadurch helfen, daß man die Kreisbögen durch Gerade ersetzt. Für die Machschen Zahlen in der Nähe von 1 wird dagegen wegen der zu großen Krümmungsänderung längs der Meridianlinie die Konstruktion recht ungenau. Für die Umgebung der kritischen Geschwindigkeit hat Busemann auch eine Näherung angegeben, die allerdings erst bei sehr kleinen Stoßpolaren genau werden dürfte. Wir gehen auf diese Näherung am Schluß der Arbeit ein.

Die für die zeichnerisch-numerische Integration der Gl. (7) bzw. (9) verwandten Anblasegeschwindigkeiten entsprechen den Druckzahlen (999,9915), 996, 992, 988, ..., 964, 956, 945, 930, 870,7, nach der Busemannschen Zählung im Handbuch für Experimentalphysik[6]). Die nachstehende Zahlentafel enthält die zu diesen Druckzahlen auf die kritische bzw. örtliche Schallgeschwindigkeit bezogenen Machschen Zahlen $M^* = \frac{u_1}{a^*}$ bzw. $M = \frac{u_1}{a_1}$ und den Machschen Winkel. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ ist 1,405. Die Machschen Zahlen sind dabei etwas genauer angegeben als im Handbuch. Die eingeklammerte Druckzahl 999,9915 entspricht einer Stoßpolaren in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit, bei der die Integration von (7) nach der Busemannschen Näherung durchgeführt wurde.

[6]) A. Busemann, Gasdynamik in Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik Bd. IV, 1 (1931), S. 426.

8062

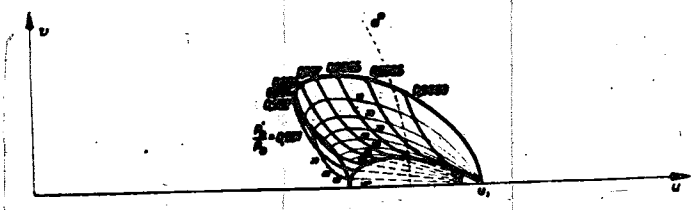


Bild 10. p-Zahl 996, $\frac{u_1}{a_*} = 1{,}1714$, $\frac{u_1}{a_1} = 1{,}2182$.

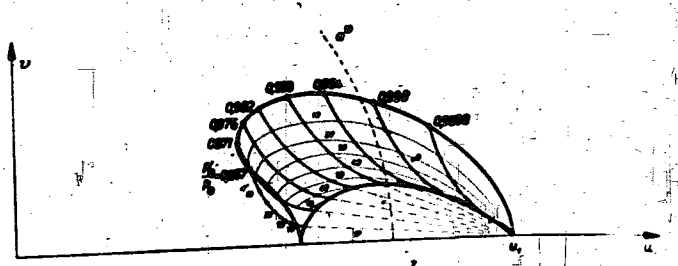


Bild 11. p-Zahl 992, $\frac{u_1}{a^*} = 1{,}2763$, $\frac{u_1}{a_1} = 1{,}3663$.

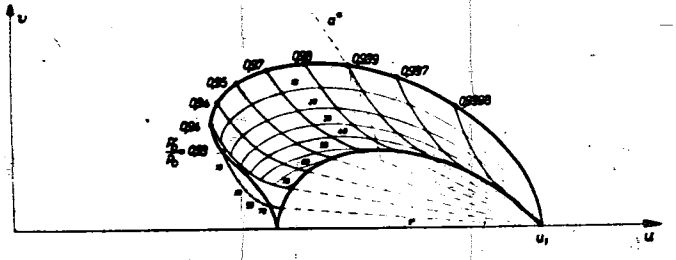


Bild 12. p-Zahl 988, $\frac{u_1}{a^*} = 1{,}3662$, $\frac{u_1}{a_1} = 1{,}5045$.

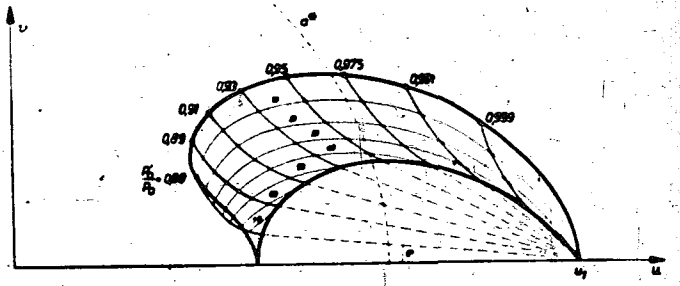


Bild 13. p-Zahl 984, $\frac{u_1}{a^*} = 1{,}4472$, $\frac{u_1}{a_1} = 1{,}6403$.

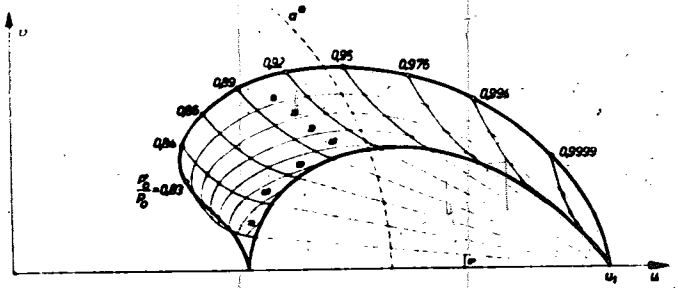


Bild 14. p-Zahl 980, $\frac{u_1}{a^*} = 1{,}5221$, $\frac{u_1}{a_1} = 1{,}7775$.

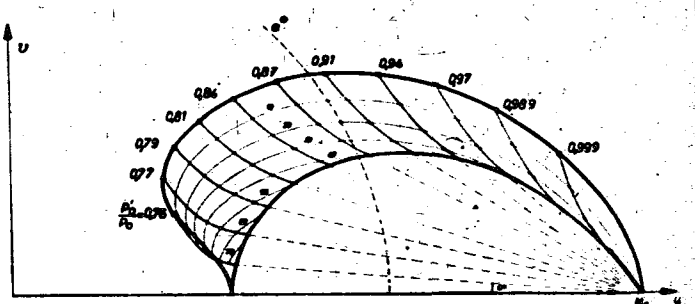


Bild 15. p-Zahl 976, $\frac{u_1}{a^*} = 1{,}5922$, $\frac{u_1}{a_1} = 1{,}91795$.

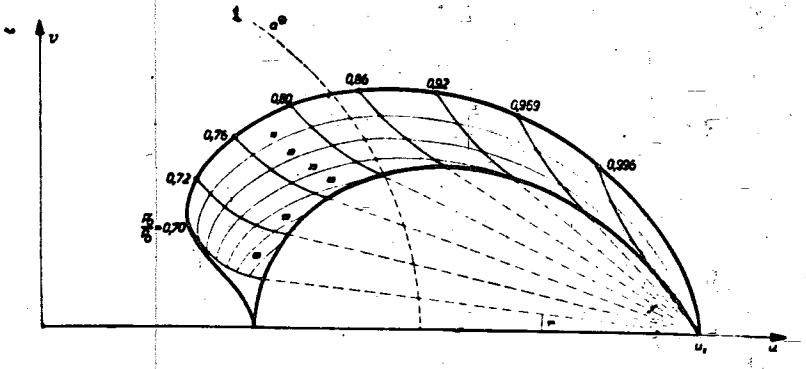


Bild 16. p-Zahl 972, $\frac{u_1}{a^*} = 1{,}6582$, $\frac{u_1}{a_1} = 2{,}0636$.

8033

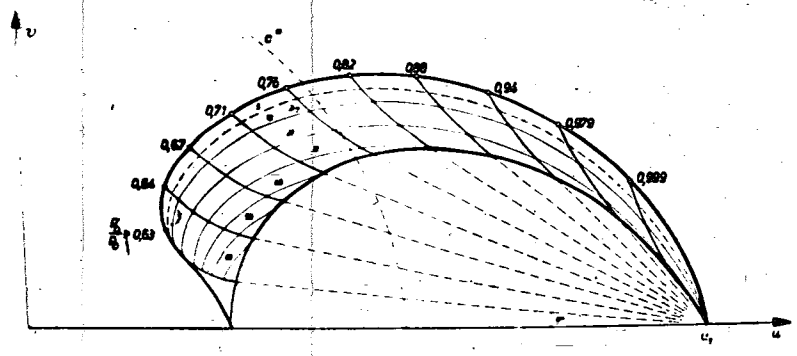


Bild 17. p-Zahl 968, $\frac{u_1}{a^*} = 1{,}7206$, $\frac{u_1}{a_1} = 2{,}2157$.

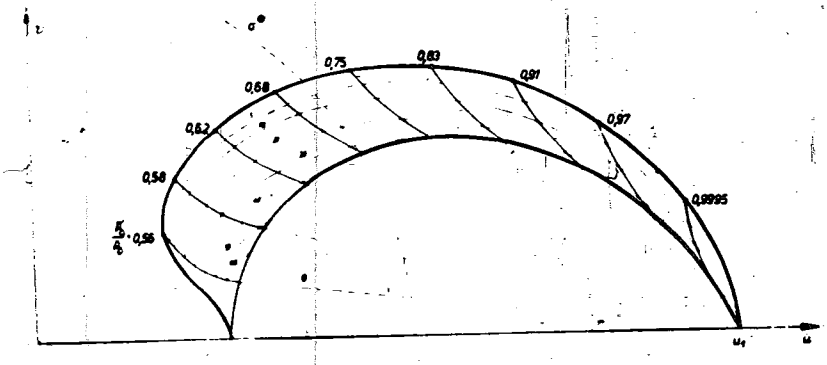


Bild 18. p-Zahl 964, $\frac{u_1}{a^*} = 1{,}7798$, $\frac{u_1}{a_1} = 2{,}3760$.

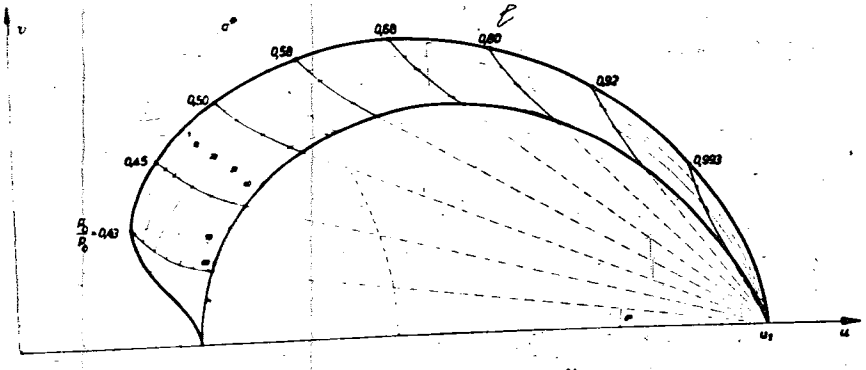


Bild 19. p-Zahl 956, $\frac{u_1}{a^*} = 1{,}8893$, $\frac{u_1}{a_1} = 2{,}7278$.

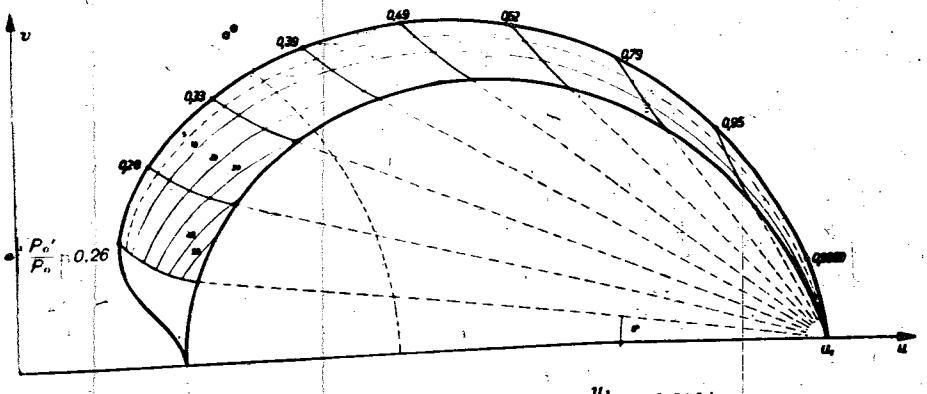


Bild 20. p-Zahl 945, $\frac{u_1}{a^*} = 2{,}0223$, $\frac{u_1}{a_1} = 3{,}3051$.

8064

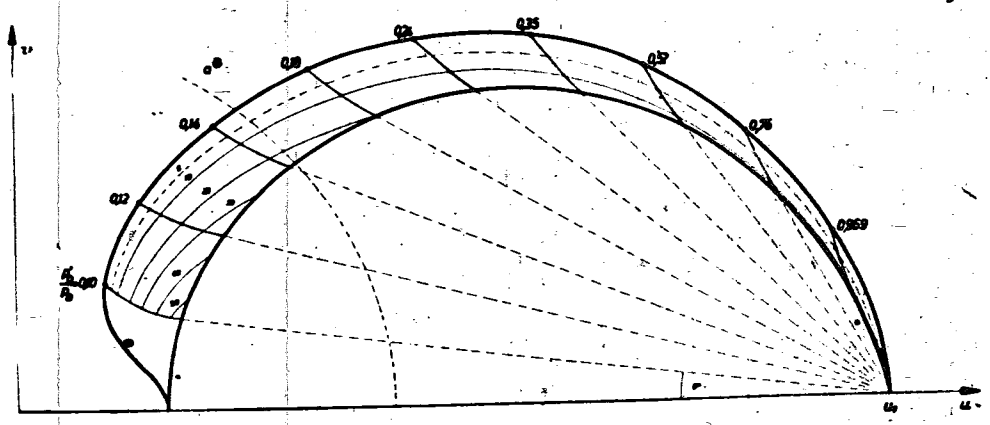


Bild 21. p-Zahl 930, $\frac{u_1}{a^*} = 2{,}1729$, $\frac{u_1}{a_1} = 4{,}3776$.

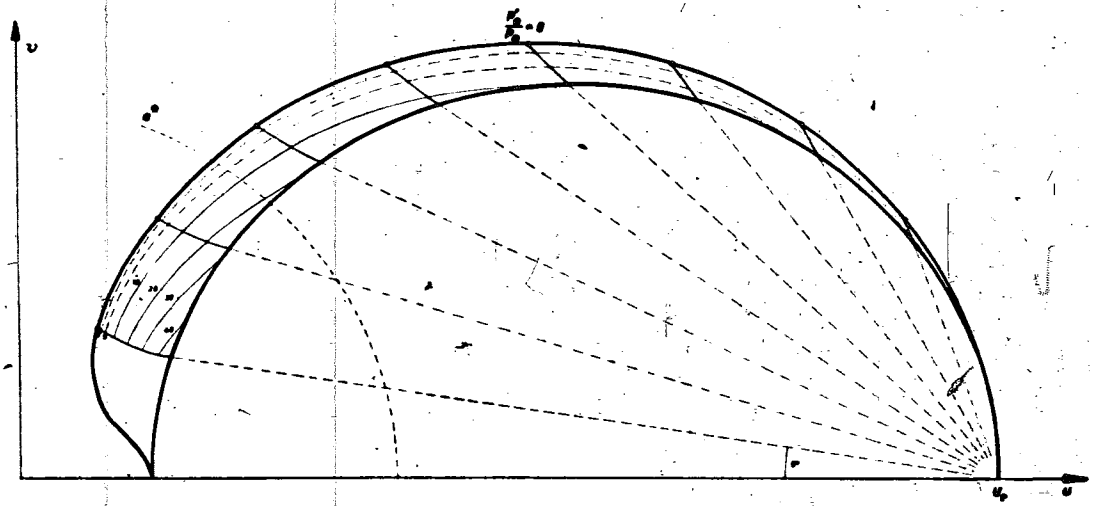


Bild 22. p-Zahl 870,7, $\frac{u_1}{a^*} = 2{,}4369 = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}$, $\frac{u_1}{a_1} = \infty$.

Zahlentafel 1.

p-Zahl	$M^* = \frac{u_1}{a^*}$	$M = \frac{u_1}{a_1}$	Machscher Winkel	γ	Bild-Nr.
(999,9915)	1,04106	1,050	79° 13′ 43″	*	*
996	1,1714	1,2182	55° 10′ 33″	4°	10
992	1,2763	1,3663	47° 2′ 46″	5°	11
988	1,3662	1,5045	41° 39′ 26″	5°	12
984	1,4472	1,6403	37° 33′ 42″	6°	13
980	1,5221	1,7775	34° 14′ 9″	6°	14
976	1,5922	1,91795	31° 25′ 31″	5°	15
972	1,6592	2,0636	28° 59′ 7″	7°	16
968	1,7206	2,2157	26° 49′ 43″	6°	17
964	1,7798	2,3760	24° 53′ 22″	7°	18
956	1,8893	2,7278	21° 30′ 20″	8°	19
945	2,0223	3,3051	17° 36′ 42″	8°	20
930	2,1729	4,3776	13° 12′ 19″	8°	21
870,7	2,4369	∞	0°	9°	22

Bild 10 bis 22 geben die zu den einzelnen Machschen Zahlen gehörigen Stoßpolaren, Meridianlinien und Apfelkurven (Zahlentafel 1 enthält in der letzten Spalte die jeweilige Bildnummer). Die Ausgangspunkte für die Meridiankurven auf der Stoßpolaren wurden so gewählt, daß die eingezeichneten Sehnen der Stoßpolare konstante Winkeldifferenz haben, die in den einzelnen Bildern und in der vorletzten Spalte der Zahlentafel 1 angegeben ist, sie beträgt je nach der Größe der Machschen Zahl 4 bis 9°. Für die zugehörigen Kegelströmungen bedeutet dies, daß bei derselben Machschen Zahl die halben Öffnungswinkel der ausgewählten Verdichtungskegel eine von 90° ausgehende abnehmende arithmetische Folge bilden. Die untere Grenze bildet der Machsche Winkel, der aber im allgemeinen nicht zur Folge gehört. Die Endpunkte der Meridianlinien legen den Öffnungswinkel des angeblasenen Kegels fest. Diese bilden natürlich keine einfache Folge mehr. Die neben den Meridianlinien zwischen Stoßpolare und Apfelkurve eingezeichneten dünnen Linien verbinden die Punkte der einzelnen Meridiankurven, in denen die Differenz zwischen Normalenneigung und Geschwindigkeitsrichtung konstant ist. Mit den Bezeichnungen von Bild 7 sind dies die Kurven $\varphi' - \psi' = \text{konst}$. Der Wert der Konstanten ist bei den einzelnen Linien vermerkt, die Zahlen bedeuten Grad, ohne daß dies in den Figuren angeschrieben ist. Die Kurve $\varphi' - \psi' = 0$ ist offenbar die Apfelkurve selbst. Für die durch die dünnen Linien auf einer Meridianlinie markierten Punkte kann man aus der einigermaßen genau in der Zeichnung abzulesenden Geschwindigkeitsrichtung (ψ') die Normalenrichtung (φ') berechnen. Diese beiden Angaben benötigt man zur Konstruktion des Ortsplanes der zur Meridianlinie gehörigen Strömung. Die Ablesung der Normalenrichtung aus der Abbildung dürfte im allgemeinen etwas unsicher sein. Es ist daher für eine gute Interpolation zweckmäßig, sich den Zusammenhang zwischen ψ' und φ' in einem rechtwinkligen Achsenkreuz aus den markierten Punkten aufzuzeichnen. Dabei kennt man neben dem Endpunkte der Meridianlinie, wo $\varphi' = \psi' = \beta$ ist, noch ihren Anfangspunkt auf der Stoßpolaren, wo die Normalenrichtung senkrecht zur eingezeichneten Sehne verläuft. Für die im Unterschallgebiet nahe der Achse entspringenden Meridiankurven sind bei den ersten Apfelkurven zuweilen die dünnen Linien nicht mehr durchgezogen, sondern der Übersichtlichkeit wegen nur die Punkte markiert.

An die Endpunkte der Meridianlinien ist noch das Verhältnis der Kesseldrücke nach und vor dem Verdichtungs-

8065

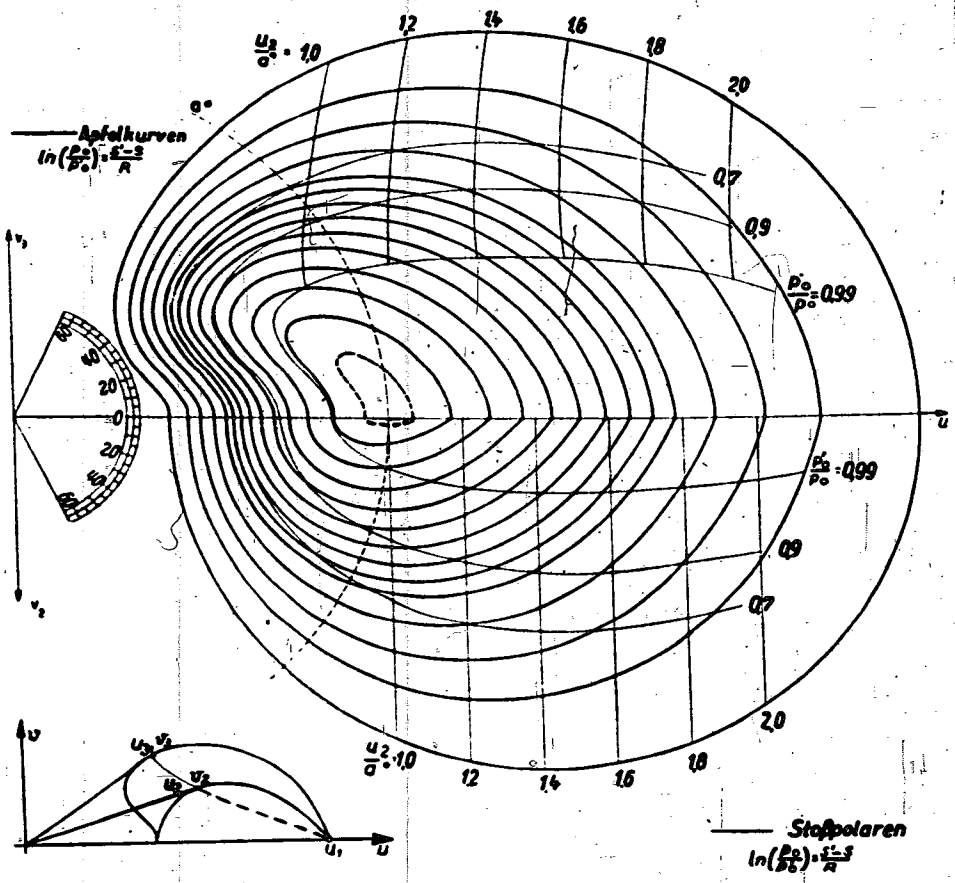


Bild 23. Die Schar der Apfelkurven und Stoßpolaren.

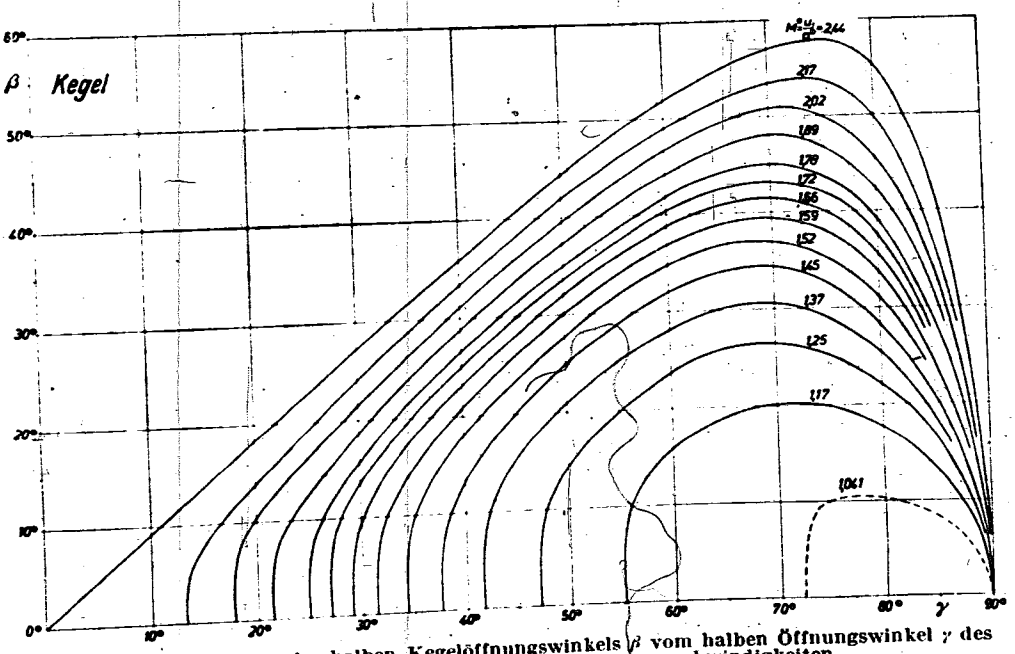


Bild 24a. Abhängigkeit des halben Kegelöffnungswinkels β vom halben Öffnungswinkel γ des Verdichtungskegels bei verschiedenen Anblasegeschwindigkeiten.

stoß geschrieben, das natürlich schon durch den Punkt u_2, v_2 auf der Stoßpolaren festgelegt ist. Außerdem ist in allen Bildern der Kreis der kritischen Geschwindigkeit $\sqrt{u^2 + v^2} = a^*$ gestrichelt eingetragen.

Die Schar der Apfelkurven ist in Bild 23 gezeichnet. Im unteren Teile ist die zu dem jeweiligen Apfel gehörige Stoßpolare angegeben. Der innerste gestrichelt eingetragene Apfel ist nach der Näherung in der Umgebung der kritischen Geschwindigkeit gewonnen und entspricht der in Zahlentafel 1 eingeklammerten Druckzahl. Die dünn eingezeichneten Kurvennetze, auf die wir gleich noch weiter unten zu sprechen kommen, ermöglichen eine grobe Orientierung über die an sich durch die Meridiankurven gegebene Zuordnung der Stoßpolaren- und Apfelkurvenpunkte. Der genaue Zusammenhang ist aus Bild 24a ersichtlich, wo der Kegelöffnungswinkel 2β für die einzelnen Stoßpolaren in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel 2γ des Verdichtungskegels eingetragen ist. Bild 24b zeigt als Vergleich dazu die entsprechende Beziehung im ebenen Falle zwischen Keilwinkel 2δ und dem Winkel des Verdichtungsstoßes gegen die Anströmrichtung 2γ. Das erwähnte Kurvennetz in Bild 23 enthält als erste Schar die Kurven gleicher Entropie, d. h. festen Kessel-

8066

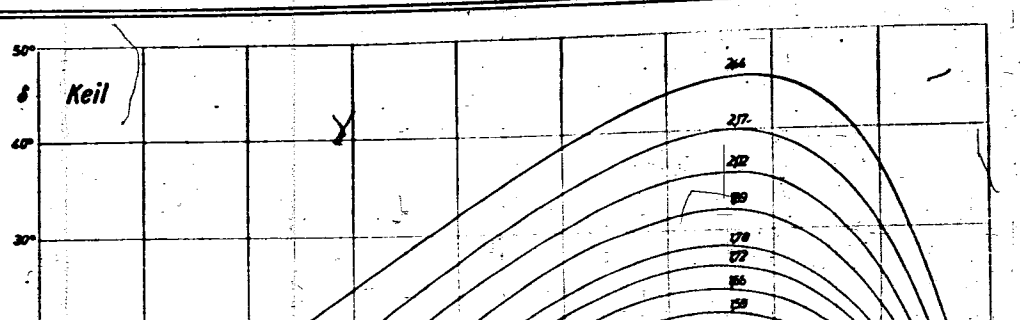


Bild 24b. Abhängigkeit des halben Keilwinkels δ vom Neigungswinkel zwischen Verdichtungsstoß und Anströmgeschwindigkeit bei verschiedenen Anblasegeschwindigkeiten.

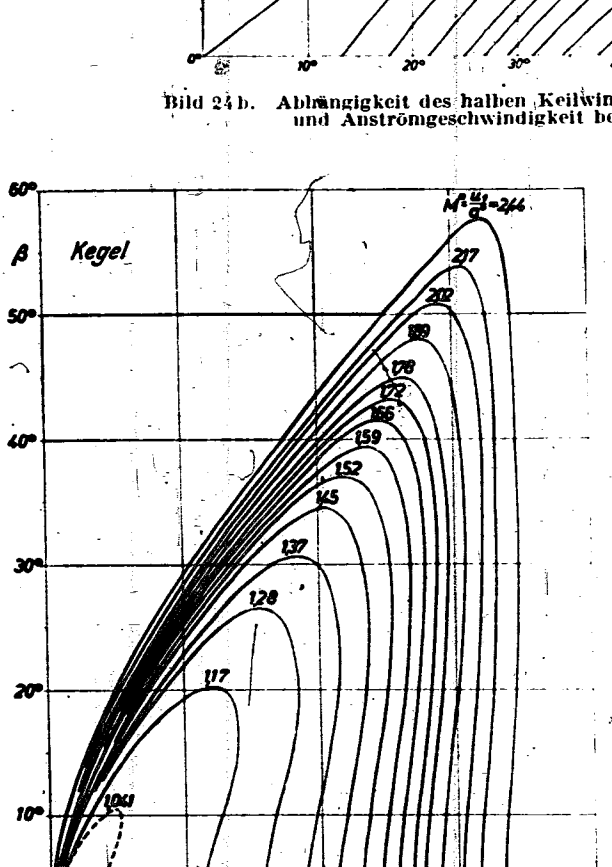


Bild 25a. Der Druck am Kegelmantel in Abhängigkeit vom halben Kegelöffnungswinkel β für verschiedene Anblasegeschwindigkeiten (p_3 Druck am Kegelmantel, p_1 Druck der Anströmung, $\frac{1}{2}\varrho_1 u_1^2$ Staudruck).

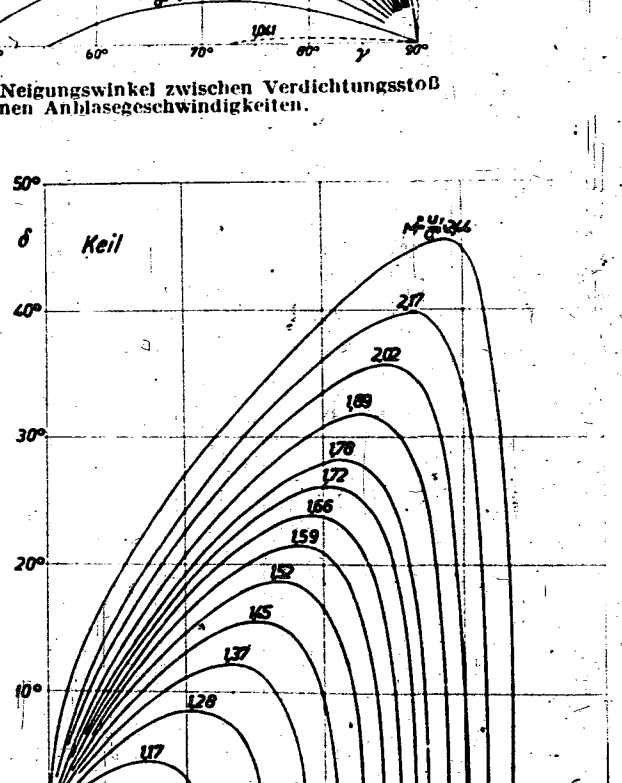


Bild 25b. Der Drucksprung $p_2 - p_1$ am Verdichtungsstoß bezogen auf den Staudruck in Abhängigkeit vom halben Keilwinkel δ für verschiedene Anblasegeschwindigkeiten.

druckverhältnisses am Verdichtungsstoß $\frac{p_0'}{p_0}$ (Formel (6)). Es sind die Kurven $\frac{p_0'}{p_0} = 0{,}99$, 0,9 und 0,7 eingetragen. Das Stück der u-Achse $1 \leq \frac{u_1}{a^*} \leq \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}$ entspricht der Kurve $\frac{p_0'}{p_0} = 1$. Auf dem Rand des Diagramms, der Stoßpolaren und Apfelkurve für die Maximalgeschwindigkeit $\frac{u_1}{a^*} = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}$ gilt $\frac{p_0'}{p_0} = 0$. Als zweite Schar sind im unteren Teil die Geraden $u_2 =$ konst. gewählt. Nach Formel (5) ist auf den Linien $u_2 =$ konst. gleichzeitig die Druckerhöhung $p_2 - p_1$ am Stoß bezogen auf den Staudruck $\frac{1}{2}\varrho_1 u_1^2$ konstant. Der weitere adiabatische Druckanstieg im kegeligen Felde nach dem Stoße bis zum Druck p_3 am Kegelmantel ist aus den einander zugeordneten Gaszuständen u_2, v_2 und u_3, v_3 durch adiabatische Kompression von p_2 aus nach der Formel

$$\frac{p_3 - p_1}{\frac{1}{2}\varrho_1 u_1^2} = \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\varrho_1 u_1^2} \cdot \frac{\left\{\frac{\varkappa+1}{2} - \frac{\varkappa-1}{2}\frac{u_3^2+v_3^2}{a^{*2}}\right\}^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}{\left\{\frac{\varkappa+1}{2} - \frac{\varkappa-1}{2}\frac{u_1^2}{a^{*2}}\right\}^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}} \cdot \frac{p_0'}{p_0} \cdot \frac{1}{\left\{\frac{\varkappa+1}{2} - \frac{\varkappa-1}{2}\frac{u_2^2+v_2^2}{a^{*2}}\right\}^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}} \cdot \frac{p_0'}{p_0}$$

8037

berechenbar. Bild 25a zeigt das Druckverhältnis $\frac{p_3 - p_1}{\frac{1}{2}\varrho_1 u_1^2}$ in Abhängigkeit vom Kegelöffnungswinkel für die einzelnen Apfelkurven, d. h. also für einzelne Anblasegeschwindigkeiten. In 25b ist wieder der ebene Fall, das Druckverhältnis $\frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{2}\varrho_1 u_1^2}$ als Funktion vom Keilwinkel dargestellt.

Analog wie in der Ebene gibt es zu jedem möglichen vorgegebenen Kegelwinkel im allgemeinen bei fester Machscher Zahl zwei Strömungen. Für hinreichend kleinen Kegelwinkel ist wieder eine Lösung Überschall und eine Unterschall, wovon praktisch die erstere eintritt. Der Bereich, in dem beide Lösungen Unterschall sind, ist diesmal größer als im ebenen Falle. Dort konnten weiter alle Punkte der Stoßpolaren dadurch realisiert werden, daß man eine vom Körper losgelöste Stoßwelle betrachtete. Dies gilt hier nicht mehr, weil in der Umgebung eines beliebigen Punktes der Stoßwelle kein kegeliges Feld vorliegt. Es ist daher noch offen, welcher Bereich von den Apfelkurven und Druckkurven praktische Bedeutung hat. Der Überschallbereich dürfte gesichert sein. Eine Untersuchung über wenig gekrümmte

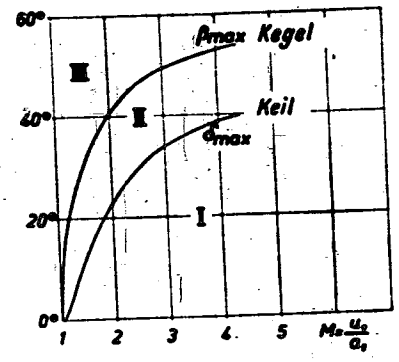


Bild 26. Der Grenzwert des halben Kegelöffnungswinkels und Keilwinkels für abhaftenden Verdichtungsstoß als Funktion der Machschen Zahl.

Kegelflächen analog der Croccoschen für den Keil liegt bisher noch nicht vor.

Die bei bestimmter Machscher Zahl sich aus den Apfelkurven ergebende Grenze für den Öffnungswinkel des Kegels ist aus Bild 26 ersichtlich, wo auch der maximale Keilwinkel eingezeichnet ist. Der Winkelbereich I ist dadurch ausge-

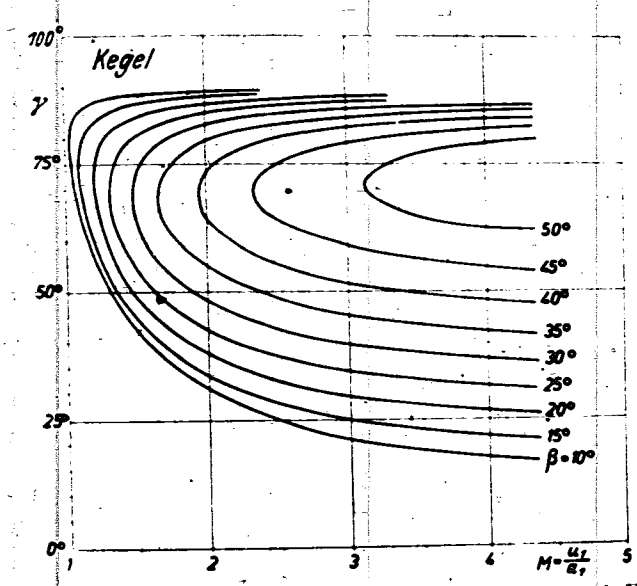


Bild 27a. Der halbe Öffnungswinkel des Verdichtungskegels als Funktion der Machschen Zahl für verschiedene Kegelwinkel 2β.

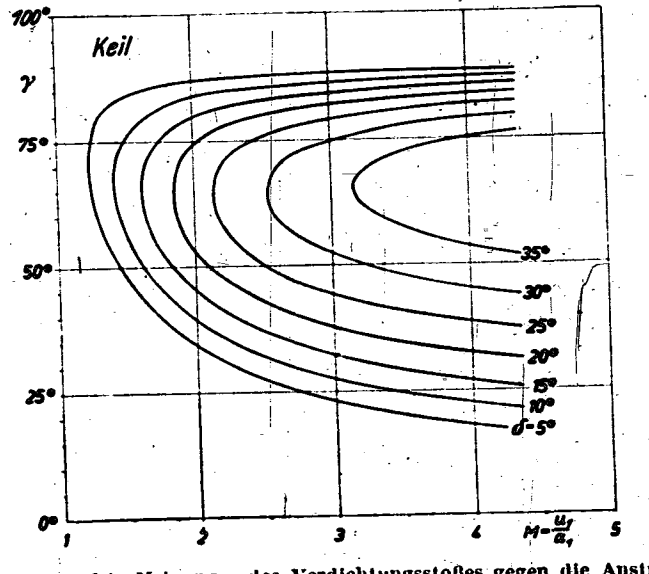


Bild 27b. Die Neigung γ des Verdichtungsstoßes gegen die Anströmung für verschiedene Keilwinkel 2δ als Funktion der Machschen Zahl.

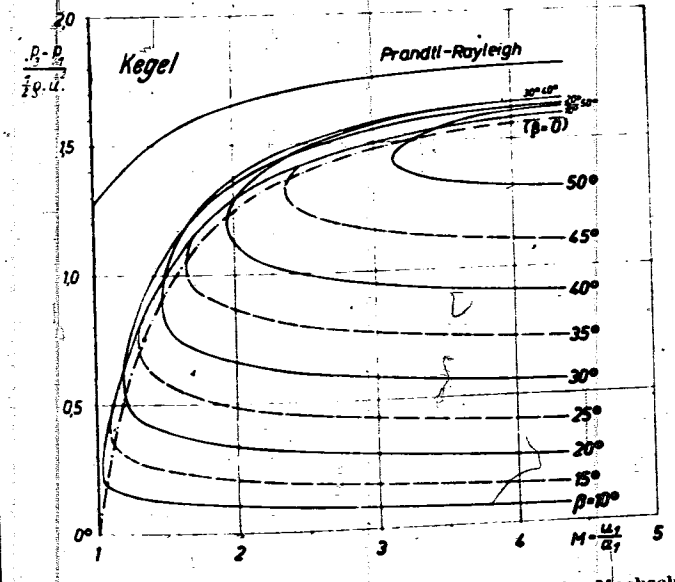


Bild 28a. Der Druck am Kegelmantel in Abhängigkeit der Machschen Zahl für verschiedene Öffnungswinkel 2β (p_3 Druck am Kegelmantel, p_1 Druck der Anströmung, $\frac{1}{2}\varrho_1 u_1^2$ Staudruck).

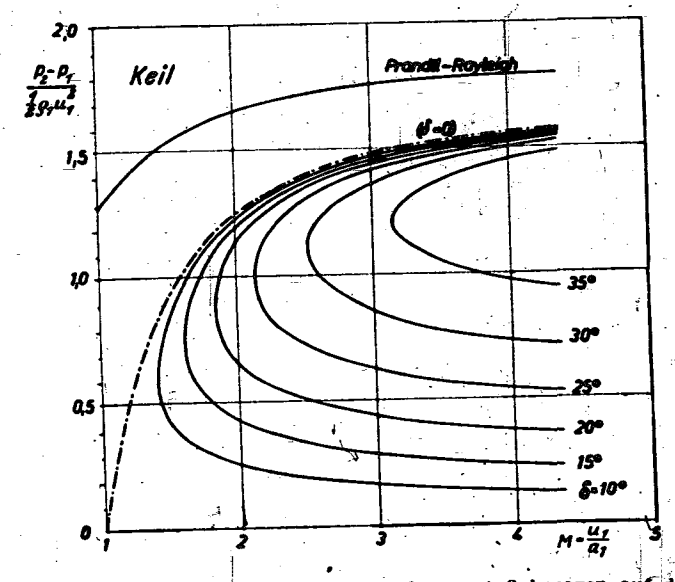


Bild 28b. Der Drucksprung am Verdichtungsstoß bezogen auf den Staudruck bei verschiedenen Keilwinkeln 2δ in Abhängigkeit der Machschen Zahl.

8068

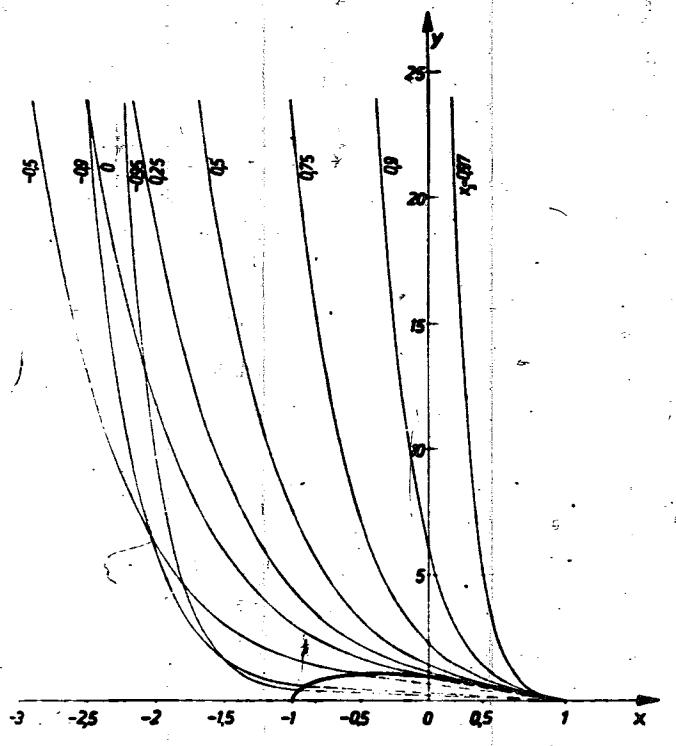


Bild 29. Zur Näherungslösung für die Umgebung der kritischen Geschwindigkeit.

zeichnet, daß es für diese Winkel sowohl Keil- als auch Kegelströmungen gibt, wo die Stoßfläche an der Schneide bzw. Spitze anhaftet. Zum zweiten Bereich gehören die Winkel, wo die Schneiden schlechter sind, weil sich die Stoßfläche losgelöst hat, die Spitzen aber noch brauchbar bleiben. Im dritten Gebiet liegen sowohl beim Keil als beim Kegel die Stoßflächen vor dem Körper.

In Bild 27a und 28a sind die Darstellungen 24a bzw. 25a dahin umgezeichnet, daß auf der Abszissenachse stets die Machsche Zahl abgetragen ist. Die Ordinatenachse enthält die Größe des Verdichtungskegels bzw. das Druckverhältnis. Die einzelnen Kurven entsprechen jeweils Kegeln mit festen Öffnungswinkeln. Strichpunktiert in 28a eingetragen ist die Grenzkurve $\beta = 0$. Sie gibt den Drucksprung an der Verdichtungsfläche vor einem stumpfen Hindernis an. Wird dort noch die adiabatische Kompression bis zum Staupunkt am Körper berücksichtigt, so erhält man den ebenfalls eingetragenen Pitotdruck (Prandtl-Rayleigh).

Bild 27b und 28b zeigen wieder das ebene Seitenstück.

Für kleine Kegelöffnungswinkel kann (im praktisch interessanten Überschallgebiet nach dem Stoß) für die Berechnung des Druckes aus (11a) die einfache Näherungsformel:

$$\frac{p_3 - p_1}{\frac{1}{2}\varrho_1 u_1^2} = 2\beta^2 \ln \frac{2}{\beta\sqrt{M^2-1}}$$

gewonnen werden, bei der wohl die logarithmische Singularität und Machabhängigkeit richtig erfaßt, dagegen der Zahlenfaktor 2 hinter dem Logarithmus unter Umständen unsicher sein dürfte.

Zum Schluß sei noch die Integration von Gl. (7) für die Apfelkurven in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit erwähnt. Wie Busemann gezeigt hat, kann man dafür durch eine passende Substitution erreichen, daß die Differentialgleichung (7) in eine von der Machschen Zahl M und dem Verhältnis der spezifischen Wärmen $\varkappa$ unabhängige Differentialgleichung übergeht. Die gleiche Substitution macht auch die Stoßpolare und damit die Anfangsbedingungen der Meridianlinien unabhängig von M und $\varkappa$. Lediglich zur Bestimmung des Endpunktes der Meridianlinien werden diese gebraucht. In Bild 29 zeigen wir die Ergebnisse der Integration in den von M und $\varkappa$ unabhängigen Koordinaten x und y für die Meridianlinien, die mit u und v durch die Beziehungen:

$$y = \frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{1}{(M-1)^{3/2}}\,\frac{v}{a^*}, \qquad x = \frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{u-a^*}{a^*}\,\frac{1}{M-1}$$

zusammenhängen. An die Meridiankurven ist die jeweilige Ausgangsabszisse auf der »Stoßpolaren« geschrieben. Im weiteren (nicht gezeichneten) Verlaufe können die Meridianlinien durch Kurven $y = a\,e^{bx}$ ersetzt werden. Die zugehörigen Konstanten a und b kann man der Zahlentafel 2 entnehmen.

Zahlentafel 2.

x_2	a	b
0,95	0,00755	3,59
0,9	0,0298	2,66
0,5	0,324	1,48
0	0,763	1,37
0,25	1,02	1,46
0,5	1,39	1,68
0,75	2,28	2,30
0,9	6,03	3,59
0,97	75,4	6,65

Der Endpunkt der Meridianlinien bestimmt sich bei vorgegebenem M und $\varkappa$ aus der Gleichung:

$$y_3\,y_3' = \frac{2}{\varkappa+1}\,\frac{1}{(M-1)^2}\,\frac{x}{M-1}.$$

Mit dem Strich ist dabei die Ableitung nach x bezeichnet.

8069

Über Zusammenhänge von Plasmaelektronenschwingungen in einem Vakuumbogen mit Laufzeitgeneratoren*).

Von G. Wehner.

Bericht aus dem Flugfunk-Forschungsinstitut Oberpfaffenhofen,

In einer vorwiegend experimentellen Untersuchung werden in einem stabilisierten Quecksilberdampfbogen intensive Plasmaelektronenschwingungen angefacht. Es ergeben sich dabei enge Zusammenhänge mit den vom Hochvakuum her bekannten Laufzeitgeneratoren. Zwei Anregungsmechanismen werden wirksam, die den Vorgängen beim »Spiegelklystron« bezw. beim Heilschen Generator ähneln. Über die Praxis dieser Art der Erzeugung von Dezimeter- und Zentimeter-Wellen werden einige Angaben gemacht.

Gliederung.

I. Bekanntes und Ziel der Arbeit.
II. Versuchsanordnung.
III. Ergebnisse.
1. Die Schwingschicht.
2. Die Fokussierung der schnellen Elektronen.
3. Die Laufzeitbeziehungen.
4. Praxis der Schwingungserzeugung.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Bekanntes und Ziel der Arbeit.

Über Elektronenschwingungen in einem Gasentladungsplasma sind bisher experimentelle Ergebnisse im wesentlichen nur aus drei Arbeiten bekanntgeworden. Penning [1] hat die — schon früher aus der Existenz von »schnellen Elektronen«, die gegen ein Potential von mehr als 20 V negativ gegen Kathode anlaufen, geschlossenen — Plasmaelektronenschwingungen in einem Vakuumbogen erstmals experimentell nachgewiesen. Tonks und Langmuir [2] konnten in einem mit mehreren Glühkathoden, einer Anode und weiteren plattenförmigen Elektroden bestückten Quecksilberdampfgefäß bei tiefem Dampfdruck ($\sim 10^{-3}$ Torr) kurzwellige Schwingungen nachweisen, deren Frequenz mit der von Langmuir berechneten Resonanzfrequenz für die Schwingungen der Plasmaelektronen übereinstimmte. Die Frequenz der Plasmaelektronenschwingungen läßt sich leicht ableiten, wenn man folgende Vorstellung zugrunde legt: In einem Plasma (gleichviel Ionen und Elektronen (10^{10} bis 10^{12}) je Volumeneinheit mit weniger als 10^4 neutralen Gasteilchen je Ion) sei aus irgendeinem Grunde an einer Stelle die Elektronendichte größer, an einer benachbarten Stelle kleiner wie die Ionendichte. Die Folge ist ein Feld, das die leicht beweglichen Elektronen in das Gebiet der Elektronenverarmung zieht, während die trägen Ionen als ruhend angenommen werden können. Infolge ihrer Massenträgheit schießen die Elektronen über das genannte Gebiet hinaus und der Vorgang wiederholt sich in umgekehrter Richtung. Die Elektronen pendeln also um die durch die Ionen vorgeschriebene Ruhelage, die sich als harmonische Schwingung mit der Frequenz $f = 9 \cdot 10^3 \sqrt{N}$ (N = Zahl der Elektronen pro cm³) errechnet. Bei $N = 10^{10}$ bis 10^{12} liegen die Schwingungen demnach im Bereich von etwa 5 bis 30 cm Wellenlänge.

Ein wesentlicher Fortschritt wurde in der Untersuchung dieser Plasmaelektronenschwingungen von Merril und Webb [3] erzielt, die mit einer kleinen Sonde in einem Glühkathodengefäß feststellten, daß 1. die Plasmaelektronenschwingungen in dünnen zur Kathode ungefähr äquidistanten Schichten lokalisiert sind, 2. die schnellen im Kathodenfall beschleunigten und gerichteten Elektronen für die Anfachung dieser Schichten irgendwie wesentlich sind, 3. die durch diese Schichten stoßenden schnellen und gerichteten Elektronen eine ultrahochfrequente Geschwindigkeitsmodulation erfahren und 4. die maximale Hochfrequenzenergie sich erst in einem gewissen Abstand hinter der Schwingungsschicht (von der Kathode aus gesehen) auskoppeln läßt. Die Versuche dieser Verfasser über die Größe der Energieausbeute einen Aufschluß zu bekommen sind allerdings ergebnislos geblieben.

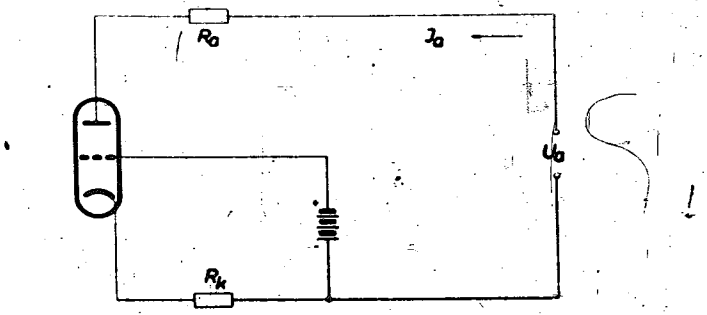


Bild 1. Schaltung zur Stabilisierung einer Entladung.

Von einer anderen Seite der Gasentladungsphysik her ist ein Verfahren bekannt geworden [4, 5, 6], mit dem sich in einem Vakuumbogen schnelle gerichtete Elektronen erzeugen lassen, deren Geschwindigkeit wesentlich größer gemacht werden kann, als dies bei den Versuchen von Merril und Webb [3] der Fall war. Man muß zu diesem Zweck in den Weg der Entladung ein genügend feinmaschiges Gitter einfügen, dem eine vom Bogenstrom selbsttätig gesteuerte Spannung zugeführt wird. Bild 1 zeigt den Aufbau dieser einfachen Schaltung. Während normalerweise ein Vakuumbogen beim Anlegen bzw. Steigern der negativen Gitterspannung ziemlich plötzlich ($< 10^{-5}$ s) abreißt und nur zwei stabile Zustände: »Brennen« oder »Gelöschtsein« kennt, läßt sich mit dieser Schaltung jeder beliebige Spannungswert zwischen der charakteristischen Brennspannung und der Betriebsspannung stabil einstellen. Die stabilisierende Wirkung wird durch den Widerstand R_k erreicht, der die Gitterspannung so einreguliert, daß eine Störung, z. B. eine Stromsteigerung dadurch wieder ausgeglichen wird, daß das nun negativer werdende Gitter die Entladung stärker einengt. Die Spannungserhöhung, die das zwischen Anode und Kathode der Entladung liegende Voltmeter dabei anzeigt, ist ganz am Gitter lokalisiert, an dem, wie Sondenmessungen zeigen, dünne elektrische Doppelschichten in den Gitterlöchern hängen. Alle von der Kathodenseite her in diese Doppelschichten eintretenden Elektronen werden dann mit einer annähernd der Anodenspannung entsprechenden Geschwindigkeit in den Anodenraum geschossen, in dem sie bei genügend tiefem Dampfdruck und damit großer freier Weglänge teilweise ähnlichen Einwirkungen unterworfen werden können, wie sie von den Hochvakuumröhren her bekannt sind. Dazu gehören vor allem

*) R 33.

8070

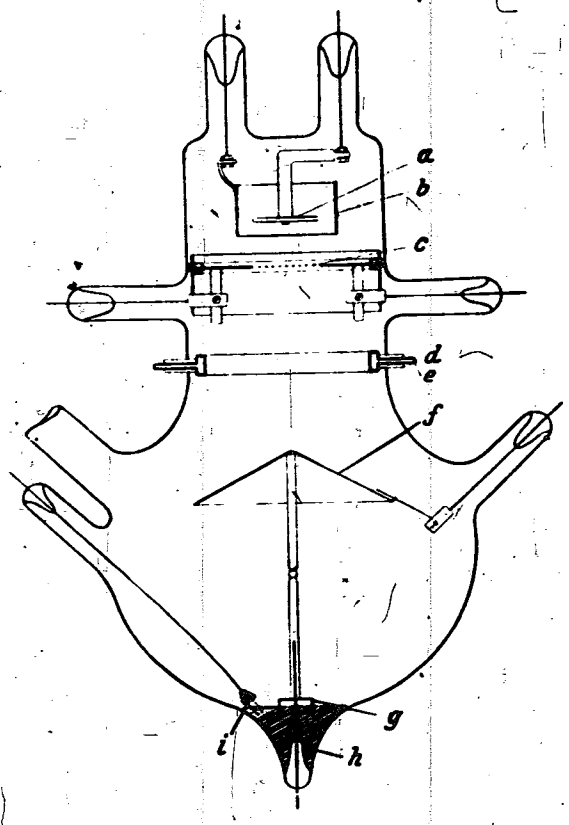


Bild 2. Das Entladungsgefäß.

a Gegenelektrode, *b* Anode, *c* Stabilisierungsgitter, *d* Bunascheiben, *e* Metallring, *f* Hilfsanode, *g* Fixierungsblech, *h* Quecksilberteich, *i* Zündstift.

Reflexion an einer Gegenelektrode, Auslösung von Sekundärelektronen [7], Beeinflussung durch magnetische Felder usw. Ursprünglich war beabsichtigt diese schnellen gerichteten Elektronen in einer Reflexionsanordnung zu Bremsfeldschwingungen anzuregen, es stellte sich aber sehr bald heraus, daß bei dieser Anordnung kurzwellige Schwingungen auftraten, die alle Kennzeichen der Plasmaelektronenschwingungen tragen, deren Energieausbeute aber so groß war, daß sie ohne Schwierigkeiten photometrisch mit Leistungslämpchen gemessen werden konnte.

Damit tauchte eine Reihe interessanter Fragen auf: Sind diese Schwingungen auch wie bei Merril und Webb in dünnen Schichten lokalisiert? Stimmt die Frequenz der Schwingungen mit den theoretischen Überlegungen über Plasmaelektronenschwingungen überein? Welche Ursachen sind für die Anfachung der Schwingungen wirksam? Wie ändern sich die Leistungsausbeute und der Wirkungsgrad mit den Betriebsbedingungen und dem Elektrodenaufbau? usw. Ein Teil dieser Fragen konnte in [7] schon beantwortet werden. Die Ergebnisse von dort seien in diesem Rahmen, soweit sie zum Verständnis der Vorgänge nötig sind, kurz wiederholt. Ein anderer Teil soll hier untersucht werden. Die Beantwortung des größeren Teiles bleibt weiteren Forschungen in dieser Richtung vorbehalten.

II. Versuchsanordnung.

Bild 2 zeigt den prinzipiellen Aufbau des Versuchsgefäßes. Das Gefäß ist zweiteilig ausgeführt, um die Elektroden leicht auswechseln zu können, und liegt im Betrieb dauernd an der Pumpe. Die Schnelligkeit der Betriebsbereitschaft nach einem Elektrodenumbau wird dadurch wesentlich gesteigert, daß als Kathode die Fleckkathode gewählt wurde. Die zeitraubenden Formierungsarbeiten an einer Glühkathode bleiben einem in diesem Fall erspart. Der Bogen brennt zwar mit einer Fleckkathode nie so ruhig und stabil wie mit einer Glühkathode, wobei die Lage des Fleckes am Fixierungsblech und die Größe des Hilfsbogenstromes eine wesentliche Rolle spielen, aber diese Nachteile fallen bei diesen informierenden Versuchen weniger ins Gewicht. Die Oszillogramme in Bild 4 und 5 zeigen darüber hinaus, daß mit den entsprechenden Vorsichtsmaßnahmen, die bereits in [7] ausführlich erläutert wurden, durchaus befriedigende Verhältnisse in dieser Hinsicht erreichbar sind. Der Unterteil des Gefäßes enthält den Quecksilberteich mit der Kathodenzuführung, den Halbleiterzündstift, die Hilfsanode, das Fixierungsblech für den Kathodenfleck und den Pumpstutzen. Der Oberteil, in den die auswechselbaren Elektroden, wie Stabilisierungsgitter, Anode und evtl. weitere Elektroden eingebaut sind, wird durch den äußeren Luftdruck über einen Metallring mit Bunascheiben auf den Unterteil vakuumdicht aufgepreßt. Ein Wasserbad, dessen Temperatur mit Kühlschlange, Tauchsieder, Rührwerk und Kontaktthermometer fest eingestellt werden kann, ermöglicht die Wahl jedes gewünschten Dampfdruckes zwischen 10^{-3} und $5 \cdot 10^{-2}$ Torr.

Das Stabilisierungsgitter wird aus Gründen der Verringerung der Zerstäubung aus einer Graphitmembran von 0,4 mm Dicke gebohrt und enthält fünf Löcher je cm Länge mit 1,4 mm Durchmesser. Bei Dampfdrücken bis $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Torr ist dann ein gleichmäßiges Durchbrennen ohne Gefahr der Einschnürung gewährleistet. Dort, wo das Gitter mit der Gefäßwand zusammenkommt, muß man natürlich das Durchbrennen des Bogens verhindern. Das Gitter zu diesem Zweck fest an der Gefäßwand anliegen zu lassen, empfiehlt sich nicht, da der sich bildende Zerstäubungsniederschlag evtl. unerwünschte leitende Verbindungen vom Gitter zu anderen Elektroden schafft. Es ist deshalb vorteilhafter das Gitter in einen Metallzylinder einzufügen, der von der Gefäßwand in einigen mm Entfernung durch Asbestzwischenlagen distanziert wird.

Es sind natürlich eine ganze Reihe von Elektrodenanordnungen im Anodenraum denkbar. Die einfachste Anordnung würde darin bestehen, daß man dem Stabilisierungsgitter eine plattenförmige Anode gegenüberstellt. Aus weiter unten zu erörternden Gründen lassen sich aber Plasmaelektronenschwingungen in diesem Falle nicht nachweisen, sondern es ist hierzu eine weitere gegen das Plasma negative Elektrode nötig, die möglichst vollständig im gerichteten Strahl der schnellen Elektronen liegen muß. Damit ergibt sich zwangläufig die in Bild 2 gezeigte Anordnung, in der die Anode den Anodenraum zylindrisch umhüllt und die Gegenelektrode dem Stabilisierungsgitter parallel gegenübersteht. Dieser einfache und übersichtliche Aufbau, der den Anodenraum nicht mit weiteren Elektroden (Gittern usw.) belastet, wurde den folgenden Untersuchungen zugrunde gelegt. Die im Betrieb gegenüber dem Plasma negative Gegenelektrode wird wieder aus Zerstäubungsgründen aus Graphit hergestellt. Die Auskopplung der Hochfrequenzenergie wurde zwischen der Anode und der Gegenelektrode vorgenommen. Die Durchführungen dieser Elektroden wurden zu diesem Zweck an eine abstimmbare Paralleldrahtleitung angeschlossen.

Da an anderer Stelle Schwierigkeiten bei der Nachbildung dieser Versuche aufgetaucht sind, sei in Bild 3 die Maßskizze eines vielverwendeten Elektrodenaufbaues veröffentlicht.

III. Ergebnisse.

1. Die Schwingungsschicht.

Die erste interessierende Frage: Sind die Schwingungen auch in dünnen Schichten lokalisiert, wie sie Merril und Webb in einer Glühkathodenentladung ohne Gitter feststellen? Die Beantwortung kann nur mit Sondenmessungen erfolgen, die in [7] beschrieben worden sind. Das Ergebnis dieser Messungen zeigen Bild 4 und 5, in denen durch elektrisches Differenzieren der Sondencharakteristik (Sondenstrom als Funktion der Sondenspannung) das Bild der Geschwindigkeitsverteilung der schnellen Elektronen direkt

8071

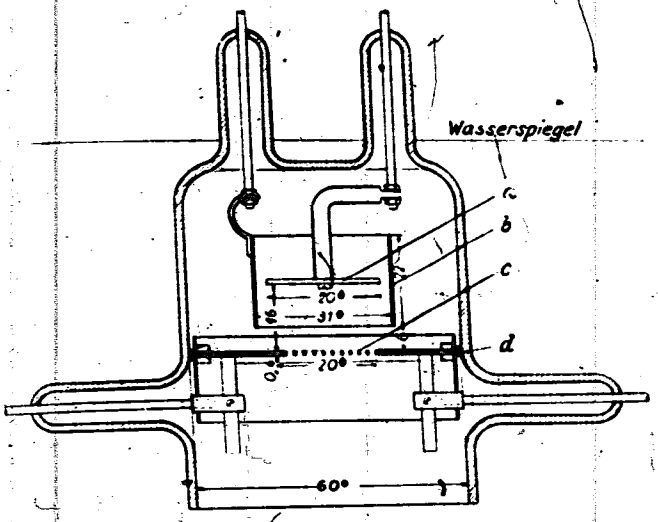


Bild 3. Der Elektrodenaufbau.
a Gegenelektrode, b Anode, c Graphitgitter mit 5 Löchern je cm von 1,4 mm Dmr, d Asbest.

am Braunschen Rohr gewonnen wird. Werden die Betriebsbedingungen so gewählt, daß keine Schwingungen nachweisbar sind, dann geht (Bild 4) bei einer Verschiebung der Sonde um 20 mm vom Gitter weg das größere in das kleinere Maximum über. Bei genauerer Betrachtung erkennt man, daß nicht nur ein Teil der schnellen Elektronen großer Geschwindigkeit, wie die Maxima anzeigen, längs der Entladung durch Zusammenstöße verlorengegangen ist, sondern daß dafür die bereits durch Stöße verlangsamten (im Bilde links) zahlreicher geworden sind. Der Übergang der beiden Kurven ineinander verläuft im Gegensatz zum Folgenden mit der Verschiebung der Sonde völlig stetig, und die Verhältnisse entsprechen den erwarteten. Eine ganz andere Sachlage ergibt sich, wenn Plasmaelektronenschwingungen vorhanden sind. Bewegt man die Sonde, vom Stabilisierungsgitter ausgehend, in Richtung zur Gegenelektrode, dann zeigt sich zunächst bis etwa 5 mm Entfernung vom Stabilisierungsgitter kein Unterschied zu oben. Plötzlich aber erfährt die Geschwindigkeitsverteilung der schnellen Elektronen eine sprunghafte wesentliche Verbreiterung wie Bild 5 zeigt, in der die Geschwindigkeitsverteilung kurz vor und hinter dieser Stelle registriert wurde. Außer dieser sprunghaften Änderung ist das Auftreten von schnellen Elektronen charakteristisch, die auch noch gegen ein gegen Kathode negatives Potential (Bild 5 rechts von der Ordinate) anlaufen können. Bei weiterer Entfernung der Sonde vom Gitter ändert sich dann an dieser neuen Verteilung nichts Wesentliches mehr. Die Verstellung der Sonde über den Querschnitt zeigt, daß diese Sprungstelle einer ganzen Sprungschicht angehört, die sich mit leichter Krümmung ungefähr parallel dem Stabilisierungsgitter aufbaut. Die Dicke der Schwingschicht ist wahrscheinlich kleiner als die Dicke der Sonde, die bei diesen Messungen 0,8 mm betrug. Die Lage der Schwingschicht ist merkwürdigerweise verhältnismäßig wenig von den Betriebsbedingungen abhängig. Bei Anodenspannungen von 200 bis

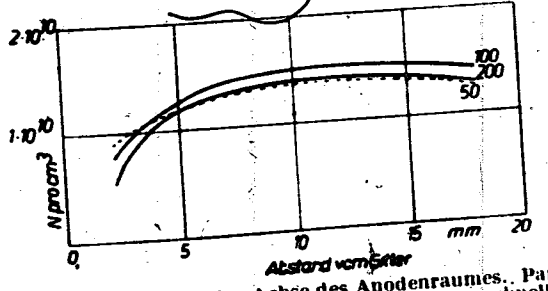


Bild 6. Plasmadichte längs der Achse des Anodenraumes. Parameter: Anodenspannung (Volt). Anordnung ohne Reflexion schneller Elektronen. Anodenstrom 50 mA. Abstand Stabilisierungsgitter-Gegenelektrode 2,3 cm. Dampfdruck 10^{-3} Torr.

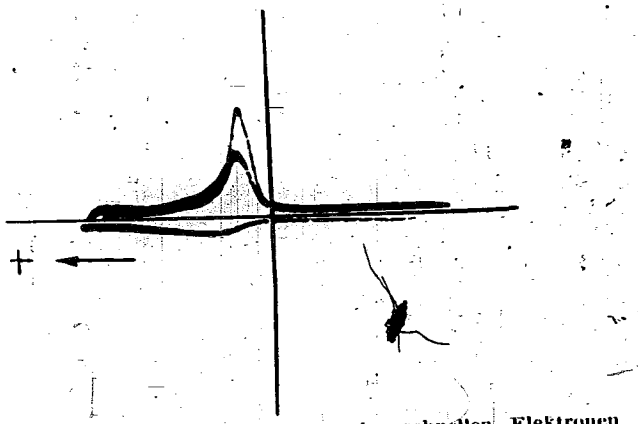


Bild 4. Die Geschwindigkeitsverteilung der schnellen Elektronen für zwei in Achsenrichtung um 20 mm voneinander entfernte Stellen ohne Anwesenheit von Plasmaschwingungen. Die Rücklaufkurve unterhalb der Achse ist wegzudenken. Nach rechts größere Geschwindigkeit.

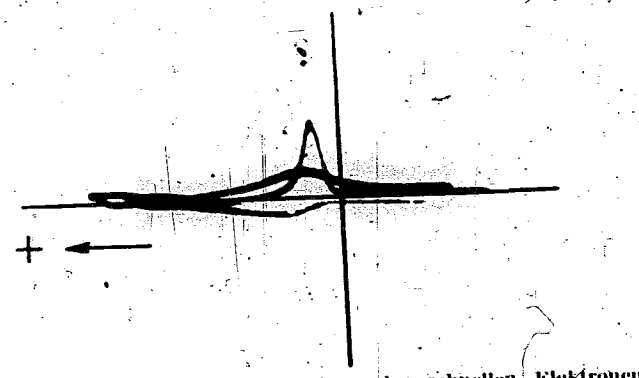


Bild 5. Die Geschwindigkeitsverteilung der schnellen Elektronen für zwei um 1 mm in Achsenrichtung voneinander entfernte Stellen bei Anwesenheit von Plasmaschwingungen. Rechts von der Ordinate laufen die schnellen Elektronen gegen Kathodenpotential an. Die Rücklaufkurve unterhalb der Achse ist wegzudenken.

700 V und dazugehörigen Anodenströmen von 0,05 bis 0,2 A verläßt sie nie den Bereich zwischen 3 und 6 mm Abstand vom Stabilisierungsgitter.

Zur weiteren Klärung wurde die Dichte der langsamen Elektronen längs der Achse des Anodenraumes untersucht und gemessen. Bild 6 und 7 zeigen solche Messungen, wobei die Anodenspannung als Parameter aufgetragen ist. Folgende aus den Kurven ersichtliche Ergebnisse sind hier besonders bemerkenswert: 1. Die Plasmadichte erreicht erst nach 5 bis 8 mm Abstand vom Stabilisierungsgitter einen einigermaßen konstanten Wert. 2. Die Plasmadichte erfährt

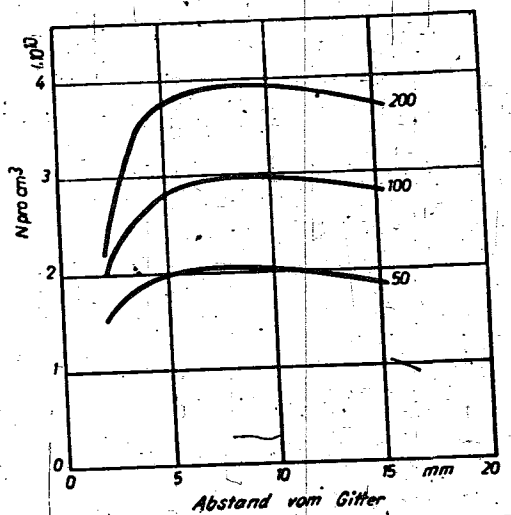


Bild 7. Plasmadichte längs der Achse des Anodenraumes. Parameter: Anodenspannung (Volt). Anordnung mit Reflexion schneller Elektronen. Anodenstrom 50 mA. Abstand Stabilisierungsgitter—Gegenelektrode 2,3 cm. Dampfdruck 10^{-3} Torr.

wesentliche Veränderungen mit dem Potential der Gegenelektrode. 3. Im Falle der Reflexion der schnellen Elektronen steigt die Plasmadichte mit der Anodenspannung stark an. Die physikalischen Ursachen, die diesen Erscheinungen zugrunde liegen, sind bereits in [7] erläutert worden. Da zu jeder Frequenz nur eine dem Stabilisierungsgitter ungefähr parallele Schicht existiert, in der die Plasmadichte einen Wert hat, der die Beziehung $f = 9000 \mid N$ erfüllt, stößt die Erklärung der Schichtbildung auf keine Schwierigkeiten mehr.

Die Übereinstimmung der Frequenz der Schwingungen mit der an der Stelle der Schwingschicht vorliegenden Plasmadichte entsprechend der Beziehung $f = 9000 \mid N$ sei an folgender Meßreihe gezeigt:

U_a	J_a	a	N (gemessen)	λ (gemessen)	λ (berechnet)
270	0,05	6	$1{,}1 \cdot 10^{10}$	32	31,8
320	0,07	5,7	$1{,}5 \cdot 10^{10}$	29	27,2
400	0,1	5	$2{,}1 \cdot 10^{10}$	25,5	23

U_a = Anodenspannung in Volt.
J_a = Anodenstrom in A,
a = gemessener Abstand vom Gitter zur Schwingschicht in mm,
λ = in cm.

Der für das Beispiel ausgewählte Bereich umfaßt nur Spannungen von 270 bis 400 V, da über 400 V Strahlgeschwindigkeit die im Strahl der schnellen Elektronen befindliche Sonde merklich zu Glühen beginnt, wodurch die Messung der Plasmadichte nicht mehr mit der gewünschten Genauigkeit möglich ist.

Zusammenfassend ergibt sich: Die Schwingungen sind in einer dünnen zum Gitter ungefähr parallelen Schicht lokalisiert. Sondenmessungen zeigen, daß die schnellen Elektronen beim Durchtreten durch die Schicht eine Geschwindigkeitsmodulation erfahren. Im Anodenraum existiert nur eine dem Gitter ungefähr parallele Schicht, in der die Dichte der langsamen Plasmaelektronen einen Wert hat, der entsprechend der Langmuirschen Beziehung eine Resonanzfrequenz liefert, die mit der gemessenen Frequenz der Schwingungen übereinstimmt. Diese Schicht ist identisch mit der Schwingschicht. Sie läßt sich mit den Betriebsbedingungen nur in engen Grenzen verschieben.

2. Die Fokussierung der schnellen Elektronen.

Die Geschwindigkeitsmodulation, welche die schnellen Elektronen in der Schicht, in der die langsamen, sekundären Plasmaelektronen ultrahochfrequent um eine Ruhelage pendeln, erfahren, führt zwangläufig zu Betrachtungen, die von den Laufzeitröhren in der Hochvakuumtechnik her bekannt sind. Wenn man eine genügend große freie Weglänge der schnellen Elektronen voraussetzt (das ist sicher erlaubt, wenn der Dampfdruck genügend klein ist — bei 10^{-3} Torr gehen z. B. auf 2 cm Wegstrecke von Elektronen mit 100 V Geschwindigkeit nur etwa 10% durch Stöße verloren —), dann unterliegen die schnellen Elektronen hinter der Schwingschicht denselben Gesetzen wie hinter dem Steuergitterpaar eines Klystrons. Die Geschwindigkeitsmodulation muß z. B. nach einer gewissen Laufraumlänge infolge der »Einholeffekte« in eine Dichtemodulation übergehen. Die gegen das Plasma negative Sonde, von deren Oberfläche Feldlinien ausgehen, die an den Ionen in der Ionenschicht vor der Sonde enden, wird von den schnellen Elektronen dann am stärksten zu Hochfrequenzschwingungen angefacht werden, wenn sie sich an der Stelle maximaler Dichtemodulation befindet. Um diesen optimalen Abstand für die Auskopplung zu berechnen, ist außer der Eintrittgeschwindigkeit U_0 der schnellen Elektronen in die Schwingschicht und der Frequenz der Schwingung f die Größe des Aussteuerungsgrades $\beta = \frac{U_\sim}{U_0}$ wichtig, die das Verhältnis der Wechselspannungsamplitude der Schwingschicht zur Grundgleichspannung angibt. U_0 liegt um den Spannungsverlust von der Kathode bis zum Eintritt in die Doppelschicht am Stabilisierungsgitter (~ 25 V) niedriger wie die Spannung U_a, die das Voltmeter zwischen Anode und Kathode anzeigt. Die Frequenz f ist der Messung ohne weiteres zugängig. Der Aussteuerungsgrad β kann aus Bild 5 (z. B. aus der Halbwertsbreite) entnommen werden. Die Auswertung einer Reihe solcher Geschwindigkeitsspektren ergab, daß β in erster Näherung ziemlich wenig von den Versuchsdaten abhängig ist und zwischen ¼ bis ⅙ liegt. Die Fokuslänge F, bei der die maximale Auskopplung der Grundwelle möglich wird, errechnet sich für kleine Aussteuerungen aus der Beziehung

$$F = \frac{3{,}68 \cdot 6 \cdot 10^7 \mid U_0}{2\pi f \cdot \beta} \quad \ldots \quad [8]$$

Da einerseits β nicht mit großer Genauigkeit gemessen werden kann und die Fokuslänge nur einem sehr flachen Maximum optimaler Dichteschwankungen zugeordnet werden kann, andererseits die Genauigkeit der Messung der optimalen Energieauskopplung infolge der durch das Wasserbad führenden Zuleitung zu Sonde keine große ist, seien nur zwei charakteristische Beispiele herausgegriffen, die zugleich einen neuen Einblick in den Mechanismus der Anregung dieser Schwingungen geben.

1. Versuchsdaten: Abstand Stabilisierungsgitter-Gegenelektrode = 20 mm. Gegenelektrode + 70 V gegen Kathode. Anodenspannung $U_a = 400$ V, Anodenstrom J_a 0,16 A, Wellenlänge $\lambda = 20$ cm, mit Sonde gemessen. Abstand der Schwingschicht vom Stabilisierungsgitter 4 mm. Aussteuerungsgrad $\beta \approx 1/4$. Mit der obigen Beziehung ergibt sich für die Fokuslänge

$$F = \frac{3{,}68 \cdot 6 \cdot 10^7 \mid 400 - 25 \cdot 20 \cdot 4}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{10}}$$

$$\underline{F = 18 \text{ mm}}.$$

Die Sonde nimmt die maximale Hochfrequenzenergie in diesem Falle, wie die Versuche zeigen, ungefähr dort auf, wo sich die Gegenelektrode befindet. Das entspricht einer Fokuslänge von 20 — 4 = 16 mm. Die Übereinstimmung ist befriedigend, wenn man das zweite Beispiel zum Vergleich heranzieht.

2. Versuchsdaten: Abstand Stabilisierungsgitter-Gegenelektrode = 20 mm. Gegenelektrode auf Kathodenpotential. Anodenspannung $U_a = 400$ V, Anodenstrom J_a = 0,09 A, Wellenlänge $\lambda = 25{,}5$ cm, mit Sonde gemessen. Abstand der Schwingschicht vom Stabilisierungsgitter ungefähr 5 mm, Aussteuerungsgrad $\beta \approx 1/5$. Für die Fokuslänge ergibt die Rechnung in diesem Falle $F = 29$ mm. Die Sonde nimmt aber, wie das Experiment zeigt, die maximale Hochfrequenz jetzt ungefähr dort auf, wo sich die Schwingschicht befindet. Wenn man bedenkt, daß — im Gegensatz zum Hochvakuum — das Potential von der Schwingschicht bis kurz vor die Gegenelektrode konstant und unabhängig vom Potential der Gegenelektrode ist, dann werden die schnellen Elektronen an der Gegenelektrode in diesem Falle eine reine Spiegelung erfahren, so daß der Fokus nun auf den Rückweg zu liegen kommt. Der Weg von der Schwingschicht zur Gegenelektrode und zurück beträgt 2 (20 — 5) = 30 mm und stimmt mit dem berechneten Wert befriedigend überein.

In diesen zwei Beispielen tauchen für eine einzige Anodenspannung zwei verschiedene Wellenlängen auf, zwischen denen sich kein stetiger Übergang erzielen läßt, sondern es handelt sich hierbei um zwei ganz diskrete Wellenlängen, die sich bei dieser Anordnung und Anodenspannung erregen können. Es ist naheliegend anzunehmen, daß eine Anregung der Schwingungen nur dann möglich ist, wenn der Fokus entweder in der Schwingschicht selbst (Reflexion, Beispiel 2) oder an der Gegenelektrode (Beispiel 1) liegt. Die genauere Untersuchung des $U_a - J_a$-Gebietes nach Schwingungen zeigt jedoch, daß sich bei einer bestimmten Anodenspannung außer den zwei genannten noch mehrere diskrete Wellenlängen erregen können.

8073

Infolge einer gewissen Elastizität des Aussteuerungsgrades β scheinen die Fokuse auch dieser Bereiche sich in den obengenannten zwei Möglichkeiten einordnen zu lassen. Man muß also für den Anfachungsmechanismus der Schwingungen noch andere Gesetze heranziehen, wie sie unten in den Laufzeitbeziehungen gefunden werden.

Zusammenfassend ergibt sich: Die Geschwindigkeitsmodulation, die die schnellen Elektronen beim Durchtritt durch die Schwingschicht erfahren, geht nach einer gewissen Laufraumlänge in eine Dichtemodulation über. Der Aussteuerungsgrad β der Schwingschicht scheint sich so einzustellen, daß der Fokus entweder an die Stelle der Gegenelektrode oder auf dem Rückweg (Spiegelung an der Gegenelektrode) in die Schwingschicht zu liegen kommt.

3. Die Laufzeitbeziehungen.

Der Weg, der zur weiteren Klärung eingeschlagen wurde, ist folgender: Man wählt eine bestimmte Elektrodenanordnung und untersucht bei allen möglichen Betriebsbedingungen einen möglichst umfangreichen $U_a - J_a$-Bereich nach Schwingungen. Alle Wertpaare $U_a - J_a$, bei denen Schwingungen nachweisbar sind, werden in ein Diagramm eingetragen, wobei die gemessene Wellenlänge, das Potential der Gegenelektrode und evtl. Bemerkungen über Leistung usw. an dem betreffenden Meßpunkt vermerkt werden. Für einen geänderten Elektrodenaufbau wird dann jeweils ein neues Kennblatt angefertigt. Ein Beispiel eines solchen Kennblattes zeigt Bild 8. Die Elektrodenanordnung entsprach dabei vollständig der in Bild 3 gezeigten. Die obere der beiden an jedem Punkt vermerkten Zahlen bezeichnet die Wellenlänge in cm und die untere die Spannung der Gegenelektrode in Volt gegenüber der Kathode. Aus diesem Diagramm lassen sich nun folgende typische Merkmale erkennen:

1. Die Schwingungen lassen sich nur in ganz charakteristischen Strom-Spannungsbereichen anfachen.

2. Die Schwingbereiche unterscheiden sich dadurch, daß für einen U_a-Wert hier zwei oder in anderen Fällen mehrere J_a-Bereiche existieren, in denen sich Schwingungen ganz voneinander verschiedener Wellenlänge anregen lassen.

3. Innerhalb eines Schwingbereiches spielt die Spannung U_a die ausschlaggebende Rolle für die angefachte Frequenz, während der Anodenstrom bei konstanter Anodenspannung nur wenig Einfluß hat. Eine größere Anodenspannung fordert einen größeren Anodenstrom, damit sich Schwingungen erregen, und die Frequenz der Schwingungen nimmt mit der Anodenspannung zu.

4. Das Potential der Gegenelektrode kann zwischen -30 V und etwa $+130$ V gegen Kathode variiert werden, ohne daß sich innerhalb eines Schwinggebietes die Frequenz in größerem Maße ändert. Auf die Leistungsausbeute allerdings ist die optimale Einstellung der Spannung der Gegenelektrode von großem Einfluß.

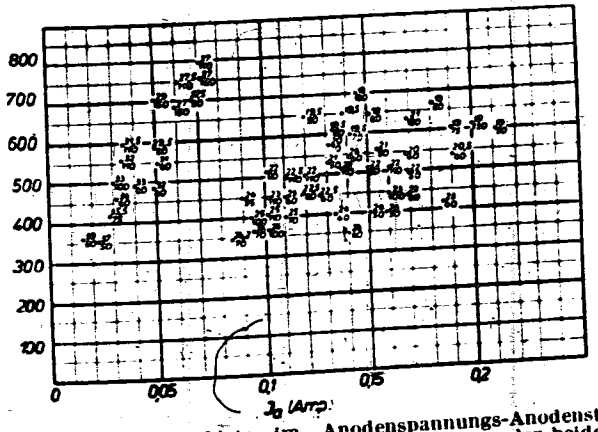


Bild 8. Die Schwinggebiete im Anodenspannungs-Anodenstrom-Diagramm. Elektrodenaufbau nach Bild 3. Die obere der beiden an jedem Meßpunkt vermerkten Zahlen bedeutet die Wellenlänge in cm, die untere das Potential der Gegenelektrode. Abstand Gegenelektrode—Stabilisierungsgitter 1,6 cm. Dampfdruck 10^{-3} Torr.

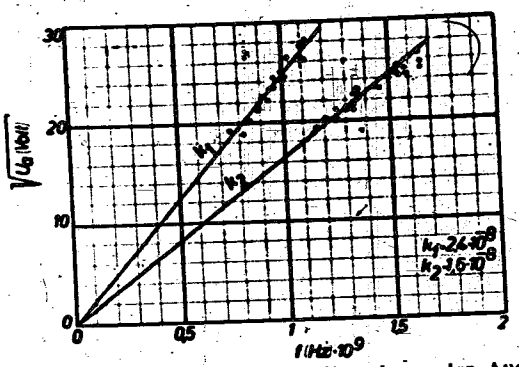


Bild 9. Zusammenhang zwischen der Wurzel aus der Anodenspannung und der Frequenz für die Meßpunkte des Bildes 8. Die dickeren Meßpunkte bezeichnen mehrere zusammenfallende Punkte.

Wird das Diagramm in Bild 8 so umgezeichnet, daß für jeden Schwingpunkt die Wurzel der Anodenspannung als Funktion der Frequenz aufgetragen ist, dann ergibt sich Bild 9. Die beiden Schwinggebiete schrumpfen dann zu den gezeichneten Punktbereichen zusammen, wobei mehrere zusammenfallende Meßpunkte dicker bezeichnet sind. Die eingezeichneten durch den Nullpunkt gelegten Gerade zeigen, daß zumindest oberhalb etwa 400 V Anodenspannung die Frequenz der Geschwindigkeit der schnellen Elektronen direkt proportional ist. Auch hieraus ist wieder der Einfluß von Laufzeitvorgängen ersichtlich. Das Ziel weiterer Untersuchungen muß nun sein, die Proportionalitätsfaktoren zwischen der Geschwindigkeit der schnellen Elektronen und der Frequenz für die verschiedenen Schwingbereiche und für verschiedene Elektrodenanordnungen zu berechnen.

Eine Aussage, die man mit Sicherheit über den Anregungsmechanismus machen kann ist die, daß die Schwingschicht nicht vom zeitlich gleichförmigen Strahl der schnellen Elektronen, die aus dem Stabilisierungsgitter herausschießen, erfolgen kann, sondern, daß eine Anfachung nur möglich ist, wenn ein pulsierender Strahl schneller Elektronen im Mittel Hochfrequenzenergie an die Schwingschicht abgibt. Die Anregung kann demnach nicht von der Seite des Stabilisierungsgitters aus erfolgen, sondern nur von der Seite der Gegenelektrode her. Damit decken sich zwei wichtige Beobachtungen: 1. Die Schwingschicht kann, wie Sondenmessungen zeigen, durch geeignete Abstimmung des zwischen Anode und Gegenelektrode liegenden Lechersystems zerstört werden, und 2. Schwingungen sind nicht nachweisbar, wenn man auf die Gegenelektrode verzichtet und dem Stabilisierungsgitter nur die Anode gegenüberstellt. Wie von den Laufzeitröhren in der Hochvakuumtechnik her bekannt ist, kann eine Energieabgabe an ein Hochfrequenzfeld nur dann erfolgen, wenn das Feld im Augenblick einer Häufung der schnellen Elektronen so gerichtet ist, daß es diese Elektronen bremst. Die Energiezufuhr ist dann in dieser Halbperiode größer wie die Energieabgabe in der Halbperiode, in der die entsprechende Elektronenverdünnung beschleunigt wird. Die Elektronenhäufung kann natürlich nur von denjenigen Elektronen des ursprünglich gleichförmigen Strahles verursacht sein, die in einem Phasenbereich in die Schicht eingetreten sind, in der die Wechselspannung in der Schicht in einer solchen Richtung anstieg, daß die später eingetretenen Elektronen eine höhere Geschwindigkeit bekommen und die vorangegangenen langsameren an der Stelle des Fokus einholen. Es ist deshalb üblich, für Laufzeitbetrachtungen als »Bezugselektron« ein Elektron zu wählen, das im Augenblick des Nulldurchganges der ansteigenden gitterseitig negativen Schichtwechselspannung in die Schicht eintritt. Dieses Elektron verkörpert dann die Mitte des Phasenbereiches, der zur Fokussierung beiträgt.

Wenn man von Sekundärelektronen absieht — das ist hier sicher erlaubt, da das Potential der Gegenelektrode so gewählt wird, daß die schnellen Elektronen meist mit

8074

weniger als 100 V Geschwindigkeit auf die Graphitelektrode auftreffen —, dann sind zwei Fälle der Anregung denkbar:

1. Der Fokus liegt beim Rückweg von der Gegenelektrode an der Stelle der Schwingschicht. Das Bezugselektron wird an der Gegenelektrode reflektiert und passiert auf seinem Rückweg die Schwingschicht dann, wenn es gebremst wird. Die Laufzeit t_1 dieses Bezugselektrons von der Schwingschicht zur Gegenelektrode und zurück muß dann zwischen $n \cdot T$ und $n \cdot T + \frac{T}{2}$ liegen, wobei T die Schwingungsdauer und n die ganzen Zahlen 1, 2 usw. bedeuten. Die Vorgänge ähneln dann denen, wie sie vom „Spiegelklystron" [9] her bekannt sind.

2. Der Fokus liegt an der Stelle der Gegenelektrode. Wenn die Gegenelektrode so wie das Stabilisierungsgitter und das Plasma unterhalb der Schwingschicht auf festem hochfrequenzfreiem Potential gehalten wird, dann muß eine Abgabe von Hochfrequenzenergie in der Ionenschicht vor der Gegenelektrode dazu führen, daß das Plasma vor dieser Ionenschicht gegenüber dem Ruhepotential zu Schwingungen angefacht wird. Liegt die Resonanzfrequenz des Plasmas zwischen Schwingschicht und Gegenelektrode höher wie die Frequenz der Schwingungen, was ja durchwegs der Fall ist, wie aus der Dichteverteilung längs des Anodenraumes und der Lage der Schwingschicht hervorgeht, dann ist zu vermuten, daß sich dieses Plasma betreffs dieser Schwingungen wie ein einheitlicher Block verhält. Eine Schwingung des Plasmas an der Gegenelektrode wird dann eine gleichphasige Schwingung des Plasmas dicht über der Schwingschicht zur Folge haben. Schwingungen werden in diesem Falle sich dann anregen, wenn das Bezugselektron zu einem Zeitpunkt in der Ionenschicht vor der Gegenelektrode ankommt, in dem das schwingende Plasma positives Potential angenommen hat, d. h. die Laufzeit t_2 von der Schwingschicht zur Ionenschicht vor der Gegenelektrode zwischen nT und $nT + \frac{T}{2}$ liegt. Die Vorgänge ähneln dann denen, wie sie vom Heilschen Generator bekannt sind [10].

Es gilt nun die Laufzeiten t_1 und t_2 als Funktion von Anodenspannung U_a, Abstand der Schwingschicht von der Gegenelektrode, Ionenschichtdicke und Potential der Gegenelektrode zu berechnen und mit Hilfe der jeweiligen Laufzeitbeziehung eine Verknüpfung von U_a mit der Schwingungsdauer T bzw. der Frequenz f herzustellen.

Unter folgenden vereinfachenden, aber unbedenklichen Voraussetzungen stößt die Berechnung auf keine Schwierigkeiten: Die Elektronen haben beim Eintritt in die Schwingschicht alle eine Geschwindigkeit, die praktisch gleich der Anodenspannung U_a ist. Der Fehler, den man dadurch begeht, daß der Spannungsverlust von etwa 25 V von der Kathode bis zum Eintritt in die Schwingschicht nicht in Rechnung gestellt wird, würde erst bei kleinen Anodenspannungen merklich werden. Das Bezugselektron durchläuft den Anodenraum mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit, die der Anodenspannung U_a äquivalent ist. In der Ionenschicht vor der Gegenelektrode geht die Geschwindigkeit in eine gleichförmig verzögerte über. Die in der Ionenschicht vor der Gegenelektrode gleichförmig beschleunigten reflektierten Elektronen kehren mit gleichförmiger Geschwindigkeit zur Schwingschicht zurück. Die Austrittsgeschwindigkeit dieser Elektronen aus der Ionenschicht ist der Differenz zwischen Anodenspannung U_a und der Gegenelektrodenspannung U_E (bezogen auf Kathode) äquivalent. Wird der Abstand der Schwingschicht von der Gegenelektrode mit a, die Dicke der Ionenschicht vor der Gegenelektrode mit b bezeichnet, dann ergibt sich:

Für die Laufzeit τ_1 von der Schwingschicht bis zum Eintritt in die Ionenschicht an der Gegenelektrode:

$$\tau_1 = \frac{a-b}{6 \cdot 10^7} \cdot \sqrt{U_a}.$$

Für die Laufzeit τ_2 durch die Ionenschicht an der Gegenelektrode:

$$\tau_2 = \frac{2b}{6 \cdot 10^7 \left(\sqrt{U_a} + \sqrt{U_E}\right)}.$$

Für die Laufzeit τ_3 der reflektierten Elektronen von der Gegenelektrode durch die Ionenschicht:

$$\tau_3 = \frac{2b}{6 \cdot 10^7 \left(\sqrt{U_a} - \sqrt{U_E}\right)}.$$

Für die Laufzeit τ_4 zurück zur Schwingschicht:

$$\tau_4 = \frac{a-b}{6 \cdot 10^7 \left(\sqrt{U_a} - \sqrt{U_E}\right)}.$$

Der Zusammenhang mit t_1 und t_2 ist gegeben durch:

$$t_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4,$$

$$t_2 = \tau_1 + \frac{\tau_2}{2},$$

wobei der Faktor ½, der bei τ_2 steht, ausdrücken soll, daß eine mittlere Zeit zwischen dem Eintritt in die Ionenschicht und dem Eintritt in die Gegenelektrode zu nehmen ist.

Da das Potential U_E der Gegenelektrode 100 V gegen Kathode bei diesen Versuchen nie wesentlich übersteigt, kann in erster Näherung für hohe Anodenspannungen U_a vernachlässigt werden. Für Anodenspannungen > 400 V, die den Messungen meistens zugrunde liegen, übersteigt der dadurch begangene Fehler, da außer in dem an sich kleinen τ_2 die Differenz der Potentiale nur unter der Wurzel eingeht, nicht 15%.

Die Werte vereinfachen sich dann zu:

$$t_1 = \frac{2(a+b)}{6 \cdot 10^7 \sqrt{U_a}},$$

$$t_2 = \frac{a}{6 \cdot 10^7 \sqrt{U_a}}.$$

Anregung erfolgt demnach, wenn

Fall 1.)

$$\frac{n}{f} < \frac{2(a+b)}{6 \cdot 10^7 \sqrt{U_a}} < \frac{2n+1}{2f}.$$

Fall 2.)

$$\frac{n}{f} < \frac{a}{6 \cdot 10^7 \sqrt{U_a}} < \frac{2n+1}{2f} \text{ ist.}$$

Die Grenzen für den Proportionalitätsfaktor k zwischen $\sqrt{U_a}$ und f sind also:

Fall 1.

$$\frac{2(a+b)}{n \cdot 6 \cdot 10^7} > k > \frac{4(a+b)}{(2n+1) \cdot 6 \cdot 10^7}$$

Fall 2.

$$\frac{a}{n \cdot 6 \cdot 10^7} > k > \frac{2a}{(2n+1) \cdot 6 \cdot 10^7}.$$

Die Dicke der Ionenschicht vor der Gegenelektrode läßt sich mit der Langmuirschen Beziehung wie folgt berechnen:

$$N^+ \cdot v^+ \cdot e = \frac{4}{9} \cdot \Delta \sqrt{\frac{2e}{M}} \cdot \frac{U_s^{3/2}}{b^2},$$

wobei Δ die allgemeine Dielektrizitätskonstante, e die Elementarladung, M die Masse des Hg^+ Ions, U_s die Spannung zwischen Elektrode und Plasma, die hier in erster Näherung der Anodenspannung U_a gleichgesetzt werden kann, und b die Schichtdicke bedeuten. Die Ionengeschwindigkeit v^+ wird in Wand- bzw. Elektrodenähe nach neueren Untersuchungen von Fetz [11] nicht mehr als ungerichtet angenommen, deshalb entfällt der Faktor $^1/_4$, der sonst noch bei v^+ stehen müßte. Wenn für v^+ der in [11] gefundene mittlere Wert 10^5 cm/s eingesetzt wird (ein Fehler in v^+ geht für die Schichtdicke nur unter der Wurzel ein), dann läßt sich mit N^+ als Parameter die Schichtdicke als Funktion der Schichtspannung darstellen, wie es in Bild 10 getan wurde. Eine nicht ganz unbedenkliche Vernachlässigung wird allerdings dadurch gemacht, daß die Ionenschicht als reine, nicht von Elektronen verunreinigte Ionenschicht berechnet ist. Die hier in die Gegenelektrode eintretenden oder in der Ionenschicht evtl. umkehrenden Elektronen werden eine Auflockerung der Ionenwolke verursachen, die sich in einer größeren Schichtdicke äußert. Die Unter-

8075

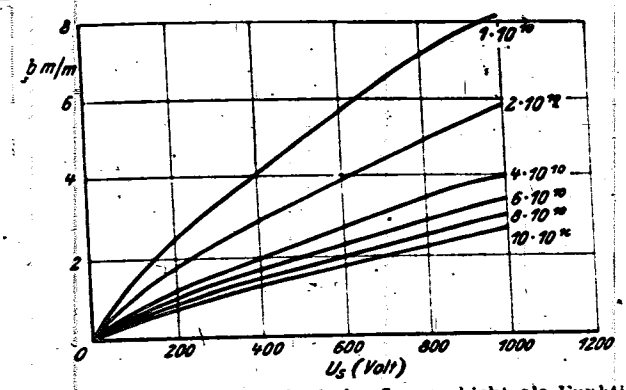


Bild 10. Die berechnete Dicke b der Ionenschicht als Funktion der Schichtspannung U_s. Parameter: Plasmadichte.

lagen für eine exakte Berechnung dieses Einflusses fehlen noch. Da die Schichtdicke b besonders bei größeren Entfernungen des Stabilisierungsgitters von der Gegenelektrode meist klein gegen den Abstand a der Schwingschicht von der Gegenelektrode bleibt und die Schichtdicke b nur als Summand in den obigen Beziehungen vorkommt, wird jedoch die Vernachlässigung dieses Einflusses für eine erste Näherung erlaubt sein. Es bleibt nun nur noch die Frage, welchen Wert man für die Plasmadichte N_E vor der Gegenelektrode einzusetzen hat. Aus einer mittleren Frequenz des experimentell gefundenen Frequenzbereiches kennt man mit $f = 9000 \sqrt{N}$ die mittlere Plasmadichte N_s an der Stelle der Schwingschicht. Aus Bild 6 und 7 läßt sich, da die Lage der Schwingschicht ungefähr bekannt ist, entnehmen, daß man an der Stelle der Gegenelektrode mit Plasmadichten N_E rechnen kann, die durchschnittlich 1,1- bis 1,5mal so hoch liegen.

An dem in Bild 8 und 9 gezeigten Beispiel seien nun in dieser Art die Grenzen für die Proportionalitätsfaktoren wie folgt berechnet:

Berechnung der Schichtdicke b:

Mittlere Frequenz aus Bild 5:

$$f \quad 1{,}2 \cdot 10^9 \text{ Hz}.$$

Daraus

$$N_s = \left(\frac{f}{9000}\right)^2 = 1{,}8 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3,$$

$$N_E = 1{,}3 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{10} = 2{,}3 \cdot 10^{10}/\text{cm}^3.$$

Bei einer mittleren Anodenspannung von 550 V (aus Bild 8) ergibt sich mit Bild 10 für die Schichtdicke $b \approx 4$ mm.

Die Sondenmessungen ergeben, daß die Schwingschicht sich etwa 4 mm vom Stabilisierungsgitter entfernt aufbaut. Bei einem Abstand des Stabilisierungsgitters von der Gegenelektrode von 1,6 cm wird demnach:

$$a \quad 1{,}6 - 0{,}4 \quad 1{,}2 \text{ cm}.$$

Damit ergibt sich für den Proportionalitätsfaktor k

Fall 1:

$$\frac{2 \cdot (1{,}2 + 0{,}4)}{n \cdot 6 \cdot 10^7} > k > \frac{4\,(1{,}2 + 0{,}4)}{(2n+1) \cdot 6 \cdot 10^7}$$

Fall 2:

$$\frac{1{,}2}{n \cdot 6 \cdot 10^7} > k > \frac{2 \cdot 1{,}2}{(2n+1) \cdot 6 \cdot 10^7}$$

für $n = 1$

Fall 1: $5{,}3 \cdot 10^{-8} > k > 3{,}6 \cdot 10^{-8}$

Fall 2: $2 \cdot 10^{-8} > k > 1{,}3 \cdot 10^{-8}$

$n = 2$

Fall 1: $2{,}7 \cdot 10^{-8} > k > 2{,}1 \cdot 10^{-8}$

Fall 2: $1{,}0 \cdot 10^{-8} > k > 0{,}8 \cdot 10^{-8}$

$n = 3$

Fall 1: $1{,}8 \cdot 10^{-8} > k > 1{,}5 \cdot 10^{-8}$

Fall 2: $0{,}7 \cdot 10^{-8} > k > 0{,}6 \cdot 10^{-8}$

Die experimentell gefundenen Faktoren, Bild 9, $k_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ und $k_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ lassen sich nun folgendermaßen einordnen: k_1 in den Fall 1 für $n = 2$ und k_2 in den Fall 2 für $n = 1$ oder Fall 1 für $n = 3$. Eine Entscheidung darüber, ob es sich bei k_2 um Fall 1 oder Fall 2 handelt, ist hiernach nicht möglich. Fall 2 ist jedoch aus zwei anderen Gründen wahrscheinlicher: Die bedeutend größere ausgekoppelte Energie und die Tatsache, daß in diesem Schwinggebiet die Anode zu viel stärkeren Schwingungen gegenüber dem Ruhepotential (Stabilisierungsgitter) wie die Gegenelektrode angefacht wird (im Gegensatz zum Gebiet mit k_1), lassen auf einen anderen Anregungsmechanismus schließen.

Diese Betrachtungen über die Einordnung der verschiedenen Schwinggebiete in die möglichen Anregungsfälle mögen, an diesem Einzelbeispiel betrachtet, etwas gewagt erscheinen, sie haben sich jedoch für die verschiedensten Elektrodenanordnungen so gut bewährt, daß ihre grundsätzliche Gültigkeit sehr wahrscheinlich wird. Es gelingt damit z. B. die Schwinggebiete für einen anderen Elektrodenabstand, wie folgendes Beispiel zeigt, ganz befriedigend vorauszusagen.

Abstand Stabilisierungsgitter—Gegenelektrode 1,9 cm. Für den Abstand der Schwingschicht vom Stabilisierungsgitter sei wieder ein mittlerer Wert von 0,4 cm und für die Ionenschichtdicke $b = 0{,}4$ cm wie im oberen Beispiel eingesetzt. Dann ergeben sich für k folgende Mittelwerte, denen die experimentell gefundenen, Bild 11, in Klammer gegenübergestellt seien

$n = 1$

Fall 1: $k = 5{,}1 \cdot 10^{-8}$

Fall 2: $k = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ $(k = 2{,}0 \cdot 10^{-8})$

$n = 2$

Fall 1: $k = 2{,}75 \cdot 10^{-8}$ $(k = 2{,}8 \cdot 10^{-8})$

Fall 2: $k = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$ $(k = 1{,}2 \cdot 10^{-8})$

$n = 3$

Fall 1: $k = 1{,}9 \cdot 10^{-8}$ $(k = 1{,}8 \cdot 10^{-8})$

Außer den schon im vorigen Beispiel festgestellten Schwinggebieten (Reflexion für $n = 2$ und Heilscher Fall für $n = 1$) tauchen hier also noch zwei weitere Fälle auf: Reflexion für $n = 3$ und Heilsche Anordnung für $n = 2$. Die beiden Schwinggebiete, die dem Heilschen Fall der Anregung zuzuordnen sind, zeichnen sich wieder dadurch aus, daß der Wirkungsgrad bedeutend größer ist und daß vorwiegend die Anode und damit das Anodenplasma zu Schwingungen gegenüber dem Stabilisierungsgitter angefacht wird. Daß die Energieausbeute im Fall des Heilschen Generators größer wie im Fall der Reflexion ist, wird verständlich, wenn man sich an die Lage des Fokus erinnert. Im Fall des Heilschen Generators liegt der Fokus an der Gegenelektrode, fällt also mit der Stelle zusammen, an der die Energie ausgekoppelt wird.

Diesen Überlegungen über die Anregungsmöglichkeiten der Schwingschicht scheint noch folgendes zu widersprechen: Auch im Reflexionsfall erhält man dann die stärksten

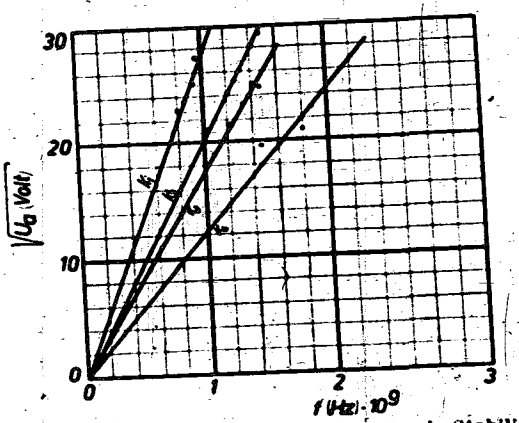


Bild 11. Die Schwinggebiete bei einem Abstand Stabilisierungsgitter—Gegenelektrode = 1,9 cm. Dampfdruck 10^{-5} Torr.
$K_1 = 2{,}75 \cdot 10^{-8}$ $K_2 = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$
$K_3 = 2{,}00 \cdot 10^{-8}$ $K_4 = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$

Schwingungen, wenn die Gegenelektrode gegen Kathode auf ein Potential von ungefähr 70 V gebracht wird, also gar keine reine Reflexion vorliegen kann. Genauere Untersuchungen zeigen, daß in den Reflexionsfällen die Gegenelektrode zwar auch negativ sein darf, aber die ausgekoppelte Hochfrequenzenergie dann sehr klein wird. Wenn man jedoch bedenkt, daß im Falle reiner Reflexion jedes Elektron, das der Ionenschicht auf dem Hinweg Energie zuführt, auf dem Rückweg (fast zur selben Phasenlage des Feldes) dieser nahezu dieselbe Energie wieder entzieht, dann wird auch dieses Verhalten verständlich. Beim optimalen Potential der Gegenelektrode werden dann demnach aus dem breiten Geschwindigkeitsspektrum der schnellen Elektronen, Bild 5, die schnellsten, die für die Energieabgabe sorgen, von der Gegenelektrode aufgenommen, während die langsameren reflektiert werden und für die Anfachung der Schwingschicht verantwortlich sind.

Ungeklärt bleibt vorerst noch der Einfluß, den die Gestaltung der Anode ausübt. Es zeigt sich nämlich, daß die Form der Anode sehr wesentlich darüber entscheidet, ob sich die Reflexions- oder die Heilschen Schwingungen anregen. Über Anregungsmöglichkeiten, denen die Auslösung von Sekundärelektronen zugrunde liegt, konnte ebenfalls noch nicht soviel Versuchsmaterial zusammengetragen werden, daß eindeutige Aussagen möglich sind.

Zusammenfassend ergibt sich: Schwingungen lassen sich nur in bestimmten Strom-Spannungsbereichen anfachen. Die Frequenz der Schwingungen ist innerhalb eines solchen Bereiches der Geschwindigkeit der schnellen Elektronen proportional. Die Proportionalitätsfaktoren der verschiedenen Bereiche lassen sich aus Laufzeitbeziehungen berechnen und in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen bringen, wenn man zwei Anregungsmechanismen zugrunde legt: 1. Die Schwingschicht wird von den an der Gegenelektrode reflektierten dichtemodulierten schnellen Elektronen zu Schwingungen angestoßen. 2. Die Schicht wird durch den Plasmablock, der zwischen der Schicht und der hochfrequenzfreien Gegenelektrode liegt und seinerseits die Anfachungsenergie vor der Gegenelektrode aufnimmt, zu Schwingungen angestoßen. Der Wirkungsgrad ist in diesem Fall bedeutend größer.

4. Praxis der Schwingungserzeugung.

Zum Schluß noch einige Hinweise über die praktischen Erfahrungen und Konsequenzen. Die photometrisch mit kleinen Glühlämpchen gemessenen ausgekoppelten Hochfrequenzleistungen, die bisher maximal erreicht werden konnten, liegen bei 4 W mit $\lambda = 19$ cm (Heilscher Fall mit $n = 1$). Der Wirkungsgrad beträgt dabei etwa 3%. Bei einem Abstand des Stabilisierungsgitters von der Gegenelektrode von 4 mm sinkt die Wellenlänge auf z. B. 6,5 cm. Für einen Vergleich mit den Hochvakuumlaufzeitgeneratoren dürfte eine Angabe über die Größenordnung des Strahlstromes von Interesse sein, der natürlich nicht mit dem Anodenstrom identisch ist, sondern aus der Strom-Spannungscharakteristik der Gegenelektrode bestimmt werden muß. Er liegt bei diesen Versuchen in der Größenordnung von 100 mA. Bemerkenswert umfangreich ist der Wellenlängenbereich, der sich mit ein und derselben Elektrodenanordnung überstreichen läßt. In Bild 11 erstreckt er sich z. B. über ein Gebiet von $\lambda = 38$ cm bis $\lambda = 15$ cm. Daraus wird die außerordentliche Elastizität ersichtlich, die — im Gegensatz zu den Hochvakuumlaufzeitgeneratoren, bei denen man an die nur in geringen Grenzen verstimmbaren Hohlraumresonatoren gebunden ist — infolge der im Plasma automatisch sich einregulierenden Steuer- und Auskoppelschichten diesem Schwingungsmechanismus zukommt. Die Einstellung des Dampfdruckes ist nicht kritisch. Bei höherem Dampfdruck sinkt der Wirkungsgrad infolge der verringerten freien Weglänge etwas ab. Wesentlich ist allerdings, daß man mit dem Dampfdruck unterhalb der Grenze bleibt, bei der sich die Entladung am Stabilisierungsgitter zusammenzieht und einschnürt. Die Gegenelektrode muß dem Stabilisierungsgitter möglichst genau parallel gegenüberstehen. Stellt man die Gegenelektrode nur wenig schräg zum Stabilisierungsgitter, dann sinkt die gemessene Leistung sehr stark ab. Ob hier durch entsprechendes Krümmen der Elektroden und damit besserer »Anpassung« an die schwach gekrümmte Schwingschicht eine Verbesserung erzielt wird, müssen weitere Versuche klären. Die Zerstäubung der im Betrieb gegen das Plasma negativen Elektroden spielt im Gegensatz zur Gittersteuerung von Vakuumbögen [12] hier deswegen keine ausschlaggebende Rolle für die Lebensdauer der Röhren, weil man nur verhindern muß, daß die Zerstäubungsniederschläge unerwünschte leitende Verbindungen zwischen den Elektroden schaffen, aber die Zerstörung der massiven Elektroden einschließlich des grobmaschigen Stabilisierungsgitters nicht so leicht zu befürchten ist. Besonders angenehm machen sich die geringen Vakuumanforderungen bemerkbar, die es z. B. ohne Schwierigkeiten ermöglichen, im Betrieb von außen verstellbare Elektroden einzubauen.

Der Weg für weitere Untersuchungen wird im wesentlichen in folgenden Richtungen verlaufen: Untersuchung der Anregungsmöglichkeiten durch Sekundärelektronen, Beeinflussung des Aussteuerungsgrades β, Untersuchung anderer Elektrodenanordnungen, z. B. Einfügung von Steuer- bzw. Auskoppelgittern (orientierende Versuche mit Anodengittern zwischen Stabilisierungsgitter und Gegenelektrode haben z. B. gezeigt, daß die Schwingschicht sich offenbar unter entsprechender Verkürzung der Wellenlänge auch vor der Gegenelektrode bilden kann), Übergang zu konzentrischen Anordnungen usw. und Verbesserung des Hochfrequenzteiles, z. B. durch Anwendung von Hohlraumresonatoren. Den Vorbereitungen für praktische Anwendungen wird der Übergang zu abgeschmolzenen Gefäßen mit Glühkathode und nicht kondensierenden Edelgasen wie Helium dienen.

IV. Zusammenfassung.

Die gerichteten schnellen Elektronen, die in einem mit einem Gitter stabilisierten Vakuumbogen in den Anodenraum der Entladung geschossen werden, können mit einer Elektrodenanordnung, bei der eine Gegenelektrode dem Stabilisierungsgitter gegenübersteht, intensive Plasmaelektronenschwingungen anstoßen.

Diese Schwingungen, bei denen die langsamen Plasmaelektronen um die durch die Ionen vorgeschriebene Ruhelage pendeln, sind in dünnen zum Gitter ungefähr parallelen Schichten lokalisiert. Über die Ursache der Schichtbildung und die Lage der Schicht lassen sich aus der Verteilung der Plasmadichte längs des Anodenraumes Zusammenhänge erkennen. Die Frequenz f der Schwingungen stimmt entsprechend der Langmuirschen Beziehung $f = 9000 \sqrt{N}$ befriedigend überein mit der aus der Plasmadichte N an der Stelle der Schwingschicht berechneten. Bei den üblichen Plasmadichten der Größenordnung 10^{10} bis 10^{12} pro cm³ liegen die Wellenlängen bei 5 bis 30 cm.

Die durch diese Schichten stoßenden schnellen Elektronen erfahren, wie Sondenmessungen zeigen, eine Geschwindigkeitsmodulation, die nach einer gewissen Laufraumlänge in eine Dichtemodulation übergeht. Daraus werden Zusammenhänge mit Laufzeitgeneratoren erkennbar, deren Untersuchung, wenn man von Sekundärelektronen absieht, zu folgenden zwei Anregungsmöglichkeiten führt:

1. Die Schwingschicht wird von den an der Gegenelektrode reflektierten dichtemodulierten schnellen Elektronen zu Schwingungen angestoßen. Der Aussteuerungsgrad stellt sich so ein, daß der Fokus auf dem Rückweg in die Schwingschicht zu liegen kommt. Die Anordnung ähnelt dann dem »Spiegelklystron«.

2. Die Schicht wird durch den Plasmablock, der zwischen der Schicht und der hochfrequenzfreien Gegenelektrode liegt und seinerseits die Anfachungsenergie vor der Gegenelektrode aufnimmt, zu Schwingungen angestoßen. Der

8077

Aussteuerungsgrad stellt sich so ein, daß der Fokus an die Stelle der Gegenelektrode zu liegen kommt. Die Anordnung ähnelt dann dem Heilschen Generator.

Für den Zusammenhang zwischen Elektronengeschwindigkeit und Frequenz müssen entsprechend den beiden Anregungsmechanismen bestimmte Laufzeitbeziehungen erfüllt sein, die mit den experimentellen Ergebnissen in Übereinstimmung gebracht werden können.

Wenn man die Hochfrequenzenergie zwischen Anode und Gegenelektrode auskoppelt, dann hat die Heilsche Anordnung den besseren Wirkungsgrad.

Zum Schluß werden einige Hinweise über die erreichten Leistungen, über die praktischen Erfahrungen und Konsequenzen und über die Richtung der weiteren Untersuchungen gegeben.

Herrn Professor Dr. Max Dieckmann und Herrn Dr. Stützer danke ich vor allem dafür, daß sie mir diese Untersuchungen ermöglichten, Herrn Dipl.-Phys. Mayer und Herrn Dr. Welker für wertvolle Diskussionen.

V. Schrifttum.

[1] F. M. Penning, Physica Bd. 6 (1926), S. 241.
[2] L. Tonks und J. Langmuir, Phys. Rev. Bd. 33 (1929), S. 195.
[3] H. J. Merril und H. W. Webb, Phys. Rev. Bd. 55 (1939), S. 1191.
[4] E. Fetz, Ann. d. Phys. Bd. 37 (1940), S. 1.
[5] E. Fetz, Arch. Elektrot. Bd. 36 (1942), S. 378.
[6] W. O. Schumann, Arch. Elektrot. Bd. 36 (1942), S. 362.
[7] G. Wehner, Ann. d. Phys. Bd. 41 (1942), S. 501.
[8] H. Döring und L. Mayer, ETZ Bd. 61 (1940), S. 685.
[9] L. Mayer, Dieckmann-Festschrift »Aus Hochfrequenztechnik und Flugfunkforschung« (1942) Juni.
[10] A. Arsenjewa-Heil und O. Heil, Z. Phys. Bd. 95 (1935), S. 752.
[11] H. Fetz, Ann. d. Phys. Bd. 40 (1941), S. 579.
[12] R. Schäfer, Arch. Elektrot. Bd. 34 (1940), S. 499.

Abgeschlossen am 31. Juli 1942.

8078

Radiosondenpeilung mit spiegelgebündelten 25-cm-Wellen*).

Von Herbert Kinder.

Bericht aus dem Flugfunk-Forschungsinstitut Oberpfaffenhofen**).

Ein Verfahren zur räumlichen Peilung von Radiosonden wird beschrieben. Die Genauigkeit der Ortsbestimmung wird für eine beliebige Kombination von Peilstellen aus den mittleren Winkelfehlern berechnet. Die mit dem Peilverfahren im praktischen Einsatz erzielten Ergebnisse werden mitgeteilt und diskutiert.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Beschreibung des Peilverfahrens und der Geräte.
III. Berechnung der mittleren Fehler.
IV. Versuchsergebnisse.
V. Zusammenfassung.
VI. Schrifttum.

I. Einleitung.

Für die Erforschung der Windverhältnisse in großen Höhen hat die Methode der Peilung von Radiosonden sich eine Sonderstellung vor der optischen Pilotballonvisierung sichern können. Das elektrische Peilverfahren ermöglichte überhaupt erst die Windmessungen in sehr großen Höhen und bei fehlender optischer Sicht, also gerade die meteorologisch interessanten Schlechtwettermessungen. Zur Peilung von Radiosonden wurden bisher ausschließlich die von der Horizontalnavigation her bekannten Minimumpeiler, der Drehrahmen und neuerdings der diesem in der Genauigkeit überlegene Drehadcock [1, 2, 3] verwendet. Mit diesen Peilverfahren ist prinzipiell nur eine zweidimensionale Peilung möglich, also die Bestimmung der Projektion des Ballonstandortes in die horizontale Ebene; die Höhe des Ballons wird dann indirekt z. B. durch elektrische Übermittlung festgelegter Höhenstufen eines Kontaktaneroides bestimmt. Für den transportablen UKW-Adcock-Peiler werden bei nicht zu steilen Höhenwinkeln und unter Berücksichtigung der Funkbeschickung mittlere Winkelfehler von $\pm 1^0$ bis $\pm 1{,}5^0$ angegeben [2, 3]. Dieser Fehler kann z. Z. nur für den stationären Adcockpeiler auf etwa die Hälfte verringert werden. Ein der optischen Pilotballonvisierung ähnliches räumliches Peilverfahren läßt sich mit Hilfe scharfbündelnder Richtflächen verwirklichen. Dieses Verfahren ist bei ausreichender Bündelung weitgehend frei von Funkbeschickungs- und Polarisationsfehlern und erlaubt damit auch prinzipiell eine höhere Peilgenauigkeit als der Adcock. Im folgenden soll über ein solches Peilverfahren berichtet werden, das mit einer Wellenlänge von 25 cm arbeitet und einen allseits parabolischen Spiegel als scharfbündelnde Richtfläche verwendet.

II. Beschreibung des Peilverfahrens und der Geräte.

Für das Peilgerät wurde ein fahrbarer Parabolspiegel bekannter Ausführung verwendet und für den vorliegenden Zweck entsprechend ergänzt. Der Spiegel hat einen Durchmesser von 3 m und ist vom Bedienungssitz aus leicht von einem Mann nach allen Seiten zu schwenken, (Bild 1). Die Peilung eines Senders erfolgt gehörmäßig durch Drehen des Spiegels in das Maximum der Intensitätskurve; dieses Maximum liegt bei ungestörter Wellenausbreitung in der Verbindungslinie Peiler—Sender. Die Intensitätskurve der gebündelten Strahlung ist bei optischen Bündelungsverhältnissen, also bei einer zur Wellenlänge großen Bündelungsfläche, eine zur elektrischen Spiegelachse rotationssymmetrische Keule. Die Genauigkeit, mit der die Richtung eines Senders im Raum gepeilt werden kann, hängt bei ungestörtem elektromagnetischen Feld nur von der Einstellgenauigkeit des Intensitätsmaximums ab. Bei gehörmäßiger Maximumpeilung, linearer Gleichrichtung und geringem Verhältnis von Stör- zu Nutzsignal beträgt diese Einstellgenauigkeit erfahrungsgemäß etwa $^1/_{10}$ der Halbwertsbreite der Intensitätskurve. Für die Peilgenauigkeit ist also die Bündelungsschärfe des Spiegels, von subjektiven Einflüssen des Beobachters abgesehen, allein maßgebend. Die Bündelungsschärfe eines Parabolspiegels wächst bekanntlich proportional mit dem Verhältnis des Spiegeldurchmessers zur Wellenlänge. Der Vergrößerung des Spiegeldurchmessers über 3 bis 4 m ist bei fahrbaren Geräten praktisch eine Grenze gesetzt; um eine gute Bündelung zu erzielen, wird man also die Wellenlänge so klein wie möglich wählen. Unter Berücksichtigung der Leistungsfähigkeit und leichten Bedienbarkeit der Geräte stellt z. Z. eine Wellenlänge von 20 bis 25 cm die mit einer Dreielektrodenröhre in Rückkopplungsschaltung zu erzeugende Grenzwelle dar, so weit man von der Verwendung der noch sehr instabilen Laufzeitröhren absehen will. Mit einer Wellenlänge von 25 cm erreicht man bei dem 3-m-Spiegel eine Halbwertsbreite der Intensitätskurve von $\pm 3^0$ in der Ebene senkrecht zum Dipol, in der Dipolebene $\pm 4^0$. Der Unterschied in der Halbwertsbreite für zwei aufeinander senkrechte Ebenen rührt von der endlichen Ausdehnung des Dipols her. Vorteilhafterweise arbeitet man sende- und empfangsseitig mit vertikaler Polarisation des elektrischen Feldes, um die zur Ermittlung der Windgeschwindigkeit wichtigere Peilung in der horizontalen Ebene mit der

Bild 1. Ballonpeilgerät.

*) R 33, P 53 51.
**) Nach einem Vortrag vor der »Gemeinschaftsgruppe Stratosphärenforschung« am 4. Oktober 1942 in Friedrichshafen.

8079

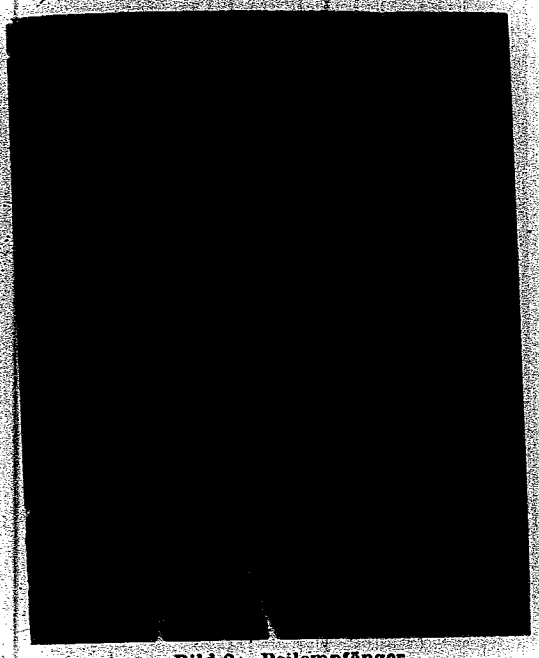


Bild 2. Peilempfänger.

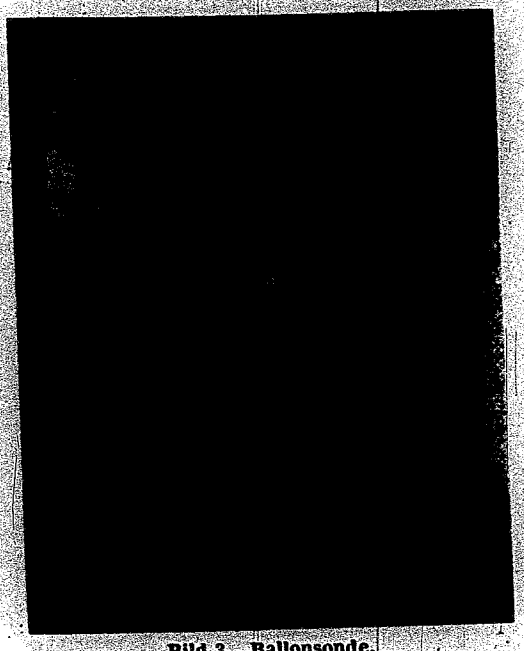


Bild 3. Ballonsonde.

höheren Genauigkeit zu erhalten. Auch treten bei vertikaler Polarisation in Bodennähe geringere Peilstrahlabweichungen auf als bei der horizontalen [6].

Der Dezimeterpeilempfänger befindet sich mit Batterien und Zubehör im witterungsgeschützten Spiegelunterbau. Seinen äußeren Aufbau zeigt Bild 2. Der Empfänger arbeitet nach dem Überlagerungsprinzip. Zur Mischung gelangt die dritte Harmonische eines rohrstabilisierten Senders, dessen Frequenz auch über längere Zeit innerhalb von 100 kHz konstant bleibt. Als Mischröhre wird eine Dezimeterdiode verwendet, deren Mischsteilheit bei 25 cm erst einen geringen Abfall durch Laufzeiteinflüsse zeigt. Die Bandbreite des Zwischenfrequenzverstärkers beträgt 300 kHz, die Gesamtempfindlichkeit bei 2 V Ausgangsspannung an 10000 Ω 5 μV. Diese Empfindlichkeit war ausreichend, um bei einer Sondenleistung von 0,1 W Peilreichweiten von etwa 100 km zu erzielen.

Die Ballonsonde enthält in einem mit Ölpapier gegen Nässe geschützten Wellpappekästchen übereinander angeordnet den Dezimetersender und die dazugehörigen Batterien (Bild 3). Das Gewicht der kompletten Sonde beträgt etwa 700 g mit Batterien für eine Betriebszeit von 1 Std. für zweistündigen Betrieb etwa 1000 g. Der 25-cm-Sender arbeitet mit einer Dreielektrodenröhre in bekannter Rückkopplungsschaltung, die Schwingungskreise bestehen bei diesen Wellenlängen aus konzentrischen Rohrleitungsstücken. Der $\lambda/4$-Strahler befindet sich über einer Blechplatte als reflektierender Ebene, er wird kapazitiv über eine $\lambda/4$-Speiseleitung an die Röhre angekoppelt. Die von der Antenne abgestrahlte Leistung beträgt etwa 0,1 W bei einem Anodenwirkungsgrad von 5%. Der Sender wird mit 1000 Hz eigenmoduliert, die Modulation erregt sich über eine zusätzliche Rückkopplung und einen abgestimmten Tröpfelkreis; durch diese Maßnahme kann der Modulationston über einen größeren Anodenspannungsbereich konstant gehalten werden. Das Gewicht des Senders beträgt etwa 200 g.

III. Berechnung der mittleren Fehler.

Für die Vorausberechnung eines Peilernetzes ist die Kenntnis der Ortsfehler über den gesamten Peilbereich bei gegebenen Meßfehlern erforderlich. Nimmt man an, daß die einzelnen Peilstellen sehr genau vermessen sind, so hängt die Genauigkeit der Ortsbestimmung bei gegebenen Koordinaten nur von den Fehlern der Peilwinkel ab. Werden bei der Peilung systematische Fehler ausgeschieden, dann kann man für die zufällige Streuung der Peilwinkel eine Verteilung nach dem Gaußschen Gesetz annehmen, der Berechnung wird man dann vorteilhaft einen mittleren Winkelfehler zugrunde legen. Zweckmäßig berechnet man die Fehler für die horizontale und vertikale Peilebene getrennt.

Die mittleren Fehler bei Bestimmung eines Punktes in der xy-Ebene sind allgemein durch die mittleren Verschiebungen m_x und m_y des Punktes in Richtung der beiden Koordinatenachsen gegeben. Diese Verschiebungen ändern sich normalerweise bei Drehung des Koordinatensystems, ihre Fußpunkte beschreiben dabei eine Ellipse, die sog. Fehlerellipse, deren Halbachsen dem Maximal- resp. Minimalwert des mittleren Fehlers entsprechen. Es läßt sich nun leicht nachweisen, daß die Summe der Quadrate der mittleren Verschiebungen in zwei zueinander senkrechten Achsen unabhängig von der Richtung des Koordinatensystems konstant bleibt, man bezeichnet diesen Wert als mittleren Punktfehler [7]:

$$m_s = (m_x^2 + m_y^2)^{1/2}.$$

Im mittleren Punktfehler hat man eine einwandfreie Größe zur Kennzeichnung der Genauigkeit eines vermessenen Punktes der Ebene.

Für die zur Ortsbestimmung nach dem Vorwärtseinschneiden notwendigen Bestimmungsstücke erhält man nach Bild 4 aus der Peilerbasis c und den Winkeln α und β den mittleren Punktfehler [7] zu

$$m_s = \frac{c}{\sin^2(\alpha+\beta)} (m_\alpha^2 \sin^2\beta + m_\beta^2 \sin^2\alpha)^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zeichnet man die nach dieser Gleichung berechneten Gebiete konstanten relativen Punktfehlers m_s/c für einen mittleren Winkelfehler $m_\alpha = m_\beta = \pm 0{,}5°$ auf, so erhält man eine anschauliche Darstellung über die Fehlerverteilung in der horizontalen Ebene, (Bild 5). Ähnliche Figuren werden auch erhalten, wenn man als Bezugsgröße für den Ortsfehler die größte Diagonale des von den beiden Winkelfehlern gebildeten Fehlervierecks zugrunde legt [1, 2]. Die Ortsbestimmung aus der Basis und den beiden horizontalen Winkeln versagt in Richtung der beiden Peilstellen, da für die vertikale Ebene durch die Peilstellen A—B der Ortsfehler unendlich wird. Zieht man zur Ortsbestimmung aber noch die beiden Höhenwinkel heran, so bekommt man für $\varphi, \psi \neq 0$ durchaus endliche Punktfehler. Für die vertikale Ebene durch A—B erhält man mit den Bezeichnungen von Bild 4 den mittleren Punktfehler zu:

$$m_{s_2} = \frac{c}{2\sin^2(\psi \pm \varphi)} \, n_\varphi^2 \sin^2 2\varphi + m_\psi^2 \sin^2 2\psi)^{1/2} \quad (2)$$

Die nach dieser Gleichung berechneten Fehlergebiete für $m_\varphi = m_\psi = \pm 0{,}5°$ zeigt Bild 6. Für $\varphi, \psi = 0$ tritt auch hier ein unendlich großer Punktfehler auf, doch verringert

8080

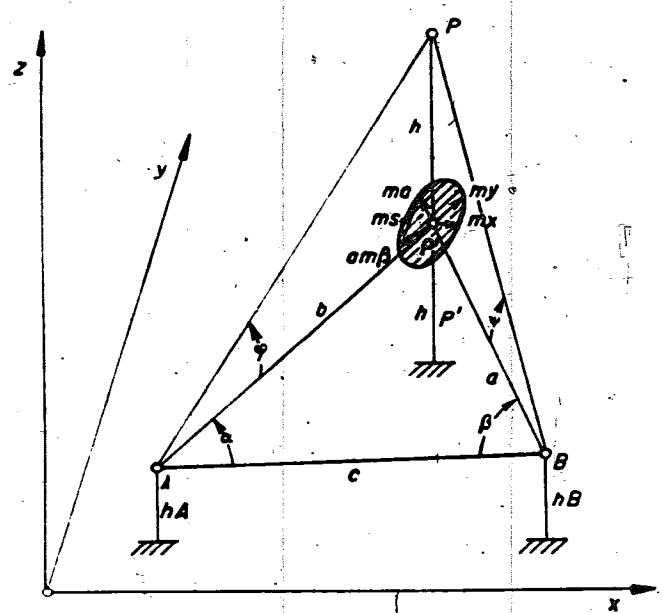


Bild 4.

sich dieser Fehler sehr schnell mit wachsender Höhe des Standortes.

Die Berechnung des Punktfehlers eines von zwei Peilstellen durch Vorwärtseinschneiden ermittelten Standortes in der horizontalen Ebene kann nach den Formeln (1) und (2) leicht durchgeführt werden. Soll nun der Punktfehler für ein Netz von allgemeinen Peilstellen ermittelt werden, so berechnet man zweckmäßig für jede Kombination zweier Peilstellen den Punktfehler und faßt diese einzelnen Fehler zu einem resultierenden Fehler des gemeinsamen Standortes zusammen. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur $r$ten Klasse ohne Wiederholung, d. h. wenn jede Kombination dasselbe Element nur einmal enthält, ist allgemein

$$k_r(n) = \binom{n}{r}.$$

Hier bilden zwei Peilstellen eine Kombination ($r = 2$), bei n Peilstellen beträgt die Anzahl der zur Auswertung verfügbaren Kombinationen also $\binom{n}{2}$. Jeder der $\binom{n}{2}$ Kombinationen kommt für denselben Ort ein bestimmter Punktfehler $m\binom{n}{2}$ zu, für n Peilstellen resultiert daraus ein mittlerer Punktfehler:

$$M_n = \left[\left(\frac{1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{m_2}\right)^2 + \cdots \left(\frac{1}{m\binom{n}{2}}\right)^2\right]^{-1/2} \quad \ldots \quad (3)$$

Um einen Überblick über die Erhöhung der Peilgenauigkeit mit wachsender Peilerzahl zu bekommen, wurde der mittlere Punktfehler für die Mitte des vom Kreis mit dem Radius r umschriebenen regelmäßigen Peiler-n-Eckes berechnet. Setzt man $c = r \sin 180/n$, so erhält man nach den Gl. (1), (2) und (3) für den relativen mittleren Punktfehler $M_s/r m_\alpha$ die Werte von Zahlentafel 1. Die Fehler verringern sich wie zu erwarten, mit wachsender Peilerzahl, die Fehlerabnahme wird aber immer kleiner. Wieviel Peiler im einzelnen Falle für eine Messung einzusetzen sind, richtet sich

Zahlentafel 1.

Anzahl der Peilstellen n	Relative Peilbasis c/r	Relat. mittl. Punktfehler M_s/m_α in %
3	1,73	1,63
4	1,41	0,707
5	1,18	0,565
6	1,00	0,471
7	0,87	0,408
8	0,77	0,353
10	0,62	0,284
20	0,31	0,205
∞	0	0

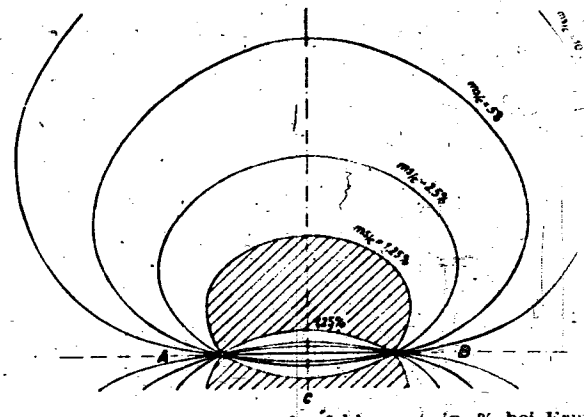


Bild 5. Relativer mittlerer Streckenfehler m_s/c in % bei Ermittlung des Ballonstandortes in der horizontalen Ebene aus den beiden der Standlinie c bei A und B anliegenden Winkeln für einen mittleren Winkelfehler m_α, $m_\beta = \pm 0{,}5°$.

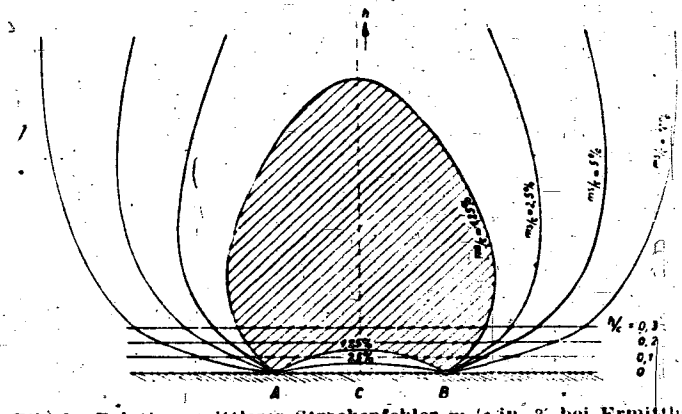


Bild 6. Relativer mittlerer Streckenfehler m_s/c in % bei Ermittlung des Ballonstandortes aus den beiden Höhenwinkeln A und B über der Standlinie c für einen mittleren Winkelfehler m_φ, $m_\varphi = \pm 0{,}5°$.

ganz nach der Größe des Peilgebietes und der verlangten Genauigkeit der Ortsbestimmung.

Ist der mittlere Ortsfehler für jeden Punkt der Bahnkurve des Ballons in der horizontalen Ebene bekannt, dann läßt sich auch der Fehler für die Ermittlung der Windgeschwindigkeit berechnen. Bei ungleichförmiger Bewegung erhält man für die wahre Geschwindigkeit an einem Punkt der Bahnkurve:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \ldots \quad (4)$$

Diese Wegzeitfunktion wird aus zwei um den Zeitschritt Δt auseinanderliegenden Standorten ermittelt, wobei die Bewegung über Δt ausreichend gleichförmig sein muß. Die Weg- wie die Zeitbestimmung erscheinen als Differenz zweier mit bestimmten Fehlern behafteter Meßwerte. Bezeichnet man den mittleren Ortsfehler wieder mit m_s und den Zeitfehler mit m_t und nimmt man an, daß diese Fehler über die Meßzeit konstant bleiben, so wird der mittlere Fehler der Weg-Zeitdifferenzen

$$\left.\begin{aligned} m_{|s} &= m_s \,|\, 2 \\ \text{und} \qquad m_{|t} &= m_t \,|\, 2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Für die relative Geschwindigkeit erhält man damit den mittleren Fehler:

$$\frac{m_v}{v} = \left[\frac{2\,m_s^2}{\Delta s^2} + \frac{2\,m_t^2}{\Delta t^2}\right]^{1/2} \quad \ldots \quad (6)$$

Der mittlere Fehler in der zeitlichen Übereinstimmung der einzelnen Peilungen kann praktisch sehr niedrig gehalten werden, so daß er gegenüber dem Wegfehler vernachlässigt werden kann, Gl. (6) vereinfacht sich dann zu:

$$\frac{m_v}{v} \sim \frac{m_s}{\Delta s} \,|\, 2 \quad \ldots \quad (7)$$

Die relative Geschwindigkeit ist also neben der Größe des Punktfehlers auch noch von der Länge der Wegstrecke ab-

8081

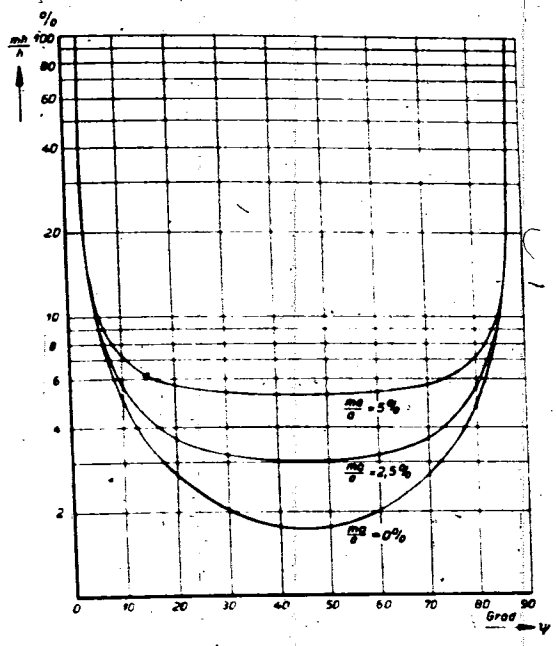


Bild 7. Relativer mittlerer Höhenfehler $\frac{m_h}{h}$ in % in Abhängigkeit vom Erhebungswinkel ψ für einen Winkelfehler $m_\psi = \pm 0{,}5°$ und mittlere Streckenfehler $\frac{m_a}{a} = 0;\ 2{,}5\%;\ 5\%$

hängig, über die man die Geschwindigkeit als ausreichend konstant ansehen kann. Bei linearem Verlauf der Weg-Zeitfunktion wird man daher die Geschwindigkeit mit sehr viel größerer Genauigkeit ermitteln können als bei anderem Funktionsverlauf.

Die Ballonhöhe erhält man bei bekannten Standortskoordinaten aus dem horizontalen Abstand des Ballonstandortes von der Peilstelle und dem Höhenwinkel mit den Bezeichnungen des Bildes 4 zu:

$$h = h_0 + a \operatorname{tg} \psi. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Wobei h_0 die Höhe der Peilstelle über NN. bezeichnet. Haben a und ψ die mittleren Fehler m_a und m_ψ, während h_0 als fehlerfrei angenommen werden soll, dann erhält man für den mittleren Fehler der relativen Höhe:

$$\frac{m_h}{h} = \left[\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 + m_\psi^2 (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{ctg} \psi)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \quad \ldots \quad (9)$$

In Bild 7 ist diese Fehlergleichung für ein $m_\psi = \pm 0{,}5°$ und verschiedene Werte von m_a/a dargestellt. Die Funktion ist zu $\psi = 45°$ symmetrisch und durchläuft hier auch ihr Minimum, für $\psi \to 0$ und $90°$ geht $m_a/a \to \infty$. Der nutzbare Peilbereich für die Höhenmessung wird durch den ungünstigen Verlauf der Fehlerfunktion nach den Bereichgrenzen hin eingeengt. Eine weitere Verkleinerung des Meßbereiches wird noch durch verschiedene Einflüsse bewirkt, die den mittleren Winkelfehler sowohl nach kleinen wie großen Erhebungswinkeln hin vergrößern.

Bei kleinen Erhebungswinkeln ist diese Fehlerzunahme durch Abweichung des Peilstrahles von der optischen Richtung bedingt, die durch Überlagerung des direkten mit dem vom Untergrund reflektierten Strahl verursacht wird. Über die Beziehungen dieser Peilstrahlabweichung in Abhängigkeit vom Erhebungswinkel bei verschiedenem Brechindex des Untergrundes, Bündelungsgrad der Richtfunktion, Geometrie der Peilanordnung und Polarisationswinkel wurde an anderer Stelle bereits berichtet [6]. Im vorliegenden Falle treten je nach den Untergrundverhältnissen größere Peilstrahlabweichungen bis zu Erhebungswinkeln von 3 bis 4° auf.

Die Zunahme des mittleren Winkelfehlers bei großen Erhebungswinkeln ist durch die Verringerung der Nutzfeldstärke mit dem Kosinus des Erhebungswinkels und damit auch des für die Peilgenauigkeit wichtigen Verhältnisses von Nutz- zu Störsignal bedingt. Wie dieses Verhältnis sich mit der Feldstärke ändert, hängt von der Art der Gleichrichtung, der Empfindlichkeit und dem mittleren Rauschpegel des Empfängers ab und wird am besten durch einen Versuch ermittelt. Bei den hier verwendeten Geräten zeigte sich eine Erhöhung des mittleren Winkelfehlers für eine Entfernung von etwa 10 km zwischen Sender und Empfänger von etwa 80° Erhebungswinkel ab.

Die Berechnung der Ballonhöhe wurde hier unter Vernachlässigung der Erdkrümmung und Brechung der ultrakurzen Wellen durchgeführt. Beide Faktoren können nun durch ein Korrektionsglied leicht berücksichtigt werden, indem man nach Schelleng, Burrows und Ferrell [5] den Einfluß der Brechung durch einen vergrößerten Erdradius mit einer homogenen nichtbrechenden Atmosphäre in Rechnung setzt. Für Luft mittlerer Feuchtigkeit beträgt dieser äquivalente Erdradius z. B. $R' = 8600$ km. Bezeichnet man wieder mit a den horizontalen Abstand Peiler-Sonde, so erhält man für das Korrektionsglied:

$$\Delta h = \frac{a^2}{2R'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Eine Berücksichtigung dieses Gliedes wird sich bei den hier vorliegenden verhältnismäßig geringen Peilgenauigkeiten und Reichweiten meistens erübrigen.

IV. Versuchsergebnisse.

Für die Beurteilung der Güte dieses Peilverfahrens ist der mittlere Winkelfehler der Einzelmessung von ausschlaggebender Bedeutung. Zur Ermittlung dieses Fehlers wurde ein Sender auf der Zugspitze in Entfernungen bis zu 100 km mit dem Spiegelgerät angepeilt. Es wurden alle 20 km mindestens 10 Peilungen durchgeführt und die Ergebnisse quadratisch ausgewertet. In der horizontalen Ebene wurde ein mittlerer Winkelfehler der Einzelmessung von $m_\alpha = \pm 0{,}3°$ bis zu 80 km Entfernung gefunden. Der mittlere Fehler in der vertikalen Ebene betrug bei Erhebungswinkeln über 4° $m_\psi = \pm 0{,}4°$. Die Verteilung der Fehler erfolgte etwa nach dem Gaußschen Fehlerverteilungsgesetz, so daß die hierauf beruhenden Annahmen zutreffend sind.

Die praktische Erprobung des Peilverfahrens wurde mit drei Spiegelgeräten durchgeführt. Die Spiegel waren in den Eckpunkten eines annähernd gleichseitigen Dreiecks mit etwa 40 km Kantenlänge auf flachen freiliegenden Hügeln aufgestellt, um evtl. Peilstrahlabweichungen durch Reflexion an Bodenhindernissen zu vermeiden. Der Ballonstartort lag etwa in der Mitte dieses Dreiecks. Von seiner Verlegung je nach den vermuteten Windrichtungen wurde Abstand genommen, da die Größe des Peilernetzes für die während der Versuche vorherrschenden kleinen Windgeschwindigkeiten völlig ausreichend war. Für die Versuche standen Gummiballone von 4 und 6 kg Gewicht zur Verfügung. Die Ballone wurden mit nur geringem zusätzlichem Auftrieb versehen, um bei den kleinen Windgeschwindigkeiten größere Strecken vermessen zu können. Es wurden sechs Aufstiege durchgeführt und Windrichtung und -geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Höhe ermittelt; hierbei wurde eine max. Höhe von etwa 21 km und eine größte Geschwindigkeit von etwa 50 km/h gemessen.

Von besonderem Interesse ist die Kenntnis der im praktischen Einsatz erreichten Genauigkeit. Aus den Peilstrahlabweichungen der drei Peilstellen gegenüber dem wahrscheinlichen Ballonstandort wurde aus 60 Meßwerten einer Ballonpeilung ein mittlerer Winkelfehler $m_\alpha = \pm 0{,}5°$ in der horizontalen und $m_\psi = \pm 0{,}6°$ in der vertikalen Ebene berechnet. Diese Fehler sind etwas größer als die früher ermittelten. Die Ursache hierfür ist hauptsächlich in subjektiven Einflüssen zu suchen, da bekanntlich bei gehörmäßigem Peilen über längere Zeit wegen der Ermüdung des Gehörs die Peilschärfe abnimmt.

Ein zusätzlicher Winkelfehler tritt noch bei großer Winkelgeschwindigkeit des Ballons gegenüber der Peilstelle auf, er beträgt:

$$\Delta \alpha = \frac{v_t}{a} \Delta \tau, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

8082

wobei v_t die Tangentialgeschwindigkeit des Ballons, a den Abstand Ballon—Peiler und $\Delta\tau$ ein kleines Zeitintervall bedeuten. Die Größe von $\Delta\tau$ ist durch die Zeitdauer eines Schwenkens um das Peilmaximum bestimmt; $\Delta\tau$ ist hier etwa 1 s. Beträgt z. B. die Tangentialgeschwindigkeit des Ballons zu einem Peiler $v_t = 100$ km/h bei einem Abstand $a = 10$ km, so erhält man einen zusätzlichen Winkelfehler $\Delta_\alpha = +0{,}16°$. Dieser Fehler erscheint einseitig in Richtung des Ballonweges. Man kann ihn also von Fall zu Fall berücksichtigen. Bei den hier vorliegenden niedrigen Windgeschwindigkeiten war dieser Fehler von nur geringem Einfluß. Durch Anwendung optischer Anzeigeverfahren oder selbsttätiger Aufzeichnungen [1] ließen sich diese Fehlerquellen beseitigen; zugleich könnte auch die Peilgenauigkeit noch wesentlich gesteigert werden.

V. Zusammenfassung.

Das vorliegende Peilverfahren gestattet eine direkte räumliche Peilung von Radiosonden mit scharfbündelnden Dezimeterwellen. Die Genauigkeit der Ortsbestimmung wird mit Hilfe des mittleren Winkelfehlers berechnet, die Berechnung wird zuerst für 2 Peiler mit den zur Ortsbestimmung notwendigen Bestimmungsstücken durchgeführt und dann auf eine beliebige Kombination von Peilern ausgedehnt. Die Brauchbarkeit des Peilverfahrens für die Radiosondenpeilung konnte im praktischen Einsatz mit drei Peilern erwiesen werden. Es wurden sechs Ballonaufstiege durchgeführt und hierbei Höhen bis zu 21 km und Geschwindigkeiten bis 50 km/h gemessen. Aus den Versuchen wurde ein mittlerer Winkelfehler in der horizontalen Ebene $m_\alpha = \pm 0{,}5°$ und in der vertikalen $m_\varphi = \pm 0{,}6°$ für einen Erhebungswinkel $4° \leq \varphi \leq 80°$ ermittelt; die Peilungen konnten mit dieser Genauigkeit bis zu 80 km Entfernung durchgeführt werden. Eine Weiterentwicklung zu noch höheren Peilgenauigkeiten ist prinzipiell möglich.

VI. Schrifttum.

[1] Dieckmann, Funktechnische und atmosphärisch-elektrische Probleme der Stratosphärenforschung (Schrifttumsangaben). Nicht veröffentlichter Bericht.

[2] Foelsche-Osken, Höhenwindmessungen durch Anpeilung von Radiosonden mit Adcockpeilern. Nicht veröffentlichter Bericht.

[3] Ehrenspeck, v. Welser, Höhenwindmessung mittels Ballonpeilung. Nicht veröffentlichter Bericht des FFO.

[4] Dieckmann, Über Radiosondenpeilung mit elektrischer Höhenbestimmung. Nicht veröffentlichter Bericht.

[5] Schelleng, Burrows u. Ferrell, Ultra-Short-Wave Propagation. Proc. Inst. Rad. Eng. 21 (1933), S. 427.

[6] Kinder, Die Peilung in der vertikalen Ebene über reflektierendem Untergrund. Nicht veröffentlicher Bericht.

[7] Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde. Metzler, Stuttgart 1931. I § 108 und II § 93.

8063

Vorabdrucke
aus
Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung
6. Lieferung

Inhalt:

Versuche über die Strömung durch Turbinenschaufelgitter. Von E. Eckert u. K. v. Vietinghoff-Scheel 2

Ein neuer Gemischregler für Flugmotoren. Von W. Sanner 11

Luftschrauben-Blattschwingungen und ihr Zusammenhang mit den Kräften im Motor. Von K. Löffler 24

Untersuchungen an einem motorlosen Flugzeug über den Verlauf der Bahnschwingung. Von W. Spilger 30

Der Einfluß der Gasträgheit beim Schuß. Von H. Pfriem 40

Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung
des Generalluftzeugmeisters (ZWB)
Berlin-Adlershof

8084

Versuche über die Strömung durch Turbinenschaufelgitter*).

Von E. Eckert und K. v. Vietinghoff-Scheel.

Bericht aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Für den Entwurf von günstigen Turbinenverschaufelungen ist es wesentlich, die Art der Strömung durch die Verschaufelung zu kennen und vor allem die Bedingungen zu wissen, unter denen ein Abreißen derselben vermieden wird. Im folgenden wird eine solche Untersuchung mit Hilfe des Interferenzverfahrens an einem Turbinenschaufelgitter mitgeteilt.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Abschätzung der Druckverteilung um Turbinenschaufeln.
III. Das Interferenzverfahren.
IV. Die Versuchseinrichtung.
V. Versuchsergebnisse.
VI. Zusammenfassung und Ausblick.

I. Einleitung.

Die Forderungen, die an Gasturbinen für Flugzeugtriebwerke zu stellen sind, und zwar guter Wirkungsgrad, Arbeiten mit hohen Gastemperaturen und kleines Gewicht bzw. kleine Abmessungen, müssen bereits beim Entwurf der Verschaufelung berücksichtigt werden. Zur Erzielung eines guten Wirkungsgrades ist es notwendig, daß das Gas die Schaufeln möglichst glatt ohne Ablösungserscheinungen umströmt. Dies läßt sich bei der beschleunigten Strömung durch Turbinenverschaufelungen verhältnismäßig leicht erreichen, wenn man die Schaufelteilung genügend klein wählt. Eine kleine Schaufelteilung bringt aber Nachteile hinsichtlich der anderen obengenannten Forderungen mit sich. So verlangt das Arbeiten mit hohen Gastemperaturen meist eine Kühlung der Schaufeln. Diese Kühlung ist bei jedem Kühlverfahren mit einem Leistungsaufwand verbunden, der den Wirkungsgrad der Turbine verschlechtert. Da die Wärmemenge, die zur Kühlung einer Schaufel abgeführt werden muß, nur wenig beeinflußt werden kann, läßt sich der genannte Leistungsaufwand für eine Turbinenstufe verringern, indem man die Schaufelzahl möglichst klein hält, d. h. mit großer Schaufelteilung arbeitet. Einer Vergrößerung der Teilung ist aber dadurch eine Grenze gesetzt, daß beim Überschreiten eines bestimmten Wertes die Strömung an den Schaufeln abreißt. Es ergibt sich daraus die Forderung, Schaufelformen zu finden, bei denen das Abreißen der Strömung erst bei großen Teilungen erfolgt.

Kleine Abmessungen der Turbine werden im wesentlichen dadurch erreicht, daß man den Außendurchmesser der Verschaufelung möglichst klein hält. Dies gelingt einmal durch Wahl einer großen Umfangsgeschwindigkeit, zum zweiten, indem man die Breite des Ringraumes der Turbinenstufe, der für die Durchströmung des Gases zur Verfügung steht, groß macht, d. h. den Innendurchmesser möglichst klein wählt. Bei den so entstehenden hohen Schaufeln ist aber die Strömung am Innendurchmesser merklich verschieden von der am Außendurchmesser. Die Laufschaufeln werden innen unter einem viel flacheren Winkel angeströmt als außen. Die Turbinenschaufeln müssen daher eine ablösungsfreie Umströmung in dem ganzen vorhandenen Anströmwinkelbereich gewährleisten.

Da das Sichtbarmachen der Ablösungserscheinungen an einer laufenden Turbine sehr große Schwierigkeiten bereitet, ist es zweckmäßig, die Strömung zunächst an ruhenden Schaufelgittern zu studieren. Eine Übertragung der auf diese Weise gewonnenen Erkenntnisse auf die Leitschaufeln von Turbinen ist wohl ohne weiteres möglich. Größere Vorsicht ist bei der Übertragung auf die Laufschaufeln geboten. Bei diesen steht die Strömungsgrenzschicht, die sich an der Oberfläche der Schaufeln ausbildet, zusätzlich unter dem Einfluß der Fliehkraft. Dies sollte bei Axialturbinen aber die Ablösungserscheinungen nicht sehr stark beeinflussen, da dort die Fliehkraft senkrecht zur Bewegungsrichtung steht. Bei Radialturbinen ist eine größere Beeinflussung zu erwarten, und zwar wirkt die Fliehkraft dem Abreißen der Strömung entgegen, wenn das Gas die Turbine von innen nach außen durchströmt. Bei der umgekehrten Strömungsrichtung wird ein Abreißen durch die Fliehkraftwirkungen begünstigt.

Zur Untersuchung der Strömung durch die Schaufelgitter wurde das Interferenzverfahren[1] [2]) herangezogen. Dieses Verfahren bietet den Vorteil, daß man einmal die Versuche bei den Reynoldsschen und Machschen Kennzahlen durchführen kann, die in ausgeführten Turbinen auftreten. Zum zweiten ergeben Interferenzaufnahmen nicht nur ein qualitatives Bild eines Strömungsvorganges, sondern lassen sich auch quantitativ auswerten, z. B. läßt sich hieraus die Druckverteilung um die Schaufeln und damit das Drehmoment, das auf das Laufrad ausgeübt wird, bestimmen.

II. Abschätzung der Druckverteilung um Turbinenschaufeln.

Dem Drehmoment, das vom strömenden Gas auf das Laufrad ausgeübt wird, entspricht eine Kraft auf jede Laufschaufel in Umfangsrichtung. Diese Kraft wird durch Unterdrücke am Schaufelrücken und durch Überdrücke auf der Bauchseite der Schaufel hervorgerufen, in gleicher Weise wie die Auftriebskraft bei einem Tragflügel. Die durch die Strömung einer reibungsfreien Flüssigkeit entstehende Druckverteilung wurde für einige Schaufelformen von F. Weinig[3]) berechnet. Aus den von ihm mitgeteilten Berechnungsbeispielen ist in Bild 1 die Druckverteilungskurve für ein Schaufelgitter mit einem Teilungsverhältnis $\frac{a}{l} = 0{,}96$ und der in die Abbildung eingetragenen Anströmrichtung wiedergegeben. Infolge der Zähigkeit des strömenden Gases entsteht längs der Schaufeloberfläche eine Grenzschicht, und diese ist es bekanntlich, die das Abreißen der Strömung an der Schaufel bewirkt, sobald der Druckanstieg in Strömungsrichtung längs der Schaufeloberfläche einen gewissen Betrag überschreitet. Aus der in Bild 1 wiedergegebenen Druckverteilung entnimmt man daher, daß ein Abreißen der Strömung vor allem am Schaufelrücken in dem Gebiet zwischen *A* und *B* zu befürchten ist. Aber auch an der Vorderseite der Schaufel kann es bei *C* zu einer Ablösung kommen. Die Größe des Druckanstieges, den eine

*) A 35 5.

[1]) H. Schardin, Z. Instrumentenkde. Bd. 53 (1933), S. 396/403 u. 424/36.

[2]) Th. Zobel, Z. VDI Bd. 81 (1937), S. 619/24.

[3]) F. Weinig, Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen. Leipzig 1935, S. 125/37.

8085

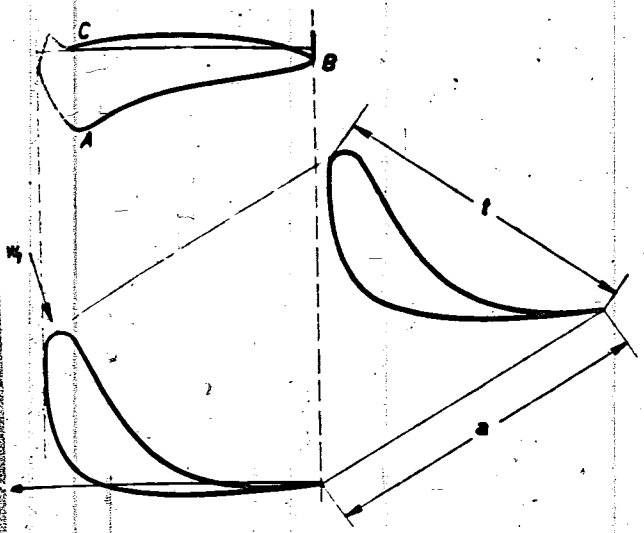


Bild 1. Druckverteilung um eine Turbinenschaufel nach F. Weinig.
t Schaufeltiefe,
a Gitterteilung,
w_1 Anströmgeschwindigkeit.

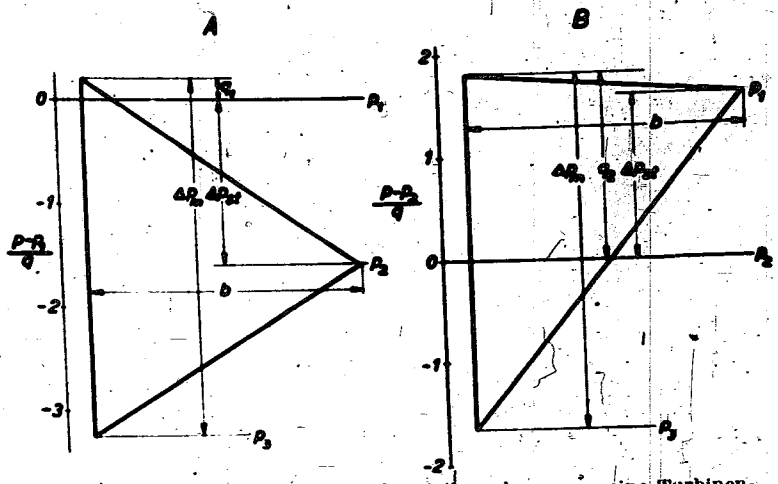


Bild 3. Angenäherte Druckverteilungskurve um eine Turbinenschaufel A und eine Gebläseschaufel B.
b Gitterbreite,
p stat. Druck,
q Staudruck,
Δp_m größter Druckunterschied,
Δp_{st} Stufendruckgefälle.

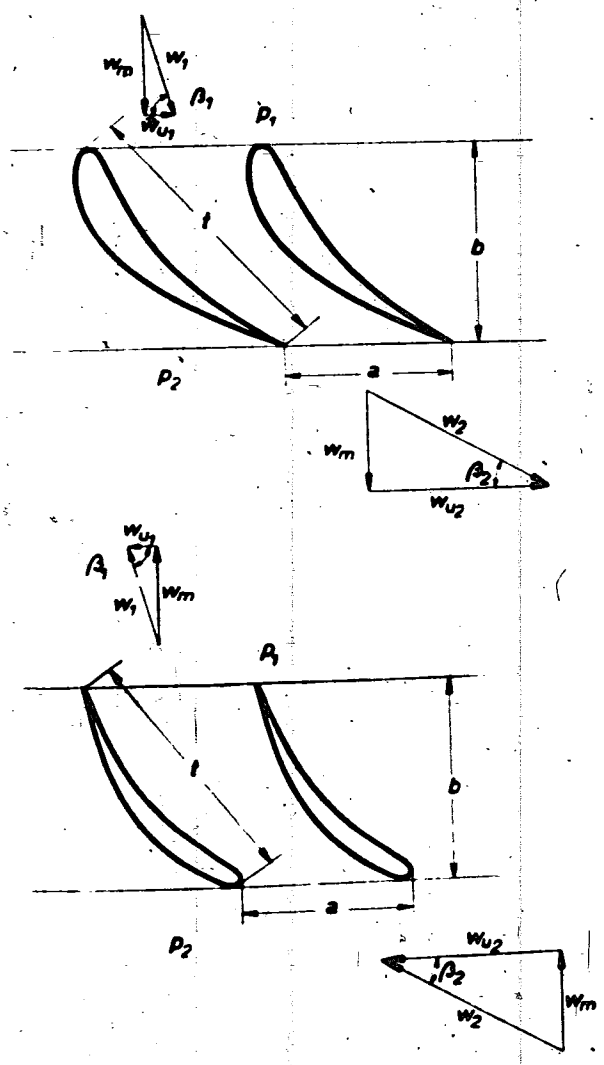


Bild 2. Schaufelgitter.
A Turbinenschaufeln,
B Gebläseschaufeln,
t Schaufeltiefe,
a Gitterteilung,
b Gitterbreite,
$\frac{a}{t}$ Teilungsverhältnis,
p stat. Druck,
w Geschwindigkeit,
w_m Meridiankomponente der Geschwindigkeit,
w_u Umfangskomponente der Geschwindigkeit,
β Anström- bzw. Abströmwinkel.

Grenzschicht ohne Ablösung überwinden kann, hängt davon ab, ob die Grenzschicht laminar oder turbulent ist. Man muß daher erwarten, daß die im folgenden untersuchten Ablösungserscheinungen von der Reynoldsschen Kennzahl beeinflußt werden.

Eine Abschätzung über die Größenordnung des Druckanstieges, der bei der Umströmung einer Turbinenschaufel von der Strömung zu überwinden ist, läßt sich leicht vornehmen, sobald der Anström- und der Abströmwinkel für die Verschaufelung bekannt sind. Sowohl die Berechnungen von Weinig (Bild 1), als auch die Meßergebnisse an Tragflügeln und Flügelgittern[4]), [5]) zeigen, daß die Druckverteilungskurve angenähert eine Dreiecksform hat. Gibt man für die Näherungsbetrachtung der Druckverteilung in der Projektion auf eine zur Gitterrichtung senkrechte Gerade (Gitterbreite b in Bild 2) die Gestalt eines Dreiecks, wie es in Bild 3 dargestellt ist, so ist die Größe der von der Strömung in Gitterrichtung ausgeübten Kraft U je Längeneinheit der Schaufel

$$U = \frac{\Delta p_m \, b}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Nach Bild 3 bedeutet darin Δp_m den größten Druckunterschied zwischen Schaufelrück- und -vorderseite und b die Breite des Schaufelgitters. Auf der anderen Seite ergibt sich für diese Kraft U aus dem Impulssatz mit den Bezeichnungen von Bild 2 A die Gleichung

$$U = \varrho \, a \, w_m \, (w_{u2} - w_{u1}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Strömungsgeschwindigkeiten wurden hierbei als so klein vorausgesetzt, daß man mit konstanter Gasdichte ϱ rechnen kann. Da es sich nur um eine Abschätzung handelt, ist dies bis zu einer Geschwindigkeit von etwa $^2/_3$ der Schallgeschwindigkeit möglich. Durch diese Voraussetzung vereinfacht sich die Rechnung, die im übrigen für veränderliche Dichte ebenso durchgeführt werden kann. Die Geschwindigkeitskomponenten w_u sind in Gl. (2) vektoriell einzuführen, d. h. sie sind zu subtrahieren, wenn sie die gleiche Richtung haben, dagegen zu addieren, wenn sie einander entgegengerichtet sind. Bestimmt man aus Gl. (1) und (2) den maximalen Druckunterschied, so erhält man

$$\Delta p_m = 2 \, \varrho \, \frac{a}{b} \, w_m \, (w_{u2} - w_{u1}) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Das Stufendruckgefälle Δp_{st} ergibt sich als Unterschied der statischen Drücke p_1 und p_2 vor und hinter dem Schaufelgitter zu

[4]) Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt, Göttingen, III. Lieferung 1935, S. 132/38.
[5]) K. Christiani, Luftfahrtforschung Bd. 2 (1928), S. 91/100.

8086

$$\Delta p_{st} = p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2}(w_2^2 - w_1^2) = \frac{\varrho}{2}(w_{u2}^2 - w_{u1}^2) \quad (4)$$

Der Staudruck der Anströmgeschwindigkeit ist

$$q_1 = \frac{\varrho}{2} w_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Mit diesen Größen läßt sich das Druckverteilungsdreieck maßstäblich aufzeichnen, wie dies in Bild 3 *A* angegeben ist, denn an der Schaufelhinterkante, d. h. an der Spitze des Dreiecks herrscht praktisch der Druck p_2. Die Größe des Druckanstiegs an der Schaufelrückseite ergibt sich daraus als Unterschied von p_2 gegen den tiefsten Druck p_3 zu

$$p_2 - p_3 = \Delta p_m - q_1 - \Delta p_{st} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Ob die Grenzschicht diesen Druckanstieg ohne Ablösung überwinden kann, hängt davon ab, wie groß die kinetische Energie der Strömung im Vergleich zu diesem Druckanstieg ist. Nun wächst die Geschwindigkeit bei der Strömung durch das Schaufelgitter von w_1 auf w_2. Für die vorliegende Abschätzung ist es daher am zweckmäßigsten und wohl auch hinreichend genau, den Druckanstieg $p_2 - p_3$ auf die mittlere kinetische Energie der Strömung

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho w_1^2}{2} + \frac{\varrho w_2^2}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

zu beziehen. Als Maß für die Ablösungsgefahr erhalten wir daher mit Gl. (6)

$$\frac{p_2 - p_3}{q} = 8\frac{a}{b}\frac{w_m (w_{u2} - w_{u1})}{w_1^2 + w_2^2} - \frac{2 w_1^2}{w_1^2 + w_2^2} - 2\frac{w_{u2}^2 - w_{u1}^2}{w_1^2 + w_2^2} \quad \ldots\ldots (8)$$

Das Druckverteilungsdreieck in Bild 3 *A* ist für eine Turbinenstufe mit senkrechtem Eintritt ($w_{u1} = 0$) und einem gegen die Umfangsrichtung gemessenen Austrittswinkel β_2 von 20° ($w_m/w_{u2} = \operatorname{tg}\beta_2 = 0{,}364$) gezeichnet.

Kehrt man die Strömung durch das Schaufelgitter um, so ist sie mit einem Druckanstieg von p_2 nach p_1 verbunden. Die Schaufeln müssen nun natürlich eine etwas andere Gestalt erhalten, indem das zugespitzte Ende der Schaufel wieder an die Abströmseite gelegt wird. Ein solches Gebläseschaufelgitter ist in Bild 2 *B* dargestellt. Die Gl. (3), (4) und (7) behalten auch für diese Strömungsrichtung ihre Gültigkeit. Der Staudruck der Anströmgeschwindigkeit ist dagegen nunmehr

$$q_2 = \frac{\varrho}{2} w_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Das Druckverteilungsdreieck erhält die in Bild 3 *B* gezeichnete Form, und der bezogene Druckanstieg an der Schaufelrückseite hat nun die Größe

$$\frac{p_2 - p_3}{q} = 8\frac{a}{b}\frac{w_m (w_{u2} - w_{u1})}{w_2^2 + w_1^2} - \frac{2 w_2^2}{w_1^2 + w_2^2} + 2\frac{w_{u2}^2 - w_{u1}^2}{w_1^2 + w_2^2} \quad \ldots\ldots (10)$$

Für das Bild 3 *B* wurde die gleiche Zu- und Abströmrichtung zugrunde gelegt wie in Bild 3 *A*. Aus einem Vergleich der beiden Druckverteilungsdreiecke ersieht man, daß der auf die mittlere kinetische Energie der Strömung bezogene Druckanstieg, den die Grenzschicht zu überwinden hat, für die Gebläseschaufel wesentlich höher ist als für die Turbinenschaufel. Dies ist der Grund dafür, daß man eine so starke Umlenkung, wie sie in Bild 3 vorausgesetzt wurde, in einer Gebläseverschaufelung ohne Abreißen der Strömung anscheinend gar nicht erzielen kann. Aus den Gl. (8) bzw. (10) geht hervor, daß die Ablösungsgefahr um so größer ist, je stärker die Strömung umgelenkt wird und je größer das Längenverhältnis a/b ist. Damit ergibt sich, daß man in einer Turbinenstufe entweder mit einem größeren Verhältnis a/b und daher auch mit einem größeren Teilungsverhältnis a/t oder mit einer stärkeren Umlenkung der Strömung arbeiten kann als in einer Gebläsestufe.

Die vorliegende Abschätzung gibt naturgemäß nur ein ungefähres Bild von der Ablösungsgefahr, da in ihr beispielsweise der Einfluß der Schaufelform[6]) und der Profiltiefe nicht zum Ausdruck kommt, sie gibt aber immerhin einen ersten Anhalt für die Beurteilung von Gittern aus stark gekrümmten Schaufeln, über die noch fast keine Messungen vorliegen. Genauere Unterlagen zunächst für eine Profilform zu beschaffen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Der maximale Auftriebswert $c_{a\,max}$ ist zur Beurteilung der Ablösungsgefahr bei starkgekrümmten Schaufeln in Gitteranordnung nicht geeignet, da ausgeführte Gleichdruckturbinen mit Auftriebsbeiwerten bis zu 6 arbeiten[7]), während am Tragflügel schon bei $c_{a\,max} \sim 1{,}5$ die Strömung abreißt.

Beim Tragflügel besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Auftriebsbeiwert c_a und der hier eingeführten Gütezahl $\frac{p_2 - p_3}{q}$. Wenn man die über der Profiltiefe t aufgetragene Druckverteilung wieder durch ein Dreieck ersetzt, ist der Auftrieb A je Einheit der Flügelbreite $A = \Delta p_m \frac{t}{2}$. Andererseits ist definitionsgemäß $A = c_a t q$. Endlich gilt: $p_2 - p_3 = \Delta p_m - q$. Daraus ergibt sich $\frac{p_2 - p_3}{q} = 2c_a - 1$. Dem maximalen Auftriebsbeiwert an Tragflügeln ($c_a \sim 1{,}5$) entspricht daher eine Gütezahl $\frac{p_2 - p_3}{q} \sim 2$.

III. Das Interferenzverfahren.

Für die Versuche wurde ein von der Firma Zeiß gebautes Interferometer nach Mach und Zehnder verwendet[8]). Der prinzipielle Aufbau eines solchen Gerätes ist in Bild 4 schematisch dargestellt. Es besteht im wesentlichen aus vier planparallelen Glasplatten, von denen zwei (a_1 und a_2) halbdurchlässig verspiegelt sind, während die beiden anderen (b_1 und b_2) eine undurchlässige Verspiegelung tragen. Jeder Lichtstrahl, der von der Lichtquelle c kommt, wird an der halbdurchlässigen Platte a_1 in zwei Teile aufgespalten, die auf verschiedenen Wegen nach dem Schirm e gelangen. Der eine Teil wird an a_1 reflektiert, gelangt zum Spiegel b_2 und von dort nach Durchtritt durch den Spiegel a_2 mit einem Teil seiner Intensität zum Schirm e. Der durch die Glasplatte a_1 durchgetretene Lichtstrahl kommt nach Reflexion an den Spiegeln b_1 und a_2 am Schirm e an. Da die beiden das Interferometer durchlaufenden Lichtstrahlen kohärent sind, erzeugen sie an der Stelle, wo sie sich schneiden, Lichtinterferenzen[1]). Stehen die vier Glasplatten vollkommen parallel zueinander, dann schneiden sich die beiden die Platte a_2 verlassenden Lichtstrahlen erst im Unendlichen. Die Interferenzen würden also im Unendlichen auftreten. Da aber gleichzeitig die Wellenfronten der beiden Lichtstrahlen zueinander parallel sind, ist die Breite der Interferenzstreifen unendlich groß. Streifen mit endlicher Breite erhält man im Endlichen, wenn man die beiden Platten a_1 und a_2 um kleine Winkel α_1 und α_2 aus ihrer Nullage herausdreht. Durch entsprechende Wahl der beiden Winkel α_1 und α_2 kann man die Ebene, in der die Interferenzstreifen entstehen, an jede beliebige Stelle im Endlichen verlegen und auch die Streifenbreite beliebig einstellen. Bei der Stellung der Spiegel, die in Bild 4 gezeichnet ist, laufen die beiden Lichtstrahlen von der Platte a_2 ab divergent auseinander. Ihre Verlängerungen nach rückwärts aber schneiden sich in der Ebene *1—2*. In dieser Ebene entsteht daher ein virtuelles Interferenzstreifenbild. Durch eine Sammellinse d kann dieses Bild auf dem Schirm e sichtbar gemacht und photographiert werden. In Wirklichkeit tritt an die Stelle

[6]) Daß dichtstehende, starkgekrümmte Schaufeln, bei denen die Strömung sehr stark von der Schaufelform abhängt, einen anderen als dreieckförmigen Druckverlauf ergeben können, zeigt beispielsweise Bild 9.

[7]) Für Schaufelgitter gilt die Beziehung: $c_a = \frac{q}{t}\frac{2(w_{u2} - w_{u1})}{w_\infty}$, in der w_∞ der Betrag des vektoriellen Mittels der beiden Geschwindigkeiten w_1 und w_2 ist.

[8]) G. Hansen, Z. techn. Physik Bd. 12 (1931), S. 436/40.

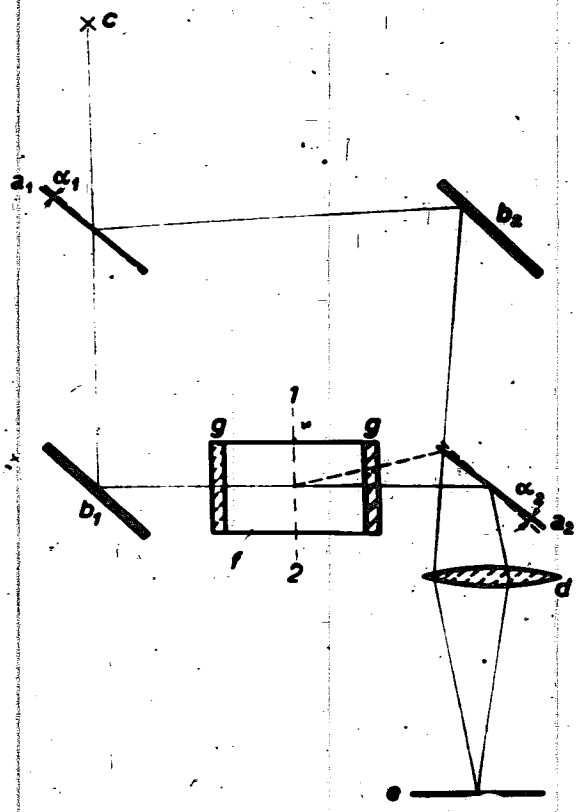


Bild 4. Schema des Interferometers nach Mach-Zehnder.

a halbdurchlässig verspiegelte Glasplatten,
b voll reflektierende Spiegel,
c Lichtquelle,
d Linse,
e Schirm,
f Gefäß,
g planparallele Glasplatten,
α Neigungswinkel.

der Linse eine verwickeltere Optik. Für die im weiteren besprochene Anwendung des Interferometers muß die Ebene *1—2* in die in Bild 4 gezeichnete Lage zwischen die beiden Spiegel a_2 und b_1 gebracht werden. Stehen die Drehachsen der beiden Spiegel a_1 und a_2 normal zur Zeichenebene, so entstehen auf dem Schirm *e* zu den Drehachsen parallele Interferenzstreifen. Durch Schwenken des Spiegels a_2 um eine zweite Achse, die in der Spiegelebene liegt und zur ersten Achse normal steht, kann die Richtung der Streifen beliebig geändert werden. Ihren Abstand zueinander verändert man durch Einstellung der beiden Winkel α_1 und α_2. Um kontrastreiche Interferenzlinien in einem größeren Feld zu erzeugen, verwendet man monochromatisches Licht. Bei unseren Versuchen diente zu diesem Zwecke eine Quecksilberdampflampe mit einem Monochromatfilter, das nur Licht von der Wellenlänge $\lambda_0 = 0{,}5641 \cdot 10^{-3}$ mm durchließ.

Bringt man nun in den Strahlenweg ein durch zwei planparallele Fenster *g* abgeschlossenes und mit einem Gas gefülltes Gefäß *f* und verändert die Dichte ϱ des Gases in dem Gefäß auf den Wert ϱ', so macht sich dies auf dem Interferenzbild durch eine Verschiebung der Streifen bemerkbar. Die Dichteänderung des Gases im Gefäß $\Delta\varrho = \varrho' - \varrho$ läßt sich aus der dabei beobachteten Streifenverschiebung durch folgende Formel berechnen[1])

$$\Delta\varrho = \frac{\varrho\,\lambda_0\,\varepsilon}{L\,(n-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Darin bedeutet λ_0 die Wellenlänge des verwendeten Lichtes im Vakuum, ε die Streifenverschiebung gemessen in Streifenbreiten[2]), *n* den Brechungsindex des Gases von der Dichte ϱ und *L* die Länge des Weges, den die Lichtstrahlen in dem Medium mit der Dichte ϱ' zurücklegen. Der Ausdruck $\frac{n-1}{\varrho}$ hat für jedes Gas einen konstanten Wert[1]). Für Luft gilt $\frac{n-1}{\varrho} = 0{,}002265\,\frac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{kg\,s}^2}$. Die Weglänge *L* ist bei der verwendeten Versuchseinrichtung durch den lichten Abstand der beiden planparallelen Glasplatten *g* gegeben. Dieser beträgt 199,8 mm. Setzt man diese Zahlenwerte in Gl. 11 ein, so ergibt sich

$$\Delta\varrho = 0{,}001246\,\varepsilon\,\frac{\mathrm{kg\,s}^2}{\mathrm{m}^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Kennt man die Art der Zustandsänderung, durch die die Dichteänderung $\varrho' - \varrho$ des Gases im Gefäß *f* erreicht wurde, so lassen sich aus der Streifenverschiebung auch alle anderen Zustandsgrößen berechnen. Für die adiabatische Zustandsänderung eines idealen Gases gilt beispielsweise: $p'/p = (\varrho'/\varrho)^{\varkappa}$ und $T'/T = (\varrho'/\varrho)^{\varkappa-1}$. Durch die aus Gl. (11) berechnete Dichte ϱ' ist damit auch der Druck p' und die absolute Temperatur T' festgelegt. Ebenso ergibt sich für eine isobare Zustandsänderung aus der Gasgleichung $\frac{p}{\varrho} = RT$ die Temperatur $T' = T\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)$.

Es sei nun an die Stelle des Gefäßes *f* in den Strahlengang die seitlich mit den beiden planparallelen Fenstern *g* abgeschlossene Meßstrecke eines Strömungskanals gebracht, in welche die zu untersuchenden Schaufeln so eingebaut sind, daß sie von den Lichtstrahlen längs ihrer Erzeugenden gestreift werden. Durch die Luftströmung bildet sich um die Schaufeln ein Dichtefeld aus. Für jeden der Lichtstrahlen hat nunmehr die Dichte auf seinem Weg durch den Kanal einen anderen Wert. Die Folge davon ist eine Verzerrung der Interferenzstreifen.

Durch die Linse *d* wird zusammen mit den in der Ebene *1—2* entstehenden Interferenzstreifen auch das Schaufelgitter auf dem Schirm *e* abgebildet. Durch Ausmessen der Auslenkungen der Interferenzstreifen an jeder Stelle des Schirmes kann daher das Dichtefeld um die Schaufeln bestimmt werden. Wie aus den folgenden Abbildungen ersichtlich wird, kann man aus dem so sichtbar gemachten Dichtefeld der strömenden Luft auch die Ausdehnung der Grenzschicht und damit ihre Ablösung deutlich erkennen.

IV. Die Versuchseinrichtung.

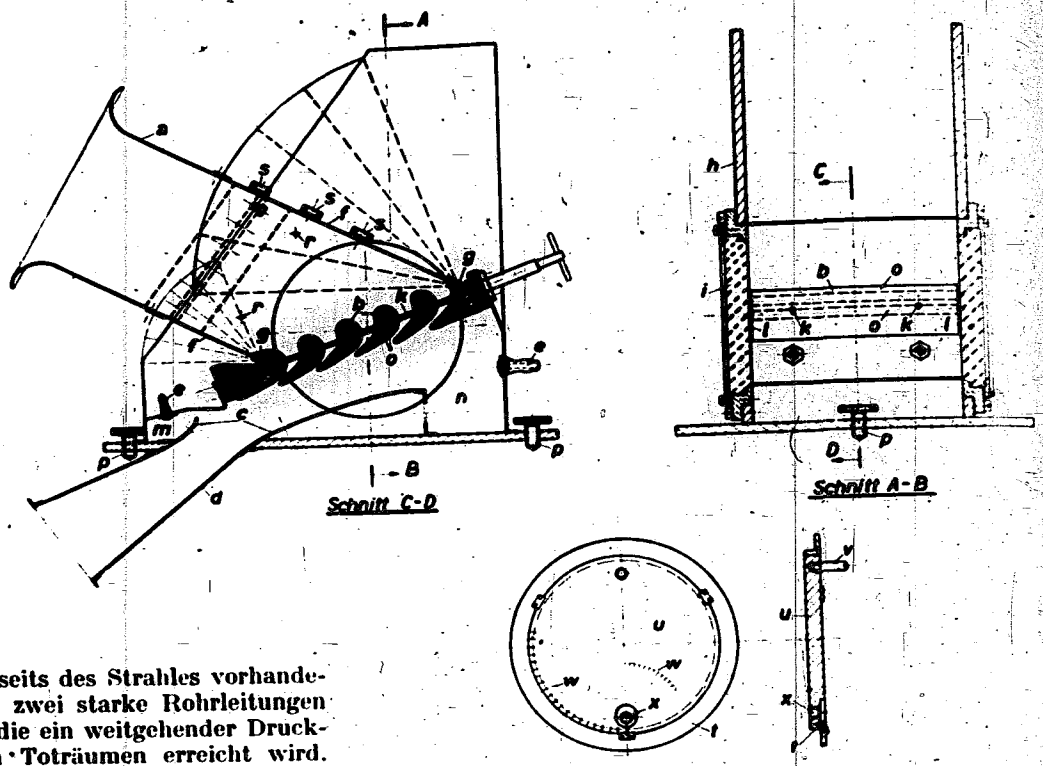
Der Strömungskanal, in den das Schaufelgitter für die Messungen eingebaut wird, ist in Bild 5 in zwei Schnitten dargestellt. Ein Lichtbild der Versuchseinrichtung gibt Bild 6 wieder. Die Luft wird von einem Gebläse durch den Einlauftrichter *a* von rechteckigem Querschnitt angesaugt und durchströmt das Schaufelgitter *b*. Der aus dem Gitter frei austretende Luftstrahl wird von dem Auffangtrichter *c* aufgefangen und über den Diffusor *d* und eine Rohrleitung, die an den Diffusor *d* mit einer nachgiebigen Ledermanschette angeschlossen ist, dem Gebläse zugeführt. Das Gebläse wird von einem Gleichstrommotor angetrieben; seine Drehzahl läßt sich damit in weiten Grenzen regeln. Es erzeugt einen Druckunterschied von maximal 260 mm WS. Da die Strömung durch das Schaufelgitter bei verschiedenen Anströmwinkeln untersucht werden soll, sind die Vorder- und Rückwand *f* des Luftkanals vor dem Schaufelgitter um die beiden Drehachsen *g* schwenkbar. Für die Messungen vorgesehen waren außer der in Bild 5 gezeichneten auch die gestrichelt angedeuteten Stellungen. Das Schaufelgitter konnte damit bei sechs Anströmrichtungen untersucht werden. Für jede Stellung wird an den Kanal ein anderer Einlauftrichter *a* aufgesetzt. In die kräftigen Seitenwände *h* des Kanals sind die beiden planparallelen Fenster *i* eingebaut. Die Abdichtung der Vorder- und Rückwand *f* gegen die Seitenwände *h* erfolgt durch Gummimanschetten und durch Ausstreichen mit Plastilin. Die Schaufeln *b* sind in dem Kanal durch zwei Spanndrähte *k* von 2 mm Stärke festgehalten und durch aufgeklebte Gummischeiben *l* gegen die Glasfenster abgedichtet. Um zu verhindern, daß der aus dem Schaufelgitter austretende Luftstrahl in seiner Austrittsrichtung durch die Lage des Auffangtrichters *c*

[1]) Eine Streifenbreite ist der Abstand der Mittellinien zweier aufeinanderfolgender heller bzw. dunkler Streifen.

8088

Bild 5. Versuchseinrichtung.

a Einlauftrichter,
b Schaufelgitter,
c Auffangtrichter,
d Diffusor,
e Nippel für die Druckausgleichleitungen,
f Vorder- und Rückwand des Einlaufkanals,
g Drehachsen der Wände *f*,
h Seitenwände,
i planparallele Glasfenster,
k Spanndrähte,
l Gummischeiben,
m, *n* Toträume,
o Bohrungen,
p Stellschrauben,
r Bohrungen zur Druckmessung,
s Bohrungen zur Aufnahme eines Staurohres,
t Ring,
u Scheibe,
v Griff,
w Gradeinteilung,
x Bohrung zum Einführen eines Staurohres.



beeinflußt wird, sind die beiderseits des Strahles vorhandenen Toträume *m* und *n* durch zwei starke Rohrleitungen miteinander verbunden, durch die ein weitgehender Druckausgleich zwischen den beiden Toträumen erreicht wird. Trotzdem befriedigte bisher die Gleichmäßigkeit des Luftstrahles hinter dem Schaufelgitter noch nicht ganz, sie soll bei einem neuen Entwurf der Versuchseinrichtung durch Vergrößerung der Toträume *m* und *n* verbessert werden. Die Schaufeln *b* sind aus vergütetem Hartholz (technisch vergütete Buche) hergestellt. Dabei wurde auf eine möglichst gute zylindrische Schaufelform (ebene, parallele Erzeugende) besondere Sorgfalt verwandt, denn eine Beobachtung der Strömungsvorgänge in der dünnen Grenzschicht an der Schaufeloberfläche ist nur möglich, wenn die Lichtstrahlen die Schaufeln auf ihrer ganzen Länge möglichst exakt streifen. Auch für ein genaues Parallelrichten der Schaufeln untereinander beim Aufschieben auf die Spanndrähte wurde durch geeignete Lehren gesorgt. Durch Verändern der Schaufelzahl konnte die Gitterteilung geändert werden. Eine glatte Oberfläche der Schaufeln wurde durch die Politur mit Schellack erzielt. In Bild 7 sind zwei Schaufeln zusammen mit den Spanndrähten wiedergegeben. Für den größten Teil der im folgenden beschriebenen Versuche wurde die mittlere Schaufel des Gitters beheizt. Hierzu war diese Schaufel mit zwei Bohrungen *o* versehen, in die auf einem keramischen Röhrchen eine Heizwicklung aus Chromnickeldraht eingebracht war. Infolge der geringen Wärmeleitfähigkeit des Holzes ist natürlich nicht zu erwarten, daß die Schaufeloberfläche eine konstante Temperatur annimmt, dies stört jedoch bei den vorliegenden Versuchen nicht. Die genaue Ausrichtung des Schaufelgitters im Lichtstrahlengang des Interferometers konnte durch drei Stellschrauben *p* vorgenommen werden. Aus dem durch die Fenster für die Durchsicht freigegebenen Kreis von 146 mm Dmr. wird durch das Interferometer ein rechteckiges Gesichtsfeld von der Größe 8 × 10 cm herausgegriffen. Die Lage des Gesichtsfeldes kann durch Verstellen der Meßstrecke verändert werden.

Die Anströmgeschwindigkeit w_0 der Schaufeln wird aus dem an der Bohrung *r* gemessenen Unterdruck Δp gegenüber dem Versuchsraum berechnet. Es gilt dafür die Gleichung

$$\Delta p = \gamma \frac{w_0^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

in der γ die Wichte der Luft bedeutet. Die obere der Wände *f* des Kanals besitzt auch drei mit Gewindestopfen verschlossene Bohrungen *s*, in die ein kleines Staurohr eingebracht werden kann. Man hat so die Möglichkeit, die Gleichmäßigkeit des Luftstromes vor den Schaufeln nachzuprüfen. Bis auf eine dünne Grenzschicht an den Seitenwänden war die Geschwindigkeit über den Querschnitt sehr gut konstant und stimmte in ihrem Zahlenwert mit der aus Gl. (13) be-

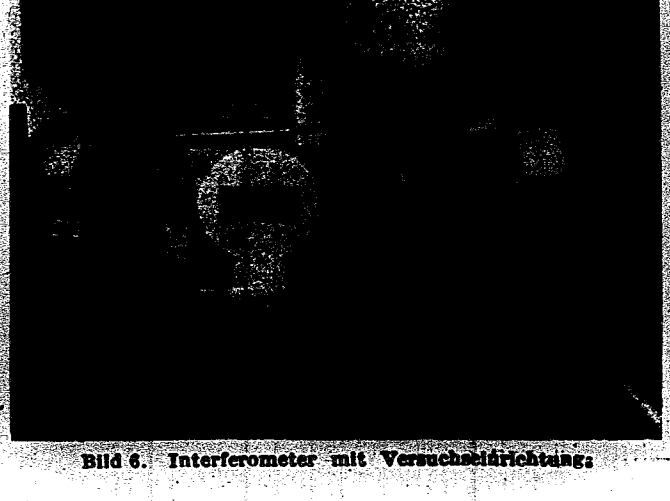


Bild 6. Interferometer mit Versuchseinrichtung.

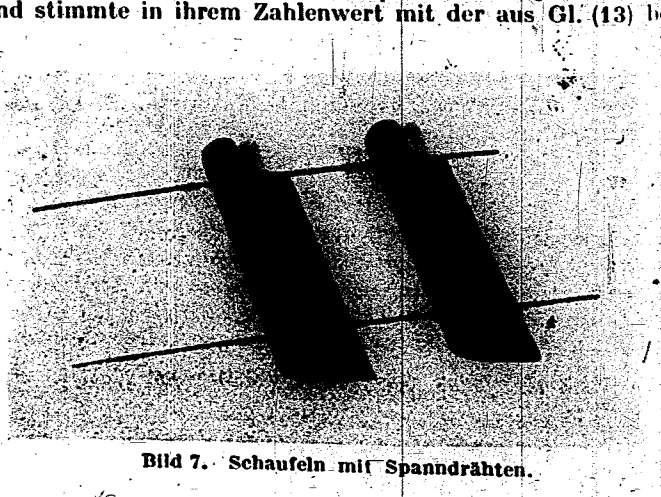


Bild 7. Schaufeln mit Spanndrähten.

8089

rechneten auf wenige Promille überein. Die Möglichkeit der Überprüfung mit einem Staurohr ist für den Luftstrom hinter dem Schaufelgitter dadurch gegeben, daß eins der beiden Glasfenster durch den in Bild 5 unten gezeigten Flansch ersetzt werden kann. Der Flansch besteht aus einem Ring t und einer konzentrisch eingesetzten Scheibe u, die sich an einem Griff v verdrehen läßt. Ihre Stellung kann an einer Gradeinteilung w abgelesen werden. Diese Scheibe trägt eine Bohrung x zum Einführen eines Staurohres. Durch Verschieben des Staurohres in dieser Bohrung und durch Verdrehen der Scheibe u kann das Strömungsfeld in einem Querschnitt des Luftstromes hinter den Schaufeln ausgemessen werden. Dies ist von Wichtigkeit, um feststellen zu können, ob sich der Luftstrahl von den Seitenwänden h ablöst. Bei Gebläseschaufelgittern wurde diese Erscheinung öfter beobachtet[5], [10]). Es ist auch beabsichtigt, bei den weiteren Versuchen auf diese Weise die Nachlaufdelle hinter den Schaufeln auszumessen und so den Schaufelwiderstand und den Energieverlust der Luft beim Durchströmen des Schaufelgitters festzustellen.

V. Versuchsergebnisse.

Mit der im vorhergehenden Abschnitt besprochenen Versuchseinrichtung wurde ein Turbinenschaufelgitter bei verschiedenen Teilungsverhältnissen und Anströmwinkeln untersucht. Ein Ausschnitt aus den dabei erhaltenen Strömungsaufnahmen ist in den Bildern 8 und 10 bis 30 dargestellt. Die Form der verwendeten Schaufeln, die aus den Bildern ersichtlich ist, war uns von anderen Versuchen her vorgegeben. Der Schaufelaustrittswinkel, gemessen zwischen der Winkelhalbierenden der Schaufelaustrittskante und der Gitterrichtung, beträgt bei diesen Schaufeln 15°. Außer den beiden Endstücken, die an der dem Kanalinnern zugekehrten Seite auch nach dem Schaufelprofil geformt waren, Bild 5, wurden in die Meßstrecke 2 bis 4 Schaufeln eingebaut. Dadurch konnten Teilungsverhältnisse a/t (Bild 2) von 0,687, 0,859 und 1,141 verwirklicht werden. Die Tiefe t des Schaufelprofiles beträgt 58,2 mm. Sie wurde in gleicher Weise wie beim Tragflügel als Projektion des Schaufelprofiles auf eine die Bauchseite der Schaufel berührende Gerade gemessen, Bild 1. Durch die verschiedenen Stellungen der Kanalwände f und die zugehörigen Einlauftrichter konnten Anströmwinkel von 20, 34, 48, 62, 76 und 90° verwirklicht werden.

Bild 8 zeigt eine Interferenzaufnahme des durchströmten Schaufelgitters bei der kleinsten Teilung und einem Anströmwinkel von 34°. Man sieht aus der Aufnahme deutlich die Ausbiegung der Interferenzstreifen, die durch das Dichtefeld in der strömenden Luft hervorgerufen wird. Unmittelbar an der Schaufeloberfläche haben die Interferenzlinien einen Knick, d. h. an der Schaufeloberfläche ist ein besonders großes Dichtegefälle vorhanden[11]). Dies kommt daher, daß sich die Strömungsgrenzschicht infolge der durch innere Reibung frei werdenden Wärme (Dissipationswärme) erwärmt. Diese Erscheinnug ermöglicht es, wie bereits durch Th. Zobel gezeigt wurde, die Strömungsgrenzschicht durch Interferenzaufnahmen sichtbar zu machen. Auch das Totwasser hinter der Schaufelaustrittskante, das aus der wärmeren Luft in der Grenzschicht gebildet wird, ist in der Aufnahme deutlich zu erkennen. Außerhalb der Grenzschicht und des Totwassers ist die Luftströmung erfahrungsgemäß weitgehend verlustfrei, die Zustandsänderung der Luft in diesem Gebiet ist daher adiabatisch, und es kann damit aus dem durch die Interferenzaufnahme bestimmten Dichtefeld mit Hilfe der in Abschnitt 2 angegebenen Beziehungen das Druckfeld innerhalb der Strömung berechnet werden. Auf diese Weise erhält man auch den Druckverlauf längs der Schaufeloberfläche aus den Streifenverschiebungen am Rande der Grenzschicht. So wurde die in Bild 9 wiedergegebene Druckfläche gewonnen. In ihr ist der Druckverlauf über der Gitterbreite b (Bild 2) also über der Schaufelprojektion auf eine Senkrechte zur Gitterrichtung aufgetragen. Der Inhalt der Druckfläche gibt die auf die Schaufel wirkende Tangentialkraft an. Die Aufnahme 8 wurde bei einer Anströmgeschwindigkeit von 21,7 m/s gemacht. Die aus der Kontinuitätsgleichung berechnete mittlere Abströmgeschwindigkeit am Ende des Schaufelkanals beträgt dabei 89,5 m/s. Aus der Interferenzaufnahme ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit an der gleichen Stelle zu 91,6 m/s. Das Gebläse lief mit seiner größten Drehzahl. Die Streifenverschiebungen sind bei den angegebenen Geschwindigkeiten, wie man aus Bild 8 entnimmt, noch nicht sehr groß. Dementsprechend läßt auch die Genauigkeit, mit der die Tangentialkraft auf die Schaufel aus der Interferenzaufnahme bestimmt werden kann, noch zu wünschen übrig. Durch Anschluß an ein stärkeres Gebläse kann dieser Übelstand aber leicht beseitigt werden. Auch die Grenzschicht ist an der Schaufeleinlaufseite, wo verhältnismäßig kleine Geschwindigkeiten vorhanden sind, in Bild 8 nur undeutlich sichtbar.

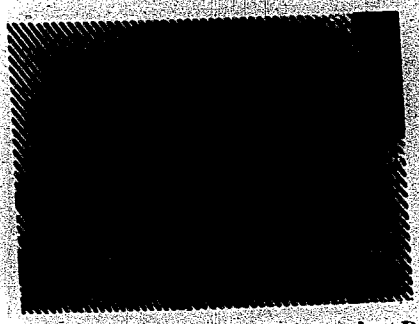


Bild 8. Interferenzaufnahme zur Ermittlung der Druckverteilung um eine Turbinenschaufel.

Teilungsverhältnis $\frac{a}{t} = 0{,}687$,
Anströmwinkel $\beta_1 = 34°$,
Reynoldssche Zahl, $Re = \frac{w_m t}{\nu} = 53000$.

Da es uns aber für unsere Untersuchungen zunächst darauf ankam, die Ablösung der Strömungsgrenzschicht zu beobachten, griffen wir zu folgendem Kunstgriff, um die Grenzschicht auch bei den kleinen Luftgeschwindigkeiten deutlich sichtbar zu machen. Wir erhöhten die Temperatur der Grenzschicht künstlich durch ein Beheizen der Schaufel. Wie aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für die Strömung einer reibungsbehafteten Flüssigkeit folgt, wird das Strömungsfeld durch Temperaturunterschiede nicht beeinflußt, wenn die Stoffwerte (Dichte, Zähigkeit) temperaturunabhängig sind und die durch die Temperaturunterschiede hervorgerufenen Auftriebskräfte in der Strömung gegenüber den Trägheitskräften verschwinden.

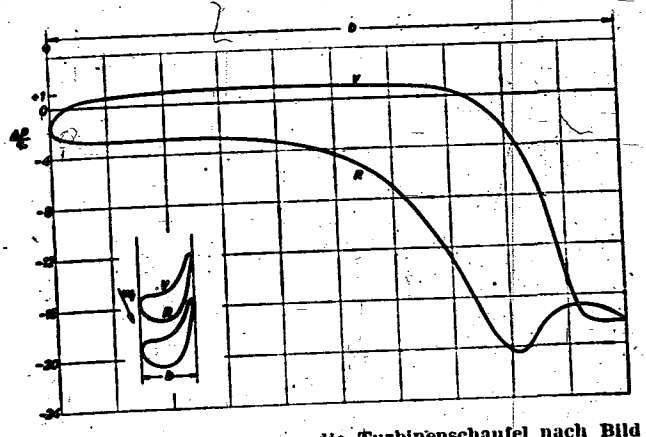


Bild 9. Druckverteilung um die Turbinenschaufel nach Bild 8.
b Gitterbreite,
p Unterschied zwischen dem örtlichen Druck und dem statischen Druck der Anströmung,
q_1 Staudruck der Anströmung.

[5]) C. Keller, Axialgebläse vom Standpunkt der Tragflügeltheorie. Mitteilg. a. d. Inst. f. Aerodynamik. ETH Zürich 1934.

[10]) Leider sind manche Einzelheiten auf den Bildern nicht mehr so deutlich zu erkennen wie auf den Originalaufnahmen.

8090

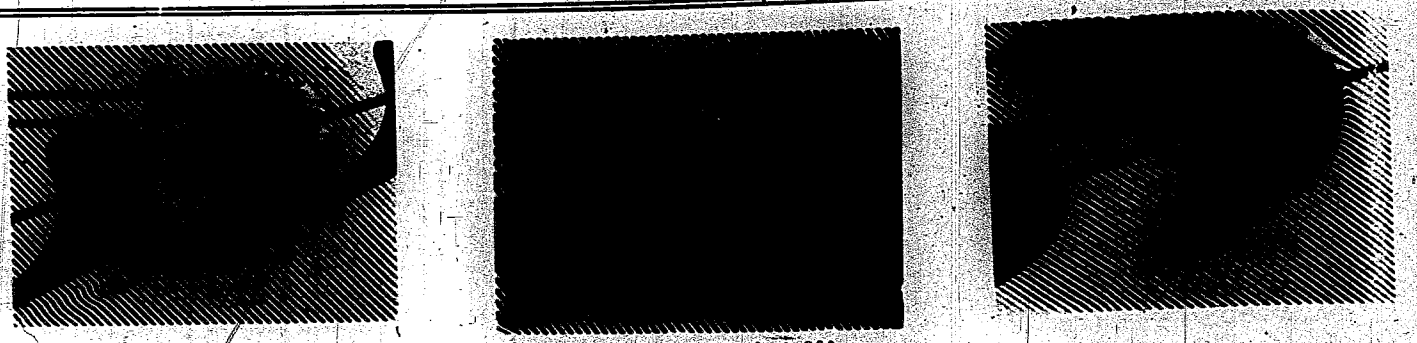


Bild 10, 16, 22: $\beta_1 = 20°$

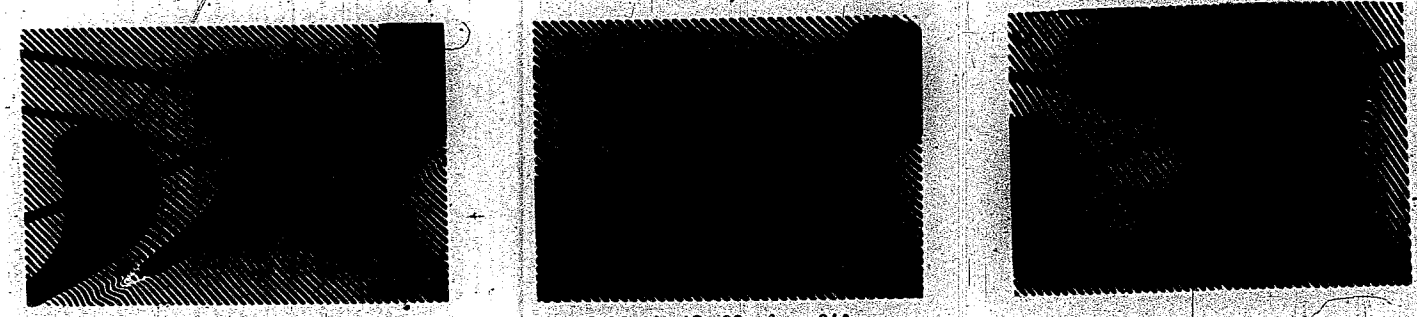


Bild 11, 17, 23: $\beta_1 = 34°$

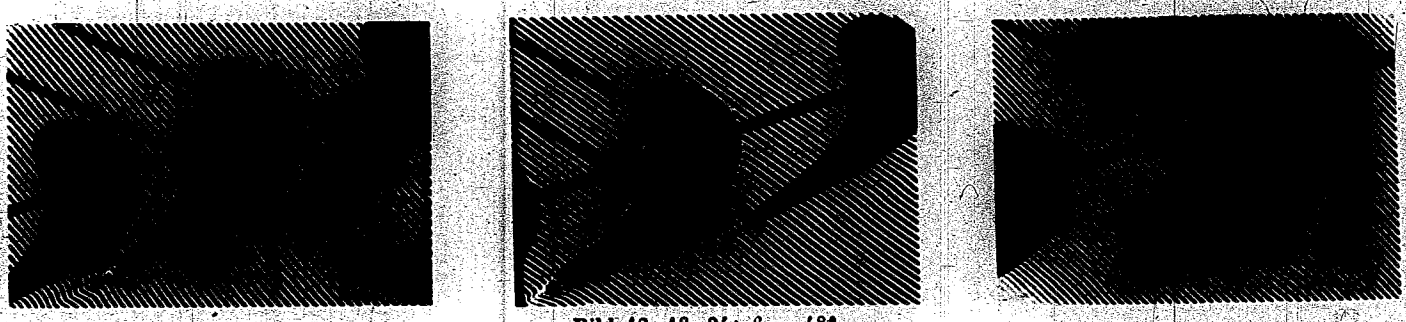


Bild 12, 18, 24: $\beta_1 = 48°$

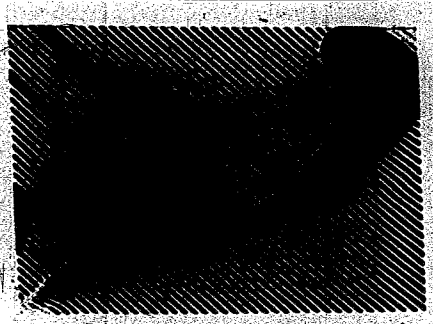
Bild 10 bis 27. Interferenzaufnahmen der Strömung durch ein Turbinenschaufelgitter bei verschiedenen Teilungsverhältnissen $\left(\frac{a}{t}\right)$ und Anströmwinkeln (β_1).

Dies ist aber bei den hier verwendeten Geschwindigkeiten und den kleinen Übertemperaturen von maximal 25°, die innerhalb der Grenzschicht durch die Beheizung erzeugt werden, sicher der Fall[12]). Eine Beeinflussung der Strömungsgrenzschicht und ihrer Ablösungsstellen durch die Beheizung fand daher bei den Versuchen nicht statt. Die Bilder 10 bis 30 geben Interferenzaufnahmen wieder, bei denen mit einer solchen Beheizung der Schaufel gearbeitet wurde. Die beiden starken parallelen Linien in diesen Bildern sind die Schatten der Stromzuführungsdrähte. Diese Drähte wurden in dünnen Isolierschläuchen an den senkrechten Seitenwänden des Einlauftrichters entlanggeführt, Bild 6. Die Anströmrichtung stimmt ziemlich genau mit der Richtung dieser Drähte überein.

Bild 10 bis 15 zeigt die Strömung durch das Schaufelgitter bei der kleinsten Teilung $a/t = 0{,}687$, Bild 16 bis 21 bei einem Teilungsverhältnis $a/t = 0{,}859$ und Bild 22 bis 27 bei der größten Teilung $a/t = 1{,}141$. Betrachtet man zunächst Bild 10 bis 15, so erkennt man daraus, daß bei dem kleinsten Anströmwinkel die Strömung bereits vorn in der Nähe des Staupunktes an der Schaufelrückseite abreißt. In Bild 10 ist das daraus zu ersehen, daß die Interferenzstreifen in einem bestimmten Abstand von der Schaufeloberfläche nach einem Ausknicken vollständig verschwinden. Daß das dadurch abgegrenzte Gebiet tatsächlich das Totwasser hinter einer Ablösungsstelle anzeigt, läßt sich aus Bild 27 noch deutlicher erkennen. Es zeigt sich hier, daß die Knickstelle der Interferenzstreifen an der Schaufelrückseite etwas stromabwärts vom Haltedraht sich von der Schaufeloberfläche ablöst. Dadurch wird die Diskontinuitätsfläche angezeigt, die stets von einer Ablösungsstelle der Strömung ausgeht. Eine solche Unstetigkeitsfläche löst sich bekanntermaßen in Wirbel auf. In der Interferenzaufnahme zeigt sich dies daran, daß die Streifen verwaschen aussehen, sobald die Wirbelfrequenz entsprechend groß ist. In Bild 27 ist das besonders gut an der Ablösung auf der Schaufelvorderseite zu erkennen. Größere Wirbel von entsprechend kleiner Frequenz kommen in der Aufnahme nicht mehr zum Ausdruck. Man kann sie aber auf der Mattscheibe durch ein Zittern der Interferenzstreifen in den Totwassergebieten beobachten. Daß in Bild 10 die Interferenzlinien innerhalb eines schmalen Streifens entlang der Schaufelvorderseite verschwinden, hat dagegen vermutlich seinen Grund darin, daß die abgelenkten Interferenzlinien an dieser Stelle sehr

[12]) Aus Bild 10 bis 30 kann entnommen werden, daß die Interferenzstreifen in der Grenzschicht um maximal 8 Streifenbreiten ausgelenkt werden. Der größte Dichteunterschied innerhalb der Grenzschicht zwischen Schaufelwand und freier Strömung ist damit nach Gl. 12 $\Delta\varrho = 0{,}00997 \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4}$. Die Luftdichte betrug bei den Versuchen etwa $\varrho = 0{,}12 \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4}$. Da die Zustandsänderung innerhalb der Grenzschicht als isobar angesehen werden kann, gilt $\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$, wie aus der Zustandsgleichung für eine kleine Zustandsänderung ohne weiteres folgt. Daraus ergibt sich der größte Temperaturunterschied innerhalb der Grenzschicht zu $\Delta T = 24°$. Die Verschiebung um 8 Streifenbreiten tritt aber nur ganz vereinzelt auf. Im Mittel sind die Streifenverschiebungen und damit die Temperaturunterschiede innerhalb der Grenzschicht wesentlich kleiner.

809.1



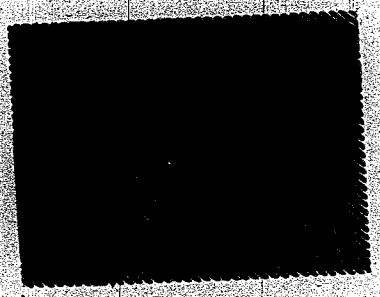
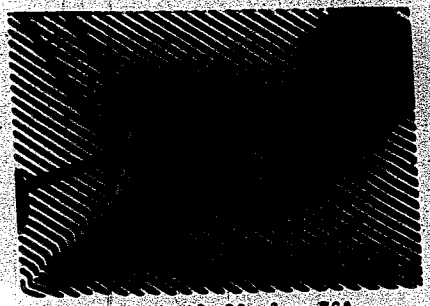


Bild 13, 19, 25: $\beta_1 = 62°$



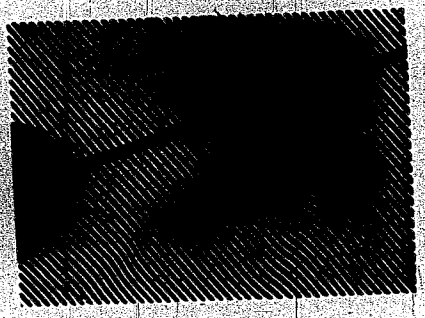
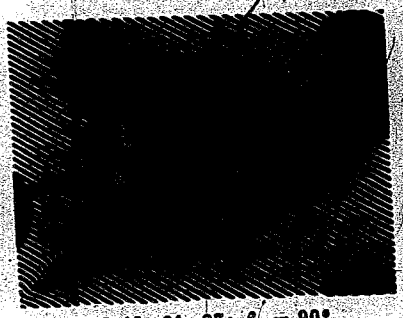


Bild 14, 20, 26: $\beta_1 = 76°$



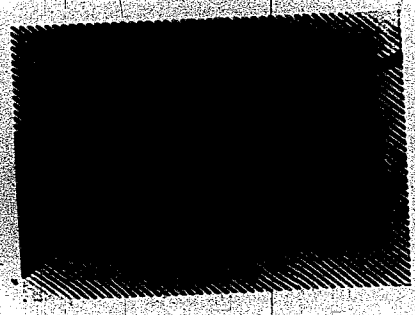


Bild 15, 21, 27: $\beta_1 = 90°$

Bild 10 bis 15: $\frac{a}{t} = 0{,}687$

Bild 16 bis 21: $\frac{a}{t} = 0{,}859$

Bild 22 bis 27: $\frac{a}{t} = 1{,}141$

Die Anströmrichtung stimmt ungefähr mit der Richtung der beiden starken parallelen Schatten überein. Die Reynoldssche Zahl liegt bei Bild 10, 16, 17 zwischen 16000 und 20000, bei den übrigen Bildern zwischen 42000 und 54000.

dünn sind und auf einer harten Kopie vollkommen unterdrückt werden. Das Totwasser auf der Schaufelrückseite verschwindet stromabwärts wieder. Man erkennt, wie sich zunächst vom Haltedraht ab in der beschleunigten Strömung eine neue Grenzschicht bildet. Bereits beim nächstgrößeren Anströmwinkel, Bild 11, ist aber das Abreißen der Strömung auf der Schaufelrückseite verschwunden. Bei großen Anstellwinkeln, Bild 14 und 15, kommt es dagegen zu einer Ablösung an der Vorderseite in der Nähe des Staupunktes. Auch hier legt sich die Strömung weiter stromabwärts wieder an. Möglicherweise ist auch schon in Bild 13 eine schwache Ablösung angedeutet.

Die gleichen Erscheinungen wiederholen sich auch bei größeren Teilungen. Beim Teilungsverhältnis $a/t = 0{,}859$, Bild 16 bis 21, kann man aber noch eine zweite Ablösungsstelle beobachten, und zwar an der Schaufelrückseite stromabwärts vom Austritt aus dem Schaufelkanal. In Bild 16 ist diese zweite Ablösung nicht so ausgeprägt zu beobachten. Eine Veränderung des Interferenzstreifenverlaufes unmittelbar an der Schaufelwand ist auch hier an der gleichen Stelle wie bei den folgenden Bildern feststellbar. Hinter dieser Ablösungsstelle kommt die Strömung nicht mehr zum Anliegen. Die Folge davon ist eine Verbreiterung des Totwassers hinter der Schaufelaustrittskante. Auch die Abströmrichtung stimmt, wie man aus der Richtung des Totwassers erkennen kann, nicht mehr ganz mit der Richtung der Schaufelhinterkante überein. Das Schaufelgitter ist also bei dieser Teilung nicht mehr in der Lage, die Strömung vollkommen bis auf den Schaufelaustrittswinkel umzulenken.

Sehr stark werden die Ablösungserscheinungen dann bei der größten Teilung $a/t = 1{,}141$, Bild 22 bis 27. Das Totwasser hinter der Schaufel ist nun sehr breit geworden, wie man aus der Richtung der von den Ablösungsstellen ausgehenden Diskontinuitätsflächen feststellen kann. Auch die Richtung der austretenden Strömung kommt bei weitem nicht an den Schaufelaustrittswinkel heran. Die Verschaufelung ist bei dieser extrem großen Teilung für eine Turbine unbrauchbar.

Nach den Aufnahmen kann die Verschaufelung bis zu einem Teilungsverhältnis $a/t = 0{,}859$ und in einem Anströmwinkelbereich von 34 bis 62° verwendet werden. Die kleine Ablösung an der Schaufelrückseite bei $a/t = 0{,}859$ dürfte noch keine merkliche Verschlechterung des Wirkungsgrades mit sich bringen, da auf der anderen Seite das Verhältnis der durch die Abrundung der Schaufelhinterkante gegebenen Totwasserbreite zur Breite des ungestörten Luftstrahles am Schaufelaustritt bei wachsendem Teilungsverhältnis kleiner wird. Durch eine scharfe Austrittskante ließe sich die Breite des Totwassers verringern, damit würden die Strömungsverhältnisse durch das Gitter sicher verbessert.

Da die Wahrscheinlichkeit besteht, daß die Ablösungserscheinungen an den Schaufeln durch die Reynoldssche Zahl beeinflußt werden, wurde die Verschaufelung mit einem Teilungsverhältnis $a/t = 0{,}859$ bei verschiedenen Anström-

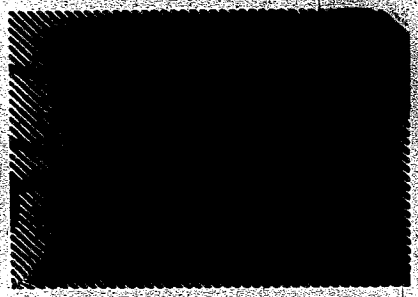


Bild 28: $Re = \frac{w_m t}{\nu} = 11800$,

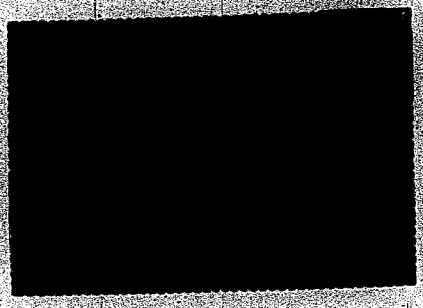


Bild 29: $Re = \frac{w_m t}{\nu} = 22300$,

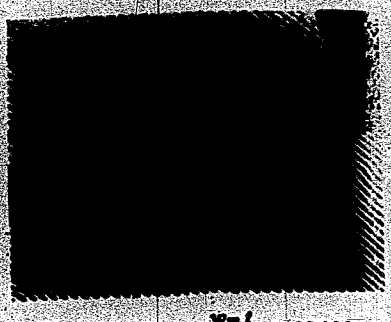


Bild 30: $Re = \frac{w_m t}{\nu} = 35400$,

w_m Meridiankomponente der Anströmgeschwindigkeit, t Schaufeltiefe, ν kinematische Zähigkeit.

Bild 28 bis 30. Interferenzaufnahmen der Strömung durch ein Turbinenschaufelgitter bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen (Re).

Teilungsverhältnis $\frac{a}{t} = 0{,}859$, Anströmwinkel $\beta_1 = 34°$.

geschwindigkeiten untersucht. Drei Aufnahmen aus dieser Versuchsreihe sind in Bild 28 bis 30 dargestellt. Man ersieht aus den drei Bildern, daß die Ablösung bei den höheren Geschwindigkeiten schwächer geworden ist. Bildet man eine Reynoldssche Zahl mit der Meridiankomponente w_m der Anströmgeschwindigkeit und der Schaufeltiefe t, so hat sie für Bild 28 die Größe 11800, für Bild 29 die Größe 22300 und für Bild 30 den Zahlenwert 35400. Die Meridiankomponente wurde zur Bildung der Reynoldsschen Zahl verwendet, weil sie sich an ausgeführten Turbinen aus der Durchflußmenge und den Strömungsquerschnitten eindeutig berechnen läßt. Bei ausgeführten Gas- oder Dampfturbinen arbeitet man mit Schaufeln von der Tiefe 1 bis 3 cm und Anströmgeschwindigkeiten in Achsrichtung w_m von 100 bis 300 m/s. Die Gas- bzw. Dampftemperaturen liegen etwa zwischen 1000 und 200° und die Drücke, abgesehen von Höchstdruckturbinen, zwischen 10 und 1 Atmosphären. Aus diesen Werten ergibt sich ein Bereich der Reynoldsschen Kennzahl von 10^3 bis 10^6. Der durch unsere Messungen erfaßte Bereich liegt also etwa in der Mitte des technisch interessierenden. Voraussetzung für die Übertragbarkeit der vorliegenden Ergebnisse ist allerdings, daß die Machsche Zahl den Wert 0,6 bis 0,7 nicht überschreitet. Bei Gasturbinen ist das meist der Fall.

VI. Zusammenfassung und Ausblick.

Um Unterlagen für den Entwurf von Turbinenverschaufelungen bereitzustellen, wurde die Strömung durch Schaufelgitter aus stark gekrümmten Schaufelprofilen mit Hilfe des Interferenzverfahrens untersucht. Aus den Aufnahmen läßt sich das Dichtefeld der das Schaufelgitter durchströmenden Luft bestimmen und damit die Druckverteilung um die Schaufeln und die durch die Drücke hervorgerufene Kraft auf die Schaufel gewinnen. Da auf den Interferenzaufnahmen auch die Strömungsgrenzschicht an der Schaufeloberfläche deutlich sichtbar ist, läßt sich auch eine Ablösung der Strömung gut feststellen. Diese Ablösungserscheinungen wurden in der vorliegenden Arbeit zunächst studiert. Bei den Versuchen ist es zweckmäßig, mit größeren Schaufelmodellen zu arbeiten. Hält man dabei die gleichen Reynoldsschen Zahlen ein wie in üblichen Turbinenausführungen, so kommt man zu verhältnismäßig kleinen Luftgeschwindigkeiten. Um auch noch bei diesen Geschwindigkeiten die Grenzschicht deutlich erkennen zu können, wurde eine der Schaufeln schwach beheizt.

Es wurde die Strömung durch ein Turbinenschaufelgitter mit einem vorgegebenen Schaufelprofil bei verschiedenen Teilungsverhältnissen und Anströmwinkeln untersucht. Die in Bild 10 bis 27 wiedergegebenen Interferenzaufnahmen der Strömung durch dieses Gitter zeigen, daß bei dem kleinsten Anströmwinkel (20°) die Strömung bereits kurz hinter dem Staupunkt, also auf der Einlaufseite des Schaufelgitters an der Schaufelrückseite abreißt. Ebenso kommt es bei großen Anströmwinkeln (60 bis 90°) zu einer Ablösung der Strömung an der Bauchseite der Schaufel. In beiden Fällen legt sich aber die Strömung bei kleinem Teilungsverhältnis wieder an die Schaufel an. Bei größeren Teilungsverhältnissen (etwa von $a/t = 0{,}859$ ab) kommt es in der Nähe der Abströmkante auf der Rückseite der Schaufel neuerlich zu einer Ablösung. Hinter dieser Ablösungsstelle legt sich aber die Strömung nicht mehr an die Schaufel an. Die Ablösung führt damit zu einer Verbreiterung des Totwassers hinter der Schaufel und damit sicherlich zu einer beträchtlichen Wirkungsgradverschlechterung. Die geschilderten Ablösungserscheinungen werden von der Reynoldsschen Kennzahl beeinflußt. Dies wurde an einer eigenen Versuchsreihe festgestellt, Bild 28 bis 30.

Die Versuche werden zur Zeit auf andere Schaufelformen erweitert mit dem Ziel, günstige Schaufelformen zu entwickeln, die in einem großen Anströmwinkelbereich und bei großen Teilungsverhältnissen noch ablösungsfreie Strömung gewährleisten. Die Untersuchungen sollen auch auf Gebläseschaufeln ausgedehnt werden. Durch Impulsmessungen in den Nachlaufdellen hinter den Schaufeln können auch die Strömungsverluste erfaßt und damit der Wirkungsgrad der Verschaufelungen zahlenmäßig bestimmt werden. Da sich aus den Interferenzaufnahmen die Temperaturverhältnisse in der Grenzschicht an der Schaufeloberfläche bestimmen lassen, ist die Interferenzmethode auch besonders dazu geeignet, die Wirksamkeit der verschiedenen Verfahren zur Schaufelkühlung zu studieren. Ebenso soll der Einfluß der Machschen Zahl auf die Strömung untersucht werden.

8093

Ein neuer Gemischregler für Flugmotoren*).

Von W. Sanner**).

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Abteilung Regeltechnik.

Zur Erzielung günstigster Kraftstoffverbräuche am Einspritz-Zündmotor werden auf Grund von Messungen auf dem Höhenprüfstand die durch die jeweilige Flughöhe bedingten Einflüsse auf das am Verbrennungsprozeß teilnehmende Luftgewicht untersucht. Der Gemischregler, der die richtige Zumessung von Kraftstoff zur Verbrennungsluft vornehmen soll, hat diese Einflüsse als Meßgrößen zu erfassen und in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit richtig zu vereinigen. Sein hierdurch verwickelter Aufbau macht wegen der geringen Verstellkräfte der Meßsysteme die Anwendung von Hilfssteuervorrichtungen erforderlich. In einem Vorversuch wird die Brauchbarkeit einer flüssigkeitsbetriebenen Vorsteuerung nach einer Entwicklung der DVL für die Gemischregelung an einem vereinfachten Gerät erwiesen und anschließend die Arbeitsweise eines neuen Gemischreglers gezeigt, der sämtliche Meßgrößen in der geforderten Gesetzmäßigkeit berücksichtigt.

Zum Schluß erfolgt eine Gegenüberstellung im Kraftstoffverbrauch bei Anwendung des neuen Gemischreglers und einem solchen üblicher Bauart sowie die Auswirkungen auf das Motorverhalten bei geringer und hoher Ventilüberschneidung.

Gliederung.

A. Einführung.
B. Die Meßgrößen des Gemischreglers.
C. Prüfstandsergebnisse.
1. Einfluß der Ansaug-Lufttemperatur.
2. Einfluß des Gegendruckes am Auspuff.
3. Errechnung der Einspritzmenge aus dem Luftverbrauch.
D. Festlegung der Gemischregelung.
E. Vorversuche an einem vereinfachten Gemischregler.
F. Aufbau und Regeleigenschaften des neuen Gemischreglers.
G. Vorteile des neuen Gemischreglers.
H. Zusammenfassung.
J. Schrifttumsverzeichnis.

A. Einführung.

Bei der Auswertung von Versuchen auf dem Motoren-Höhenprüfstand ergab sich für den Verfasser die Aufgabe, zu untersuchen, in welchem Maße und mit welchen Mitteln sich die Regelung der Kraftstoffmenge am Einspritz-Zündmotor verbessern ließe.

Das Verfahren der Einspritzung einer bestimmten Kraftstoffmenge in die Zylinder besitzt rein verbrauchsmäßig gegenüber dem Vergaserbetrieb folgende Vorteile:

1. Die Möglichkeit der Verbesserung des Gaswechselvorganges (geringerer Restgasanteil) bei genügender Ventilüberschneidung ohne Kraftstoffverlust.
2. die gleichmäßige Dosierung der allen Zylindern zugeführten Kraftstoffmengen,
3. die einwandfreie Regelmöglichkeit des Verhältnisses Luft/Kraftstoff sowohl im Leerlauf als auch im gesamten Dauerleistungsbereich in jeder Flughöhe.

Während am Vergasermotor das verlangte Luft-Kraftstoffverhältnis durch verwickelte Anordnung der Luft- und Kraftstoffdüsen erreicht wird, fällt beim Einspritzmotor die Zumessung des Kraftstoffes zum angesaugten Luftgewicht dem Gemischregler zu. Der Gemischregler verstellt die Regelstange an der mit dem Motor gekuppelten Einspritzpumpe, wodurch in dieser die Förderdauer der einzelnen Pumpenkolben verändert wird. Die von der Pumpe je Hub und Zylinder eingespritzte Kraftstoffmenge bleibt bei stillstehender Regelstange im ganzen Drehzahlbereich gleich. Der Verbrauch in der Zeiteinheit ändert sich also genau verhältnisgleich der Drehzahl.

Die Tätigkeit des Gemischreglers besteht darin, die das Gewicht der Verbrennungsluft bestimmenden Werte meßtechnisch zu erfassen und hiernach die Pumpe entsprechend dem günstigsten Verhältnis Luft/Kraftstoff einzustellen.

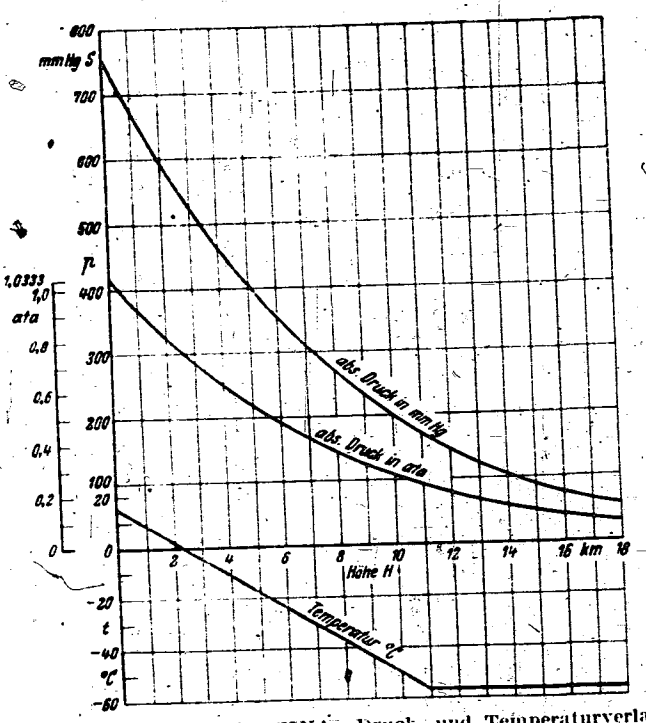


Bild 1. Normalwerte der CIVA. Druck- und Temperaturverlauf in Abhängigkeit der Flughöhe.

B. Die Meßgrößen des Gemischreglers.

Die vom Gemischregler zu erfassenden Meßgrößen für die Verbrennungsluft im Motor werden im wesentlichen durch die Änderung des Luftzustandes mit der Flughöhe beeinflußt. Bild 1.

Wegen der Abnahme der Luftwichte mit zunehmender Höhe läßt sich die für die Verbrennung erforderliche Luftmenge nur durch Vorverdichtung in einem Lader in die Zylinderräume hineinbringen. Der durch diese Maßnahme zwischen Lader und Einlaßventil herrschende Ladedruck der Verbrennungsluft ist der erste Kennwert für das Luftgewicht, der mittels eines Druckmeßsystems in den Gemischregler einzuführen ist.

Mit der Abnahme der Luftwichte ändert sich außerdem die Ansaugtemperatur der Verbrennungsluft vor dem Lader. Von ihr wird auch die Temperatur der Ladeluft beeinflußt, welche infolge der Verdichtung um einen bestimmten Betrag höher liegt, abhängig von der Flughöhe aber einen ähnlichen Verlauf aufweist. Sie stellt den zweiten Kennwert für das Verbrennungsluftgemisch dar, der mittels eines Temperaturmeßsystems zu erfassen und zum Gemischregler zu leiten ist.

*) M 92.

**) Doktorarbeit an der Technischen Hochschule Berlin. Berichter: Prof. Dr.-Ing. H. Triebnigg; Mitberichter Prof. Dr. habil. Everling.

8094

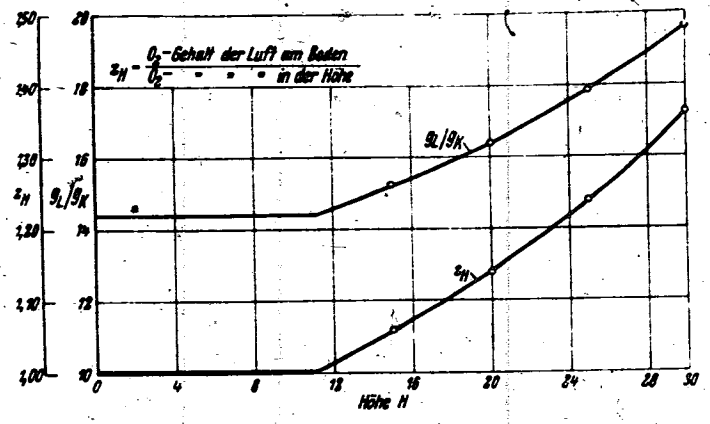


Bild 2. Änderung des Mindestluftbedarfes je Kraftstoffeinheit mit der Höhe infolge sinkenden O_2-Gehaltes der Luft.

Neben dem Ladedruck und der Ladetemperatur vor dem Einlaßventil hat auch der hinter dem Auslaßventil herrschende Gegendruck Einfluß auf das an der Verbrennung teilnehmende Luftgewicht. Mit sinkendem Gegendruck wird die Spülung verbessert. Der Anteil der im Zylinder zurückbleibenden Restgase verringert sich zugunsten eines höheren Frischluftgewichtes. Es muß daher ein weiteres Druckmeßsystem vorgesehen werden, welches auch diesen dritten Kennwert berücksichtigt.

Außerdem tritt oberhalb der 11-km-Grenze neben der Druck- und Temperaturabnahme noch eine Verringerung des O_2-Gehaltes der Luft ein, die eine Änderung des Verhältnisses Luft/Kraftstoff erforderlich macht, Bild 2. An Gemischreglern, die vorwiegend in der Stratosphäre arbeiten, muß daher das jeweils günstigste Mischungsverhältnis noch von einer Höhenmeßvorrichtung berichtigt werden.

C. Prüfstandsergebnisse.

In Zahlentafel 1 sind die im Text gebrauchten Abkürzungen, Dimensionen und Bezeichnungen angegeben:

Zahlentafel 1.

Abkürzung	Dimension	Bezeichnung
H	km	Flughöhe
p_L	mm Hg, ata	Ansaug-Luftdruck
t_L	°C	Ansaug-Lufttemperatur
p_S	mm Hg, ata	Ladedruck
t_S	°C	Ladetemperatur
p_A	mm Hg, ata	Gegendruck am Auspuff
B	kg/h	Kraftstoffverbrauch
b_e, b_i	g/PSh	Kraftstoffeinheitsverbrauch
L	kg/s	anges. Luftgewicht
—	g_L/g_K	Luft-Kraftstoffverh.
n	min^{-1}	Drehzahl
Zdg.	° v. o. T.	Zündeinstellung

1. Einfluß der Ansauglufttemperatur.

Die Änderung der Lufttemperatur t_L mit zunehmender Flughöhe hat entscheidenden Einfluß auf den Füllungsgrad im Zylinder[1]). Bei Motoren mit Aufladung läßt sich aus ihr allein noch keine allgemein gültige Beziehung zur Motorleistung und deren Kraftstoffregelung herleiten, da nicht sie, sondern die Temperatur des in die Zylinder eintretenden Gemisches maßgebend ist. Den die Gemischtemperatur bestimmenden Faktor stellt die Temperatur hinter Lader t_S dar, deren Verlauf in Abhängigkeit von der Ansaugluft Bild 3 zeigt. Sie wird durch folgende Einflüsse bestimmt:

a) Höhentemperatur,
b) Temperaturerhöhung im Lader,
c) Wärmezufuhr durch den Motor am Lader,
d) Abkühlung in den Luftleitungen und
e) Erwärmung im Ansaugsystem in der Nähe der Zylinder durch Leitung, Strahlung und Reibung.

[1]) C. R. Himmler und W. C. Sanner, Einfluß des Höhenzustandes auf Gemisch und Zündung im Arm-Reichgebiet des BMW 132-N-Motors. Unveröffentlichte Arbeit.

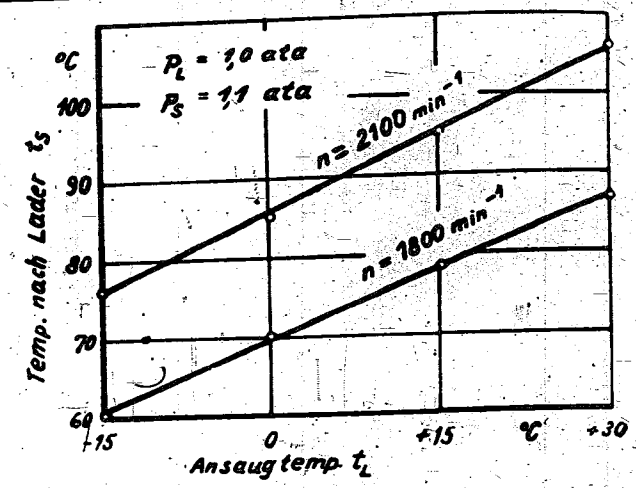


Bild 3. Abhängigkeit der Ladetemperatur t_S von der Ansaugtemperatur t_L.

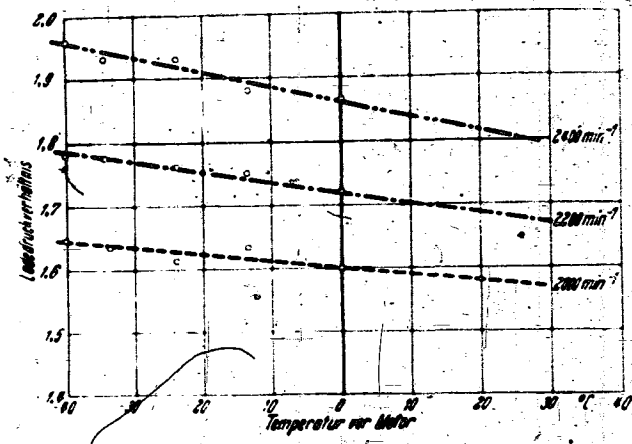


Bild 4. Ladedruckverhältnis p_S/p_L in Abhängigkeit von t_L in 6 km Höhe.

Es ergibt sich aus den Versuchen, daß die Änderung der Temperatur hinter Lader (Δt_S) anders ist, als dies nach Maßgabe der Temperaturänderung vor Lader (Δt_L) zu erwarten gewesen wäre.

Desgleichen ändert sich auch das Druckverhältnis des Laders p_S/p_L nach eigenen Gesetzen. Ihr Verlauf wurde bei gleichbleibender Drosselklappenstellung, Zylindertemperatur und gleichem Mischungsverhältnis jeweils in verschiedenen Höhen untersucht. Die Temperaturabhängigkeit, gemessen in einem Druckzustand entsprechend 6 km Flughöhe, geht für drei Drehzahlen aus Bild 4 hervor. Es ergibt sich, daß p_S/p_L mit sinkender Temperatur vor Motor und somit auch mit zunehmender Höhe ansteigt.

Die gezeigten Einflüsse der Ansaugtemperatur auf die Ladetemperatur und das Druckverhältnis p_S/p_L wirken sich auf die Leistung aus. Zur Nachprüfung des Temperatureinflusses auf die Motorleistung wurde in verschiedenen Höhen die Ansaugtemperatur in weiten Grenzen geändert. Bild 5 zeigt das Ergebnis, wobei auf die Abszisse die Ansaugtemperatur t_L und die Ladetemperatur t_S und auf der Ordinate der für die Versuchsreihe errechnete Leistungsfaktor τ aufgetragen ist.

$$\tau = \frac{N_{t_L\,°C}}{N_{0\,°C}} = \frac{\text{Leistung bei } t_L = \ldots\,°C \text{ vor Lader}}{\text{Leistung bei } t_L = 0\,°C \text{ vor Lader}}.$$

Sämtliche Leistungswerte wurden als Punkte bester Leistung durch Gemischregelung von Hand bestimmt. Die Verbesserung der Leistung tritt insbesondere bei niedrigen Ladedrücken in Erscheinung, da bei hohen Ladedrücken die Füllung sich sowieso dem bestmöglichen Wert nähert. Ein ähnlicher Verlauf der Leistung abhängig von der Ansaugtemperatur wird erhalten, wenn der Druck vor und hinter dem Motor geändert und der Ladedruck auf einen bestimmten Wert gehalten wird, Bild 6. Mit zunehmender

8095

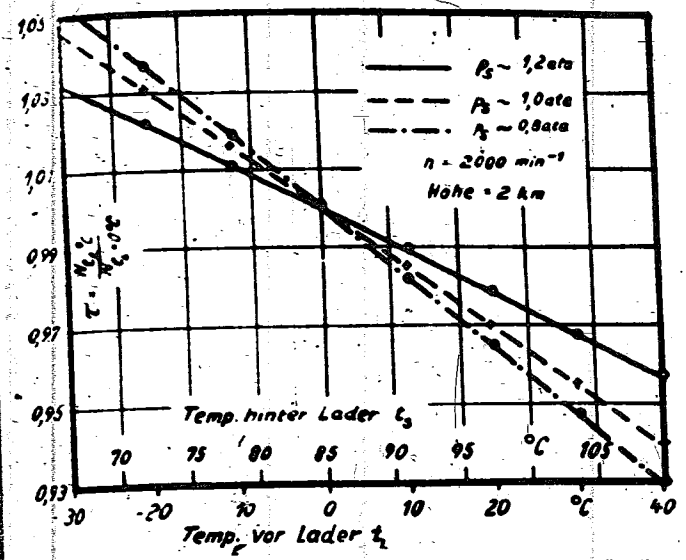


Bild 5. Änderung der Leistung in Abhängigkeit von der Temperatur vor bzw. hinter Lader bei verschiedenen Ladedrücken p_s.

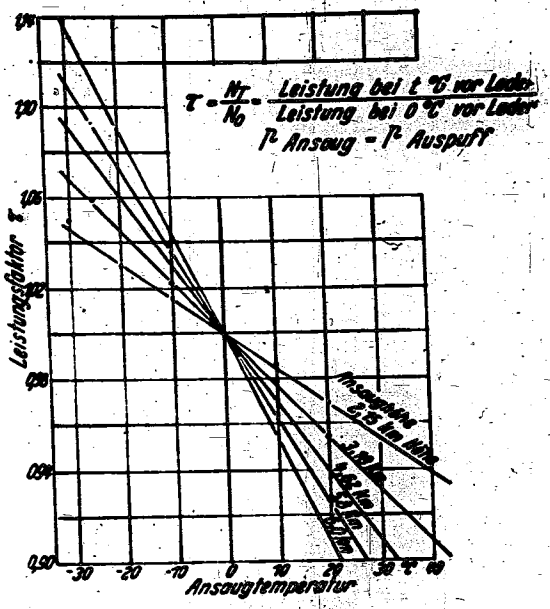


Bild 6. Änderung der Leistung in Abhängigkeit von der Ansaugtemperatur in verschiedenen Höhen bei gleichbleibendem Ladedruck

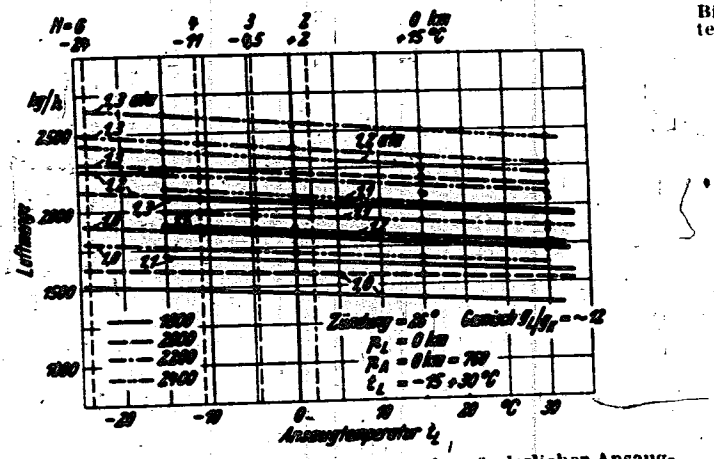


Bild 7. Luftmenge bei reichem Gemisch und veränderlicher Ansaugtemperatur.

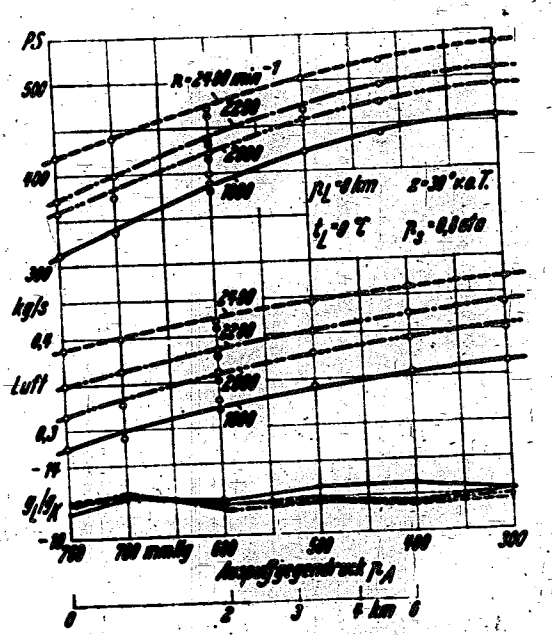


Bild 8. Einfluß des Auspuffgegendruckes auf Luftmenge und Leistung.

Höhe (druckseitig betrachtet) nimmt der Einfluß einer Ansaugtemperaturänderung zu.

Punkten bester Leistung sind bestimmte Luft-Kraftstoffverhältnisse zugeordnet. Diese Leistungen änderten sich unter dem Einfluß der Ansaugtemperatur Bild 5 u. 6.

Zur Aufrechterhaltung eines günstigen Luft-Kraftstoffverhältnisses muß daher die Kraftstoffregelung nach Maßgabe der Luftmengenänderung in Abhängigkeit von der Ansaugtemperatur verändert werden. Bild 7 zeigt im Beispiel den Verlauf der Luftmenge für verschiedene Ladedrücke und Drehzahlen.

2. Einfluß des Gegendruckes am Auspuff.

Der mit zunehmender Höhe abnehmende Auspuffgegendruck hat beim Ladermotor mit Freiauspuff die gleiche Wirkung wie eine Vergrößerung des Hubvolumens, da die angesaugte Luftmenge vom Verhältnis p_s/p_A abhängt. Der Auspuffdruck wirkt sich infolge des sich ändernden Druckverhältnisses auch auf die Arbeitsbedingungen des Laders dahingehend aus, daß dieser mit abnehmendem p_A jeweils an einem anderen Punkt seiner Leistungskennlinie arbeitet. Infolgedessen ergibt sich bei gleichbleibend eingestellter Drosselklappe mit sinkendem Auspuffgegendruck eine erhöhte Fördermenge und Leistung, wobei der Ladedruck als solcher zurückgeht[2]). Diese Abnahme des Ladedruckes wird in größeren Höhen immer geringer, da das Maximum der erreichbaren Füllung bei einem bestimmten Gegendruck liegt und eine weitere Senkung ohne Einfluß bleibt.

[2]) Ragazzi, Beitrag zur Frage des Höhenverhaltens von Flugmotoren. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, Ergänzungsband S. 172.

Zur Beurteilung des reinen Auspuffeinflusses wurden die Versuche auf dem Höhenprüfstand jeweils unter Konstanthaltung sämtlicher übrigen Größen wie Drehzahl, Ladedruck, Mischungsverhältnis und Temperatur durchgeführt.

Die Versuche sind bei verschiedenen Drehzahlen und Ladedrücken zu fahren, da, wie bereits erwähnt, die Leistungsverbesserung mit sinkendem Auspuffdruck vom Ladedruck derart abhängt, daß mit zunehmendem Ladedruck die prozentuale Verbesserung der Totraumspülung immer geringer wird.

Die Einstellung des Gemisches muß hierbei stets dem der besten Leistungsabgabe entsprechen, denn ein alleiniges Senken des Gegendruckes würde einen Luftüberschuß und damit ein Abfallen der Leistung herbeiführen.

Bild 8 zeigt den Verlauf der Leistung und der Luftmenge in Abhängigkeit vom Gegendruck bei gleichbleibendem Verhältnis Luft/Kraftstoff und Ladedruck. Um für die Drehzahl- und Ladedruckabhängigkeit ein einheitliches Bild zu erhalten, ist statt der Leistung vorteilhaft der Leistungsfaktor φ aufzutragen.

8096

$$\psi = \frac{N_{p_A}}{N_{760}} = \frac{\text{Leistung bei Höhenauspuff}}{\text{Leistung bei Bodenauspuff}}$$

$$\Delta p_A = 760 - p_A.$$

Man erhält dann eine vom Bezugspunkt $p_A = 760$ mm Hg und $\psi = 1$ ausgehende Kurvenschar, Bild 9. Trägt man den Leistungsfaktor als Funktion des Druckverhältnisses vor den Ventilen und im Auspuff auf, $p_s/p_A = \alpha$, so ergibt sich aus Bild 10, daß beispielsweise bei dem untersuchten Motor BMW-132 ein weiteres Senken des Auspuffgegendruckes über das Verhältnis $\alpha = 1{,}8$ hinaus keinen Leistungsgewinn bringt. Setzt man daher den ψ-Wert für $\alpha = 1{,}8$ gleich 1 und errechnet sich von hier aus für abnehmende α-Werte (d. h. zunehmenden Auspuffgegendruck) die Leistungsverschlechterung für die verschiedenen Ladedrücke und Drehzahlen aus, so ergibt das Verhältnis:

$$\xi = \frac{\psi_a}{\psi_{an}}$$

als Funktion von α eine gemeinsame Parabel, deren Scheitelpunkt bei $\alpha = 1{,}8$ und $\xi = 1{,}0$ liegt, Bild 11. Die Gleichung dieser Parabel ergibt sich durch Transformation in ein Koordinatensystem aus:

$$x = 50\ (1 - \xi)$$
$$y = 20\ (1{,}8 - \alpha)$$
$$p = 20$$

In die Scheitelgleichung $y^2 = 2\,p\,x$ eingesetzt:

$$400\,(3{,}24 - 3{,}6\,\alpha + \alpha^2) = 40 \cdot 50\,(1 - \xi)$$

$$\frac{3{,}24}{5} - \frac{3{,}6}{5}\,\alpha + \frac{\alpha^2}{5} = 1 - \xi$$

$$0{,}3525 + 0{,}72\,\alpha - 0{,}2\,\alpha^2 = \xi$$

$$\xi = -0{,}2\left(\frac{p_s}{p_A}\right)^2 + 0{,}72\left(\frac{p_s}{p_A}\right) + 0{,}3525.$$

Diese Parabelgleichung stellt eine Vereinheitlichung sämtlicher Versuchswerte dar und erlaubt, für andere Motoren des gleichen Baumusters aus einer unter Bodenbedingungen gemessenen Leistung die Leistungsverbesserung bei Höhenauspuff zu bestimmen, wie an Hand des folgenden Beispiels gezeigt werden soll:

Am Boden gemessen:

$N_{\text{Boden}} = 735$ PS
$p_s = 1{,}2$ ata
$p_A = 1{,}0$ ata

Gesucht: $N_{p_A} = \psi \cdot N_{\text{Boden}}$ für $p_A = 0{,}8$ ata.

Aus Bild 11:

1) $\alpha = \frac{p_s}{p_A} = \frac{1{,}2}{0{,}8} = 1{,}5$; $\xi = \frac{\psi_a}{\psi_{an}} = 0{,}985$.

2) $\alpha = \frac{p_s}{p_A} = \frac{1{,}2}{1{,}03} = 1{,}16$; $\xi = \frac{\psi_a}{\psi_{an}} = 0{,}924$.

$\alpha = 1{,}16$ ist dasjenige Druckverhältnis p_s/p_A, für welches der Auspuffdruck $p_A = p_L = 760$ mm Hg beträgt, somit $\psi_a = 1$ ist.

Aus (2) ergibt sich:

$$\psi_{an} = \frac{1}{0{,}924}$$

In (1) eingesetzt:

$$\psi_a = \frac{0{,}985}{0{,}924} = 1{,}067.$$

Die gesuchte Leistung bei Höhenauspuff also:

$$N_{p_A} = \psi_a \cdot N_{\text{Boden}} = 1{,}067 \cdot 735 = 784\ \text{PS}.$$

Da die Parabel für andere Motorbaumuster ihren eigenen Verlauf aufweist (s. Bramo 323, Jumo 210 und BMW 132 Q), ist eine allgemein gültige Formel für den Auspuffeinfluß wegen der anfangs geschilderten Abhängigkeit nicht anzugeben.

3. Errechnung der Einspritzmenge aus dem Luftverbrauch.

Nach den Abschnitten 1 und 2 der Prüfstandsversuche wird die Einstellcharakteristik der Kraftstoffpumpe durch folgende Größen beeinflußt:

1. Ladedruck,
2. Ladetemperatur,
3. Auspuffdruck,
4. gewolltes bzw. zulässiges Luft/Kraftstoffverhältnis.

Die je Hub und Zylinder einzuspritzende Kraftstoffmenge läßt sich aus den Werten der gemessenen Luftmenge der vorausgegangenen Versuche auch rechnerisch ermitteln aus:

$$Q\ (\text{mm}^3/\text{Hub u. Zyl.}) = \frac{L \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 2}{60 \cdot \lambda \cdot n \cdot \gamma \cdot z};\ \text{(4-Takt)}.$$

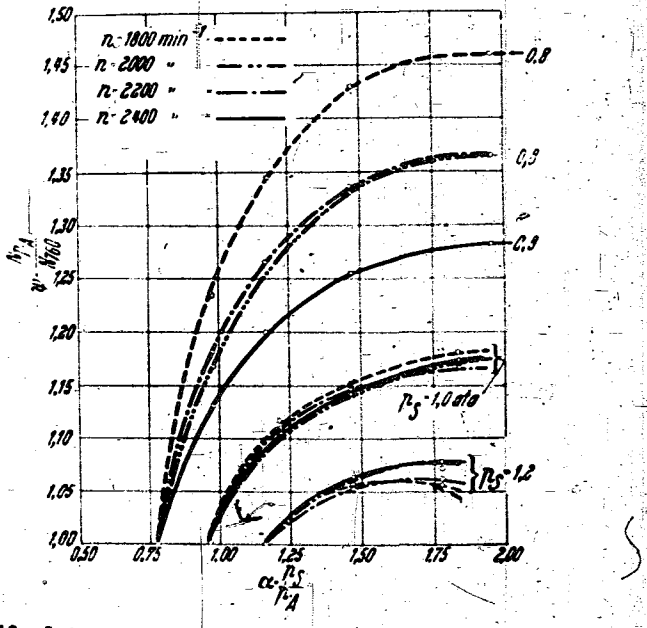


Bild 10. Leistungsverbesserung in Abhängigkeit des Druckverhältnisses am Motor (BMW 132 N).

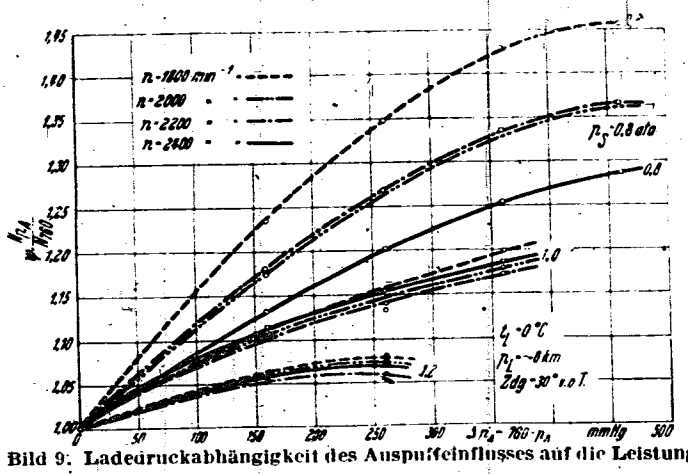


Bild 9. Ladedruckabhängigkeit des Auspuffeinflusses auf die Leistung.

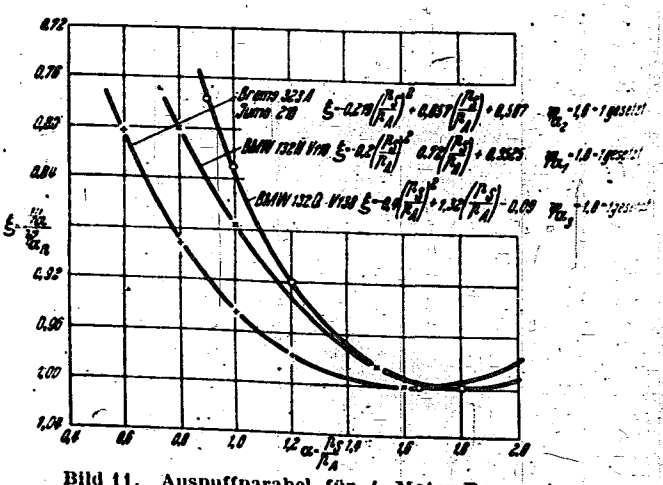


Bild 11. Auspuffparabel für 4 Motor-Baumuster.

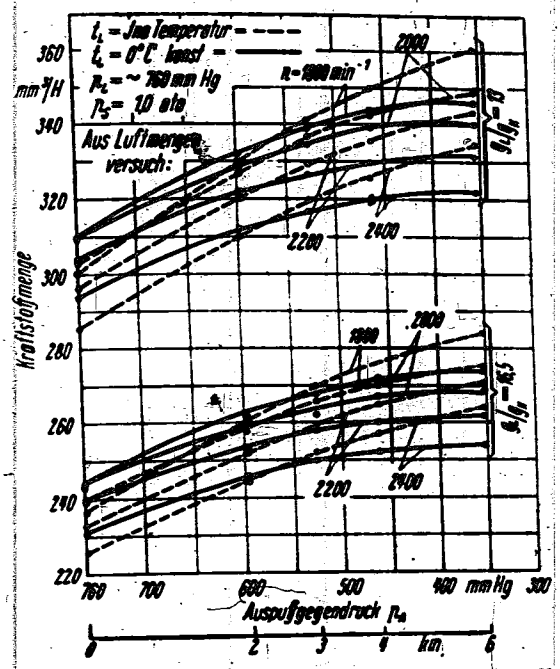


Bild 12. Aus Luftmengenversuch errechnete Kraftstoffmenge.

worin: L = Luftmenge in kg/h,
λ = Verhältnis Luft/Kraftstoff,
n = Drehzahl in min^{-1},
γ = Wichte des Kraftstoffes g/cm³,
z = Zahl der Zylinder.

In Bild 12 sind diese Kraftstoffmengen für reiches und armes Gemisch aus einem Auspuffversuch für 2 Versuchsreihen aufgetragen. Bei der ersten Versuchsreihe wurde der Ansaugdruck p_L, die Ansaugtemperatur t_L und der Ladedruck p_S konstant gehalten, während in der zweiten auch die Ansaugtemperatur, entsprechend den dem Auspuffdruck gleichzusetzenden Höhen, geändert wurde. Jedesmal schneiden sich die zu einer Drehzahl gehörigen Kurven in der INA-Höhe für $t_L = 0°C$ im Punkt $H = 2{,}3$ km. Der Vergleich zweier errechneter Kraftstoffkurven mit denen des Versuches zeigt befriedigende Übereinstimmung, Bild 13. Betont werden muß jedoch, daß diese Art der Kraftstoffbestimmung nur an Motoren mit geringer Ventilüberschneidung möglich ist. Bei größerer Ventilüberschneidung geben die gemessenen Luftmengen falsche Zahlenwerte an, da ein beträchtlicher Teil der zugeführten Luft nur zur Spülung dient und wieder zum Auspuff hinausgeht, ohne am Verbrennungsprozeß teilzunehmen.

Zur laufenden Kontrolle des Kraftstoffverbrauches während einer Versuchsreihe hat es sich als vorteilhaft erwiesen, an der Regelstange der Einspritzpumpe eine Teilung in mm³ je Hub und Zylinder anzubringen. Bei sorgfältiger Ausführung dieser Einrichtung sind hiermit ebenso genaue Werte abzulesen, wie sich rechnerisch aus der Zeitmessung einer bestimmten Durchlaufmenge ergibt (Abweichung höchstens ± 2 mm³ je Hub und Zylinder).

D. Festlegung der Gemischregelung.

Die Prüfstandsergebnisse zeigten, daß für die Motorleistung und die Kraftstoffregelung

1. der Ladedruck,
2. die Ladetemperatur und
3. der Gegendruck im Auspuff

maßgebend sind. Aus den Versuchen ergab sich ferner, daß der Einfluß einer dieser Größen gleichzeitig auch von dem jeweiligen Wert einer anderen abhängt. Der Gemischregler muß daher nicht nur den Ladedruck, die Ladetemperatur und den Gegendruck richtig erfassen, sondern auch diese Meßwerte unter Berücksichtigung ihrer gegenseitigen Abhängigkeit vereinigen und das Ergebnis an die Regelstange der Einspritzpumpe weiterleiten. Aus dem auf-

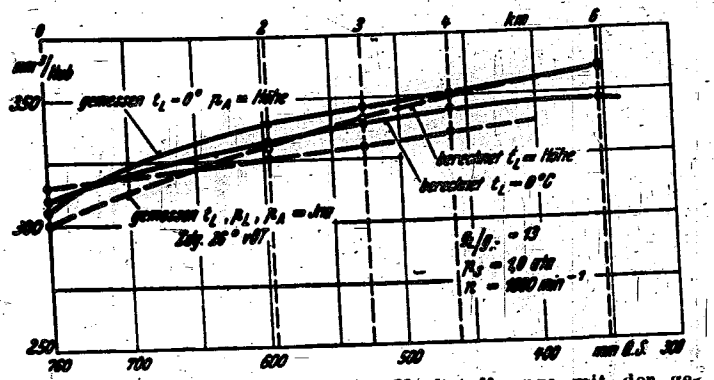


Bild 13. Vergleich der errechneten Kraftstoffmenge mit der gemessenen.

gezeichneten Leistungsverhalten auf Bild 5 ergibt sich aus den Beziehungen zwischen Ladedruck und Ladetemperatur das erste Gesetz für die Gemischregelung.

In Bild 14 ist die je Hub und Zylinder einzuspritzende Kraftstoffmenge in Abhängigkeit vom Ladedruck p_S für drei Ladetemperaturen aufgetragen. Die gestrichelten Linien begrenzen das zu jeder Ladetemperatur gehörige Klopfgebiet. Im klopffreien Gebiet hat die Regelkurve zur Einhaltung eines bestimmten Verhältnisses Luft/Kraftstoff einen geradlinigen Verlauf. Die Steigung dieser Geraden nimmt mit abnehmender Ladetemperatur zu; eine Temperaturänderung um Δt_S macht also bei niedrigem Ladedruck weniger auf die Pumpenverstellung aus als bei hohem. Für den Aufbau des Gemischreglers bedeutet dies, daß jede Steuerung der Pumpenregelstange durch das Temperaturmeßsystem größenmäßig abhängig vom jeweils herrschenden Ladedruck zu erfolgen hat.

Von einem bestimmten Ladedruck werden die Temperaturen im Zylinder so hoch, daß der Motor zu klopfen beginnt. In diesem Augenblick muß das bis hierher eingehaltene Verhältnis Luft/Kraftstoff in Richtung größeren Kraftstoffverbrauches geändert werden. Die Anreicherung muß hinsichtlich der Ladedruckhöhe um so früher erfolgen, je höher die Temperatur der in die Zylinder gelangenden Verbrennungsluft liegt. Wie aus Bild 14 ersichtlich ist, überschneiden sich die Regelkurven im Klopfgebiet. Die Temperaturkurven verlaufen also gegenüber denen im klopffreien Gebiet umgekehrt. Im Gemischregler ist daher eine Vorrichtung anzubringen, welche auch diesem Temperaturgesetz Rechnung trägt.

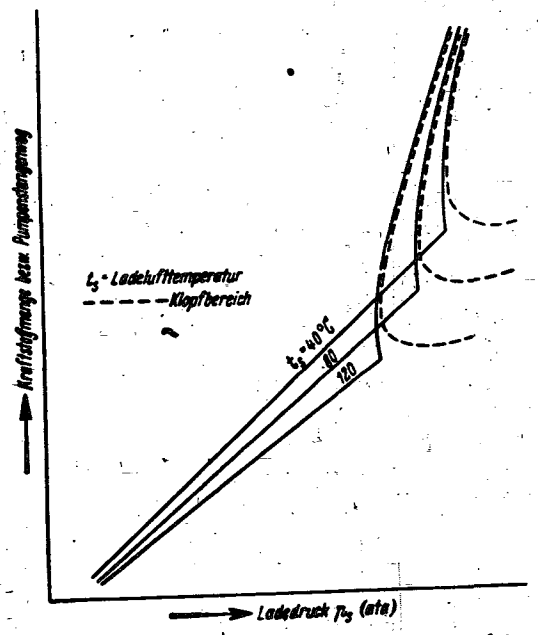


Bild 14. Änderung der Kraftstoffmenge und des Regelstangenweges abhängig vom Ladedruck bei verschiedenen Ladetemperaturen.

8098

Der Einfluß des Gegendruckes im Auspuff auf das Leistungsverhalten des Motors bei gleichbleibendem Verhältnis Luft/Kraftstoff ging aus den Versuchsergebnissen Bild 8 und 9 hervor. Aus der Wirkung des sinkenden Gegendruckes und seiner Abhängigkeit vom jeweils herrschenden Ladedruck läßt sich das zweite Regelgesetz für die Gemischregelung ableiten.

Das Meßsystem des Auspuffdruckes muß die Kraftstoffregelung derart beeinflussen, daß bei einer Senkung des Gegendruckes um Δp_A die Verstellung auf einen höheren Kraftstoffverbrauch je Hub und Zylinder mit zunehmendem Ladedruck immer geringer wird.

E. Vorversuche an einem vereinfachten Gemischregler.

Die besprochenen Regelgesetze ergeben einen verhältnismäßig verwickelten Aufbau des Gemischreglers, wodurch die von den Druck- und Temperaturmeßsystemen aufgebrachten Verstellkräfte nicht ausreichen, um die Regelstange der Einspritzpumpe direkt zu verstellen.

Die Verstärkung dieser Steuerkräfte wurde daher einer flüssigkeitsbetriebenen Servoeinrichtung übertragen, deren Eignung hinsichtlich Genauigkeit und Verstellkraft an einem vereinfachten Gemischregler zu untersuchen ist. Die Erkenntnisse hieraus dienen dem konstruktiven Aufbau des im nächsten Abschnitt beschriebenen neuen Gemischreglers.

Bild 15 zeigt den vereinfachten Gemischregler in schematischer Darstellung und Bild 16 die jeweilige Änderung der Regelstangenstellung in Abhängigkeit der Ladetemperatur t_S, des Ladedruckes p_S und des Auspuffdruckes p_A. Während bei der genauen Gemischregelung die Einflüsse der Ladetemperatur und des Auspuffdruckes jeweils von der Höhe des Ladedruckes abhängen, wurden diese drei Größen im Vorversuch rein additiv zusammengefügt.

Die Regelstange *1* der Einspritzpumpe wird von der auf der Welle des Drehkraftkolbens *3* sitzenden Kurvenscheibe *2* verstellt. Den Haupteinfluß auf die einzuspritzende Kraftstoffmenge übt der Ladedruck p_S (Bild 16) aus. Er wird mittels einer Meßleitung in das Membrandosengehäuse *13* geleitet und beaufschlagt die luftleeren und geschlossenen Ladedruckdosen *4*, *5* und *6* von außen. Bei Änderungen des Ladedruckes überträgt sich deren Hub über den Kipphebel *7* auf den Servokolben *8*, welcher die Druckflüssigkeit (Drucköl) zum Drehkolben steuert. Der Servokolben *8* gleitet in einer axial verschiebbaren Hülse *9*. Sie wird von der Feder *10* ständig gegen die mit dem Drehkraftkolben verbundene Nocke *11* gedrückt. Die Steigung dieser Nocke ist so ausgebildet, daß die Hülse den Bewegungen des Servokolbens stets in gleicher Richtung folgt. Auf diese Weise wird der Zutritt der Druckflüssigkeit zum Kraftkolben abgesperrt, sobald die Steuerschlitze in der Hülse die Steuerkanten des Servokolbens überdecken. Je nach dem Verlauf der Nockensteigung ist somit einer jeweiligen Stellung des Servokolbens eine bestimmte Stellung des Drehkolbens und der Regelstange an der Pumpe zugeordnet.

Der Auspuffdruck p_A wirkt über eine Meßleitung auf das Innere der Membrandose *12*. Sie bildet zusammen mit den Dosen *4*, *5* und *6* ein Dosenpaket, welches so abgestimmt ist, daß sein Gesamthub dem Regelverlauf in Bild 16 entspricht. Hiernach wird verlangt:

Ladedruckeinfluß: $\Delta p_S = 1000$ mm Hg . . . 23,1 mm Regelweg,

Auspuffdruckeinfluß: $\Delta p_A = 1000$ mm Hg . . . 4,54 mm Regelweg,

d. h. p_A macht $\frac{4{,}54 \cdot 100}{23{,}1} = 19{,}65\%$ von p_S aus.

Der gewählte Dosensatz im Membrangehäuse ergibt:

3 Ladedruckdosen: Gesamthub 10,1 mm/1000 mm Hg-Änderung,

1 Auspuffdose: „ 2,5 mm/1000 mm Hg-Änderung,

d. h. im Regler macht $p_A = \frac{2{,}5 \cdot 100}{10{,}1 + 2{,}5} = 19{,}85\%$ von p_S aus.

Die Ladetemperatur t_S wird durch ein Dampfdruck-Thermometer erfaßt, dessen Fühler bei *14* in die Ladeleitung eingeführt ist. Über die Kapillare *15* steuern die Dosen *16* den linken Endpunkt des Kipphebels *7*.

Die Einstellung des Gemisches auf »Reich« und »Arm« erfolgt an einem Handhebel, durch den über Ritzel und Zahnstange das gesamte Dosenpaket der Druckmeßeinrichtung in der Längsachse verschoben werden kann.

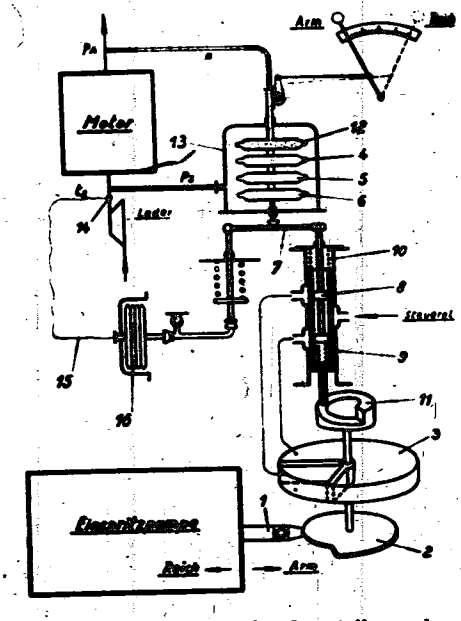


Bild 15. Vorversuch. Schematische Darstellung des vereinfachten Gemischreglers.

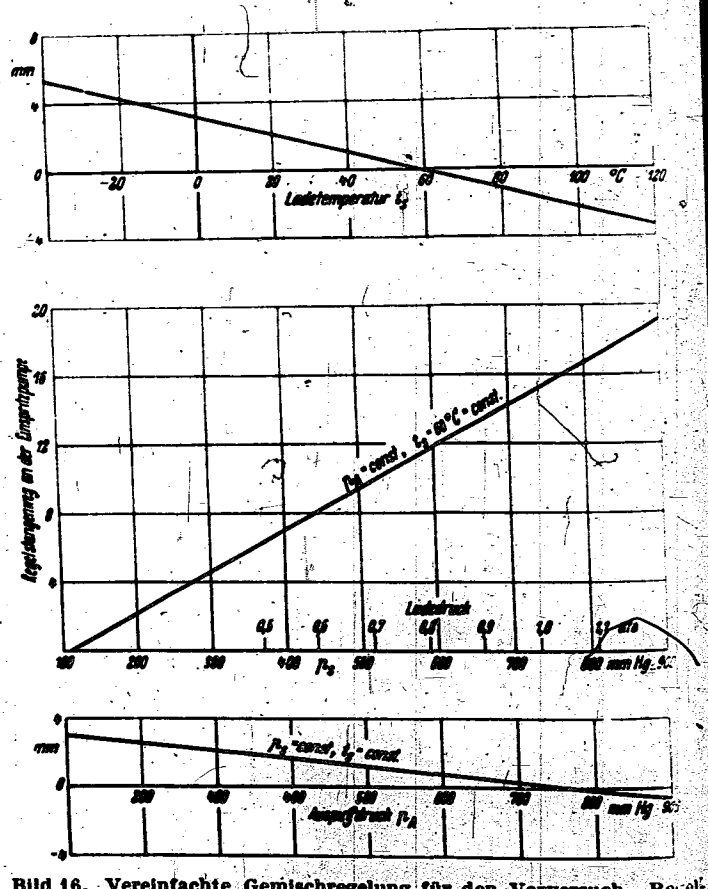


Bild 16. Vereinfachte Gemischregelung für den Vorversuch. Regelstangenweg in Abhängigkeit der Ladetemperatur, des Ladedruckes und des Auspuffdruckes.

8099

Die Erprobung des Gemischreglers wurde im Höhenprüfstand an einem DB 601-E-Motor mit Bosch-Einspritzpumpe vorgenommen. Die Versuche erstreckten sich vorwiegend auf die Feststellung der Regelgenauigkeit der mit dem Verstärkersystem zusammenarbeitenden Druck- und Temperaturmeßsysteme.

Die Wirkung des Ladedruckes, des Auspuffdruckes und der Ladetemperatur auf die Regelung des Kraftstoffes (d. h. auf den Weg der Pumpenregelstange) wurde jeweils in einer eigenen Versuchsreihe erfaßt.

In der ersten Versuchsreihe wurde bei einer Ansaugtemperatur $t_L = +15°C$, einem Auspuffdruck $p_A = 760$ mm Hg und drei Drehzahlen nur der Ladedruck p_S für verschiedene Meßpunkte zwischen den Grenzen 0,75 und 1,3 ata geändert. Der Regler hatte hierbei die Kraftstoffmenge so einzustellen, daß das am »Arm-Reich«-Hebel gewählte Luft-Kraftstoffverhältnis aufrechterhalten blieb. In Bild 17 sind die Meßwerte für Kraftstoffmenge, Ladetemperatur, Verhältnis Luft/Kraftstoff, Kraftstoffeinheitsverbrauch und Leistung abhängig vom Ladedruck p_S aufgetragen.

Die je Hub und Zylinder eingespritzte Kraftstoffmenge erhöht sich verhältnisgleich dem Ladedruck. Die Meßpunkte liegen jedoch für $n = 1800$, 2100 und 2400 min^{-1} über den ganzen Ladedruckbereich um etwa 10 mm³ je Hub und Zylinder auseinander. Die Ursache hierfür bildet der drehzahlabhängige Verlauf der Ladetemperatur, durch welchen die Ladetemperatur bei $n = 2400$ min^{-1} um 28° höher liegt als bei $n = 1800$ min^{-1}. Dieser Unterschied wirkte sich über das Temperaturmeßsystem zusätzlich auf die Regelung in Abhängigkeit vom Ladedruck aus.

Die zweite Versuchsreihe galt der Feststellung des Auspuffeinflusses. Hierbei wurden bei gleichbleibender Ansaugtemperatur $t_L = +15°C$, für zwei Drehzahlen (n = 2100 und 2400 min^{-1}) und für zwei Ladedrücke ($p_S = 0{,}85$ und 1,0 ata) der Gegendruck im Auspuff von 760 auf

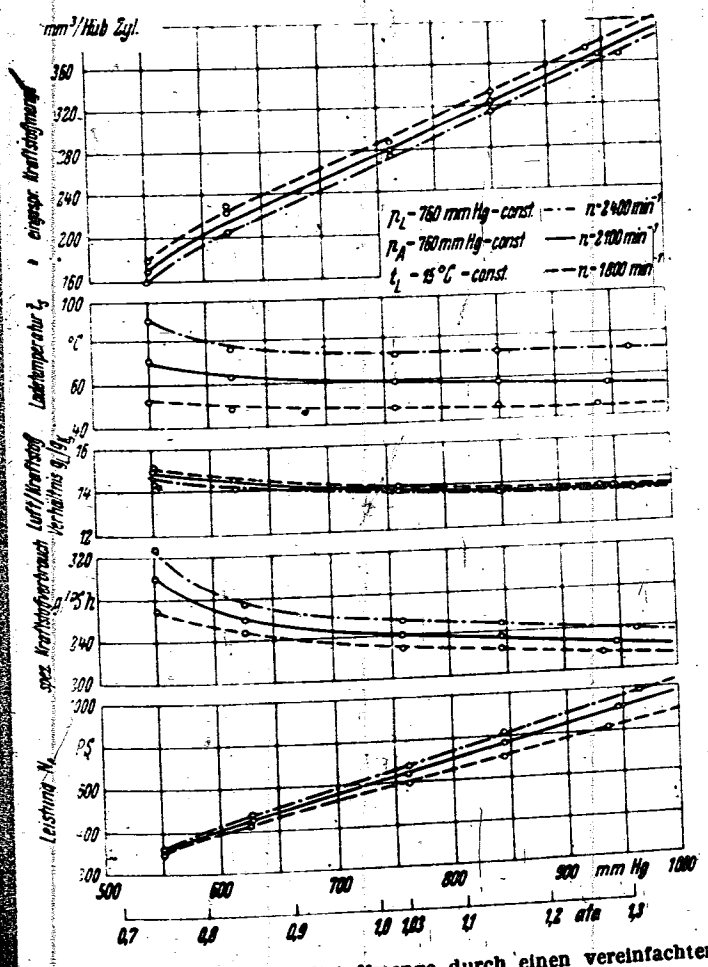


Bild 17. Änderung der Kraftstoffmenge durch einen vereinfachten Gemischregler unter dem Einfluß des Ladedruckes.

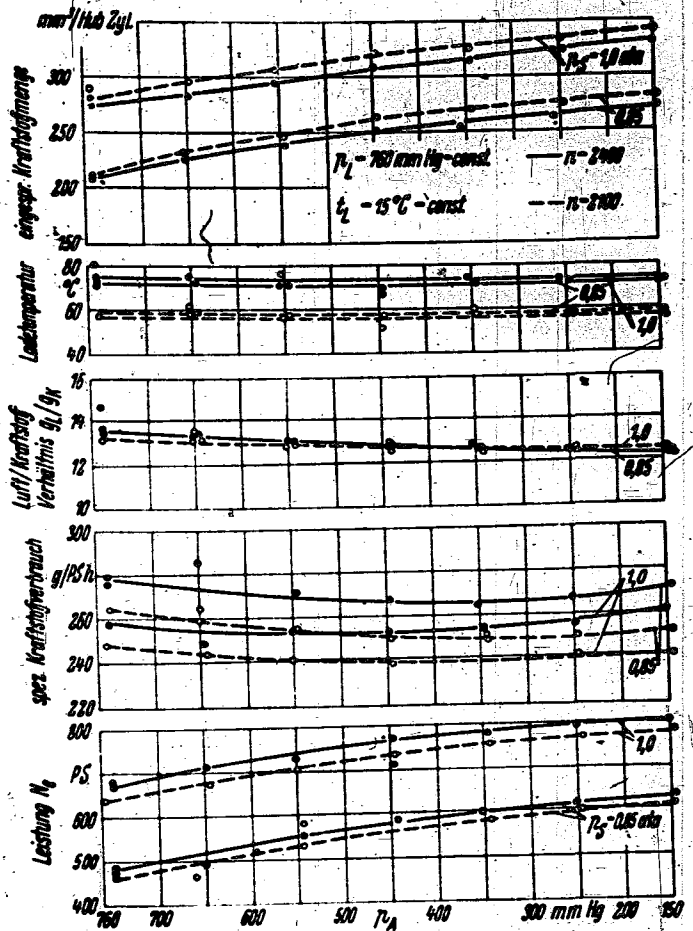


Bild 18. Änderung der Kraftstoffmenge durch einen vereinfachten Gemischregler unter dem Einfluß des Auspuffdruckes.

150 mm Hg gesenkt. In Bild 18 sind die Meßwerte in Abhängigkeit vom Auspuffdruck p_A aufgetragen.

Die Kraftstoffkurven weichen auch hier wegen des Temperaturunterschiedes bei verschiedenen Drehzahlen um einen bestimmten Betrag ab. Die Ladetemperatur t_S bleibt unverändert 58° C bei $n = 2100$ min^{-1} und 70°C bei $n = 2400$ min^{-1}. Die eingestellte Kraftstoffmenge beträgt bei $p_A = 760$ mm Hg 210 bzw. 275 mm³/Hub und Zylinder. Es ergibt sich somit, daß der von diesen Punkten mit sinkendem Auspuffdruck erfolgende Kurvenanstieg der alleinigen Wirkung der Auspuffmembrandose zuzuschreiben ist. Da diese bei einer bestimmten Druckänderung gegenüber den Ladedruckdosen einen viel geringeren Steuerweg abgeben muß, wurde über das Verstärkersystem das Verhältnis Luft/Kraftstoff nicht ganz so gut eingehalten wie bei der ersten Versuchsreihe. Wird eine genauere Regelung verlangt, so kann dies leicht durch Erhöhung der Dosenzahl oder des Hubs geschehen.

Zur Kontrolle der richtigen Abstimmung sämtlicher Druckdosen ergibt sich aus den Versuchsergebnissen in Bild 17 und 18 für $n = 2100$ min^{-1}:

$p_S = 620$ mm Hg	214 mm³/Hub u. Zyl.
$p_S = 920$ mm Hg	356 mm³/Hub u. Zyl.
$\Delta p_S = 300$ mm Hg	142 mm³/Hub u. Zyl.

Für den Auspuffdruck bei $p_S = 1{,}0$ ata und n = 2100 min^{-1}:

$p_A = 600$ mm Hg	302 mm³/Hub u. Zyl.
$p_A = 300$ mm Hg	330 mm³/Hub u. Zyl.
$\Delta p_A = 300$ mm Hg	28 mm³/Hub u. Zyl.

Somit macht bei der Regelung $p_A = \frac{28 \cdot 100}{142} = 19{,}7\%$ von p_S aus.

8100

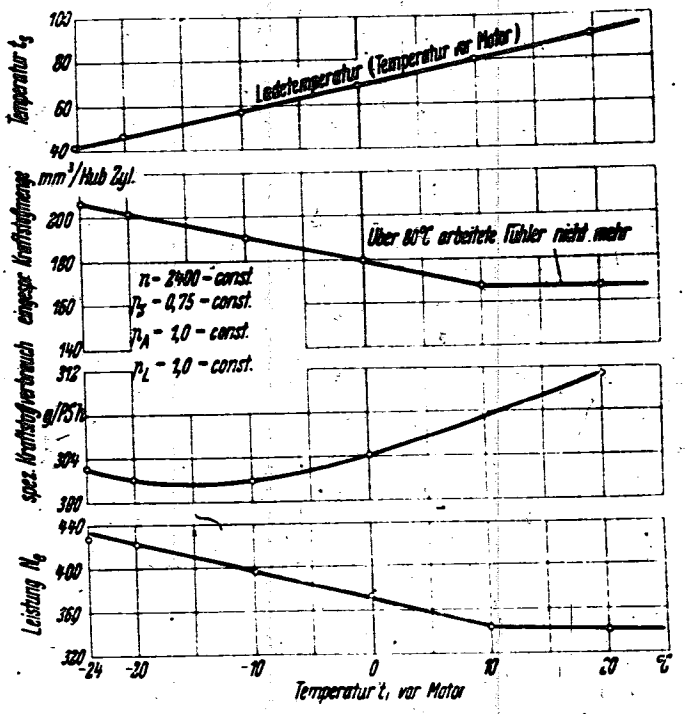


Bild 19. Änderung der Kraftstoffmenge durch einen vereinfachten Gemischregler unter dem Einfluß der Ansaug- bzw. Ladetemperatur.

Die Regelgenauigkeit des Temperatursystems wurde in der dritten Versuchsreihe festgestellt. Das Ergebnis ist auf Bild 19 in Abhängigkeit von der Temperatur t_L vor Motor aufgetragen. Bei gleichbleibender Drehzahl, gleichbleibendem Ladedruck und Auspuffdruck wurden die Versuche bei einer Ansaugtemperatur zwischen $t_l = -24°C$ und $-20°C$ gefahren, wobei sich die Ladetemperatur von $t_S = +40°C$ auf $+90°C$ änderte. Das die Ladetemperatur messende Temperatursystem war nur für eine Höchsttemperatur von $+80°C$ ausgelegt, so daß bei höheren Temperaturen die Kraftstoffmenge nicht weiter geregelt wurde (s. Knickpunkt bei $t_L = +10°C$). Trotzdem lassen auch diese Ergebnisse erkennen, daß die Regelung, durch welche sich die je Hub und Zylinder eingespritzte Kraftstoffmenge bei zunehmender Temperatur verringert, die Forderungen erfüllt.

Die Vorversuche haben die Brauchbarkeit des Verstärkersystems als Hilfsmittel zur Steuerung der Pumpenregelstange bewiesen. Die Empfindlichkeit der Druckdosen ist ebenfalls ausreichend, da bereits Druckänderungen von weniger als ± 5 mm QS genügen, um eine Verstellung an der Regelstange zu bewirken. Es soll daher im folgenden der neue Regler behandelt werden, welcher unter Verwendung der gleichen Bauteile die anfangs geschilderten Regelgesetze erfüllt.

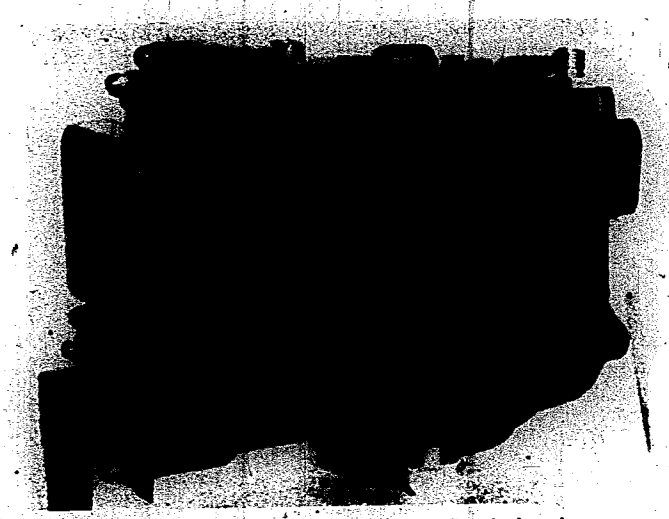


Bild 20. Seitenansicht des neuen Gemischreglers.

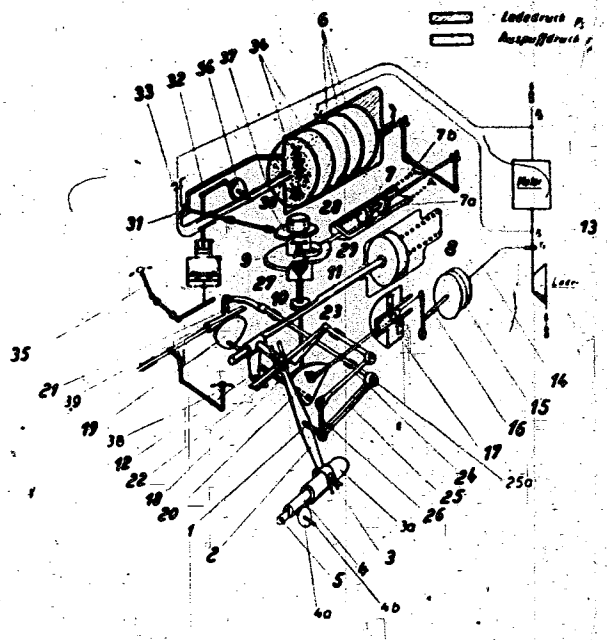


Bild 21. Schema des neuen Gemischreglers.

F. Aufbau und Regeleigenschaften des neuen Gemischreglers.

Bild 20 zeigt den neuen Gemischregler[3]) in einer Ansicht von der Seite. Er erfüllt nach den Vorversuchen im Abschnitt E die im Abschnitt D festgelegten Regelgesetze. Sein innerer Aufbau, das Zusammenspiel sämtlicher Meßgrößen und ihre Vereinigung am Angriffspunkt der Regelstange an der Einspritzpumpe gehen aus dem Schema auf Bild 21 hervor.

Der im Punkt *1* drehbar gelagerte Hebel *2* führt an seinem unteren Ende *3* die Regelbewegungen für die Einstellung der Kraftstoffmenge an der Einspritzpumpe aus. Zwischen Punkt *3* und dem Anlenkpunkt *5* für die Pumpenregelstange ist eine Einrichtung zur Vornahme der Grundeinstellung beim Anbau des Gemischreglers an die Einspritzpumpe vorgesehen.

Die Doppelgabel des Hebels *2* greift bei *3* in die beiderseitigen Zapfen der Hülse *3a*, welche zur Hälfte ihrer Länge in einer Bohrung des Reglergehäuses geführt ist. In ihrem Inneren besitzt diese Hülse einen Gewindezapfen, auf den die Hülse *4* aufgeschraubt ist. Sie ist jeweils zur Hälfte mit Rechts- und Linksinnengewinde versehen. Das freie Ende dieser Hülse nimmt das Kupplungsstück *5* für die Pumpenregelstange auf. Da das Kupplungsstück *5* und die Hülse *3a* nur eine Bewegung in axialer Richtung ausführen können, nähern oder entfernen sich die Punkte *5* und *3*, sobald eine Drehung der Hülse *4* erfolgt. Hierzu ist auf dem Mantel der Hülse *4* eine Kerbverzahnung aufgebracht, die im Winkel von 2° zur Längsachse verläuft und mit der Schnecke *4a* in Eingriff steht. Die Schneckenwelle *4b* ist öldicht durch die Gehäusewandung des Gemischreglers geführt und erlaubt somit eine einfache Einstellung und Sicherung von außen.

Berücksichtigung des Ladedruckes p_S.

Der Ladedruck p_S, welcher über eine Meßleitung zwischen Lader und Motor abgenommen wird, wird in das Membrandosengehäuse geleitet und beaufschlagt die luftleeren und temperaturunempfindlichen Ladedruckdosen *6*. Die Summe ihrer Hübe wirkt über ein Gestänge auf den Steuerkolben *7* der bereits beschriebenen Verstärkereinrichtung, durch den das Drucköl zum Kraftkolben *8* gesteuert wird. Die Rückführung erfolgt über die Kolbenstange *11*, die, als Zahn-

[3]) Patent angem.: Dr.-Ing. C. R. Himmler und Dipl.-Ing. W. C. Sanner, DVL-Berlin-Adlershof.

8101

stufige ausgebildet, das Ritzel *10* und somit die Rückführnocke *9* dreht. Der Steuerkolben *7* gleitet in der Hülse *7a*, in welche Steuerschlitze für die Druckflüssigkeit zum Kraftkolben *8* eingefräst sind. Sie gleitet durch die Wirkung der Feder *7b* ständig auf der Nocke *9*.

Tritt also während der Regelung eine Änderung des Ladedruckes ein, so bewegen die Membrandosen *6* den Steuerkolben *7* um einen bestimmten Betrag. Der Kraftkolben *8* bewegt sich solange, bis sich die nachfolgende Rückführhülse wieder in der ursprünglichen Lage zum Steuerkolben befindet und die Steuerschlitze zu den beiden Kraftkolbenseiten abgeschlossen sind. Der Ladedruck p_s, dessen Einfluß den Hauptanteil auf die Änderung der Kraftstoffmenge besitzt, bestimmt durch entsprechende Formgebung der Nocke *9* den Hub des Kraftkolbens *8*, welcher im Punkt *12* auf den Hebel *2* geleitet wird.

Berücksichtigung der Ladetemperatur t_s.

Eine Temperaturänderung der Ladeluft um Δt_s ist vom jeweils herrschenden Ladedruck derart abhängig, daß ihr Einfluß auf die Einspritzmenge mit zunehmendem Ladedruck immer größer wird. Den Bewegungen des Punktes *3*, die nach der bisherigen Beschreibung nur in Abhängigkeit des Ladedruckes erfolgten, muß daher eine weitere Abhängigkeit nach Maßnahme der Ladetemperatur zugeordnet werden. Dies geschieht nach Bild 22 dadaurch, daß sich der Drehpunkt *1* des Hebels *2* um den festen Drehpunkt *25a* mit dem Hebel *25* als Radius in Abhängigkeit der Temperatur dreht, wodurch sich das Hebelverhältnis $1 \div 3$ zu $1 \div 12$ ändert. Steht z. B. die Pumpenregelstange bei $p_s = 0{,}4$ ata auf eine geringe Fördermenge, so bildet der in Bild 22 stark ausgezogene Hebel *2* die Tangente an den Kreisbogen des Hebels *25* um den Punkt *25a*. Der zu einer Temperaturänderung von $t_s = 40°C$ auf $t_s = 130°C$ gehörige Drehwinkel α bewirkt also nur eine geringe Bewegung des Punktes *3*. Nähert sich dagegen der Ladedruck dem Wert $p_s = 1{,}4$ ata, so macht die gleiche Temperaturänderung entsprechend den gezeichneten schraffierten Flächen immer mehr auf die Kraftstoffverstellung aus. Die Bewegungen des Hebels *25* werden, wie Bild 21 zeigt, durch den in die Ladeleitung eingeführten Temperaturfühler *13* hervorgerufen, der über die Kapillare *14* mit den Membrandosen *15* verbunden ist. Das Temperaturmeßsystem arbeitet mit dem Dampfdruck einer Flüssigkeit, deren Siedetemperatur noch unterhalb der niedrigst auftretenden Ladetemperatur liegt. Die Arbeitswege der Membrandosen *15* werden von einem Folgekolbensystem *17* verstärkt, dessen Kolbenstange kraftseitig die Welle *18* im gesamten Temperaturbereich um etwa 90° dreht. Auf dieser Welle *18* sitzt die Nocke *19*. Sie dreht über den Tasthebel *21* den Hebel *25*.

Mit der bisher erfolgten Beschreibung nimmt der Gemischregler die Einstellung der Kraftstoffmenge in Abhängigkeit des Ladedruckes und der Ladetemperatur ent-

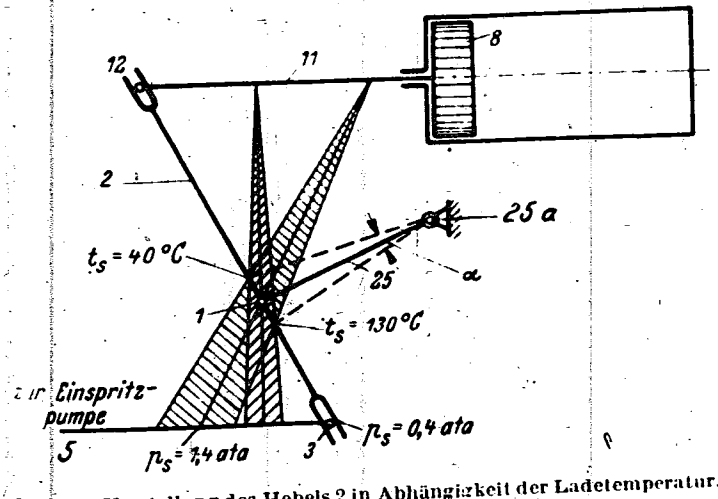


Bild 22. Verstellung des Hebels 2 in Abhängigkeit der Ladetemperatur.

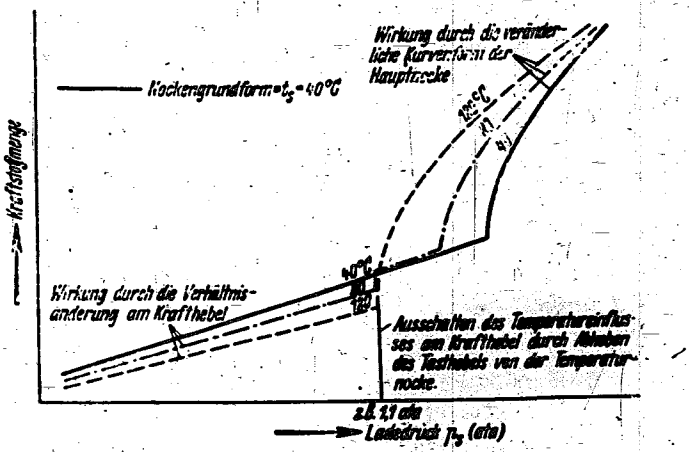


Bild 23. Regelung der Einspritzmenge in Abhängigkeit des Ladedruckes und der Ladetemperatur.

sprechend Bild 23 bis zum Beginn der Klopfgrenze richtig vor. Das Schaubild zeigt den Verlauf der Kraftstoffmenge je Hub und Zylinder, die der jeweiligen Stellung der Pumpenregelstange verhältnisgleich ist, in Abhängigkeit des Ladedruckes für drei Ladetemperaturen ($t_s = 40$, 80 und 120°C). Der Verlauf der ausgezogenen Kraftstoffkurve bei $t_s = 40°C$ ist durch die Formgebung der Rückführnocke *9* gegeben. Bis zu einem Ladedruck von $p_s = 1{,}1$ ata erfolgt die Änderung für höhere Ladetemperaturen (z. B. für $t_s =$ 80° und 120°C) durch die Wirkung des Temperaturmeßsystems auf den Hebelarm *25* durch Änderung des Hebelverhältnisses $1 \div 3$ zu $1 \div 12$. Im Klopfgebiet kann die temperaturabhängige Regelung durch Änderung des Hebelverhältnisses nicht beibehalten werden, da hier das Gemisch um so früher angereichert werden muß, ja höher die Ladetemperatur liegt. Die Kraftstoffkurven liegen daher umgekehrt wie im klopffreien Gebiet.

Beträgt die höchste auftretende Ladetemperatur $t_s =$ 120°C, bei der bei $p_s = 1{,}1$ ata angereichert werden muß, so wird (auch bei allen niedrigeren Ladetemperaturen) bei $p_s = 1{,}1$ ata die Wirkung des Temperaturmeßsystems auf den Hebel *25* aufgehoben. Dies geschieht in Abhängigkeit des Ladedruckes dadurch, daß der (s. Bild 21) an der Kolbenstange befindliche Stift *22* bei $p_s = 1{,}1$ ata die Stufe der Klinke *23* hinaufgleitet, die Klinke anhebt und hiermit über Hebel *24* und *26* auch Hebel *25* in seine ursprüngliche Lage für $t_s = 40°C$ zurücknimmt, so daß sich auch der Tasthebel *21* von der Nocke *19* abhebt. Statt dessen tritt im Klopfgebiet die zweite auf Welle *18* befindliche Nocke *20* in Tätigkeit. Sie bewegt innerhalb der Hohlwelle, die das Ritzel *10* mit der Rückführnocke *9* verbindet, einen Stößel, an dessen Ende sich der Rotationskörper *27* befindet. Dieser steuert bei axialer Bewegung über den im Nockenkörper radial angeordneten Stift *28* das sichelförmige Kurvenstück *29* auf der Rückführnocke *9*. Das Kurvenstück *29* ändert im Klopfgebiet die Form der Hauptnocke *9* derart, daß sich bei Abweichungen der Temperatur von $t_s = 40°C$ auch die in Bild 23 ausgezogen gezeichnete Kraftstoffkurve in der angegebenen Weise verschiebt. Um zu erreichen, daß sich die Kraftstoffkurven für verschiedene Ladetemperaturen in Richtung zunehmenden Ladedruckes nähern, befindet sich der Drehpunkt des Kurvenstückes *29* auf der Nocke *9* an der Stelle des höchsten auftretenden Ladedruckes.

Berücksichtigung des Gegendruckes p_a.

Der Einfluß des Auspuffdruckes auf die Leistung kann gemäß Bild 8 in einer mit sinkendem Auspuffdruck verhältnisgleich ansteigenden Leistung angenommen werden. Bild 9 zeigte weiter, daß die Wirkung des Gegendruckes auch vom jeweiligen Ladedruck, d. h. vom Verhältnis p_s/p_a, abhängt. Bei hohem Ladedruck ist die Durchspülung im Zylinder bereits so gut, daß mit sinkendem Auspuffdruck eine zusätzliche Verbesserung nicht auftritt. Was für die

8102

Leistung gilt, hat sich erfahrungsgemäß auch für die einzustellende Kraftstoffmenge ergeben. Die Neigung der in Bild 16 dargestellten Kraftstoffkurve in Abhängigkeit von p_L ist also für jeden Ladedruck eine andere. Die im Regler befindlichen Druckdosen *34* (Bild 21) sind von innen beaufschlagt und im Verhältnis zu den von außen beaufschlagten Ladedruckdosen so abgestimmt, daß sie der höchsten auftretenden Wirkung des Gegendruckes bei niedrigstem Ladedruck gerecht werden. Um ihre Wirkung bei zunehmendem Ladedruck herabzusetzen, ist eine einfache zusätzliche Einrichtung vorgesehen.

Parallel zu der Meßleitung *37*, die einerseits den Gegendruck hinter dem Motor abnimmt, und andererseits mit dem Inneren der Membrandosen *34* in Verbindung steht, befindet sich die Leitung *32*. Sie zweigt sich von der Auspuffmeßleitung ab und geht direkt in das alle Membrandosen umschließende Gehäuse, in welchem Ladedruck herrscht. An der Abzweigung der Leitung *32* von der Auspuffleitung *37* befindet sich das Ventil *31*. Der Auspuffdruck hat vom Motor aus durch die Blende *33* zu den Membrandosen *34* Zutritt. Bei geschlossenem Ventil wirkt der Auspuffdruck allein auf das Innere der p_L-Dosen. Soll seine Wirkung abnehmen, so wird das Ventil *31* in Abhängigkeit vom Ladedruck von der auf der Welle der Rückführnocke *9* sitzenden Nocke *30* geöffnet. Da sich beide Nocken vorwiegend in Abhängigkeit des Ladedruckes drehen, herrscht bei ganz geöffnetem Ventil *31* wegen der Blende wohl innerhalb als auch außerhalb der Auspuffdosen Ladedruck. Unter Berücksichtigung des Öffnungsquerschnittes des Ventils in Abhängigkeit seines Hubes ist die Steigung der Nocke *35* so ausgebildet worden, daß die geforderte Wirkung des Gegendruckes nach Bild 9 erfüllt wird.

Um unabhängig von der Tätigkeit des Reglers die Einspritzmenge zu verändern, kann während des Betriebes vom Piloten über ein Gestänge der Hebel *38* betätigt werden. Die hierdurch erfolgende Verschiebung des Keiles *39* zwischen Nocke *19* und Tasthebel *21* bewirkt ebenfalls wie eine Temperaturänderung eine Verlagerung des Punktes *1* am Hebel *2*.

Zur Erlangung einer vorübergehenden Gemischanreicherung kann am Hebel *35* über eine hydraulische Wegübersetzung, die nach einer bestimmten Zeit auf ihre ursprüngliche Stellung zurückkehrt, sowie dem Ritzel *36* und der Zahnstange *37* das gesamte Dosenpaket im Membrandosengehäuse bewegt werden. Die Wirkung auf die Pumpenverstellung ist hierbei die gleiche wie bei einer Änderung des Druckes.

G. Vorteile des neuen Gemischreglers.

Die Vorteile des neuen Gemischreglers gehen aus einer Gegenüberstellung hervor, in welcher die für einen jeweiligen Betriebszustand eingestellte Kraftstoffmenge mit derjenigen eines Gemischreglers üblicher Bauart verglichen wird.

Während, wie beschrieben, der neue Gemischregler die verschiedenen Meßgrößen auch in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit voneinander berücksichtigt, setzt sie ein zum Vergleich herangezogener Regler nur rein additiv zusammen. Hieraus ergibt sich ein Unterschied im Kraftstoffverbrauch, der unter Zugrundelegung gleicher Betriebspunkte (Ladedruck, Ladetemperatur, Auspuffgegendruck) im Verhältnis Luft/Kraftstoff zum Ausdruck kommt.

Die Aufgabe des Gemischreglers besteht darin, das günstigste Mischungsverhältnis im gesamten Leistungsbereich selbsttätig einzustellen, wobei neben dem Verbrauch an Kraftstoff für beste oder wirtschaftlichste Leistung auch Rücksicht auf das durch die bauliche Gestaltung bedingte Betriebsverhalten des geregelten Motors zu nehmen ist. Hierzu gehört insbesondere die Ventilüberschneidung, die bei sich änderndem Gemisch den Verlauf der Leistung und die Lage des Klopfgebietes bei verschiedenen Ladedrucken und Zylindertemperaturen bestimmt.

Um daher die Bedeutung des neuen Gemischreglers zu erkennen, soll kurz auf den Einfluß eingegangen werden, den die Ventilüberschneidung bei einer Änderung des Verhältnisses Luft/Kraftstoff besitzt. Hierzu wurden die Ergebnisse herangezogen, die auf dem Höhenprüfstand aus Messungen an zwei Motoren mit 53° KW[4]) und 140° KW[5]) Überschneidung gewonnen wurden.

Bei 53° KW Überschneidung verlaufen die Leistungskurven in Abhängigkeit vom Mischungsverhältnis sehr flach. Das Verhältnis bester Leistung liegt bei $g_L/g_K = 12$ und das des wirtschaftlichsten Verbrauches um etwa 2 Einheiten höher (bei $g_L/g_K = 14$; s. Bild 24a und b).

Beim stark überschnittenen Motor (140° KW) wird die Leistung durch den Einfluß des Auspuffgegendruckes sehr stark beeinflußt. Die Verbrauchskurven weisen im oberen Drehzahlbereich ein flaches Minimum auf. Bei Übersetzung sinkt die Leistung zunächst langsam, dann stärker ab. Bei Verarmung nimmt die Leistung sofort ab. Im Bereich niedriger Drehzahlen, vor allem bei geringer Drosselklappenöffnung, ist das Leistungsmaximum überaus schmal. Die Leistung fällt dann sowohl bei einer geringen Anreicherung oder Verarmung so schnell ab, daß in den Nachbargebieten nur noch schwer ein Beharrungszustand einzustellen ist.

Die Klopferscheinungen sind bei einem Motor mit 53° KW Überschneidung gleichzeitig mit einem unzulässig hohen Anstieg der Zylindertemperatur und einem Leistungsabfall verbunden. Die Grenze des Klopfgebietes rückt besonders im oberen Leistungs- und Drehzahlbereich so dicht an das wirtschaftliche Mischungsverhältnis, daß kleine Abweichungen desselben den Betriebszustand des Motors gefährden können (s. Bild 24a und b).

Mit 140° KW Überschneidung tritt das Klopfen nur bei reichem Gemisch auf. Es ist jedoch von ganz anderer Natur, da hierbei keine thermische Überbeanspruchung hervorgerufen wird.

Der Gemischregler hat die Kraftstoffmenge für ein verlangtes Mischungsverhältnis nach Maßgabe des an der Verbrennung teilnehmenden Luftgewichtes einzustellen.

Um bei der Gegenüberstellung der Arbeitsweise des neuen Gemischreglers mit der des Vergleichsreglers die Wirkungen des Ladedruckes, der Ladetemperatur und des Gegendruckes am Auspuff zu erfassen, muß auch der Verlauf des Verbrennungsluftgewichtes in Abhängigkeit von diesen drei Größen betrachtet werden.

[4]) E. Ö. 28° v. o. T., A. s. 25° n. o. T. (BMW 323 A) } aus BMW-
[5]) E. Ö. 80° v. o. T., A. s. 60° n. o. T. (BMW 329) } Bericht.

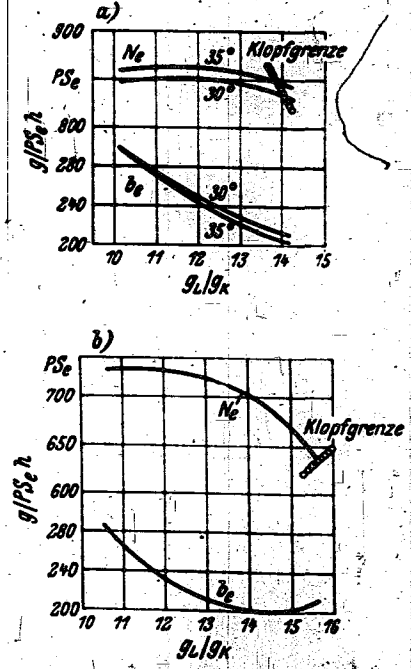


Bild 24a und b. Leistung und Einheitsverbrauch bei 53° KW Ventilüberschneidung.

a) $n = 22000$ min^{-1}, $p_e = 1{,}4$ ata, $H = 2$ km, Zdg. = 30 n. 35° v. o. T.
b) $n = 2000$ min^{-1}, $p_e = 1{,}3$ ata, $H = 2$ km, Zdg. = 35° v. o. T.

8103

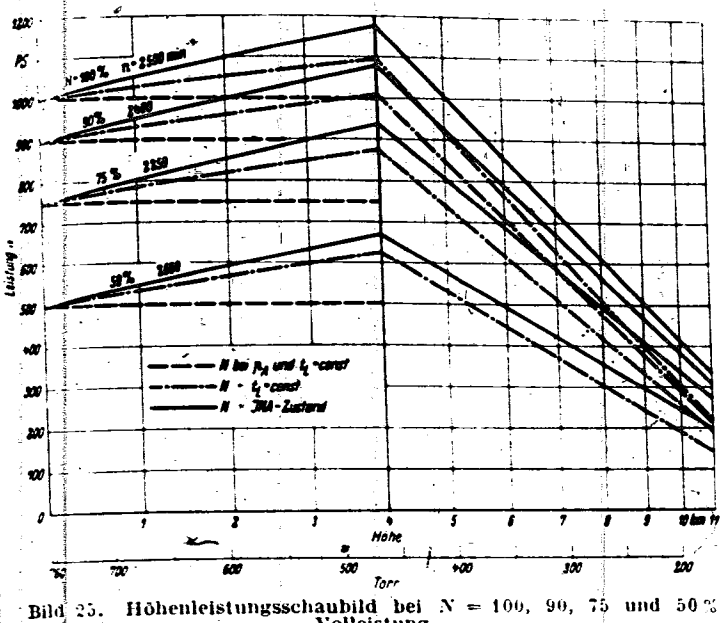


Bild 25. Höhenleistungsschaubild bei $N = 100$, 90, 75 und 50 % Volleistung.

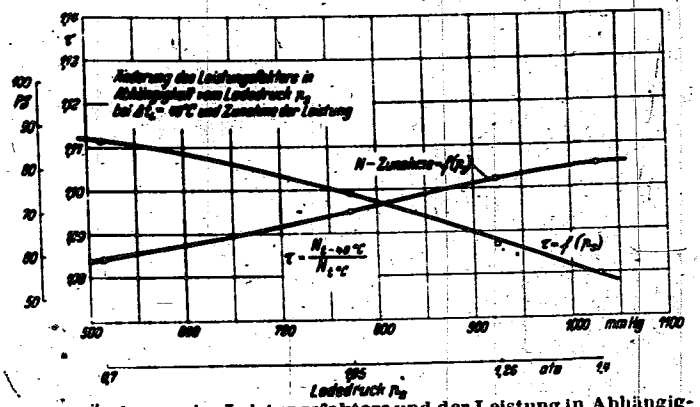


Bild 27. Änderung des Leistungsfaktors und der Leistung in Abhängigkeit des Ladedruckes bei $\Delta t_L = 40°$.

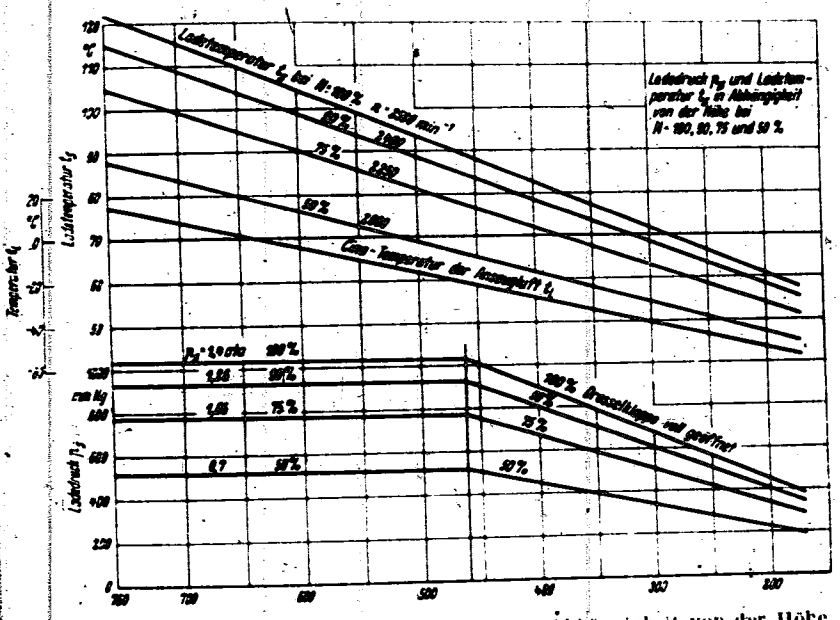
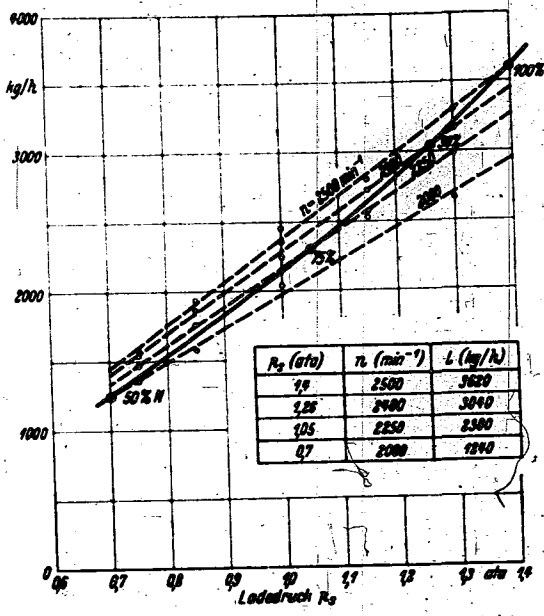


Bild 26. Ladedruck p_s und Ladetemperatur t_L in Abhängigkeit von der Höhe.



p_s (ata)	n (min^{-1})	L (kg/h)
1,4	2500	3620
1,25	2400	3040
1,05	2250	2360
0,7	2000	1240

Bild 28. Änderung des Verbrennungsluftgewichtes in Abhängigkeit des Ladedruckes bei verschiedenen Drehzahlen in 0 km Höhe.

Bild 25 zeigt das Höhenleistungsschaubild eines Motors mit 53° KW Ventilüberschneidung für Volleistung und drei Teilleistungen bei gleichbleibendem Verhältnis Luft/Kraftstoff.

Zu diesen Leistungen sind in Bild 26 der zugehörige Ladedruck und die Ladetemperatur aufgetragen. In Bild 25 geben die gestrichelt gezeichneten Kurven die Leistung bis zur Nennleistungshöhe in Abhängigkeit des Ladedruckes an, wenn die Ansaug- bzw. Ladetemperatur und der Auspuffgegendruck unverändert bleiben.

Der Einfluß des Gegendruckes auf die Leistung nimmt mit zunehmendem Ladedruck ab. Bei einer Senkung von $p_A = 760$ mm QS (0 km) auf $p_A = 462$ mm Hg (4 km) ergab sich folgende Leistungszunahme:

N %	N (0 km)	N (4 km)	Zunahme in %
100	1000 PS	1095 PS	9,5
90	900 »	1010 »	12,0
75	750 »	877 »	17,0
50	500 »	625 »	25,0

Die strichpunktierten Kurven geben im Leistungsschaubild (Bild 25) die Leistung unter Berücksichtigung des Ladedruckes und des Auspuffgegendruckes wieder.

Der aus der Änderung der Ansaugtemperatur sich ergebende Leistungsfaktor τ wurde bereits in Bild 5 dargestellt, wonach der Temperatureinfluß mit steigendem Ladedruck etwas abnimmt. Bild 27 und die unten stehende Zahlentafel geben für die zum betrachteten Höhenleistungsschaubild gehörigen Ladedrucke die Änderung von τ und N an.

Leistungszunahme bei Abnahme von t_L um 40°:

p_s (ata)	$N_{(t-40)\,°C} / N_{t\,°C}$	ΔN (Zunahme um PS)
1,40	1,080	80
1,26	1,087	78
1,05	1,099	69
0,70	1,119	59

Hiernach ergibt sich aus den ausgezogenen Kurven im Leistungsschaubild, Bild 25, das Höhenverhalten des Motors, wenn sämtliche Einflüsse Berücksichtigung finden.

Das in 0 km Höhe verarbeitete Luftgewicht ergibt sich aus Meßergebnissen, Bild 28. Die gesuchten Werte für $N = 100$, 90, 75 und 50% sind auf ihr in einer Zahlentafel unten rechts zusammengefaßt.

Die Wirkung des abnehmenden Gegendruckes p_A auf das Luftgewicht mit zunehmender Höhe gibt Bild 29 wieder, wobei die stark ausgezogenen Kurven zum Leistungsschaubild, Bild 25, gehören.

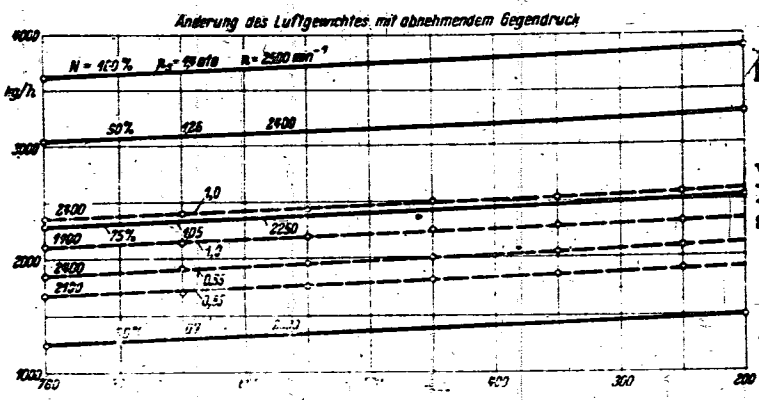


Bild 29. Änderung des Luftgewichtes mit abnehmendem Gegendruck.

Eine Abnahme der Ladetemperatur um $\Delta t_s = 40°$ wirkt sich nach Maßgabe des Leistungsfaktors τ auch auf das Luftgewicht aus, dessen Zahlenwerte die nachfolgende Zahlentafel angibt:

N (%)	$t_s - 40° C = t_s'$ (Höhe)	$L \cdot \tau = L_s'$ (kg/h)
100	122 — 40 = 82	3620 · τ = 3910
90	115 — 40 = 75	3040 · τ = 3300
75	105 — 40 = 65	2300 · τ = 2525
50	88 — 40 = 49	1240 · τ = 1390

In Bild 30 sind die Werte der letzten Spalte in Abhängigkeit von der Ladetemperatur t_s aufgetragen, so daß auch für zwischenliegende Ladetemperaturen das Luftgewicht abgelesen werden kann. Die getrichelt gezeichnete Kurve begrenzt hierbei die Luftverbräuche in Punkten derjenigen Ladetemperaturen, die zur Ansaugtemperatur $t_L = 15° C$ in 0 km Höhe gehören.

Nach Festlegung sämtlicher Einflüsse, die den in 0 km gemessenen Luftverbrauch mit zunehmender Höhe ändern, läßt sich der Gesamtluftverbrauch in Abhängigkeit der Flughöhe in Bild 31 eintragen. Er bildet die Grundlage zur Errechnung der dem Triebwerk zuzuführenden Kraftstoffmenge. Die Kraftstoffmenge errechnet sich aus:

$$Q\,(\text{mm}^3/\text{Hub u. Zyl.}) = \frac{L \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot t}{60 \cdot n \cdot \gamma \cdot z \cdot g_L/g_K},$$

worin: L = Luftgewicht in kg/h,
g_L/g_K = Verhältnis Luft/Kraftstoff,
n = Drehzahl in min^{-1},
γ = spez. Gewicht des Kraftstoffes in kg/l,
z = Anzahl der Zylinder,
t = 2 (bei 4-Takt-Motoren)

bedeuten.

$$Q = \frac{L}{n}\left(\frac{1000 \cdot 1000 \cdot 2}{60 \cdot 0{,}725 \cdot 12 \cdot 14}\right) = \frac{L}{n}\,(273{,}5)\ \text{mm}^3/\text{Hub u. Zyl.},$$

wenn $z = 12$, $t = 2$ und $g_L/g_K = 14$ angenommen sind. Der Einheitsverbrauch, bezogen auf die Nutzleistung, errechnet sich aus:

$$b_e = \frac{L \cdot 1000}{g_L/g_K \cdot N_e}\ \text{g/PSh}.$$

In Bild 32 ist die Kraftstoffmenge in Abhängigkeit von der Flughöhe aufgetragen.

Wird hierzu der Vergleichsregler so eingestellt, daß sein Kraftstoffverbrauch bei $N = 50\%$ der Volleistung mit dem des neuen Gemischreglers, Bild 32, übereinstimmt, so setzt er auch im ganzen übrigen Leistungsbereich den Einfluß der drei Meßgrößen additiv nach folgenden Gesetzen zusammen:

Kraftstoffänderung: 32,4 mm³/H. u. Z. je 0,1 at p_s-Änderung
» 5,0 » » » 0,1 at p_L- »
» 5,1 » » » 10° t_s- »

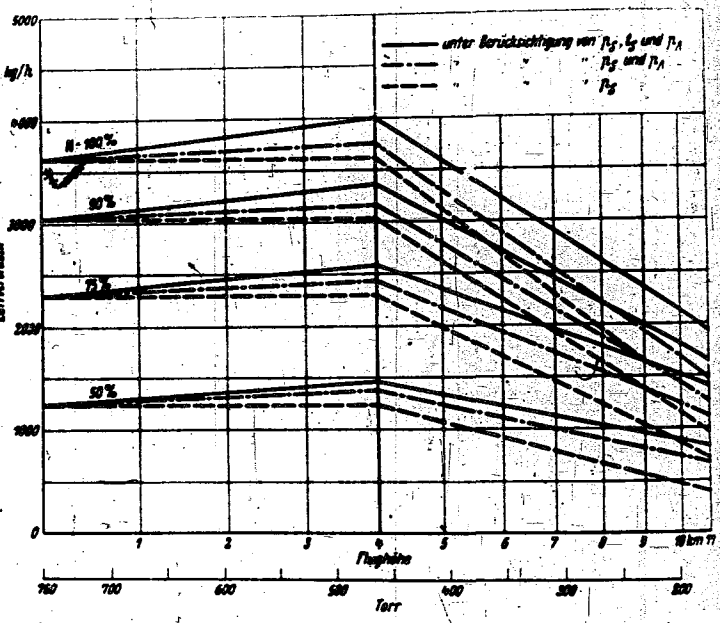


Bild 31. Luftverbrauch in Abhängigkeit von der Flughöhe.

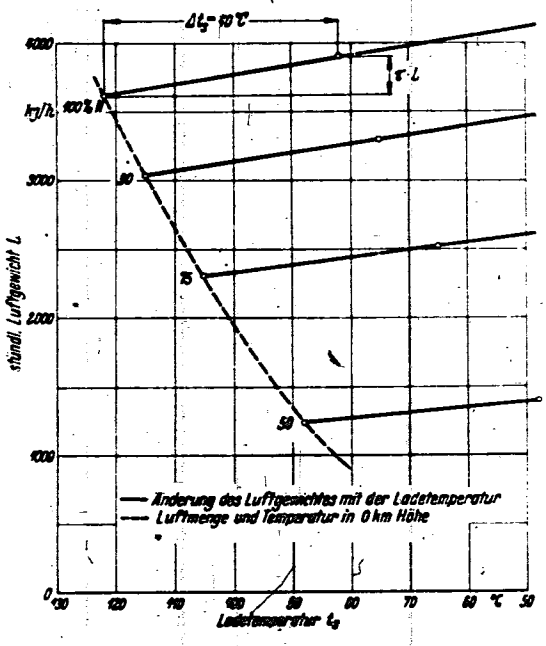


Bild 30. Änderung des Luftgewichtes in Abhängigkeit von der Ladetemperatur t_s.

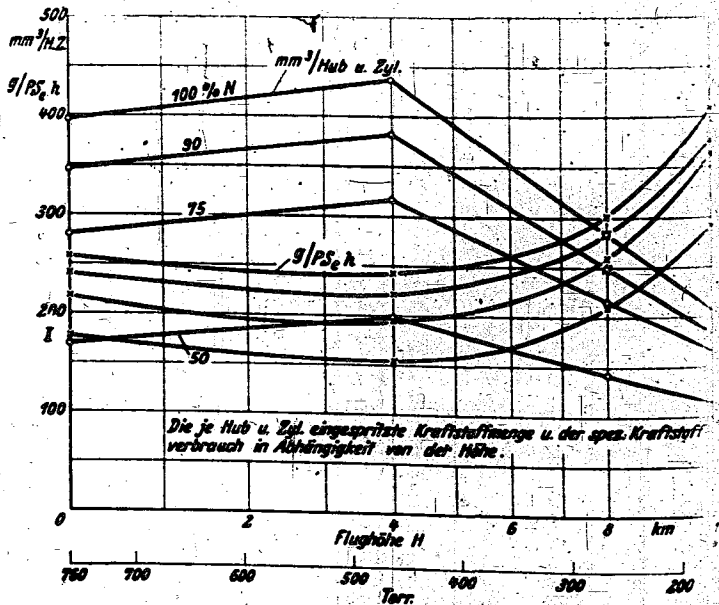


Bild 32. Kraftstoffmenge und Einheitsverbrauch in Abhängigkeit von der Flughöhe für $g_L/g_K = 14$.

8105

Zahlentafel 2. Gegenüberstellung des neuen Gemischreglers mit einem Vergleichsregler hinsichtlich der eingestellten Kraftstoffmenge und des Verhältnisses Luft/Kraftstoff unter gleichen Betriebsbedingungen in 0 und 4 km Flughöhe.

							Neuer Gemischregler		Vergleichs-Gemischregler		Vergleichs-Gemischregler richtig eingestellt		Kraftstoffersparnis mit dem neuen G.-Regler
H	N	p_s	t_s	p_L	n	L	Q	λ	Q	λ	Q	λ	
km	%	ata	°C	ata	min^{-1}	kg/h	mm³/H.Z.	g_L/g_K	mm³/H.Z.	g_L/g_K	mm³/H.Z.	g_L/g_K	%
0	50	0,7	88	1,03	2000	1240	169	14,0	169	14,0	187	12,7	9,5
0	75	1,05	104	1,03	2250	2300	280	14,0	274	14,3	292	13,4	4,0
0	90	1,26	115	1,03	2400	3040	346	14,0	337	14,4	354	13,7	2,4
0	100	1,40	123	1,03	2500	3620	396	14,0	378	14,7	396	14,0	0
4	50	0,7	66	0,63	2000	1460	199	14,0	200	14,0	220	12,7	9,5
4	75	1,05	77	0,63	2250	2600	316	14,0	308	14,4	328	13,5	3,7
4	90	1,26	85	0,63	2400	3380	383	14,0	372	14,5	394	13,7	3,0
4	100	1,40	89	0,63	2500	4000	437	14,0	416	14,7	437	14,0	0

Vom Punkt I (Bild 32) mit den Werten:

N = 50% Volleistung, p_L = 760 Torr,
H = 0 km, n = 2000 min^{-1},
p_s = 0,7 ata, t_s = 88° C (s. Bild 26), Q = 169 mm³/Hub u. Zyl., L = 1240 kg/h (s. Bild 28)

ausgehend, ergeben sich nach Maßgabe der Druck- und Temperaturänderungen mit zunehmender Höhe für N = 75%, 90% und 100% Volleistung die Verbräuche des Vergleichsreglers. Sie sind in Zahlentafel 2 denen des neuen Gemischreglers gegenübergestellt.

Es zeigt sich, daß der Vergleichsregler bei additiver Berücksichtigung der das Verbrennungsluftgewicht bestimmenden Meßgrößen das Verhältnis Luft/Kraftstoff im oberen Leistungsbereich ärmer einstellt, als mit Rücksicht auf die Leistung oder das Klopfverhalten gefordert wurde.

Wie Bild 24a für einen Motor mit 53° KW Ventilüberschneidung erkennen ließ, genügt bereits eine Abweichung in dieser Größenordnung, um den Motor von seinem günstigsten Betriebspunkt in das Klopfgebiet zu bringen. Anderenfalls müßte der Vergleichsregler von vornherein auf Kosten eines höheren Verbrauches fetter eingestellt werden.

Es ist daher bei dem neuen Gemischregler von Vorteil, daß er erlaubt, ein durch Messungen vorher ermitteltes Mischungsverhältnis im ganzen Leistungsbereich genau einzuhalten und mit diesem bis dicht an die Klopfgrenze bzw. an die noch zulässige Zylindertemperatur heranzugehen. Die Ausnutzung des Kraftstoffes erreicht bei dieser Art der Regelung ihren bestmöglichen Wert. Der Unterschied an Kraftstoff beträgt z. B. bei einem 4motorigen Flugzeug, welches mit N = 75% der Volleistung 5 Stunden lang in 4 km Höhe fliegt:

$$K = \frac{(328 - 316) \cdot 60 \cdot n \cdot \gamma \cdot z \cdot 5 \cdot 4}{1000 \cdot 1000 \cdot t} = \frac{12 \cdot 60 \cdot 2250 \cdot 0{,}725 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 4}{1000 \cdot 1000 \cdot 2} = 141 \text{ kg}.$$

Für den neuen Gemischregler bedeutet dieser Wert gegenüber dem richtig eingestellten Vergleichsregler eine Kraftstoffersparnis von 3,7%.

Bei einem Triebwerk mit hoher Ventilüberschneidung sind die Abweichungen vom günstigsten Mischungsverhältnis insofern unzulässig, als im mittleren und unteren Leistungsbereich eine geringe Anreicherung oder Verarmung sofort mit einem beträchtlichen Leistungsabfall verbunden ist. Eine selbsttätige Regelung des Gemisches ohne Nachverstellung von Hand des Piloten wird in diesem Fall nur durch den neuen Gemischregler ermöglicht.

H. Zusammenfassung.

Hand von Messungen auf dem Höhenprüfstand wird gezeigt, welche Meßgrößen ein Gemischregler zur weitestgehenden Ausnutzung des Kraftstoffes zu erfassen hat. Hierzu gehören der Ladedruck, die Ladetemperatur und der Auspuffgegendruck, wobei für verschiedene Betriebszustände auch die gegenseitige Abhängigkeit der Meßgrößen voneinander zu berücksichtigen ist.

Unter Benutzung eines in der DVL entwickelten Kraftverstärkers wird dessen Brauchbarkeit für die Gemischregelung an Hand eingehender Messungen auf dem Höhenprüfstand bewiesen. Auf Grund der Ergebnisse wird dann ein neuer Gemischregler entwickelt, der sämtliche Meßgrößen in der vorher festgelegten Gesetzmäßigkeit zusammenfaßt und auf die Regelstange der Einspritzpumpe leitet.

Zum Schluß werden die Vorteile des neuen Gemischreglers gegenüber einem Vergleichsregler gezeigt, welcher die drei Meßgrößen nur rein additiv zusammenfügt. Unter Betrachtung gleicher Betriebsverhältnisse ergibt sich ein Unterschied im Verhältnis Luft/Kraftstoff, welcher groß genug ist, um einen Motor mit geringer Ventilüberschneidung in das für ihn gefährliche Klopfgebiet zu bringen. Die Kraftstoffersparnis bei Verwendung des neuen Gemischreglers beträgt gegenüber dem fetter eingestellten Vergleichsregler bei N = 75% der Volleistung 3,7%. Bei großer Ventilüberschneidung ist eine einwandfreie Regelung des Gemisches nur mit Hilfe des neuen Gemischreglers möglich, da eine geringe Verarmung oder Anreicherung einen erheblichen Leistungsabfall zur Folge hat.

J. Schrifttumsverzeichnis.

C. R. Himmler, Prüfstände für Höhenuntersuchungen. Luftwissen Bd. 5 (1938), S. 432/6; Jb. 1938 dtsch. Luftf.-Forschg. S. II, 3.

C. R. Himmler, Neue Verfahren zur Fernmessung und Bedienung bei der Triebwerksprüfung auf Höhenprüfständen. Luftwissen Bd. 6 (1939), Nr. 5.

F. A. F. Schmidt, Thermodynamische und motorische Untersuchungen über Leistungssteigerung und Verbrauchsverbesserung im Fernflug. Jb. 1938 dtsch. Luftf.-Forschg., Erg.-Bd. S. 320.

C. Brooks, Horsepower at altitude. Aircraft Eng. 1934.

R. F. Gagg und E. V. Farrar, Höhenleistung von Flugmotoren mit durch Getriebe angetriebenen Lader. S.A.E. J. (1934).

R. E. Johnson und E. G. Lundquist, Der mittlere effektive Druck als Kennwert zur Regelung der Flugzeug-Reiseleistung. S.A.E. J. (1939) S. 97—103.

Ellor-Owner, Vergleich zwischen Kraftstoffeinspritzung und Vergaserbetrieb bei Flugmotoren. Luftf. Schriftt. Ausl. ZWB, Bln.-Adlershof.

P. Ragazzi, Beitrag zur Frage des Höhenverhaltens von Flugmotoren. Jb. 1938 dtsch. Luftf.-Forschg., Erg.-Bd. S. 172.

Zeyns-Caroselli, Bestimmung der Höhenleistung von Flugmotoren auf Grund von Leistungsmessungen am Boden. Jb. 1938 dtsch. Luftf.-Forschg. S. II, 7 und Z. VDI 1938, Nr. 45.

D. S. Hersey, Wege zur Senkung des Kraftstoffverbrauches des Flugmotors. Luftwissen Bd. 6, Nr. 8 (1939).

E. Vohrer, Der Weg zum Hochleistungsflugmotor. Luftwissen Bd. 5 (1938), Nr. 10.

D. W. Tomlinson, Erfahrungen beim Höhenflug und wirtschaftliche Betrachtungen hierzu. Jb. 1938 dtsch. Luftf.-Forschg. Erg.-Bd. S. 77.

8106

Luftschrauben-Blattschwingungen und ihr Zusammenhang mit den Kräften im Motor*).

Von Kurt Löffler.

Bericht der BMW-Flugmotorenbau G. m. b. H. Berlin-Spandau.

Die Kenntnis des Schwingungsverhaltens der Luftschraube ist sowohl für die Beurteilung der Dauerhaltbarkeit der Blätter als auch für die Konstruktion des Motors erforderlich. Auf Grund ausführlicher Messungen wird gezeigt, welche erregenden Kräfte für die Luftschraubenblattschwingungen maßgebend sind und welche Bedeutung den einzelnen Ursachen zukommt.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Versuchsdurchführung und Meßeinrichtung.
III. Ergebnisse.
1. Biegemomente über die hohe Kante.
2. Biegemomente über die flache Kante.
3. Erregerkräfte.
4. Resultierende Momente.
IV. Zusammenfassung.
V. Schrifttum.

I. Einleitung.

Über Größe, Richtung und Schwingungszahl der am Luftschraubenblattschaft wirkenden Wechselmomente herrschte bisher noch ziemliche Unklarheit. Die Erregungsmöglichkeiten waren zwar bekannt, jedoch lagen Versuchsergebnisse nicht vor, auf Grund derer man die Gefährlichkeit der einzelnen Erregerarten abwägen konnte. Die Dauerprüfung der Blattschäfte erfolgte daher auch nicht der Wirklichkeit entsprechend, so daß Dauerbrüche im Betrieb auftraten, obwohl die an den Blättern gemessenen Momente unter der Dauerhaltbarkeit lagen. Um nun Einblick in das dynamische Verhalten der Luftschraube zu gewinnen, wurden an einem 9-Zylinder-Sternmotor eingehende Versuche durchgeführt, die die genauere Erfassung der Luftschrauben-Blattschwingungen und ihres Zusammenhangs mit den im Motor auftretenden Kräften und Schwingungen zum Ziele hatten.

II. Versuchsdurchführung und Meßeinrichtungen.

Daten von Motor und Luftschraube:

Motor: BMW 9-Zyl.-Sternmotor, 30 l mit 1200 PS Startleistung bei 2500 U/min, wahlweise mit pendelnden Gegengewichten 2. und 4,5. Ordnung oder mit festen Gegengewichten an der Kurbelwelle ausgerüstet. Untersetzung zur Luftschraube 1 : 0,62; gleicher Drehsinn von Kurbelwelle und Luftschraube. Aufhängung in Gummifedern am starren Prüfstandsbock.

Luftschraube: 3-Blatt-Holzverstellschraube der Firma Schwartz. Die in Winkelgrad angegebenen Blattstellungen gelten für $r = 1$ m.

Um möglichst hohe Erregerkräfte im Motor zu erzielen, wurde im Drehzahlgebiet unterhalb des Betriebsbereiches teilweise mit großem Anstellwinkel der Blätter (35°) gefahren. Die Messungen erfolgten jeweils bei konstanten Drehzahlen in Abständen von etwa 100 U/min.

Die Blattschwingungen wurden mit dynamischen DVL-Feindehnungsmessern [1] gemessen, deren Spezialhalteböckchen auf die Holzschicht der Blätter geklebt wurden. Je eine Meßstelle befand sich an der »hohen Kante« zweier Blätter etwa in der Ebene des Blattendenprofils, und zwar am zylindrischen Fuß der Blätter. Eine weitere Meßstelle (ebenfalls am Fuß) lag an der »flachen Kante« eines Blattes ungefähr senkrecht zur Meßstelle »hohe Kante«.

Zur Beurteilung der von der Kurbelwelle auf die Luftschraube übertragenen Schwingungen wurde das dynamische Drehmoment in der Luftschraubenwelle gemessen. Dies erfolgte mit Differentialspulensystem und Eisenanker, mit deren Hilfe die Verdrehung zweier Querschnitte auf der Luftschraubenwelle erfaßt wurde (elektrisches Meßprinzip wie beim DVL-Dehnungsmesser).

Sämtliche Meßgrößen wurden mit »Kraftverlaufmesser« und Schleifenoszillograph aufgenommen. Die Stromzuführung zu den Gebern erfolgte durch einen Mehrfachschleifringübertrager auf der Vorderseite der Luftschraube, der die gleichzeitige Messung von zwei Schwingungsvorgängen gestattete.

Die Eichung der Dehnungsmesser geschah durch Aufbringen eines ruhenden Blattbiegemomentes in der Ebene durch den betreffenden Geber und die Blattachse. Das dynamische Drehmoment wurde mit Hilfe des während des Motorlaufs aus Ladedruck und Drehzahl gemessenen mittleren Motordrehmoments geeicht.

III. Ergebnisse.

Die Eigenschwingungszahlen der Blätter wurden an der stillstehenden Luftschraube mit nachgeahmtem Motordrehschwingungssystem ($n_e = 5000^1$/min) gemessen. Dabei ergaben sich:

Flache Kante: $n_I = 2760^1$/min
$n_{II} = 7650^1$/min
Hohe Kante: $n_I = 5800^1$/min

Die Oszillogramme wurden nach folgenden Gesichtspunkten ausgewertet: Das Leistungsdrehmoment wurde durch Ausplanimetrieren des Kurvenschriebs gewonnen; das mittlere dynamische Moment ergab sich als Mittelwert der um die Kurven gezeichneten Umhüllenden, wie in Bild 4 gezeigt ist; öfters wiederkehrende Spitzenwerte wurden ebenfalls entnommen und zur Beurteilung der Beanspruchung herangezogen.

Der Verlauf des dynamischen Drehmomentes für die verschiedenen Blattstellungen und Drehzahlgebiete ist in Bild 1 wiedergegeben. Der Motor hat bei 1100 U/min Resonanz 4,5. Ordnung, die jedoch beim normalen Betrieb nicht hervortritt, sondern nur durch steilere Blattanstellung, also erhöhte Motorleistung bei festen Gegengewichten hervorgehoben werden kann. Oberhalb 2500 U/min liegt die Resonanz 2. Ordnung, die beim Normalbetrieb die größten dynamischen Drehmomente erzeugt. Beim Motor mit pendelnden Gegengewichten wird sowohl die 4,5. als auch die 2. Ordnung annähernd vollständig abgebaut.

1. Blattmomente über die hohe Kante.

Bei normalem Motorbetrieb (Blattstellung 19° bis 2[illegible]°) mit festen Gegengewichten wird im unteren Drehzahlbereich bei unregelmäßiger Verbrennung eine bei 11400^1/min liegende Blatteigenschwingung stoßweise erregt, s. Bild 2.

*) A 25 42.

8107

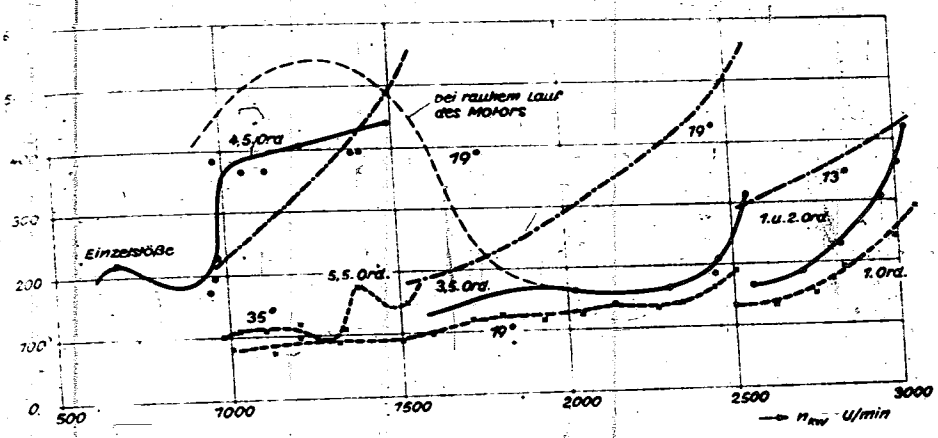


Bild 1. Statische und dynamische Drehmomente in der Luftschraubenwelle in Abhängigkeit der Motordrehzahl.

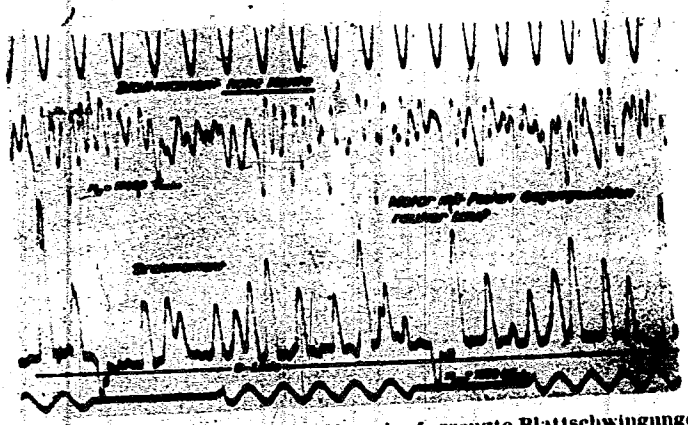


Bild 2. Durch ungleichförmigen Motorlauf erzeugte Blattschwingungen

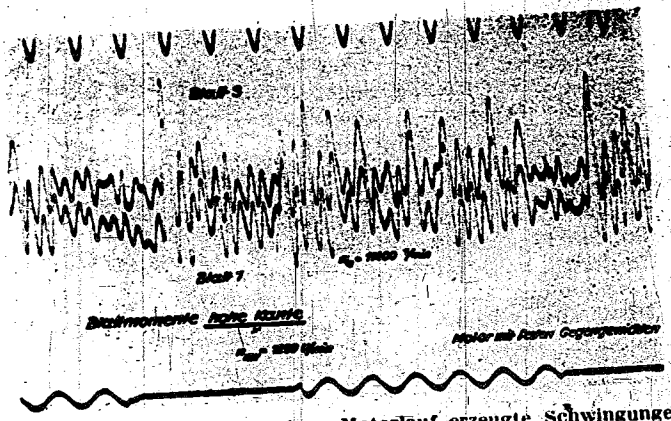


Bild 3. Durch ungleichförmigen Motorlauf erzeugte Schwingungen an zwei Blättern.

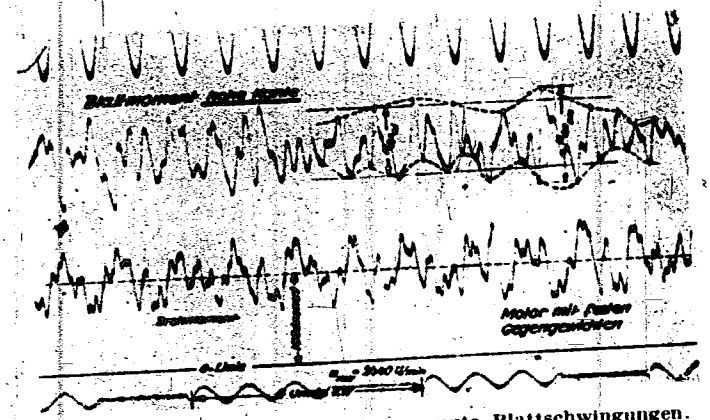


Bild 4. Durch Motordrehkräfte erzeugte Blattschwingungen.

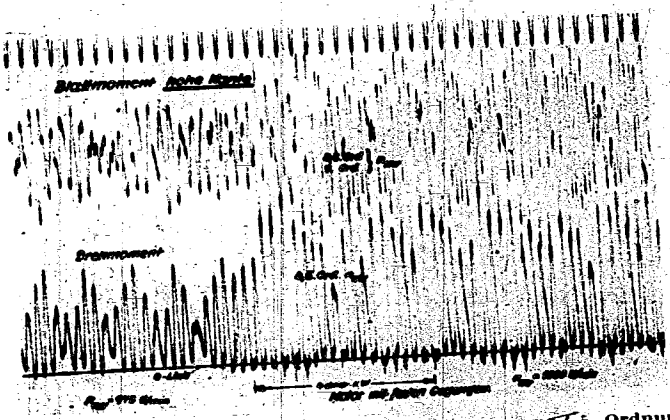


Bild 5. Blattschwingungen in Drehschwingungsresonanz 4,5. Ordnung bei erhöhtem p_{mi} und zunehmender Drehzahl.

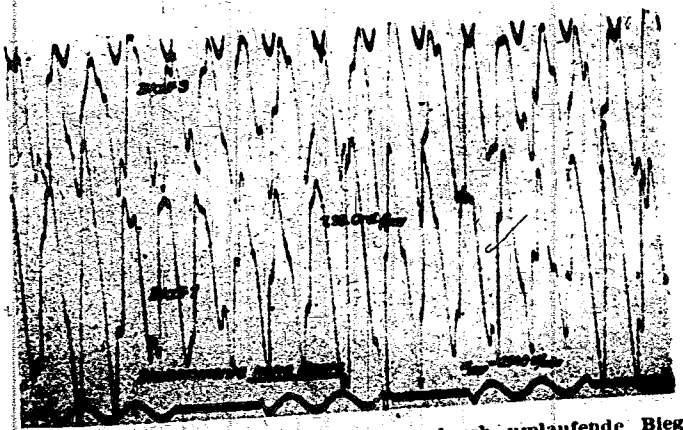


Bild 6. Schwingungen zweier Blätter, durch umlaufende Biege-resonanzschwingungen des Motors verursacht.

Blätter schwingen, wie Bild 3 zeigt, genau gleichphasig. Da diese Schwingung in der Luftschraubenwelle nicht auftritt, muß das Gegenmoment von der Luftschraube selbst aufgebracht werden; es handelt sich also um eine Drehschwingung höheren Grades mit Knoten in der Luftschraube [2]. Bis zur Startdrehzahl 2500 U/min treten im wesentlichen nur gaskrafterregte, erzwungene Schwingungen auf, vgl. Bild 4. Bei hohem p_{mi}, niedriger Drehzahl und entsprechend steiler Blattstellung (35°) erhöhen sich die Blattmomente 4,5. Ordnung mit dem dyn. Drehmoment. Der steile Anstieg desselben bei 975 U/min zur Resonanz (s. Bild 1) ist in Bild 5 wiedergegeben. Außer der Schwingung 4,5. Ordnung, die in der Nähe der Blattresonanz erregt wird, tritt eine starke Blattschwingung 9. Ordnung auf. Das dyn. Drehmoment 4,5. Ordnung überschreitet hier das Leistungsmoment in der Luftschraubenwelle, so daß bei Erreichen der Nullage die untere Spitze abgeschnitten wird. In der so entstan-

8108

Bild 7. Blattmoment Hohe Kante in Abhängigkeit der Motordrehzahl bei verschiedenen Blattwinkeln; Motor mit festen Gegengewichten.

denen Kurvenform ist die 9. Ordnung verhältnismäßig groß, weshalb die 1. Oberschwingung des Blattes in Resonanznähe stark erregt werden kann.

Bei höheren Drehzahlen (Blattwinkel 13°) bis zu 3000 U/min ergab sich eine stark ausgeprägte Resonanz 1,38. Ordnung (n_{KW}) bei 2900 U/min. Die Phasenlage zwischen 2 Blättern wurde zu 120° festgestellt, vgl. Bild 6. Diese Blattmomente sind in Bild 7 über der Drehzahl kurvenmäßig aufgetragen. Die an Luftschraubenblatt 1 gemessenen Momente waren im normalen Drehzahlbereich gleich groß wie an Blatt 3. Bei 2900 U/min, Resonanz 1,38. Ordnung liegen jedoch die Werte an Blatt 1 um rd. 50% höher.

Beim Motor mit pendelnden Gegengewichten ergaben sich dem geringeren dyn. Drehmoment entsprechend auch geringere Blattmomente, die in Bild 8 dargestellt sind. Bei hohem p_{mi} traten im Bereich von 1000 bis 1600 U/min zusätzlich ausgeprägte Resonanzen 4,12. und 4,88. Ordnung (n_{KW}) auf; ein Beispiel dieses Schwingungsvorganges ist in Bild 9 gezeigt. Auf die Ursache dieser gebrochenen Ordnungszahlen wird in Abschnitt 3 näher eingegangen.

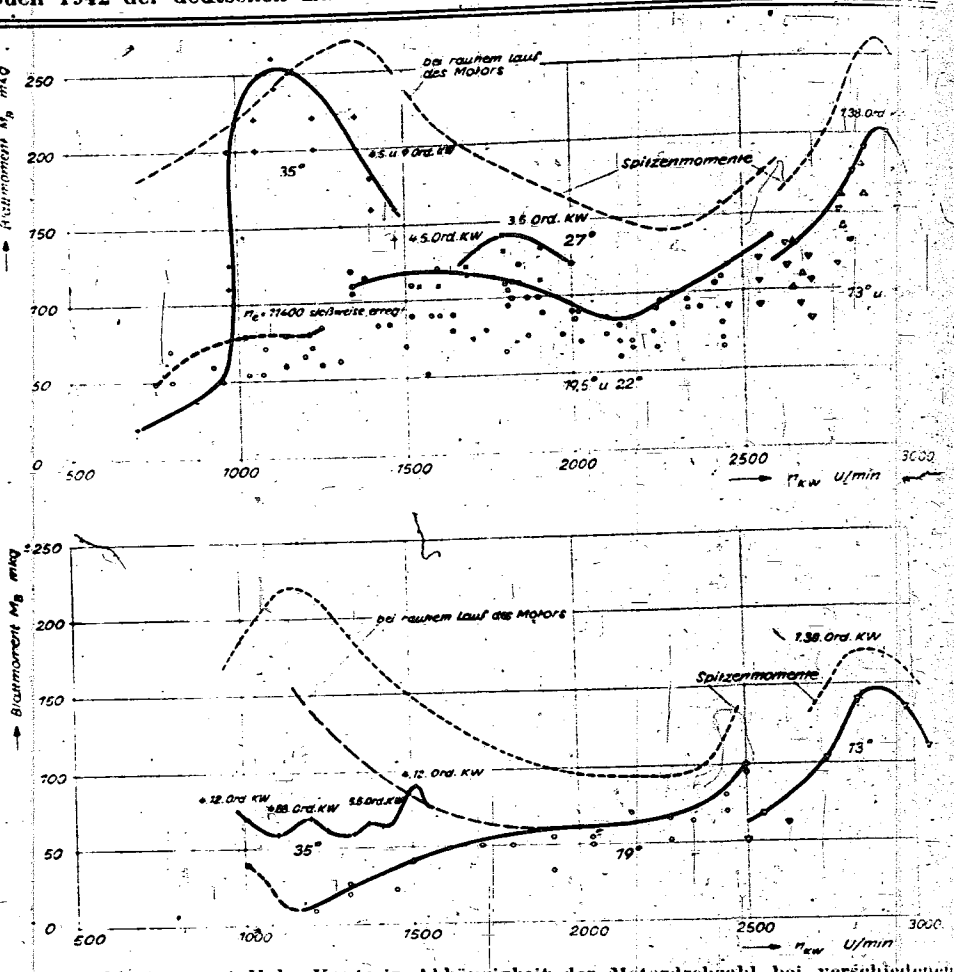


Bild 8. Blattmoment Hohe Kante in Abhängigkeit der Motordrehzahl bei verschiedenen Blattwinkeln; Motor mit pendelnden Gegengewichten.

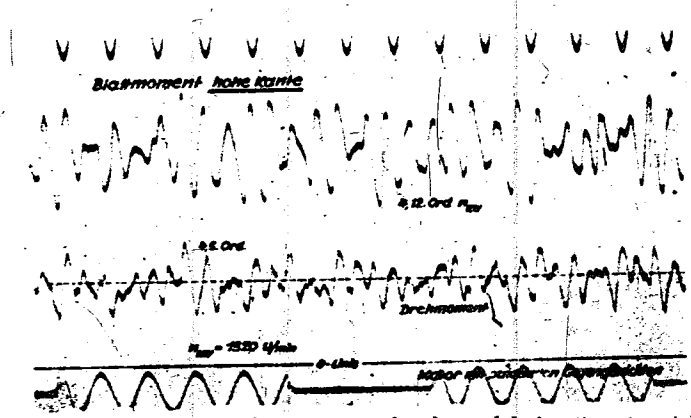


Bild 9. Blattresonanzschwingungen, durch pendelndes Gegengewicht 4,5. Ordnung erregt.

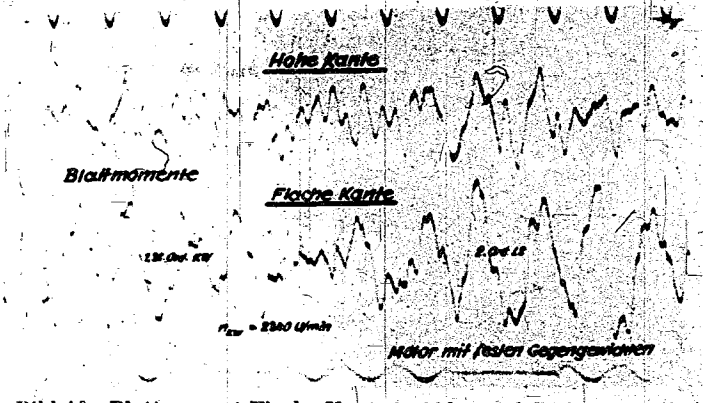


Bild 10. Blattmoment Flache Kante in Abhängigkeit der Motordrehzahl.

2. Blattmomente flache Kante.

Im normalen Drehzahlbereich bis 2500 U/min wurden beim Motor mit und ohne Pendel sowohl bei normalem als auch bei hohem p_{mi} die 3. bis 6. Ordnung der Luftschraubendrehzahl, s. Bild 10, ferner die 2. Ordnung *LS* gleichzeitig mit der 1,38. Ordnung *KW* (schwebungsartig) bei 2200 U/min festgestellt, vgl. Bild 11. Bei 2900 U/min trat auch hier die Resonanz 1,38. Ordnung (n_{KW}) auf. Die Phasenlage zu der

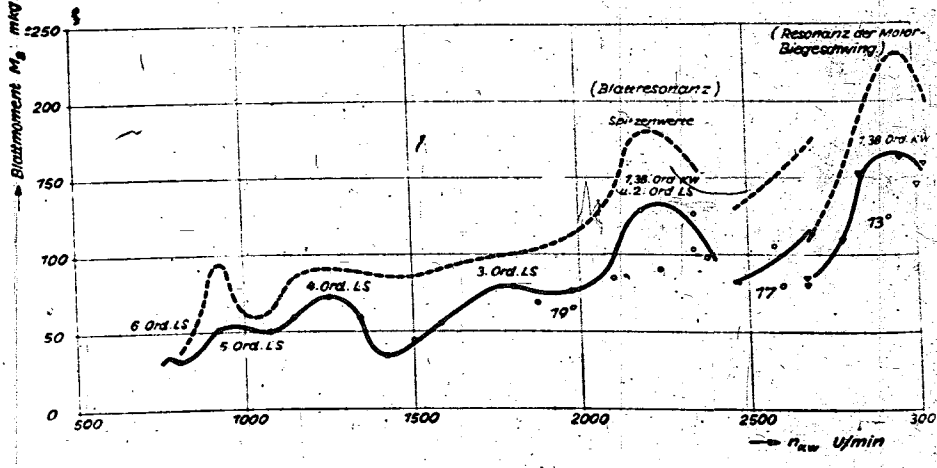


Bild 11. Blattschwingungen Flache und Hohe Kante.

8109

entsprechenden Hochkantschwingung wurde mit Hilfe des harmonischen Analysators (Mader-Ott) für mehrere Zeitabschnitte bestimmt, dabei ergaben sich folgende Phasenwinkel: 57°, 51°, 54°, 3° und 7,5°. Die Phase ist demnach nicht konstant, sondern schwankt zwischen rd. 0 und 60°. Über das resultierende Blattmoment unter diesen Bedingungen wird in Abschnitt 4 berichtet.

3. Erregung.

a) **Luftkräfte.** Die Ordnungszahlen der luftkrafterregten Blattschwingungen sind ganze Vielfache der Luftschraubendrehzahl. Diese Schwingungen werden durch Unregelmäßigkeiten in Schraubenkreisnähe erzeugt. Im vorliegenden Fall traten sie nur über die flache Kante in merklichem Maß auf; sie sind durch den begrenzten Prüfstandskanal bedingt.

b) **Gasdrehkräfte.** Diese wirken über Luftschraubenwelle und -nabe auf die Blätter. Die Ordnungszahlen entsprechen den Motordrehschwingungen (1., 2., 3,5., 4,5. usw.). Die Summe all dieser dyn. Blattmomente, auf den Luftschraubenmittelpunkt reduziert, ist gleich dem in der Luftschraubenwelle gleichzeitig gemessenen dyn. Drehmoment. Es ist jedoch sehr schwierig, die einzelnen Ordnungen aus den Schwingungsschrieben zu analysieren, da diese außer den Harmonischen des Arbeitstaktes noch gebrochene Ordnungen enthalten, wodurch die Analyse fehlerhaft wird. Es wurde ein Intervall von jeweils vier Kurbelwellenumdrehungen mit dem Harm. Analysator analysiert. Die Ordnungszahl $1{,}38 \approx 1{,}33$ ergibt sich dann als 3. Harmonische. Sämtliche in den Aufzeichnungen enthaltenen Luftschraubenordnungen fälschen jedoch das Bild; es fällt z. B. die 4. Ordnung *LS* etwa mit der 2,5. Ordnung *KW* und die 5. *LS* mit der 3. KW zusammen. Da die Analyse nur für diejenigen Ordnungen genügend genau wird, die in verhältnismäßig großen Amplituden enthalten sind (mindestens 10% der Gesamtamplitude), so wurde sie nur bei der 1. und 2. Ordnung im Drehzahlbereich über 2500 U/min für mehrere Intervalle durchgeführt. Die Reduktion der Blattbiegemomente auf die Luftschraubenwelle erfolgte nach der von J. Meyer [3] abgeleiteten Formel:

$$M = M_R \left(1 + 1{,}75 \frac{R}{L}\right), \quad \begin{cases} R = \text{Abstand der Meßstelle von Nabenmitte,} \\ L = \text{Abstand der Meßstelle von Blattspitze,} \end{cases}$$

also für $R = 28{,}5$ cm, $L = 146{,}5$ cm $\quad \dfrac{M}{M_R} = 1 + 1{,}75 \cdot \dfrac{28{,}5}{146{,}5} = 1{,}34.$

In Zahlentafel 1 ist das Ergebnis dieser Auswertung enthalten. Das Verhältnis $M_{\text{Blatt red}}/M_d$ beträgt hiernach im Mittel 0,84 bis 1,04 für die 1. und 1,07 bis 1,29 für die 2. Ordnung und stimmt damit verhältnismäßig gut mit dem Sollwert 1,0 überein.

c) **Motorschwingungen, Präzessionsbewegungen.** Der Motor führt im ganzen Drehzahlbereich Schwingungen 2. Ordnung (n_{KW}) aus. Diese werden durch die nicht ausgeglichene, gleichsinnig mit der Kurbelwelle umlaufende radial wirkende Massenkraft 2. Ordnung des Kurbeltriebes erregt. Der Motor macht dabei eine fortschreitende, elliptische Bewegung (Präzession), die über die Luftschraubenlagerung auf die Blätter übertragen wird. Die am Blatt wirkende Kraft ergibt sich aus der Projektion der mit zweifacher Kurbelwellendrehschnelle $2\,\omega_0$ umlaufenden Kraft auf die mit ω_1 umlaufende Senkrechte zur Blattachse in der Luftschraubenebene, vgl. Bild 12.

Zahlentafel 1. Verhältnis des auf Luftschrauben-Mittelpunkt reduzierten Blattmoments zum dyn. Drehmoment in der Luftschraubenwelle (nach harmonischer Analyse).

n (U/min)	1. Ord. (n_{KW})			Mittel	2. Ord. (n_{KW})			Mittel
2540	0,97	0,8	0,74	0,84	1,49	1,19	0,89	1,19
2700	0,87	1,11	1,15	1,04	1,34	1,75	0,8	1,29
3000	1,28	0,67	0,91	0,95	1,75	0,6	0,87	1,07

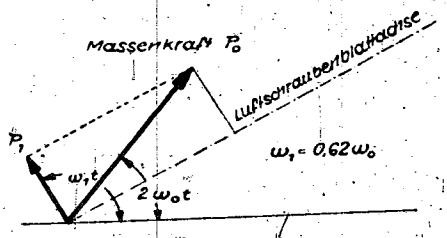


Bild 12. Kraft an der Luftschraube infolge der Massenkraft 2. Ordnung des Kurbeltriebs.

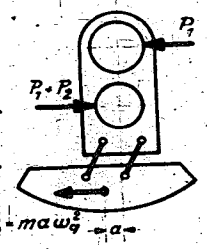


Bild 13. Durch pendelndes Gegengewicht erzeugte Kräfte.

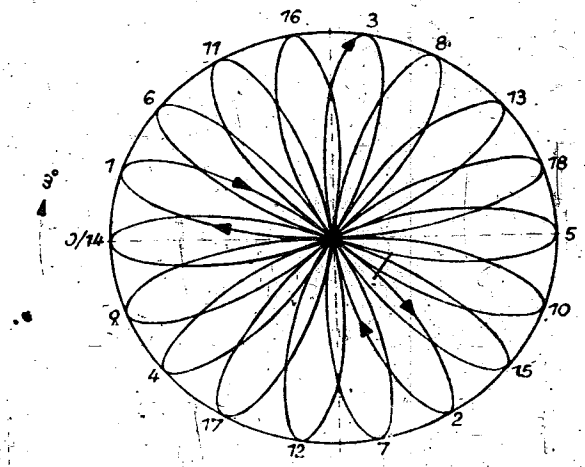


Bild 14. Motorpräzessionsbewegung, durch ein auf die 4,5. Ordnung abgestimmtes Pendel verursacht.

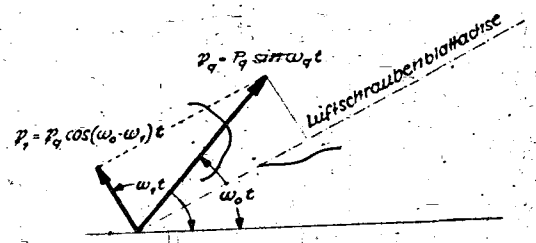


Bild 15. Kraft an der Luftschraube infolge der durch ein pendelndes Gegengewicht erzeugten Kräfte.

Es ist demnach:

$P_1 = P_0 \cos(2\,\omega_0 - \omega_1)\,t$
$= P_0 \cos 2{,}62\,\omega_0 t$ für gegensinnig umlaufende Luftschraube bzw.
$= P_0 \cos 1{,}38\,\omega_0 t$ für gleichsinnig umlaufende Luftschraube.

Da in vorliegendem Fall ein Gleichlaufgetriebe verwendet wurde, so ist die Erregerordnung 1,38.

Weitere Motorschwingungen entstehen durch die Fliehkraftpendel an der Kurbelwelle. Entsprechend der Wirkungsweise des Drehpendels nach Bild 13 werden auf die Kurbelwellenlager mit Kurbelwellendrehzahl umlaufende Wechselkräfte der Pendelabstimmordnung ω_q ausgeübt, da die am Kurbelzapfen angreifende Erregerkraft und die Massenkraft des Pendels in der gleichen Richtung wirken. Die dadurch bewirkte Motorpräzessionsbewegung ist in Bild 14 für ein Pendel 4,5. Ordnung dargestellt. Durch sie wird die Luftschraube mit einer Kraft erregt, die sich aus der Pro-

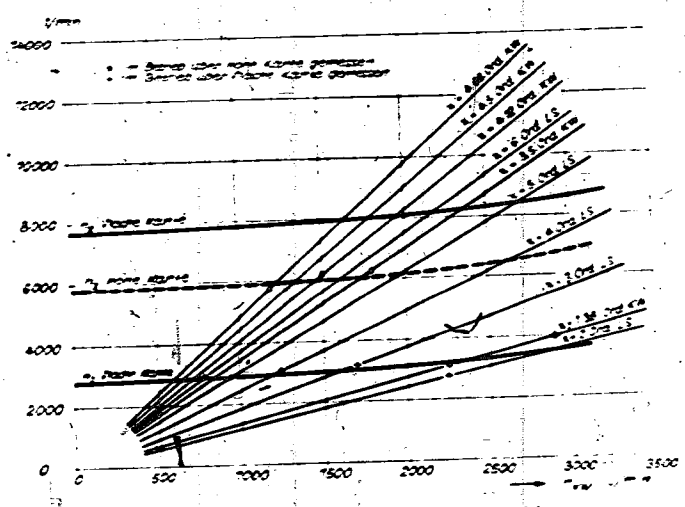


Bild 16. Resonanzen des Luftschraubenblattes.

jektion der mit ω_0 umlaufenden Wechselkraft $P_q \sin \omega_0 t$ auf die mit $\omega_1 = 0.62\ \omega_0$ umlaufende Senkrechte zur Blattachse ergibt, vgl. Bild 15. Diese Projektion ist

$$\mathfrak{P}_1 = P_q \sin \omega\, q\, t \cdot \cos (\omega_0 - \omega_1)\, t$$

(für gleichlaufendes Getriebe)

oder umgeformt:

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{P_q}{2} \left| \sin [\omega_q + (\omega_0 - \omega_1)]\, t + \sin [\omega_q - (\omega_0 - \omega_1)]\, t \right|$$

Für die Abstimmordnung 4,5 ist $\omega_q = 4{,}5\ \omega_0$ damit wird

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{P_q}{2} \left| \sin [4{,}5 + (1 - 0{,}62)]\, \omega_0 t - \sin [4{,}5 - (1 - 0{,}62)]\, \omega_0 t \right|$$

$$= \frac{P_q}{2} (\sin 4{,}88\, \omega_0\, t + \sin 4{,}12\, \omega_0\, t).$$

Für die Abstimmordnung 2 ist $\omega_q = 2\ \omega_0$ und

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{P_q}{2} (\sin 2{,}38\, \omega_0\, t + \sin 1{,}62\, \omega_0\, t).$$

Bei dem außergewöhnlichen Lauf mit hohem p_{mi} bei niedriger Drehzahl treten erhebliche Kräfte 4,5. Ordnung auf; (das Pendel macht in der Drehschwingungsresonanz bei 1100 U/min infolge nicht exakter Abstimmung zudem erhöhte Ausschläge [4]!). In diesem Gebiet liegen zufällig die Blattresonanzen über die hohe Kante 4,12. und 4,88. Ordnung, die entsprechend Bild 8 und 9 festgestellt wurden. Innerhalb des Drehzahlbereiches müßten auch durch das auf die 2. Ordnung abgestimmte Pendel die Blattresonanzen über die flache Kante 1,62. Ordnung und 2,38. Ordnung und über die hohe Kante 2,38. Ordnung *KW* liegen. Bei der hierbei wirksamen harmonischen Drehkraft 2. Ordnung sind jedoch die tangentialen Massenkräfte infolge geringer Pendelausschläge (niedrige Schwingungszahl, ohne Drehschwingungsresonanz) zu klein, weshalb die zugehörigen Ordnungszahlen in den Schwingungsschrieben nicht hervortreten.

Eine weitere Erregung durch das Pendel ist gegeben durch seine radiale Bewegung während des tangentialen Ausschlages, die in der doppelten Pendelabstimmfrequenz erfolgt, der jedoch infolge ihrer geringen Amplitude keine Bedeutung zukommt.

Durch ein auf die $q$te Ordnung abgestimmtes Drehpendel sind also folgende Blatterregerordnungen möglich (Getriebeuntersetzung $= i$):

Gleichlaufende Luftschraube: $q + (1 - i)$ und $q - (1 - i)$
gegenlaufende Luftschraube: $q + (1 + i)$ und $q - (1 + i)$

In Bild 16 ist der unter Berücksichtigung des Fliehkrafteinflusses bestimmte Verlauf der Blatteigenschwingzahlen wiedergegeben. Ferner sind die am laufenden Motor festgestellten Ordnungszahlen als Ursprungsgeraden und die zugehörigen Resonanzen eingetragen. Man erkennt eine gute Übereinstimmung beim größten Teil der Meßpunkte. Die Ursache der starken Abweichung der Resonanz 2. Ordnung *LS* (flache Kante) konnte nicht ermittelt werden. Die Reso-

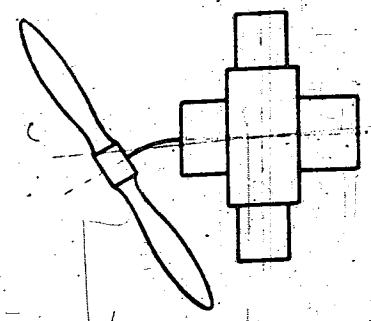


Bild 17. Biegeschwingung Luftschraube-Motor.

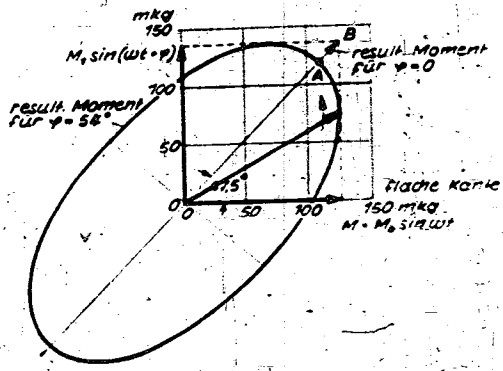


Bild 18. Resultierendes Blattmoment bei gleicher Frequenz über die hohe und flache Kante bei $n_{KW} = 2900$ U/min.

nanz 1,38. Ordnung bei 2900 U/min rührt nicht von der Blatteigenschwingung her, sondern ist in einer Resonanz der Motorpräzessionsbewegung begründet. Das System Motor-Luftschraubenwelle-Luftschraube besitzt bei 5800 U/min eine Biegeeigenschwingung mit Biegung in der Luftschraubenwelle, s. Bild 17, die durch Massenkräfte 2. Ordnung bei 2900 U/min als Umlaufbiegeschwingung in Resonanz erregt wird [5]; hierdurch wird am Luftschraubenblatt eine Resonanz 1,38. Ordnung vorgetäuscht. Da bei dieser Schwingung die Luftschraube eine Drehung (Taumelbewegung) und eine Auslenkung ausführt, so werden die Blätter sowohl über die flache als auch über die hohe Kante erregt. Die Phasenverschiebung müßte 90° betragen, da die Erregung im ersten Fall durch Auslenkung in Blattachsenrichtung, im andern Fall senkrecht hierzu erfolgt; aus den Diagrammen konnte eine konstante Phasenverschiebung jedoch nicht festgestellt werden.

4. Resultierende Momente und Beanspruchung des Blattschaftes.

a) Sind die Frequenzen über die hohe und flache Kante verschieden, so ergibt sich das Größtmoment durch geometrische Addition der Einzelspitzenmomente. Diese Addition ist hier zulässig, da die Meßstellen am kreisförmigen Querschnitt des Blattfußes lagen. Es ist also

$$M_{max} = \sqrt{M^2_{HK} + M^2_{FK}}$$

b) Bei gleichen Frequenzen über die hohe und flache Kante ergibt sich das Größtmoment ebenfalls durch geometrische Addition der beiden Spitzenmomente, wenn die Phase $= 0$ ist. Bei phasenverschobenem Momentenverlauf ergibt sich ein umlaufendes Moment:

$$M = \sqrt{M^2_{HK} \sin^2 \omega t + M^2_{FK} \sin^2 (\omega t + \varphi)}$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse dar, die in Bild 18 für die Momente 1,38. Ordnung bei $n_{KW} = 2900$ U/min für den Phasenwinkel $\varphi = 54°$ dargestellt ist. Die Momente ($M_{HK} = 136$ mkg, $M_{FK} = 125$ mkg) wurden durch harmonische Analyse gewonnen. Nimmt man an, daß die östlichen Anteile der Schwingungsmomente sich ebenso addieren so ergeben sich die in Zahlentafel 2 angegebenen Wechselmomente in der um 47,5° gegen die flache Kante geneigten

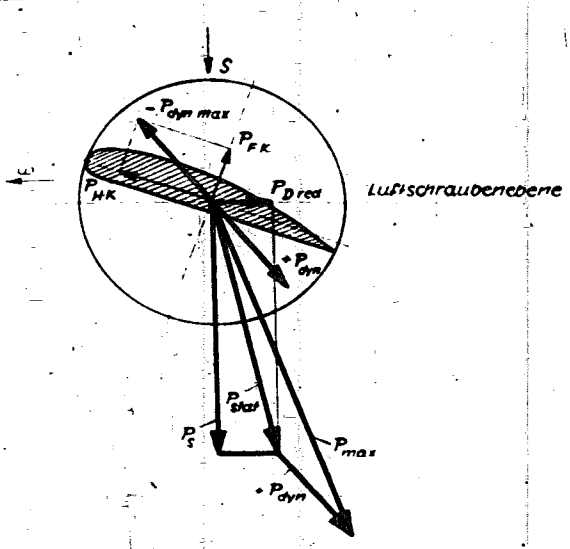


Bild 19. Biegekräfte am Blatt bei $n_{KW} = 2500$ U/min.

Ebene. Durch die zeitliche Phasenverschiebung der Momente über die hohe und flache Kante wird das größte resultierende Moment immer kleiner als die geometrische Summe (Strecke OA gegenüber OB in Bild 18). Bei geometrischer Addition ergibt sich also in jedem Fall der größtmögliche Wert. Durch den Einbau der pendelnden Gegengewichte wurde das Wechselmoment um rd. 37% gesenkt. In Bild 19 sind sämtliche beim Start am Luftschraubenblatt wirkenden Biegekräfte maßstäblich dargestellt. In Zahlentafel 3 sind die größten statischen und dynamischen Werte bei Steigflug, Start und Sturzflug für den Motor mit festen Gegengewichten zusammengestellt. Hierbei erscheint die für den Sturzflug ermittelte Spitzenbeanspruchung von 7,3 kg/mm² des Blattschaftes (Holz) gefährlich, während sie sich im normalen Betriebsbereich in mäßigen Grenzen bewegt.

Im Flug sind über die hohe Kante Blattmomente von der gleichen Größe wie am Prüfstand zu erwarten, da sie ausschließlich vom Motor erregt werden. Über die flache Kante können sich gegenüber dem Prüfstand andere Luftschrauben-Ordnungszahlen und -resonanzen einstellen, da die Strömungsverhältnisse anders geartet sind.

IV. Zusammenfassung.

Die Luftschraubenblätter erfahren die größten dynamischen Momente durch umlaufende Biegeresonanzschwingungen des Motors (Luftschraube gegen Motor, mit Biegung in der Luftschraubenwelle). Die harmonischen Drehkräfte des Motors beanspruchen die Blätter hauptsächlich über die hohe Kante, während sich eine Einwirkung von Luftkräften nur über die flache Kante zeigte. Außerdem wurden Blattresonanzschwingungen festgestellt, die von den durch pendelnde Gegengewichte an der Kurbelwelle erzeugten Kräfte verursacht werden.

Zahlentafel 2. Resultierende Blattmomente bei $n_{KW} = 2900$ U/min.

		0°	54°
Blatt 1	feste Gegengewichte . .	± 560 mkg	± 500 mkg
	pendelnde Gegengewichte	± 365 mkg	± 325 mkg
Blatt 3	feste Gegengewichte . .	± 355 mkg	± 315 mkg
	pendelnde Gegengewichte	± 230 mkg	± 205 mkg

Zahlentafel 3. Kräfte, Momente und Beanspruchungen der untersuchten Luftschraube.

n_{KW}	U/min	Steigflug 2250	Start 2500	Sturzflug 2900
$M_{D\,\text{Motor}}$ (LS-Welle) . .	mkg	510	550	—
$M_{D\,\text{red. Blatt}}$ *)	mkg	127	137	—
Schub S	kg	1000	1600	—3200
M_S **)	mkg	405	650	—1300
$M_{B\,\text{stat.}} = \sqrt{M^2_{D\,\text{red.}} + M^2_S}$	mkg	425	655	1300
$\sigma_{B\,\text{stat.}}$	kg/mm²	1,1	1,7	3,4
$M_{B\,\text{dyn.}}$	mkg	± 230	± 270	± 560
$\sigma_{B\,\text{dyn.}}$	kg/mm²	± 0,6	± 0,7	± 1,5
Fliehkraft Z	kg	30 000	37 300	49 800
σ_Z	kg/mm²	1,5	1,9	2,6
σ_{gesamt}	kg/mm²	2,6 ± 0,6	3,6 ± 0,7	5,9 ± 1,4
$\sigma_{\max}$	kg/mm²	3,2	4,3	7,3

Schaftquerschnitt $q = 195$ cm².
Widerstandsmoment $W_b = 383$ cm³.

*) Moment aus Motordrehmoment $M_{D\,\text{red.}} = \frac{1}{1{,}34} \cdot \frac{M_D}{3}$.

**) Moment aus Schub $M_S = \frac{S}{8} \cdot 0{,}7\, r_{\max}$.

V. Schrifttum.

[1] J. Ratzke, Ein neuer elektrischer dynamischer Dehnungsmesser. Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung, S. II 278.

[2] J. Meyer, Die Kopplung der Luftschraubenbiegeschwingungen mit den Kurbelwellen-Drehschwingungen. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, S. II 141.

[3] J. Meyer, Luftschraubenschwingungen. Nicht veröffentlichter Bericht.

[4] H. Kammerer, Untersuchung, Messung und Erprobung von Fliehkraftpendeln in Drehschwingungssystemen. Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung.

[5] Kearns, Vibration Characteristics of Aircraft Engine-Propeller Systems. S.A.E. Journal Bd. 45 Nr. 6.

Untersuchungen an einem motorlosen Flugzeug über den Verlauf der Bahnschwingung*).

Von W. Spilger.

Bericht der Deutschen Forschungsanstalt für Segelflug »Ernst Udet«, z. Z. Ainring.

Der Verlauf der Bahnschwingung eines motorlosen Flugzeuges bei festem Höhenruder wurde nach der Methode der kleinen Schwingungen berechnet und im Fluge vermessen. Es wird die Versuchsdurchführung beschrieben und das Ergebnis von Rechnung und Versuch besprochen.

Gliederung.

I. Einleitung.
II. Beschreibung des Versuchsflugzeuges.
III. Berechnung des Verlaufes der Bahnschwingung.
a) Bewegungsgleichungen.
b) Polare und statische Längsstabilität.
c) Koeffizienten der Säkulargleichung.
IV. Flugversuche über den Verlauf der Bahnschwingung.
V. Gegenüberstellung der Ergebnisse von Flugversuch und Rechnung.
VI. Zusammenfassung.
VII. Schrifttum.

Bezeichnungen: DIN L 100, Ausgabe Dezember 1937; im übrigen siehe Text.

I. Einleitung.

Bei festem Höhenruder treten nach einer Störung des Gleichgewichtes der Momente um die Flugzeugquerachse zwei miteinander gekoppelte Drehschwingungen auf: die schnelle, in der Regel stark gedämpfte (und daher weniger interessante) Anstellwinkelschwingung und die langsame, nur wenig oder gar nicht gedämpfte Bahnschwingung. Berechnet man den Verlauf der Bahnschwingung eines Flugzeuges nach der klassischen Methode der kleinen Schwingungen und vergleicht mit dem wirklichen Verlauf, so erweist sich die Genauigkeit der Rechnung häufig als unzureichend. Bei Motorflugzeugen schreibt man gerne die Gründe hierfür dem Einfluß des Schraubenstrahles zu, da er weniger genau als die übrigen in die Rechnung eingehenden Größen erfaßt werden kann. Bei Flugversuchen mit verschiedenen Segelflugzeugen wurde festgestellt, daß auch bei fehlendem Antrieb der Verlauf der Bahnschwingung durch die Rechnung nur unvollkommen wiedergegeben wird.

Die vorliegende Untersuchung diente dazu, für den einfachsten Fall der gestörten Längsbewegung (kein Antrieb, Höhenruder fest) den Grad der Übereinstimmung zwischen gerechnetem und gemessenem Verlauf der Bahnschwingung zu ermitteln. Dabei bestand ein wesentlicher Teil der Aufgabe darin, die in die Säkulargleichung eingehenden Koeffizienten so genau wie möglich zu bestimmen. Die Versuche wurden bei nicht betätigten Störflächen (B. K.) — d. i. bei Normalzustand des Flugzeuges — und bei vollständig ausgefahrenen Störflächen durchgeführt.

Die Flugversuche mußten Anfang September 1939 abgebrochen werden. Aus den vorliegenden Ergebnissen sind Folgerungen, die zu einer Verbesserung der Berechnung des Verlaufes der Bahnschwingung dienen, nur in beschränktem Umfange möglich. Ergänzende Versuche sind in Aussicht genommen.

*) P 31 7. — Gekürzte Wiedergabe der Dissertation (D 87) der Technischen Hochschule Darmstadt. Berichterstatter: Prof. F. N. Scheubel. Mitberichterstatter: Prof. A. Walther; eingereicht am 22. XI. 1940.

Bild 1. Versuchsflugzeug bei Vorversuchen mit Wollfäden und statischer Sonde über dem Seitenleitwerk.

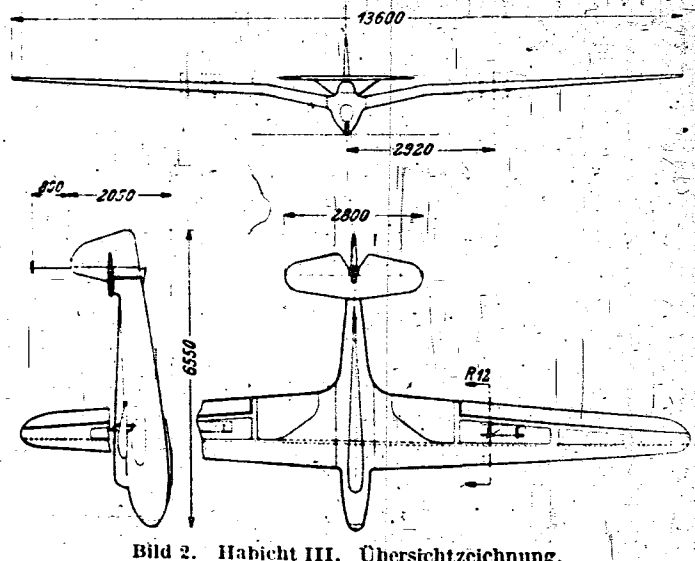


Bild 2. Habicht III. Übersichtzeichnung.

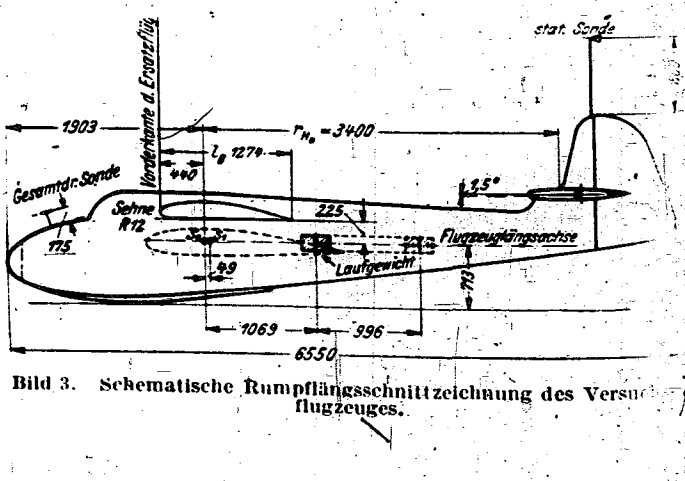


Bild 3. Schematische Rumpflängsschnittzeichnung des Versuchsflugzeuges.

8113

II. Beschreibung des Versuchsflugzeuges.

Versuchsträger:

Segelflugzeug »Habicht III« mit geschlossener Führersitzverkleidung, Bild 1 bis 3.

$G = 347{,}8 \pm 0{,}7$ kg; $I_y = 56{,}0 \pm 0{,}3$ mkgs².

Flügel:

$F = 15{,}82$ m²; $b = 13{,}6$ m; $l_\mu = 1{,}274$ m.

Profil:	V-Form:
$0 < y < 0{,}5$ Göttingen 756;	$0 < y < 0{,}24$ 13°;
$0{,}95 < y < 1{,}0$ » 676.	$0{,}24 < y < 1{,}0$ 3°.

Störfläche: Projektion auf y-z-Ebene = 0,474 m².

Rumpf: $L = 6{,}55$ m; Querschnitt elliptisch.

Höhenleitwerk:

$F_H = 2{,}0$ m²; $b_H = 2{,}8$ m; $F_\mu = 0{,}77$ m²; $t_\mu = 0{,}28$ m

$\varphi = -1{,}5°$; $r_H = 3{,}40$ m.

(r_H ist der Abstand des Flugzeugschwerpunktes vom Neutralpunkt des Höhenleitwerkes. I_y ist das Trägheitsmoment um die Flugzeugquerachse, beide für größte Schwerpunktsvorlage.)

III. Berechnung des Verlaufes der Bahnschwingung.

a) Bewegungsgleichungen.

Seit einigen Jahrzehnten ist es üblich, den Verlauf der gestörten Längsbewegung eines Flugzeuges nach der Methode der kleinen Schwingungen zu berechnen [1]. Man führt kleine Störungen des stationären Flugzustandes ein und entwickelt die Funktionen der Veränderlichen in Taylorreihen. Dabei bricht man die Reihen nach dem linearen Glied ab und vernachlässigt die Produkte kleiner Größen.

Die Gleichungen, die den stationären Flugzustand eines motorlosen Flugzeuges beschreiben,

$$G \sin \gamma + W = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$G \cos \gamma - A = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und

$$M = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

gehen nach dem Einführen einer kleinen Störung des Gleichgewichtes über in die Bewegungsgleichungen

$$m \dot{v} + G \sin \gamma + W = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

$$m v \dot{\gamma} + G \cos \gamma - A = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$I_y (\ddot{\alpha} + \ddot{\gamma}) - M = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Durch Einführen der »flugmechanischen Zeiteinheit« $\frac{2G}{\varrho g F v}$ werden die Bewegungsgleichungen dimensionslos.

$$\dot{u} + c_{w'_\alpha} \alpha + 2 c_{w_0} u + c_{a_0} \gamma = 0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\dot{\gamma} - c_{a'_\alpha} \alpha - 2 c_{a_0} u + c_{w_0} \gamma = 0 \text{ und} \quad \ldots \quad (8)$$

$$\ddot{\alpha} + \ddot{\gamma} + \nu_\alpha \alpha + \nu_\gamma \gamma + \mu_\alpha \alpha = 0 \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Zur besseren Übersicht sind hierbei die Symbole für die kleinen Änderungen weggelassen.

Die Beziehungen für die Abkürzungen der Gl. (9) lauten:

$$\nu_\alpha = \frac{r_H^2 F_H}{i_y^2 F} c_{a'_H \alpha_H} (1 + \varkappa_{w'_\alpha}) \quad \ldots \quad (10)$$

$$\nu_\gamma = \frac{r_H^2 F_H}{i_y^2 F} c_{a'_H \alpha_H} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

$$\mu_\alpha = \frac{l_\mu^3}{i_y^2} (-c_{w'_\alpha}) \mu_l \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

Hierbei bedeutet $\mu_l = \frac{2G}{\varrho g F l_\mu}$ die relative Flugzeugmassenbelastung.

Die drei Differentialgleichungen 7 bis 9 lassen sich durch einen Ansatz mit e^{zt} lösen. Zur Bestimmung von z erhält man die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} z + 2 c_{w_0} & c_{w'_\alpha} & c_{a_0} \\ -2 c_{a_0} & -c_{a'_\alpha} & z + c_{w_0} \\ z^2 + \nu_\alpha z + \mu_\alpha & z^2 + \nu_\gamma z & \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (13)$$

Die Ausrechnung der Determinante führt zu einer Gleichung vierten Grades in z (Säkulargleichung) von der Form

$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

mit den Koeffizienten

$$a_4 = 1;$$

$$a_3 = c_{a'_\alpha} + 3 c_{w_0} + \nu_\alpha;$$

$$a_2 = 2 c_g^2 (1 + \gamma'_\alpha) + 3 c_{w_0} \nu_\alpha + c_{a'_\alpha} \nu_\gamma + \mu_\alpha;$$

$$a_1 = 2 c_g^2 (\nu_\alpha + \gamma'_\alpha \nu_\gamma) + 3 c_{w_0} \mu_\alpha;$$

$$a_0 = 2 c_g^2 \mu_\alpha.$$

Die Säkulargleichung 14 wird durch Reduktion auf eine biquadratische Gleichung oder besser durch Anwendung des von v. Kármán und Trefftz [2] angegebenen Iterationsverfahrens gelöst. Es ergeben sich in der Regel für z und λ je zwei Paare konjungiert komplexer Wurzeln

$$\begin{matrix} X_z \pm i H_z \\ \xi_z \pm i \eta_z \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} X_\lambda \pm i H_\lambda \\ \xi_\lambda \pm i \eta_\lambda \end{matrix}$$

mit $z = \frac{2G}{\varrho g F v} \lambda$, wobei im allgemeinen die eine Wurzel groß gegenüber der anderen ist.

Schwingungszeit T und logarithmisches Dekrement λ der Bahnschwingung ergeben sich aus Realteil und Imaginärteil der kleinen Wurzel zu

$$T = \frac{2\pi}{\text{Imaginärteil}} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{-2\pi \text{ Realteil}}{\text{Imaginärteil}}.$$

b) Polare und statische Längsstabilität.

Zunächst wurde die Polare des Versuchsflugzeuges im Fluge vermessen, Bild 4, und den Ergebnissen von Windkanalmessungen (*KI* der AVA) am Modell (M 1:8) gegenübergestellt, Bild 5. Beide Messungen wurden bei fester Schwerpunktslage, das ist bei verschiedenen Höhenruderstellungen, durchgeführt. Es zeigte sich, daß im freien Fluge ein höheres $c_{a\max}$ und ein geringeres $c_{w\min}$ als im Windkanal erreicht wurden.

Im Bereich der besten Gleitzahl ist die Übereinstimmung etwas besser. Durch Geschwindigkeitsreihen mit und ohne Turbulenzgitter konnte festgestellt werden, daß die $c_{a\max}$-Unterschiede z. T. durch Kennwerteinflüsse zu erklären sind, Bild 6. Hinsichtlich der $c_{w\min}$-Unterschiede gaben die Windkanalmessungen keinen Aufschluß, da die im Kanal *I* der AVA erreichbare *Re*-Spanne gegenüber dem *Re*-Unterschied zwischen Modellmessung und dem freien Fluge zu klein ist.

Das Ergebnis dieser Vorversuche ließ es ratsam erscheinen, die in die Rechnung eingehenden Beziehungen der aerodynamischen Beiwerte durch Flugversuche zu ermitteln.

Zur Aufzeichnung der verschiedenen Meßgrößen (Staudruck, Luftdruck, Längsneigung und Höhenruderstellung) wurde ein Askania-Vierfachschreiber, Bild 7, verwendet. Er wurde so in den Rumpf eingebaut, Bild 8, daß er als Laufgewicht benutzt werden konnte, Bild 9. Das Höhenruder wurde zuerst durch eine Sperre am Steuerknüppel, Bild 10, später unmittelbar am Höhenleitwerk festgestellt, Bild 11. Das Laufgewicht konnte in Richtung der flugzeugfesten Längsachse um 1 m verstellt und damit die Schwerpunktslage in den Grenzen

$$0{,}345 < x_s/l_\mu < 0{,}384$$

geändert werden. Bei feststehender Höhenleitwerksflosse (Bild 3) und bei einem Ausschlag des Höhenruders von $+2°$ konnte bei Normalzustand des Flugzeuges ein c_a-Bereich von

$$0{,}8 = 0{,}6\, c_{a\max} < c_a < 1{,}25 = 0{,}93\, c_{a\max}$$

und bei ganz ausgefahrenen Störflächen ein c_a-Bereich von

$$0{,}9 < c_a < 1{,}2$$

erfaßt werden. Zur Erleichterung einer Extrapolation der Meßwerte im Bereich hoher c_a-Werte wurden auch einige

8114

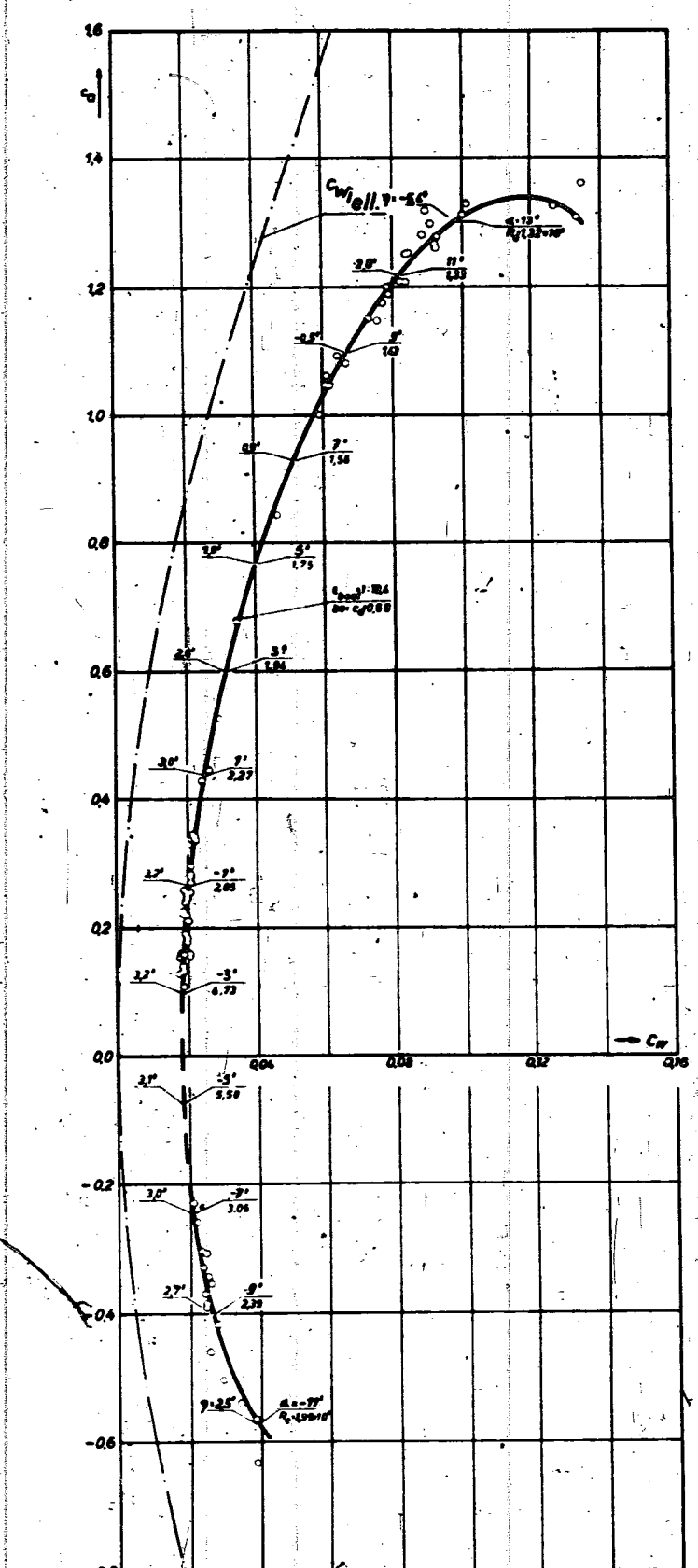


Bild 4. Polare des Versuchsflugzeuges nach Flugversuchen bei $x_s/l_B = 0{,}35$ und $G/F = 21{,}26$ kg/m² (Re-Angaben beziehen sich auf $l_B = 1{,}274$ m und ϱ_0).

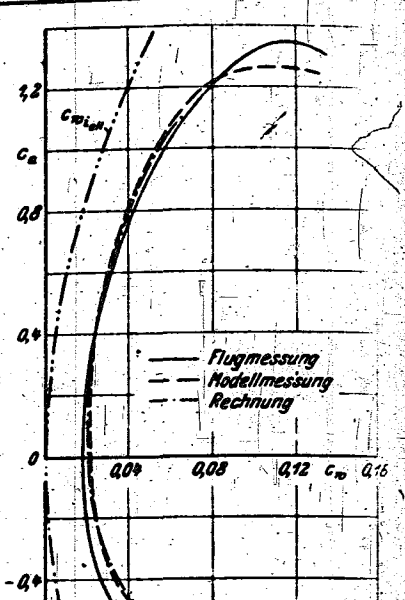


Bild 5. Gegenüberstellung der durch Flugversuch, Modellmessung und Rechnung ermittelten Polare des Versuchsflugzeuges. Habicht III $c_a = (f)\, c_w$.

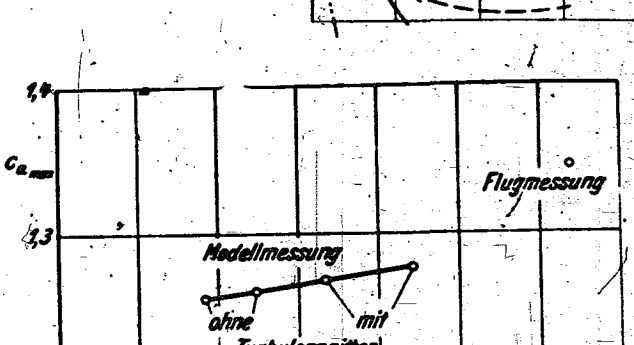


Bild 6. $c_{a\,max} = f(Re_{eff})$ nach Flugversuch und Modellmessung bei einem Höhenruderausschlag von +2°.

Flüge bei Normalzustand und einem Höhenruderausschlag von 0° gemacht.

Die Meßflüge wurden in der Zeit vom 7. bis 25. August 1939 in Darmstadt durchgeführt. Um nach Möglichkeit Störungen durch atmosphärische Vertikalbewegungen und Luftunruhe zu vermeiden, wurde nachts geflogen. Gemessen wurde in der Höhe zwischen etwa 2800 und 1000 m über NN. Vom Schleppflugzeug wurde ein Meteorograph mitgeführt. Aus seinen Aufzeichnungen wurde der Zusammenhang zwischen Luftdruck, Luftdichte und Höhe gewonnen.

Ermittlung des Staudruckes: Der Gesamtdruck wurde einer Sonde, Bild 3, entnommen, die durch ihre besondere Form [3] auch bei starker Schräganströmung (bis zu etwa 40°) fehlerfrei arbeitet. Der statische Druck wurde 800 mm über der Spitze des Seitenleitwerkes mit einer kleinen statischen Sonde, Bild 3, 12 und 13, gewonnen. Die Sonde ist im Schwerpunkt gelenkig gelagert und an ihrem Ende mit einer Windfahne versehen. Am Ort der statischen Druckentnahme weicht der statische Druck nur wenig von dem der ungestörten Strömung ab. (Die geschilderte Staudruckmeßanlage wurde von dem Verfasser an einem doppelsitzigen Segelflugzeug, Bild 14, eingehend untersucht. Nur bei Geringstgeschwindigkeit wurden geringfügige Meßfehler — bis zu etwa 1% des Meßwertes — festgestellt.)

Unter Berücksichtigung aller möglichen Fehlerquellen beträgt der mittlere relative Fehler des Staudruckes abhängig von c_a

in dem Bereich

$0{,}8 < c_a < 1{,}1$	1,5%
$1{,}1 < c_a < 1{,}25$	2,0%

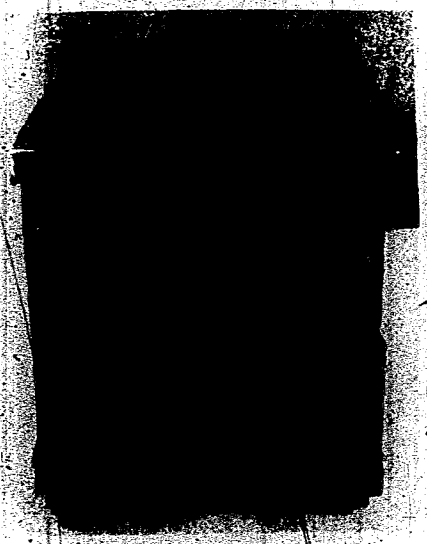
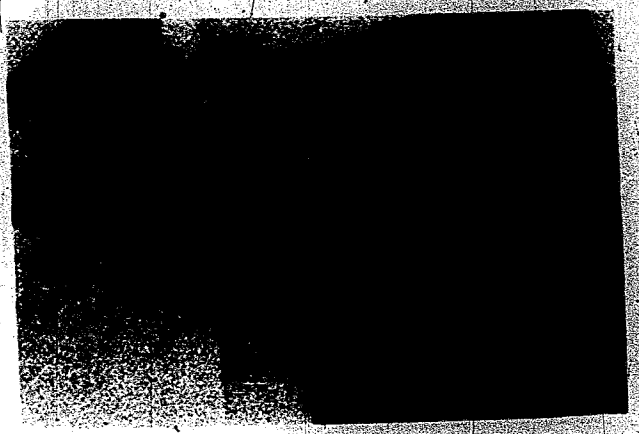


Bild 7 (links): Askania-Vierfachschreiber. Meßelementenseite mit Staudruck-, Luftdruck-, Beschleunigungsmeßelement und Drehspulsystem.

Bild 11 (rechts). Zwischen Dämpfungsflosse und Höhenruder eingebaute Sperre.



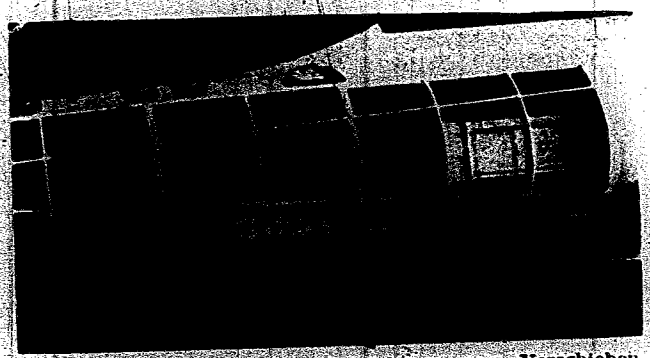


Bild 8. Rumpfmittelstück mit Vorrichtung zum Verschieben des Askania-Vierfachschreibers.

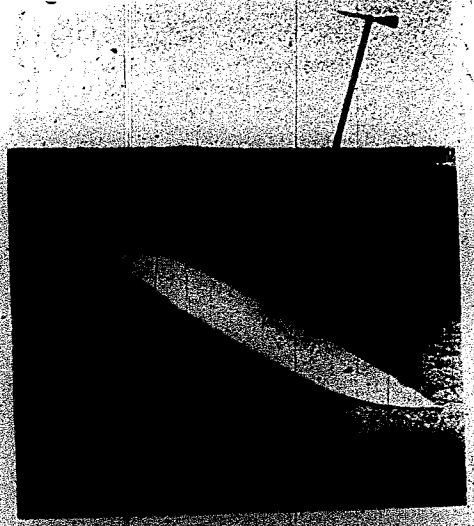


Bild 12. Rumpfende mit statischer Sonde.

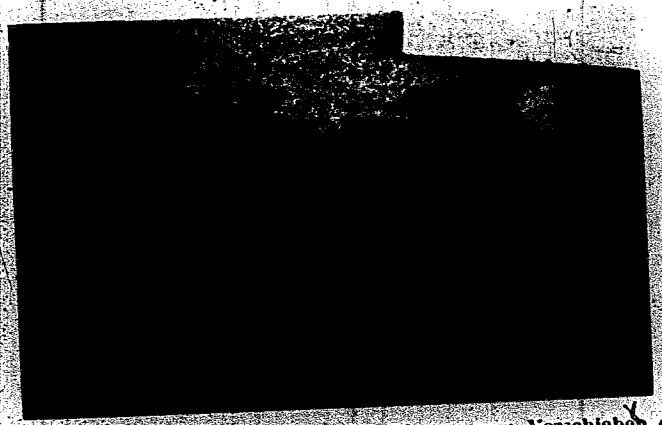


Bild 9. Im Führersitz eingebaute Vorrichtung zum Verschieben des Laufgewichtes.

Bild 13. Statische Sonde, in ihre Einzelteile zerlegt.

Bild 10. Steuerknüppel mit Feststellvorrichtung und Ruderlagenfernsender.

des Meßwertes. Nennenswerte Staudruckschwankungen wurden lediglich bei Luftunruhe beobachtet. Durch Staudruckschwankungen gestörte Meßstufen wurden nicht verwertet.

Die Sinkgeschwindigkeit des Flugzeuges wurde auf bekannte Weise [4] aus der Aufzeichnung des Luftdruckes in Abhängigkeit von der Zeit und der Registrierung von Luftdruck, Temperatur und relativer Feuchtigkeit (notwendig zur Bestimmung der Luftdichte) ermittelt. Die Sinkgeschwindigkeit, bezogen auf Bodenhöhe, ergibt sich aus Δp, Δt und ϱ zu

$$w_s\,[\mathrm{m/s}] = \frac{\Delta p}{\Delta t\, g\, \varrho_0} \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho}}\; 13{,}60,$$

wenn Δp in [mm Hg] und Δt in [s] eingesetzt werden.

Auf die Beeinflussung der Sinkgeschwindigkeit durch atmosphärische Vertikalströmungen wird an anderer Stelle eingegangen.

8116

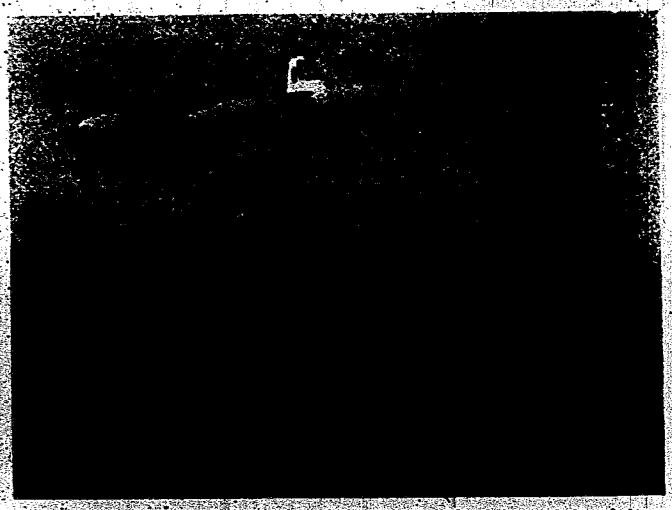


Bild 14. Erprobung einer statischen Sonde über dem Seitenleitwerk eines Segelflugzeuges vom Muster Kranich.

Unter Berücksichtigung aller Meß- und Auswertefehler der einzelnen Bestimmungsgrößen ergibt sich der mittlere relative Fehler der Sinkgeschwindigkeit zu etwa

1,5% des Meßwertes.

Der Anstellwinkel wurde durch die Aufzeichnung der Flugzeuglängsneigung und durch Bestimmung der Flugbahnneigung aus Bahn- und Sinkgeschwindigkeit erhalten. Zur Aufzeichnung der Längsneigung wurde ein vom Verfasser entwickeltes Beschleunigungsmeßelement, Bild 7 und 15, verwendet. Es enthält ein schwingungsfähiges System mit einem axialen Freiheitsgrad. An zwei parallel zueinander angeordneten Blattfedern ist eine Masse befestigt, deren Ausschlag durch ein kleines Cu-Be-Blech von 0,02 mm Stärke auf ein in Steinen gelagertes Spiegelchen übertragen wird. Fällt, wie im vorliegenden Falle, die Bewegungsrichtung der Masse in Richtung der Flugzeuglängsachse, so ist ihr Ausschlag im stationären Flugzustand proportional dem Sinus des Längsneigungswinkels.

Es wurde festgestellt, daß das verwendete Meßelement auf Beschleunigungen von 2 cm/s² anspricht. Bei einem Meßbereich von $\pm 0{,}5$ g (entsprechend $\pm 30^0$ Neigung) ist der mittlere Meßfehler des stationären Neigungswinkels

$$\leq \pm 0{,}15^0.$$

Unter Berücksichtigung aller möglichen Fehler ergibt sich der mittlere Fehler des Anstellwinkels für die verschiedenen c_a-Bereiche wie folgt:

c_a-Bereich	mittlerer Fehler von α
0,8 bis 1,1	$\pm 0{,}23^0$ (bei ausgefahrenen B. K.: $\pm 0{,}33^0$)
1,1 bis 1,25	$\pm 0{,}25^0$.

Das Fluggewicht und die Schwerpunktslage wurden durch mehrmaliges Auswiegen bei 0 und 90^0 Schräglage des Flugzeuges ermittelt. Die mögliche Abweichung vom mittleren Fluggewicht wird im Mittel zu $\pm 0{,}7$ kg, das ist $\pm 0{,}2\%$ des mittleren Fluggewichtes, angenommen.

Fehler in der Angabe der Schwerpunktsrücklage sind in erster Linie durch geringe Änderungen der Haltung des Flugzeugführers zu erwarten. Der mittlere relative Fehler von x_s wurde zu 0,3% des Meßwertes geschätzt.

Die Abhängigkeit der Beiwerte c_a, c_w, $c_{M_{S_0}}$ und des Bahnwinkels γ vom Anstellwinkel wurde aus den Ergebnissen der Flugversuche mit den bekannten Gleichgewichtsbedingungen 1;2 und

$$c_{M_{S_0}} q F l_B + G s \cos \vartheta = 0$$

ermittelt.

(Momentenbezugsachse ist die Querachse durch den Flugzeugschwerpunkt bei vorderster Laufgewichtsstellung; s ist der Abstand des Schwerpunktes von der Momentenbezugsachse.)

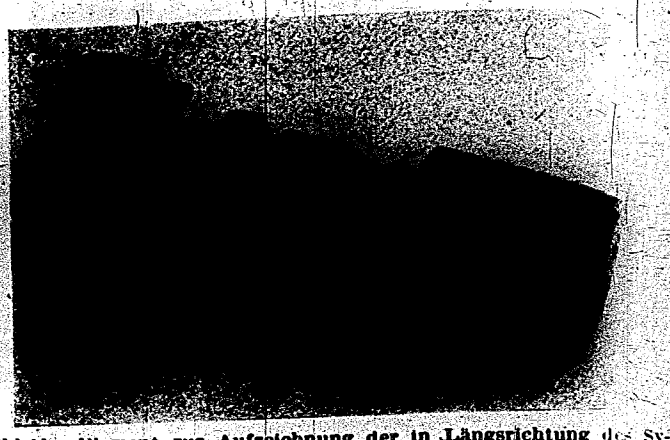


Bild 15. Element zur Aufzeichnung der in Längsrichtung des Systemes wirkenden Beschleunigung; anschließbar an den Askania-Vierfachschreiber.

Unter Berücksichtigung der Meßfehler der einzelnen Bestimmungsgrößen ergibt sich der relative Fehler der Beiwerte für die verschiedenen c_a-Bereiche etwa wie folgt:

c_a-Bereich	mittlerer relativer Fehler von		
	c_a	c_w	$c_{M_{S_0}}$
0,8 bis 1,1	1,7	3,95	2,0
1,1 bis 1,25	2,2	4,7	2,5

ausgedrückt in Prozenten des jeweiligen Meßwertes.

Die Ergebnisse der stationären Messungen und die in die Säkulargleichung eingehenden Ableitungen sind Bild 16 bis 19 und den Zahlentafeln 1 und 3 zu entnehmen. Beim Zeichnen der Kurvenzüge wurde der Gütegrad jedes Meßpunktes nach Möglichkeit berücksichtigt. Er hängt außer von der Meßgenauigkeit auch von dem Grad der Störung durch atmosphärische Einflüsse ab. Aus der Lage der Meßpunkte zur gezeichneten Kurve ist zu entnehmen, daß in keinem Falle die zuvor angegebenen Fehlergrenzen merklich überschritten wurden. Eine nennenswerte Beeinträchtigung der Messungen durch atmosphärische Vertikalströmungen

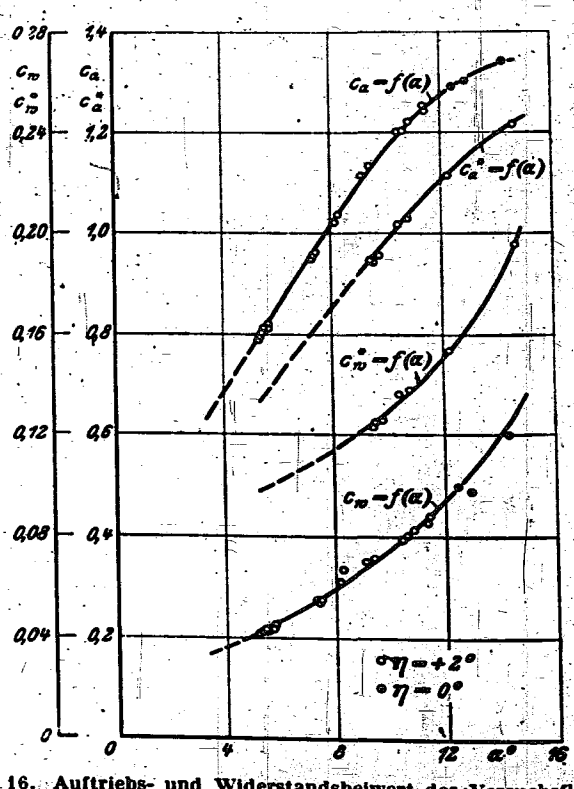


Bild 16. Auftriebs- und Widerstandsbeiwert des Versuchsflugzeuges bei Normalzustand (— Störflächen nicht betätigt —) und bei ganz ausgefahrenen Störflächen (— Kurven mit Stern —) in Abhängigkeit vom Anstellwinkel nach Ergebnissen von Flugversuchen bei $\eta = +2°$ bzw. 0°.

8117

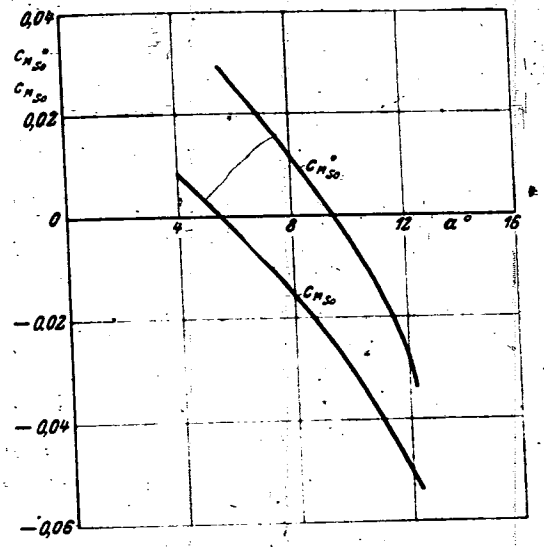


Bild 17. Abhängigkeit des Kippmomentenbeiwertes vom Anstellwinkel bei einem Höhenruderausschlag von + 2°. Normalzustand des Flugzeuges und Störflächen ganz ausgefahren (Kurve mit Stern).

oder Luftunruhe ist nicht eingetreten (wie erwähnt, wurden die Flüge nachts durchgeführt).

c) Koeffizienten der Säkulargleichung.

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes I_y wurde das Versuchsflugzeug auf zwei gehärteten Schneiden gelagert, deren Verbindungslinie die Flugzeugquerachse darstellt. Rumpfspitze und Sporn wurden durch Spiralfedern mit dem Fußboden verbunden, Bild 20 und 21. Die Federkonstante c [m kg] des Systems wurde bestimmt, und die Schwingungszeit T [s] der Schwingungen um die Drehachse bei möglichst kleiner Amplitude gemessen. Das Trägheitsmoment ergibt sich aus der Beziehung

$$I_y = \frac{c\,T^2}{4\,\pi^2} - \Delta I_y \text{ [m kg s}^2\text{]}.$$

Hierbei stellt ΔI_y das Trägheitsmoment der beweglichen Stützen dar. Gegenüber dem Verfahren der Trägheitsmomentenbestimmung unter Verwendung von Zusatzmassen ist dieses Verfahren einfacher und genauer. Zur Bestimmung von T wurden zahlreiche Einzelmessungen durchgeführt und I_y durch Mittelwertbildung gewonnen. Eine weitere Messung, bei der das Höhenleitwerk durch einen gleich schweren Sandsack ersetzt wurde, ergab einen nur unbedeutend kleineren Wert (etwa 2%). Der Einfluß der mitschwingenden Luftmassen auf das Trägheitsmoment ist in dem vorliegenden Falle sicher sehr klein. Da I_y sowohl in ν als auch in μ vorkommt, wird das Ergebnis der Rechnung hierdurch kaum beeinträchtigt.

Die Abhängigkeit des Normalkraftbeiwertes des Höhenleitwerkes vom Anstellwinkel wurde einer unveröffentlichten Arbeit entnommen.

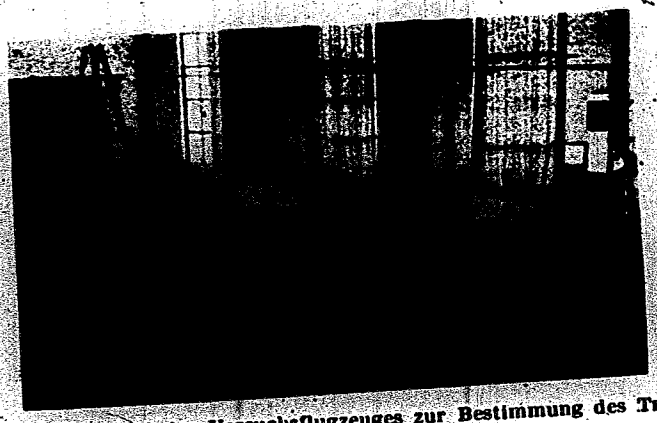


Bild 20. Aufbau des Versuchsflugzeuges zur Bestimmung des Trägheitsmomentes I_y.

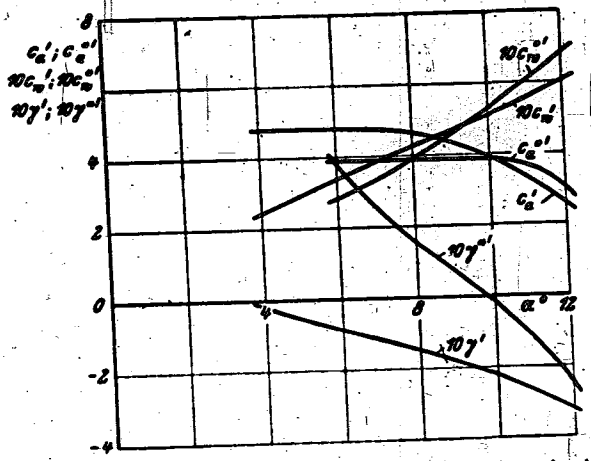


Bild 18. Die Ableitungen von c_a, c_m und γ nach dem Anstellwinkel bei einem Höhenruderausschlag von + 2°. Normalzustand des Flugzeuges und Störflächen ganz ausgefahren (Kurve mit Stern).

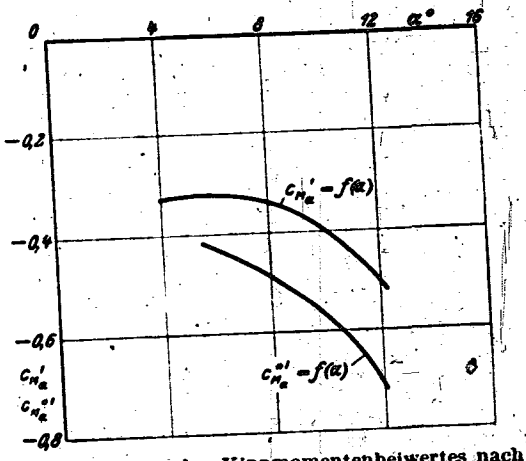


Bild 19. Die Ableitung des Kippmomentenbeiwertes nach dem Anstellwinkel, bezogen auf die vom Anstellwinkel abhängige Lage der Flugzeugquerachse, in Abhängigkeit vom Anstellwinkel. Der Höhenruderausschlag beträgt + 2°. Normalzustand des Flugzeuges und Störflächen ganz ausgefahren (Kurve mit Stern).

Die Größen ν_α, ν_γ und μ_α, die dem Dämpfungsmoment und der statischen Stabilität entsprechen, und die Faktoren a_4 bis a_0 der Säkulargleichung sind in Zahlentafeln 2 und 4 zusammengestellt.

Die Ergebnisse der Rechnung werden in Bild 25 bis 28 wiedergegeben. Auf sie wird an anderer Stelle näher eingegangen.

Bild 21. Rumpfende mit Spiralfeder. Am Sporn angehängte Gewichte und Maßstab dienten zur Bestimmung der Federkonstante c.

8118

Zahlentafel 1 und 2. »Habicht III«, Normalzustand; $\eta = +2^0$; $\varrho = 0{,}1027$ kg s²/m⁴.

α^0	γ^0	ϑ^0	c_a	c_w	$c_{M_{S_0}}$	c'_{a_x}	c'_{w_x}	c'_{M_x}	α'_{w_x}	γ'_x
4,0	−3,0	1,9	0,683	0,036	+0,008	4,76	0,25	−0,33	0,30	−0,003
6,0	−3,1	2,9	0,847	0,046	−0,003	4,76	0,34	−0,33	0,30	−0,095
8,0	−3,3	4,7	1,014	0,059	−0,016	4,76	0,43	−0,34	0,30	−0,150
10,0	−3,7	6,3	1,172	0,076	−0,032	3,89	0,51	−0,39	0,245	−0,220
11,0	−3,9	7,1	1,231	0,085	−0,041	3,25	0,56	−0,44	0,205	−0,272
12,0	−4,2	7,8	1,282	0,095	−0,051	2,60	0,61	−0,50	0,165	−0,325

α^0	c_a	η^0	ν_x	ν_y	μ_x	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
4,0	0,683		4,69		11,63		9,56	30,2	5,57	10,9
6,0	0,847		4,69		11,57		9,59	30,7	7,83	16,6
8,0	1,014	+2°	4,69	3,61	11,97	1,0	9,63	31,7	10,71	24,7
10,0	1,172		4,49		13,77		8,61	30,9	13,3	38,0
11,0	1,231		4,35		15,45		7,84	30,51	14,3	47,0
12,0	1,282		4,20		17,60		7,08	30,46	15,2	58,1

Zahlentafel 3 und 4. »Habicht III«, Störflächen voll ausgefahren; $\eta = +2^0$; $\varrho = 0{,}1027$ kg s²/m⁴.

α^0	γ^0	ϑ^0	c_a	c_w	$c_{M_{S_0}}$	c'_{a_x}	c'_{w_x}	c'_{M_x}	α'_{w_x}	γ'_x
6,0	−8,2	−2,2	0,71	0,102	+0,026	3,90	0,29	−0,43	0,25	+0,37
8,0	−7,7	+0,3	0,84	0,114	+0,014	3,90	0,39	−0,49	0,25	+0,16
10,0	−7,5	+2,5	0,98	0,129	−0,005	3,90	0,53	−0,57	0,25	0,017
12,0	−7,8	+4,2	1,10	0,151	−0,028	3,10	0,69	0,71	0,20	0,24

α^0	c_a	η^0	ν_x	ν_y	μ_x	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
6,0	0,71		4,49		15,13		8,70	31,99	10,64	15,6
8,0	0,84	+2°	4,49	3,61	17,24	1,0	8,74	34,52	13,20	24,8
10,0	0,98		4,49		20,06		8,78	37,79	16,4	39,2
12,0	1,10		4,31		24,98		7,86	40,00	19,8	61,6

IV. Flugversuche über den Verlauf der Bahnschwingung.

In dem Bereich dynamischer Längsstabilität wurde die Bahnschwingung dadurch aufgeschaukelt, daß der Flugzeugführer den Oberkörper mit der Frequenz der Bahnschwingung hin und her bewegte. Darnach wurde das Flugzeug sich selbst überlassen. Nach dem Abklingen der Bahnschwingung wurde bei gleichem Zustand des Flugzeuges (gleiche Höhenruder- und Laufgewichtsstellung) über einige Minuten stationär weiter geflogen, um die Beziehungen zwischen den aerodynamischen Beiwerten und dem Anstellwinkel zu ermitteln.

Bei Indifferenz der Bahnschwingung wurden zunächst die Beiwerte und Winkel bestimmt, die den stationären Flugzustand beschreiben. Dann wurden Schwingungen von verschieden großer Amplitude eingeleitet. Bei ruhiger Luft blieb der Schwingungsvorgang über lange Zeit — in einem Falle über 9 min lang — unverändert.

Bei Instabilität der Bahnschwingung wurde zunächst zur Bestimmung der Beiwerte und Winkel des stationären Flugzustandes durch geeignete Gegenbewegungen des Flugzeugführers verhindert, daß nennenswerte Geschwindigkeitsschwankungen auftraten. Sich selbst überlassen führte das Flugzeug sofort Bahnschwingungen aus, die ohne erkennbare Anzeichen von Störungen einsetzten und nach Überschreiten des $c_{a\max}$ mit einem »Männchen« oder Trudeln endeten.

Die Dämpfung der Bahnschwingung wurde aus der Aufzeichnung des Staudruckes ermittelt. Hierzu dienten in erster Linie die Schwingungen von kleiner Amplitude. Es mußte nämlich damit gerechnet werden, daß sich die Dämpfung mit der Größe der Amplitude ändert, und daß durch die Beschleunigung der Luft in den Schlauchleitungen die Spitzenwerte des Staudruckes fehlerhaft aufgezeichnet werden. Trotz dieser Einschränkung ist die Auswertgenauigkeit der Dämpfung verhältnismäßig groß, da der Absolutbetrag des logarithmischen Dekrementes bei allen c_a-Werten nur wenig von Null verschieden ist. Jeder angegebene λ-Wert ist ein Mittelwert aus etwa fünf bis zehn Vollschwingungen.

Die Schwingungszeit konnte ebenfalls sehr genau ermittelt werden (großer Papiervorschub, Zeitmarken). Zu einem Falle standen hierzu über 50 zusammenhängende Schwingungen bei gleicher Größe der Amplitude zur Verfügung. Zur Bestimmung von T wurde wieder der Bereich kleiner Amplituden bevorzugt.

Um eine Beeinträchtigung der Messungen durch atmosphärische Einflüsse weitgehend zu vermeiden, blieben sämtliche Aufzeichnungen, bei denen kurzperiodische Staudruckschwankungen feststellbar waren, bei der Auswertung unberücksichtigt. Es sei in diesem Zusammenhang auf die bei Flug Nr. 565 erhaltene Aufzeichnung — erster Teil Bild 22 — verwiesen, aus der der störende — in diesem Falle instabilisierende — Einfluß von Luftunruhe auf den Verlauf der Bahnschwingung zu ersehen ist.

Insgesamt liegen zur Bestimmung von T und λ der Bahnschwingung 46 auswertbare Meßpunkte vor. 35 wurden bei Normalzustand des Flugzeuges, 11 bei voll ausgefahrenen Störflächen erhalten. Bei 38 Meßpunkten war das Höhenruder bei $+2^0$-Ausschlag, bei 8 Meßpunkten, die alle auf Normalzustand entfallen, bei 0^0-Ausschlag festgestellt.

Bild 22 bis 24 zeigen Ausschnitte aus den erhaltenen Aufzeichnungen.

In Bild 22 wird eine Aufzeichnung von Staudruck, Luftdruck, Beschleunigung in Richtung der flugzeugfesten Längsachse und Steuerknüppelstellung wiedergegeben, die bei schwacher Dämpfung der Bahnschwingung erhalten wurde. Aus ihr ist unter anderem der Einfluß von Luftunruhe auf die Dämpfung zu ersehen. Obwohl bei dem vorgegebenen Zustand des Flugzeuges und der Atmosphäre Stabilität zu erwarten war, wurde durch äußere Störungen eine Bahnschwingung angefacht und über einige Minuten lang aufrechterhalten. Den wahren Charakter der Schwingung ersieht man aus dem rechten Teil der gleichen Abbildung.

Bild 23 zeigt eine Aufzeichnung, die bei Indifferenz der Bahnschwingung und verschieden großen Amplituden erhalten wurde. Jede Meßstufe erstreckt sich über mehr als 3½ min. Aus ihr ist zu entnehmen, daß die Schwingungszeit mit wachsender Amplitude ein wenig — von 14,2 auf 14,4 s — zunimmt. Die Dämpfung bleibt bei den verschiedenen Amplituden unverändert. Kam es jedoch bei großen Amplituden im Bereich des oberen Umkehrpunktes zu zeitlich und örtlich begrenztem Abreißen der Zirkulationsströmung, so trat plötzlich ein starkes kopflastiges Moment auf, das auf den weiteren Verlauf der Bahnschwingung stark destabilisierend wirkte. Hierbei wurde auch eine Abnahme der Schwingungszeit beobachtet.

Bild 24 gibt eine Aufzeichnung wieder, die bei Instabilität erhalten wurde. Es ist aus ihr zu entnehmen, daß die Bahnschwingung ohne erkennbaren äußeren Anlaß beginnt. Im vorliegenden Falle konnte wegen der geringen Anfachung der Bahnschwingung das stetige Anwachsen der Amplituden über 4½ min lang beobachtet werden.

Die Ergebnisse der Flugversuche sind in Zahlentafel 5 und in Bild 25 bis 28 dargestellt.

V. Gegenüberstellung der Ergebnisse von Rechnung und Flugversuch.

In Bild 25 ist der Realteil der kleinen Wurzel in Abhängigkeit vom c_a-Wert für Normalzustand des Flugzeuges bei festgestelltem Höhenruder wiedergegeben. Die ausgezogenen Kurven stellen die Ergebnisse der Rechnung, die Kreise die Meßpunkte dar. Der gerechnete Realteil ist in dem Bereich $0{,}7 < c_a < 1{,}3$ negativ ($-0{,}025 < R < 0$ [s⁻¹]), darüber positiv. Die Bahnschwingung müßte also auf Grund der Rechnung oberhalb $c_a = 1{,}3$ ungedämpft, darunter schwach gedämpft verlaufen. Die beiden R-Kurven für die Luftdichte in 3000 m und 1000 m hüllen einen Bereich ein, in dem die Meßpunkte des Flugversuches zu erwarten wären. In Wirklichkeit ergab sich im Flugversuch in dem ganzen untersuchten c_a-Bereich eine kleinere Dämpfung.

$R \approx -0{,}005$ [s⁻¹] bei $c_a = 0{,}8$; $R = 0$ bei $c_a = 0{,}97$, darüber ist R positiv.

8119

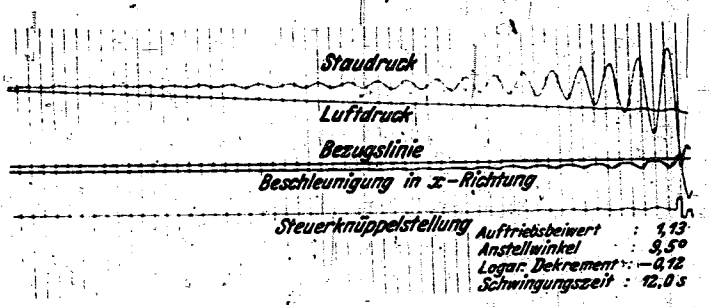


Bild 24. Ausschnitt aus der Aufzeichnung einer instabilen Bahnschwingung des Versuchsflugzeuges bei Normalzustand und einem Höhenruderausschlag von + 2°.
Start-Nr.: 566; Tag: 11. 8. 1939; Meßpunkt Nr.: 2.

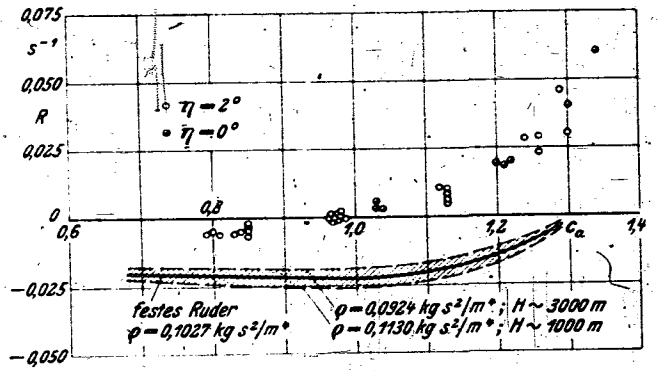


Bild 25.

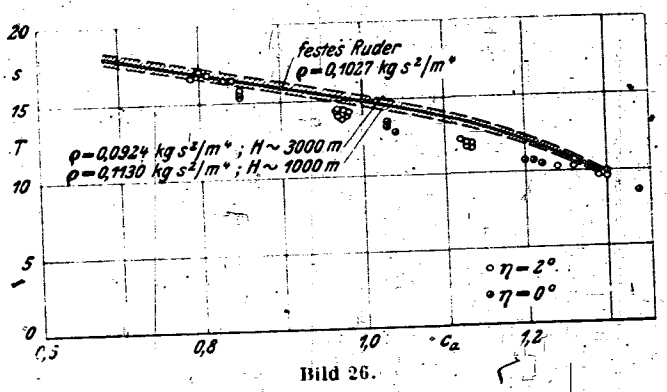


Bild 26.

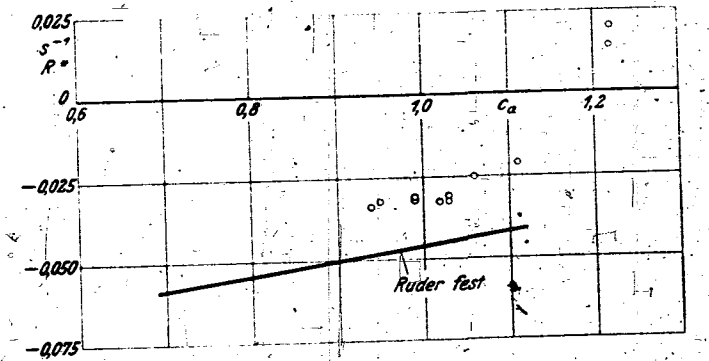


Bild 27.

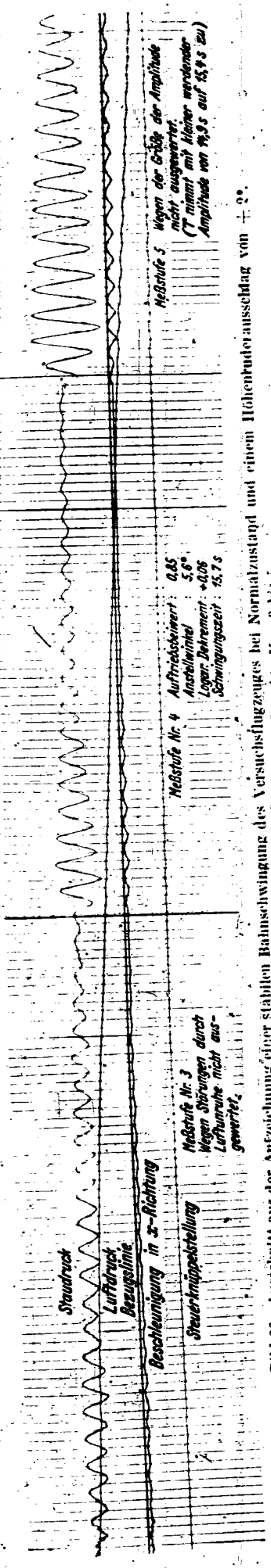


Bild 22. Ausschnitt aus der Aufzeichnung einer stabilen Bahnschwingung des Versuchsflugzeuges bei Normalzustand und einem Höhenruderausschlag von + 2°.
Start Nr.: 565; Tag: 10. 8. 1939; Meßpunkte Nr.: 3 bis 5.

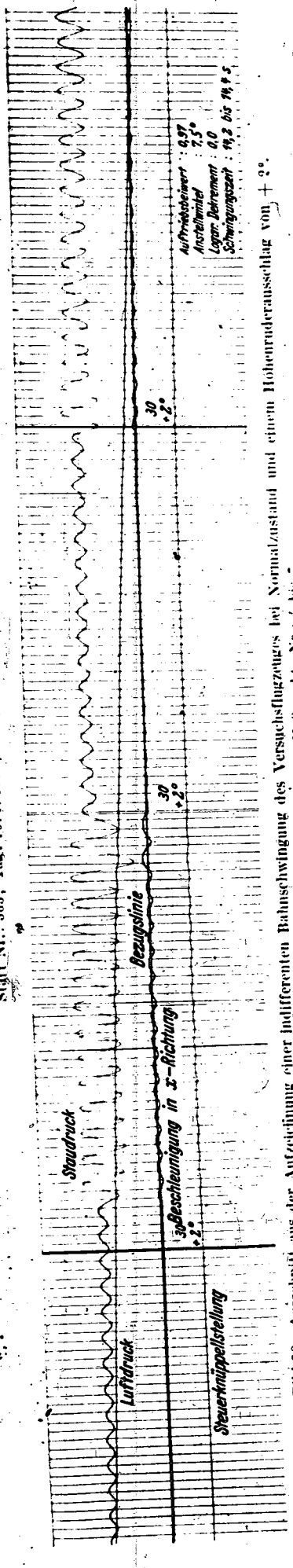


Bild 23. Ausschnitt aus der Aufzeichnung einer indifferenten Bahnschwingung des Versuchsflugzeuges bei Normalzustand und einem Höhenruderausschlag von + 2°.
Start Nr.: 572; Tag: 25. 8. 1939; Meßpunkte Nr.: 4 bis 7.

Sämtliche Meßpunkte streuen kaum mehr, als durch die Luftdichteänderungen während des Fluges zu erwarten war. Der c_a-Wert, bei dem $R = 0$ ist, wurde neunfach belegt.

Der Absolutbetrag des Realteiles ist bei der Rechnung und bei dem Flugversuch verhältnismäßig klein. Die Ergebnisse der Rechnung sind gegenüber der Wirklichkeit etwas zu günstig.

In Bild 26 ist die Schwingungszeit der Bahnschwingung abhängig von c_a für Normalzustand des Flugzeuges dargestellt. Rechnung und Versuch ergaben eine Abnahme der

8120

Zahlentafel 5. Zusammenstellung der Ergebnisse der Flugversuche.

Start	Tag	Meßpunkt	Flugzeugzustand	Höhenruderausschlag	Laufgewichtstellung	$\alpha°$	c_a	T [s]	Λ [1])	R [2])	Bemerkungen
557	7. 8. 39	2	normal	+2°	00	5,4	0,81	16,8	+0,10	−0,0060	[1]) $\Lambda = -RT$.
		3			30	7,4	0,98	14,2	0,0	0,0	[2]) R = Realteil der kleinen Wurzel.
		4			60	9,4	1,13	12,0	−0,08	+0,0067	
559	9. 8. 39	1	normal	+2°	00	5,0	0,80	17,0	+0,08	−0,0047	
		2			00	5,0	0,79	16,6	+0,09	−0,0054	
		3			30	7,3	0,98	14,2	0,0	0,0	
		4			60	9,4	1,13	11,7	−0,09	+0,0077	
560	9. 8. 39	1	normal	+2°	60	9,1	1,13	11,7	−0,10	+0,0085	
		2			90	11,4	1,24	10,3	−0,29	+0,0282	
		3			99,6	11,3	1,26	10,7	−0,25	+0,0234	
561	9. 8. 39	1	normal	0°	00	8,2	1,03	13,2	−0,05	+0,0038	
		2	normal	0°	30	10,4	1,20	10,7	−0,21	+0,0196	
		3	m. Störfl.	+2°	00	9,4	0,94	12,3	+0,42	−0,0341	
		4	m. Störfl.	+2°	30	10,4	1,02	11,3	+0,37	−0,0327	
564	10. 8. 39	1	normal	0°	99,6	14,3	1,34	8,6	−0,52	+0,0605	
		2	normal	0°	60	12,8	1,30	9,9	−0,40	+0,0404	
		3	normal	0°	30	10,6	1,21	10,7	−0,20	+0,0187	
		4	normal	0°	30	10,8	1,22	10,5	−0,21	+0,0200	
		5	normal	0°	00	8,2	1,04	12,8	−0,04	+0,0031	
		6	normal	+2°	00	5,5	0,83	16,4	+0,09	−0,0055	
		7	normal	+2°	00	5,5	0,84	16,4	+0,08	−0,0049	
		8	m. Störfl.	+2°	00	9,7	0,95	12,0	+0,39	−0,0325	
565	10. 8. 39	1	normal	0°	00	8,1	1,03	13,5	−0,08	+0,0059	
		4		+2°	00	5,6	0,85	15,7	+0,06	−0,0038	Siehe Bild 22!
		(5)		+2°	00	5,6	0,85	15,4	+0,09	−0,0058	
		6		+2°	30	7,2	0,97	13,9	0,0	0,0	
566	11. 8. 39	1	normal	+2°	99,6	12,5	1,30	9,6	−0,29	+0,0302	
		2			60	9,5	1,13	12,0	−0,12	+0,010	Siehe Bild 24!
		3			30	7,6	0,98	13,9	0,0	0,0	
		4			30	7,6	0,98	13,6	−0,03	+0,0022	
567	11. 8. 39	1	normal		00	6,0	0,85	15,6	+0,03	−0,0019	
		2	normal		00	6,0	0,85	15,5	+0,07	−0,0045	
		3	m. Störfl.	+2°	00	10,2	0,99	11,9	+0,38	−0,0319	
		4	m. Störfl.		00	10,2	0,99	11,7	+0,37	−0,0316	
		5	m. Störfl.		30	11,4	1,06	11,0	+0,28	−0,0255	
568	24. 8. 39	1	m. Störfl.	+2°	99,6	14,7	1,22	8,9	−0,18	+0,0202	
		2			99,6	14,7	1,22	9,0	−0,13	+0,0144	
		3			60	12,2	1,11	10,4	+0,22	−0,0212	
		5			30	10,75	1,03	11,6	+0,36	−0,0310	
		6			30	10,75	1,03	11,4	+0,37	−0,0325	
572	25. 8. 39	1	normal	+2°	99,6	12,1	1,29	9,6	−0,44	+0,0458	
		2			90	11,5	1,26	10,3	−0,30	+0,0291	
		3			60	9,2	1,12	12,2	−0,13	+0,0107	
		4			30	7,5	0,97	14,2	0,0	0,0	kleine Amplitude
		(5)			30	7,5	0,97	14,4	0,0	0,0	große Amplitude } siehe
		6			30	7,5	0,97	14,2	0,0	0,0	kleine Amplitude } Bild 23!
		7			30	7,5	0,97	14,3	0,0	0,0	mittl. Amplitude

Schwingungszeit mit wachsendem c_a-Wert. Bei $c_a = 0{,}8$ und bei $c_a = 1{,}3$ liegen die Meßpunkte in dem gerechneten Bereich, dazwischen sind die gemessenen T-Werte bis zu etwa 2 s kleiner als die gerechneten. Diese Übereinstimmung ist als hinreichend anzusehen. Bei Indifferenz der Bahnschwingung beträgt die Schwingungszeit etwa 14,3 s.

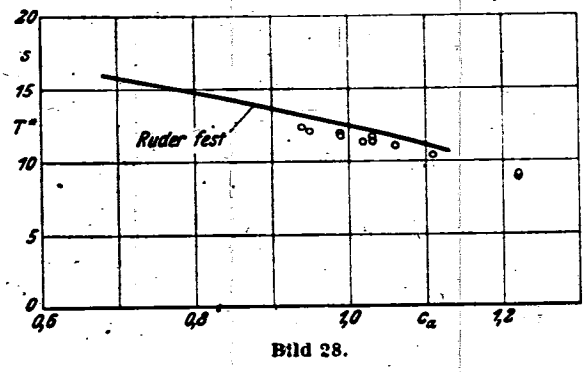


Bild 28.

In Bild 27 ist der Realteil der kleinen Wurzel abhängig von c_a für den Flug bei vollständig ausgefahrenen Störflächen wiedergegeben. Die Rechnung ergab größere Stabilität als bei Normalzustand. Bis in $c_{a\max}$-Nähe wurde im Fluge gedämpfter Verlauf der Bahnschwingung festgestellt. Die Unterschiede zwischen gerechneten und gemessenen R-Werten sind etwa dieselben wie bei Normalzustand.

In Bild 28 ist die Schwingungszeit der Bahnschwingung bei vollständig ausgefahrenen Störflächen dargestellt. Auch hier ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung von T als befriedigend zu betrachten.

Die bis jetzt erhaltenen Meßergebnisse sind zu einer Erklärung der Abweichungen zwischen gemessener und gerechneter Dämpfung der Bahnschwingung nicht ausreichend. Es kann angenommen werden, daß Form und Lage des Flügelnachlaufes zum Höhenleitwerk auf die Dämpfung der Bahnschwingung Einfluß haben. Es wird ferner vermutet, daß sich das Flugzeug unter der Einwirkung von Beschleunigungen verformt. Bei großen Amplituden und beim Durchfliegen von Inversionen kann sich auch der Unterschied in der Luft-

8121

dichte zwischen den beiden Umkehrpunkten der Flugbahn auf deren Dämpfung auswirken.

Mit Kriegsbeginn mußten die Versuche leider abgebrochen werden. Es ist eine Ergänzung und Erweiterung der Versuche in Aussicht genommen worden mit dem Ziel, eine befriedigende Erklärung für die mangelhafte Übereinstimmung gerechneter und gemessener Dämpfung der Bahnschwingung zu suchen und damit Unterlagen zu beschaffen, die zunächst für den einfachsten Fall der gestörten Längsbewegung (kein Antrieb, Höhenruder fest) eine befriedigende Berechnung des Verlaufes der Bahnschwingung gestatten.

VI. Zusammenfassung.

Der Verlauf der Bahnschwingung eines motorlosen Flugzeuges bei festem Höhenruder wurde nach der Methode der kleinen Schwingungen berechnet und im Flugversuch vermessen.

Die in die Rechnung eingehenden Beziehungen zwischen c_a, c_w, $c_{w_{s_0}}$, γ und α wurden ebenfalls im Fluge ermittelt und, soweit es möglich war, mit den Ergebnissen von Modellmessungen verglichen. Im Bereich der besten Gleitzahl stimmt die am Modell gemessene Polare mit der im Fluge ermittelten gut überein. Im Fluge wurden jedoch ein größeres $c_{a\,max}$ und ein kleineres $c_{w\,min}$ als am Modell erzielt. Die Vermutung, daß diese Unterschiede auf Kennwerteinflüssen beruhen, fand hinsichtlich des oberen Teiles der Polare durch Geschwindigkeitsreihen mit und ohne Turbulenzgitter eine gewisse Bestätigung.

Schwingungszeit und Dämpfung der Bahnschwingung wurden unmittelbar vor oder nach den stationären Messungen ermittelt. Der Vergleich mit den Ergebnissen der Rechnung zeigt hinsichtlich der Schwingungszeit befriedigende, hinsichtlich der Dämpfung weniger gute Übereinstimmung. Im Fluge wurde bei Normalzustand des Flugzeuges unterhalb $c_a = 0{,}97$ Stabilität, darüber Instabilität festgestellt. Dagegen ergab die Rechnung in dem ganzen untersuchten c_a-Bereich gedämpften Verlauf der Bahnschwingung. Bei ausgefahrenen Störflächen sind die Unterschiede zwischen gerechneter und gemessener Dämpfung etwa dieselben.

Als Ursache für diese Mängel wird vermutet:

1. Beeinflussung der Normalkraft des Höhenleitwerkes durch den Nachlauf des Tragflügels im beschleunigten Flugzustand.
2. Verformung des Flugzeuges unter der Einwirkung von Beschleunigungen.
3. Luftdichteunterschied zwischen oberem und unterem Umkehrpunkt der Flugbahn.

Eine Ergänzung und Erweiterung der Untersuchungen ist geplant.

VII. Schrifttum.

[1] G. H. Bryan, Stabilität der Flugzeuge. Übersetzung von H. G. Bader.

[2] Th. v. Kármán u. E. Trefftz, Über Längsstabilität und Längsschwingungen von Flugzeugen. Jahrbuch der wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt Bd. 3 (1914/15), S. 132.

[3] G. Kiel, Gesamtdruckgerät mit großer Unempfindlichkeit gegen Schräganströmung. Luftf.-Forschg. Bd. 12 (1935), S. 75.

[4] W. Spilger, Flugleistungsmessungen an verschiedenen Segelflugzeugen. Jahrbuch 1937 der deutschen Luftfahrtforschung, S. I 293, und Weitere Flugleistungsmessungen an Segelflugzeugen. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, S. I 319.

8122

Der Einfluß der Gasträgheit beim Schuß,

insbesondere Berechnung des Mitbeschleunigungsfaktors der Treibladung*).

Von H. Pfriem, VDI.

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

Unter dem Einfluß der hohen Beschleunigung des Geschosses im Rohr entstehen infolge der Massenträgheit der Pulvergase entsprechende Druckunterschiede im Gasraum. Diese können an Hand einer einfachen Näherungsrechnung mit abschätzbarer Genauigkeit bestimmt werden. Dabei zeigt sich in Übereinstimmung mit der Erfahrung, daß der Mitbeschleunigungsfaktor für die Treibladung bei den meist üblichen Gewichtsverhältnissen von Pulver und Geschoß zeitlich nur wenig veränderlich und praktisch etwas größer als 0,5 ist.

Gliederung.

I. Einführung.
II. Theoretische Grundlagen der Entwicklungen.
  1. Die Grundgleichungen.
  2. Umformung der Differentialgleichungen.
III. Verfahren zur Ermittlung des Druckfeldes hinter dem Geschoß.
  1. Umformung und Vereinfachung der Differentialgleichungen.
  2. Das Zustandsfeld im Rohr.
  3. Die Beeinflussung der Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses.
IV. Die Beeinflussung der Geschoßbeschleunigung in erster Näherung.
  1. Bestimmung des Mitbeschleunigungsfaktors der Pulvergase.
  2. Beschränkung der Zulässigkeit der vereinfachenden Voraussetzungen für die erste Näherung.
V. Verfahren zur genaueren Berechnung des Druckfeldes hinter dem Geschoß.
  1. Grundgedanken des Verfahrens.
  2. Berechnung des Mitbeschleunigungsfaktors der Pulvergase in zweiter Näherung.
VI. Zusammenfassung.

I. Einführung.

Bei vielen thermodynamischen Rechnungen werden allgemein fast immer genügend kleine Änderungsgeschwindigkeiten aller Zustandsgrößen vorausgesetzt, so daß das betrachtete System praktisch jederzeit als im statischen Gleichgewicht befindlich angesehen werden darf. Dies gilt auch für die vereinfachte Berechnung der zur Beschleunigung eines Geschosses in einem Geschützrohr oder Gewehrlauf wirksamen Gasdrücke. Da neben dem Geschoß auch ein wesentlicher Teil der Pulvergase beschleunigt werden muß, ergibt sich von selbst die Frage, wann diese einfachen rechnerischen Voraussetzungen mit den praktischen Vorgängen nicht mehr übereinstimmen, d. h. also unter welchen Umständen man Abweichungen zwischen den tatsächlich am Geschoß wirksamen Gasdrücken und den nach der vereinfachten Rechnung erwarten muß.

Der Einfluß der Massenträgheit der Pulvergase wird in der inneren Ballistik meist nach Piobert und St. Robert bzw. nach Sébert berücksichtigt, die auf Grund plausibler Annahmen eine einfache analytische Beziehung dafür entwickelten[1]). Danach wird die Masse des Geschosses um einen bestimmten zeitlich unveränderlichen Bruchteil der Masse der Pulvergase vergrößert in die Rechnung eingesetzt und dann der Gasdruck an allen Stellen des Gasraumes als in gleicher Weise zeitlich veränderlich vorausgesetzt. Der Bruchteil der auf diese Weise berücksichtigten Pulvergase wird vielfach auch als Mitbeschleunigungsfaktor bezeichnet und beträgt erfahrungsgemäß nach Sébert 0,5; d. h. also, man denkt sich die Hälfte der Pulvergasmasse als mit dem Geschoß beschleunigt und rechnet dann so, als ob im Gasraum keine Druckunterschiede auftreten würden.

Nachstehend soll nun gezeigt werden, wie diese durch praktische Erfahrungen vielfach bestätigten Annahmen auch theoretisch begründet werden können. Zu diesem Zweck ist es notwendig, die tatsächlichen Vorgänge beim Schuß etwas genauer zu betrachten.

Die sehr große Geschoßbeschleunigung in Geschützrohren und die damit verbundene kurze Zeitdauer des Vorganges kann sich in mehrfacher Hinsicht bemerkbar machen. Erinnert sei nur an den Einfluß der Zeit auf die Verbrennung des Pulvers bzw. die damit verbundene Drucksteigerung. In der vorliegenden Arbeit soll vorwiegend nur der Einfluß der Zeit auf die Ausdehnung der Pulvergase betrachtet werden. Bei näherer Überlegung zeigt sich, daß diese Frage eine Beantwortung in zwei verschiedenen Richtungen erfordert, und zwar im Hinblick auf die Massenträgheit der Pulvergase sowie bezüglich der durch die Dämpfungswirkungen bedingten Einflüsse; von diesen sind neben Zähigkeit, Wärmeleitfähigkeit sowie Stoßdämpfung vor allem auch die besonderen Einflüsse des molekularen Aufbaues der Gase zu beachten.

Die Massenwirkungen können mit den Gesetzen der Thermodynamik bzw. Gasdynamik erfaßt werden. Infolge endlicher Geschoßbeschleunigung entstehen dadurch im Rohr Druckunterschiede, die sich den aus thermodynamischen Rechnungen bestimmten Mittelwerten des zeitveränderlichen Druckes überlagern. Hierdurch ergeben sich kleinere Gasdrücke auf den Geschoßboden, die unmittelbar eine geringere Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses zur Folge haben.

Von den Dämpfungswirkungen können die Einflüsse der endlichen Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit eines Gases sowie die Stoßdämpfung theoretisch noch an Hand der klassischen Gasdynamik verfolgt werden. Die molekular bedingten Einflüsse können damit jedoch nicht mehr erfaßt werden, da sie durch die besonderen Eigenschaften der kleinsten Teilchen, der Moleküle der Pulvergase, verursacht werden; sie können nur mit Hilfe der kinetischen Gastheorie erklärt und berechnet werden. Physikalisch dürften sie im wesentlichen durch eine begrenzte Schnelligkeit für die gegenseitige Umwandlung der im Molekül gespeicherten kinetischen Energien — also der auf drei Freiheitsgrade verteilten Translations-, der Rotations- und der Schwingungsenergie im Molekül — erklärlich sein.

Alle diese Abweichungen können durch einfache Messung des veränderlichen Gasdruckes in der bisher üblichen Form mit einer Meßstelle an irgendeinem Punkt der Rohrwand nicht festgestellt werden.

In der Literatur wurde schon mehrfach der Versuch gemacht, den Einfluß der endlichen Geschwindigkeit der Ausdehnung von Gasen rechnerisch zu erfassen; dies geschah vielfach auf Grund gaskinetischer Überlegungen. Frühere Arbeiten[2]) ergaben selbst bei Vernachlässigung der g...

*) A 9.

[1]) Vgl. hierzu C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik, Springer Berlin, 2. Auflage 1926, Bd. II, S. 217/18; 1927, Bd. III, S. 241/44.

[2]) L. Vahl, Zustandsänderungen idealer Gase mit endlicher Geschwindigkeit, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 4 (1933) S. 31/37. — M. Paul, Über die Abhängigkeit der Entropievermehrung quasiadiabatischer Arbeitsprozesse, Ann. d. Physik Bd. 29 (1937) S. 179/88.

E. Justi u. M. Kohler, Wirkungsgradverschlechterung von Wärmekraftmaschinen infolge hoher Kolbengeschwindigkeit, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 9 (1938) S. 242/51 und S. 310.

8123

nämlichen Dämpfungswirkungen einen großen Einfluß der endlichen Geschwindigkeit der Verdichtung bzw. Ausdehnung auf den Gasdruck in der Weise, daß ein verhältnismäßig sehr großer Verlust an mechanischer Energie eintreten sollte. Ein derartiger Verlust kann nach den bisher vorliegenden technischen Versuchen in dieser Größe jedoch keinesfalls bestehen.

Neuere Arbeiten auf diesem Gebiet liefern dagegen unter den gleichen Voraussetzungen theoretisch keine Verluste an mechanischer Energie. Mit Hilfe der kinetischen Gastheorie durchgeführte Entwicklungen[3]) ergeben bei Vernachlässigung der Zähigkeit des Gases keine Unterschiede zwischen den nach der klassischen Gasdynamik berechenbaren Gasdrücken auf eine bewegte Wand und den gaskinetisch bestimmbaren Werten. An Hand der klassischen Gasdynamik durchgeführte Überlegungen[4]) zeigen andererseits, daß die widersprechenden Ergebnisse in früheren Arbeiten[2]) offenbar auf die ungenügende Beachtung der Randbedingungen zurückzuführen sind. Aus dem gleichen Grund ist auch die interessante Arbeit von Schweikert[5]), die die innerballistischen Vorgänge beim Schuß auf gaskinetischer Grundlage behandelt, physikalisch nicht einwandfrei, obwohl nach diesen Überlegungen in vielen Fällen mit den wirklichen Vorgängen größenordnungsweise übereinstimmende Ergebnisse berechenbar sind.

Die durch Gasstöße verursachten Verluste an mechanischer Energie können aus den bekannten Eigenschaften des Verdichtungsstoßes in Gasen oder Dämpfen bestimmt werden. Für die Verdichtung des Gases um einen endlichen Drucksprung steht dabei nur eine äußerst kurze Zeit zur Verfügung[6]). Von den Eigenschaften des Verdichtungsstoßes ausgehend, wurde in dem Schrifttum[7]) auch schon versucht, die Zustandsänderungen idealer Gase mit endlicher Geschwindigkeit zu berechnen. Jedoch auch dieser Versuch dürfte den wahren Verhältnissen nicht gerecht werden, da er vor allem ruckweise Beschleunigungen zur Voraussetzung hat.

Für das hier vorgeschlagene Berechnungsverfahren zur Berücksichtigung der Massenträgheit der Pulvergase ergibt sich der folgende Rechnungsgang. Zunächst wird vorausgesetzt, daß die Wärmeabfuhr eines Gasteilchens zu seiner Temperaturänderung verhältnisgleich ist. Der erste Hauptsatz der Wärmelehre liefert dann in Verbindung mit der Zustandsgleichung realer Gase für jedes Gasteilchen die bekannte Gleichung der polytropischen Zustandsänderung als Abhängigkeit zwischen Druck, Temperatur und spezifischem Volumen eines Gasteilchens. Dadurch ergeben sich zwar Ungenauigkeiten infolge ungenügender Berücksichtigung der Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit der Gase sowie des Wärmeüberganges an die Rohrwand, die jedoch im Hinblick auf die Vereinfachung der Rechnung als praktische Näherung hingenommen werden müssen; durch Verwendung örtlich verschiedener polytropischer Exponenten können sie u. U. noch gemildert werden. Auch die Beschreibung des Weges der Gasteilchen hinter dem von ihnen bewegten Geschoß erfolgt unter Vernachlässigung der Zähigkeit des Gases und für vernachlässigbare Wirbelung im Gasraum als eindimensionale Bewegung an Hand der Eulerschen Bewegungsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung für Gase. Die Vernachlässigung der Wirkungen der Zähigkeit ist dabei hinsichtlich der Relativbewegungen der einzelnen Gasteilchen von völlig untergeordneter Bedeutung, dagegen für die Wechselwirkungen zwischen Gas und Zylinderwand bzw. festen Pulverteilchen nur als Idealzustand gerechtfertigt. Die Beschränkung auf einen praktisch wirbelfreien Gasraum und auf ebene Zustandsfelder stellt gleichfalls einen Idealfall dar, der jedoch meist infolge der geringen Unterschiede in den Durchmessern des gezogenen Rohres und der Pulverkammer gut verwirklicht ist.

II. Theoretische Grundlagen der Entwicklungen.

1. Die Grundgleichungen.

Bei den im Geschützrohr sich abspielenden Vorgängen muß für jedes einzelne Gasteilchen[8]) der Satz von der Erhaltung der Energie erfüllt sein. Betrachtet man zur Vereinfachung der Entwicklungen nur solche Zustandsänderungen der Pulvergase, bei denen die Wärmeaufnahme bezw. Wärmeabgabe je Gewichtseinheit des Gases zur jeweiligen Temperaturänderung verhältnisgleich ist, so gilt für jedes beliebige Teilchen im Geschützrohr der erste Hauptsatz der Wärmelehre in folgender Form:

$$c_v \cdot dT + A\,P\,dv = c_n \cdot dT \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Dabei bedeuten:

T (°K)	die absolute Temperatur des Gasteilchens,
P (kg/m²)	den absoluten Druck im Gasteilchen,
v (m³/kg)	das spezifische Volumen des Gases im betrachteten Teilchen,
c_v (kcal/kg°K)	die spezifische Wärme des Gases im betrachteten Teilchen bei unveränderlichem Raum,
A (kcal/m kg)	das mechanische Wärmeäquivalent,
c_n (kcal/kg°K)	die spezifische Wärme bei polytropischer Zustandsänderung der Gase in einem Teilchen, also:

$$c_n = c_v \frac{n - \varkappa}{n - 1}$$

wenn n der von Gasteilchen zu Gasteilchen veränderliche polytropische Exponent ist, der im allgemeinen für die einzelnen Abschnitte des Abschußvorganges verschieden gewählt werden muß; $\varkappa = c_p/c_v$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen[9]) des Gases bei unveränderlichem Druck bzw. Raum.

Außerdem soll für jedes Gasteilchen auch die Zustandsgleichung für reale Gase unter Berücksichtigung des Kovolumens (Abelsche Gleichung) gelten.

$$P\,(v - \alpha) = R\,T \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

wenn bedeuten:

α (m³/kg)	das Kovolumen der Pulvergase, das im allgemeinen noch eine Funktion von v sein kann,
R (m/°K)	die Gaskonstante des Gases im betrachteten Teilchen.

Der Bewegungszustand eines Gasteilchens wird durch das Kräftespiel an seiner Hülle beschrieben. Dabei soll zur Vereinfachung der Darstellung die Zähigkeit und Wirbelung des Gases ganz vernachlässigt werden. Beschränkt man die Untersuchungen auf zylindrische Rohre mit praktisch ebenem Verschlußstück (Stoßboden) sowie auf ebene Geschoßböden, so können sich die Gasteilchen bei den Bewegungen des Geschosses nur in Richtung der Rohrachse, also auf geradlinigen und parallelen Bahnen bewegen (s. Bild 1). Dabei wird ferner vorausgesetzt, daß die Pulverladung bzw. die einzelnen Pulverkörner vor ihrer vollkommenen Verbrennung die Gasbewegung nicht wesentlich beeinflussen. Dies dürfte in erster Näherung praktisch meist zutreffen, da der wesentlichste Teil des Pulvers noch bei

---

[2]) W. u. G. Meißner, Die gaskinetischen Vorgänge in einem Expansionszylinder, Ann. d. Physik 5. Folge Bd. 36 (1939) S. 303/18 (hier noch weitere Literaturangaben).

[3]) H. Pfriem, Zur Frage des Gasdruckes auf bewegte Wände, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 13 (1942) H. 2 S. 76/82.

[4]) G. Schweikert, Innere Ballistik, Leipzig 1923, insbes. S. 6/61.

[5]) Vgl. hierzu beispielsweise R. Becker, Stoßwelle und Detonation, Z. f. Physik Bd. VIII (1922) S. 321/62.

[6]) G. Eichelberg, Zustandsänderungen idealer Gase mit endlicher Geschwindigkeit, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 5 (1934) S. 127/29.

[8]) Als Gasteilchen soll jeweils eine genügend kleine Gasmenge angenommen werden, die aber noch eine ausreichend große Zahl von Molekülen enthält, so daß die phänomenologische Betrachtungsweise der Thermodynamik gültig bleibt.

[9]) Da in den vorliegenden Betrachtungen molekulare Vorgänge unberücksichtigt bleiben, ist $\varkappa = c_p/c_v$ unabhängig von der Geschwindigkeit der Verdichtung. (Über die Änderung der spez. Wärmen mit der Geschwindigkeit der Verdichtung vgl. die Erscheinung der „Schalldispersion“ beispielsweise in A. O. Kneser, Ann. d. Phys. Bd. 11 (1931) S. 761/76 und 777/801, oder Z. techn. Phys. Bd. 19 (1938) S. 486/92; hier weitere Angaben über einschlägiges Schrifttum.)

8124

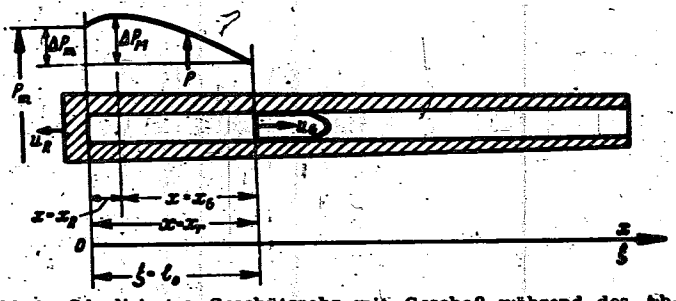


Bild 1. Idealisiertes Geschützrohr mit Geschoß während des Abschusses. Die eingetragene Kurve zeigt schematisch die augenblickliche Druckverteilung im Gasraum zwischen Stoß- und Geschoßboden.

kleinen Geschoß- und damit Gasgeschwindigkeiten verbrennt. Dieser Bewegungszustand der Pulvergase kann durch ebene Koordinaten beschrieben werden und muß daher der Eulerschen Differentialgleichung[10]) in folgender Form genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g v \frac{\partial P}{\partial x} \quad \ldots\ldots (3)$$

Darin bedeuten:

u (m/s) die Eigengeschwindigkeit eines Gasteilchens,
τ (s) die Zeit,
x (m) die Koordinate eines Raumpunktes und
g (m/s²) die Erdbeschleunigung.

Schließlich muß noch zur Wahrung der Stetigkeit der Bewegungen und Gaszustände im Rohr die Kontinuitätsbedingung erfüllt sein; diese lautet für das ebene, zunächst quellfreie Strömungsfeld[10]) eines Gases:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{v}\right)}{\partial \tau} + \frac{\partial \left(\frac{u}{v}\right)}{\partial x} = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

Bei der Vergasung des Pulvers unmittelbar nach der Zündung kann jedes einzelne Pulverkörnchen als Gasquelle aufgefaßt werden. Zur rechnerisch einfachen Erfassung soll nun die Verteilung dieser Gasquellen als vollkommen stetig über den gesamten Gasraum angenommen werden. Die rechte Seite der vorstehenden Gl. (4) muß in diesem Fall nicht Null, sondern gleich der Ergiebigkeit der Gasquellen sein, die zeitlich und je nach den Umständen auch örtlich veränderlich sein kann.

Da die Vergasung des Pulvers im allgemeinen zum größten Teil beendet ist bevor das Geschoß im Rohr einen größeren Weg zurückgelegt hat, kann man als einfachste Näherung annehmen, daß die zeitliche Abhängigkeit der Quellergiebigkeit für alle Raumelemente gleich ist. Dies hat zur Voraussetzung, daß alle Pulverteilchen die gleiche Geschwindigkeit annehmen wie die Gasteilchen in ihrer unmittelbaren Umgebung und alle nach dem gleichen Gesetz verbrennen; bleiben sie hinter der Bewegung der Gasteilchen zurück oder verbrennen sie in der Nähe des Geschoßbodens langsamer, so entstehen größere Druckunterschiede; werden sie dagegen hinter dem Geschoßboden zusammengedrängt oder verbrennen hier schneller, so entstehen kleinere Druckunterschiede im Gasraum als mit dieser vereinfachenden Voraussetzung berechnet werden können.

Bei der einfachen Annahme räumlich stetiger Quellergiebigkeit kann in der vorstehenden Kontinuitätsgleichung (4) und entsprechend auch in der Bewegungsgleichung (3) das spezifische Volumen v auch als Mittelwert über alle in der Raumeinheit befindlichen Masseteilchen angesehen werden und soll dann mit v^* gekennzeichnet werden; es ist also:

$$v^* = v \cdot y + v_p (1 - y) \quad \ldots\ldots (5)$$

wenn bedeuten:

v^* (m³/kg) der mittlere spezifische Rauminhalt eines noch feste Pulverteilchen einschließenden Gasteilchens,
v bzw. v_P (m³/kg) die spezifischen Rauminhalte der Pulvergase bzw. des festen Pulvers,
y der Bruchteil an vergastem Pulver.

Die zeitliche Abhängigkeit von y wird in der Pyrotechnik meist nach Charbonnier[11]) in folgender Weise berücksichtigt:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \varphi(y) \cdot P(\xi, \tau) \quad \ldots\ldots (6)$$

dabei ist $\varphi(y)$ eine von der Art des Pulvers abhängige Funktion.

Aus Gl. (5) ergibt sich vor der Zündung mit $y = 0$: $v^* = v_p$ und nach vollständiger Verbrennung mit $y = 1$: $v^* = v$. Die folgenden Überlegungen gehen also mit $y = 1$ selbsttätig in die für reine Gase über. Der Lufteinschluß in den Zwischenräumen des Pulvers könnte allgemein in v_p oder in y berücksichtigt werden; nach der vorstehenden Festlegung für y wird dieser Einfluß hier in v_p erfaßt.

Unter Verwendung des substantiellen Differentialquotienten $\left(\frac{D}{d\tau}\right)$ an Stelle der Summe aus der lokalen $\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)$ und konvektiven $\left(u \frac{\partial}{\partial x}\right)$ Änderung eines Gaszustandes kann man die Bewegungsgleichung (3) in nachstehender Weise schreiben:

$$\frac{Du}{d\tau} = -g v^* \frac{\partial P}{\partial x} \quad \ldots\ldots (7)$$

Die Kontinuitätsgleichung (4) kann ferner nach einfachen Umformungen unter Berücksichtigung der allmählichen Vergasung des Pulvers in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{Dv^*}{d\tau} = v^* \frac{\partial u}{\partial x} \quad \ldots\ldots (8)$$

Die sechs Gleichungen (1), (2), (5), (6), (7) und (8) beschreiben also bei bekanntem Vergasungsgesetz $\varphi(y)$ mit den Anfangsbedingungen und den Randbedingungen an den gasseitigen Oberflächen des Rohrverschlusses ($u = u_R$) und des Geschoßbodens ($u = u_G$) eindeutig die Zustände des im Geschützrohr eingeschlossenen Gases unter dem Einfluß des sich mit der Geschwindigkeit u_R bzw. u_G bewegenden Geschützrohres bzw. Geschosses und mit der Voraussetzung eines genügend schnell und gleichmäßig abbrennenden Pulvers. Daher müssen durch diese Beziehungen auch die infolge der endlichen Beschleunigungen auftretenden Druckunterschiede im Gasraum erfaßt werden.

2. Umformung der Differentialgleichungen.

In den vorstehenden Gleichungen wurden zunächst ohne besonderen Hinweis zwei verschiedene Betrachtungsweisen verwendet. Die Gleichungen (1), (2), (5) und (6) beziehen sich nämlich zunächst auf Gasteilchen, also auf bestimmte Massenpunkte, dagegen die Gleichungen (7) und (8) auf die Vorgänge in Raumpunkten. Die letzte Betrachtungsweise ist im allgemeinen für Strömungsvorgänge gebräuchlicher. Es zeigt sich aber, daß für das vorliegende ebene Problem die Beschreibung in Massenpunkten wesentliche Vorteile bietet. Daher sollen auch die Gleichungen (7) und (8) noch entsprechend umgeformt werden.

Infolge der Betrachtung eines ganz bestimmten Gasteilchens besteht dabei nur noch eine Änderung seiner Geschwindigkeit nach der Zeit, so daß also die vereinfachte Schreibweise der vorstehenden Differentialgleichungen (7) und (8) durch Zusammenziehung der konvektiven und lokalen Beschleunigung zur substantiellen nicht mehr nur formaler Natur ist. Daher besteht nur noch die Aufgabe, die Raumpunktkoordinate (Eulersche Koordinate) x in eine Massenpunktkoordinate ξ (auch teilchenfeste, Lagrangesche oder substantielle Koordinate genannt) umzuwandeln.

Eine Massenpunktkoordinate stellt sozusagen die Numerierung der einzelnen hintereinander liegenden Gas-

[10]) Vgl. z. B. Hütte, 26. Aufl. S. 359 bzw. 360 oder H. Geiger und K. Scheel, Handbuch der Physik, Springer Berlin (1927) Bd. VII, S. 290/92.

[11]) Vgl. z. B. C. Cranz[1]) a. a. O. Ergänzungsband Springer Berlin 1936, S. 136.

teilchen dar (daher auch die Bezeichnung Nummerierungskoordinate); jedes Teilchen behält seine einmal festgelegte Massenpunktkoordinate für die Dauer des gesamten Vorganges stets unverändert bei. Ihre einmalige Festlegung ist an sich willkürlich; sie kann beispielsweise durch die Raumpunktkoordinate im Ruhezustand des ganzen Systems erfolgen. Kennzeichnet man diesen Ruhezustand durch den Zeiger »Null«, so muß also für die Dicke einer ebenen elementaren Gasschicht längs einer isothermen Fläche je Einheit derselben auf Grund des Satzes von der Erhaltung der Masse die folgende Beziehung gelten:

$$\frac{dx}{v^*} = \frac{d\xi}{v_0^*} \quad \text{oder} \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{v_0^*}{v^*} \quad \ldots\ldots (9)$$

wenn ξ (m) die Massenpunktkoordinate eines Gasteilchens ist, die durch die Raumpunktkoordinate des Gasteilchens in seinem Ruhezustand (Zeiger »Null«) definiert ist.

Dabei können im allgemeinen die durch den Zeiger »Null« gekennzeichneten Bezugszustände noch von Gasteilchen zu Gasteilchen verschieden, d. h. also Funktionen von ξ sein.

Unter Verwendung dieser Gl. (9) kann man nun die beiden Differentialgleichungen (7) und (8) ohne Schwierigkeiten auch in Massenpunktkoordinaten anschreiben und findet so zunächst die Eulersche Differentialgleichung für ebene Probleme in Massenpunktkoordinaten.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -g v_0^* \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad \ldots\ldots (10)$$

Entsprechend erhält man die Kontinuitätsbedingung in folgender Form:

$$\frac{\partial v^*}{\partial \tau} = v_0^* \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \ldots\ldots (11)$$

In dieser Darstellung ergeben sich also an Stelle der verwickelten Gl. (7) und (8) zwei einfachere partielle Differentialgleichungen mit unveränderlichen Koeffizienten. Eliminiert man daraus noch die Eigengeschwindigkeit u der Gasteilchen durch entsprechende Differentiation, so findet man die folgende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit unveränderlichem Koeffizienten:

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial \tau^2} = -g v_0^{*2} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \quad \ldots\ldots (12)$$

Vernachlässigt man die Veränderlichkeit des Kovolumens α des Gases, so ergibt sich ferner durch Einsetzen von Gl. (2) in Gl. (1) mit $AR = c_p - c_v$ nach Integration die bekannte Gleichung für polytropische Zustandsänderungen eines reinen Gases:

$$T(v-\alpha)^{n-1} = T_0 (v_0 - \alpha)^{n-1}$$
$$\text{oder } P(v-\alpha)^n = P_0 (v_0 - \alpha)^n \quad \ldots\ldots (13)$$

wobei der Zeiger »Null« wieder die zeitlich unveränderlichen Bezugszustände eines bestimmsen Gasteilchens andeutet.

Die je Gewichtseinheit des Gases im betrachteten Gasteilchen zugeführte Wärmemenge ist nach der folgenden Beziehung berechenbar:

$$Q = c_n (T - T_0) = c_v \frac{n-\varkappa}{n-1} (T - T_0).$$

Durch geeignete Wahl des Exponenten n, der theoretisch noch eine Funktion von ξ sein darf, kann auf diese Weise neben der Verbrennungswärme des Pulvers vor allem auch die Wärmeabgabe der Pulvergase an die Rohrwand annähernd berücksichtigt werden.

Ersetzt man v in Gl. (13) nach Gl. (5), so findet man schließlich für die Zustandsänderung des Gas-Pulvergemisches die Beziehung:

$$P[(v^* - v_p)/y + (v_p - \alpha)]^n = P_0 (v_0 - \alpha)^n \quad \ldots (14)$$

Für adiabatisch-isentrope Zustandsänderung der Gasteilchen wird in allen vorstehenden Beziehungen der polytropische Exponent $n = \varkappa$.

Die drei Gleichungen (6), (12) und (14) beschreiben mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen eindeutig die Zustandsänderungen aller Gasteilchen in einem zeitveränderlichen Gasraum mit gleichmäßig verteilten, brennenden Pulverkörnern bei ebenen Zustandsfeldern. Die Rechnung ist dabei in üblicher Weise in verschiedenen Abschnitten durchzuführen, also mindestens zu unterteilen in die Zeiträume vor und nach der vollständigen Verbrennung der Pulvergasteilchen, bzw. in die Abschnitte ruhendes und bewegtes Geschoß usw. Insbesondere beschreiben die Gl. (12) und (13) (bzw. Gl. (14) mit $y = 1$ und $v^* = v$) neben den Zustandsänderungen der reinen Pulvergase in einem Geschützrohr auch alle ebenen Druckfelder[12]) in einer reinen Gasatmosphäre innerhalb eines begrenzten Raumes; beispielsweise beschreiben sie auch die vor dem Geschoß im Geschützrohr entstehende Druckwelle. Dabei ist innerhalb des Gasraumes keine Dämpfung berücksichtigt, da neben Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit[13]) des Gases auch die innermolekularen Vorgänge ganz vernachlässigt wurden.

Trotzdem nach den vorstehenden Beziehungen auch bei Ausdehnung der Gase mit beliebig hoher Geschwindigkeit theoretisch keine Verluste an mechanischer Energie eintreten können, wirken infolge der Massenträgheit des Gases bei endlicher Beschleunigung am Geschoßboden kleinere Gaskräfte als bei der Ausdehnung mit geringer gleichförmiger Geschwindigkeit. Dadurch kann dem Geschoß infolge dieser Massenträgheit der Gase nur eine kleinere Mündungswucht bzw. Geschwindigkeit erteilt werden. Der dem Geschoß gegenüber statischer Rechnung fehlende Betrag an mechanischer Energie ist dabei in den Pulvergasen in Form von Strömungsenergie gespeichert. Diese wird nachdem das Geschoß das Rohr verlassen hat teilweise zur Erzeugung der Mündungsknallwelle verwendet und zum größeren Teil in der Atmosphäre verwirbelt.

Nachstehend soll nun versucht werden, durch geeignete Umformung und praktisch zulässige Vereinfachungen die bisher entwickelten Gleichungen zu lösen und damit die genaueren Zusammenhänge für den wirksamen Gasdruck auf den Geschoßboden zu finden.

III. Verfahren zur Ermittlung des Druckfeldes hinter dem Geschoß.

1. Umformung und Vereinfachung der Differentialgleichungen.

Infolge des nichtlinearen Zusammenhanges zwischen dem Druck P, dem spezifischen Volumen v^* und y nach den Gl. (6) und (14) ist eine exakte Integration der Differentialgleichung (12) praktisch nicht möglich. Zur Entwicklung eines geeigneten Näherungsverfahrens sollen daher diese Gleichungen zunächst noch etwas umgeformt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Zustandsänderungen eines Gasteilchens als Summe aus einer nur zeitveränderlichen und einer örtlich und zeitlich veränderlichen Funktion darstellen und findet dann:

$$P(\xi, \tau) = P_m(\tau) + \Delta P(\xi, \tau) \quad \ldots\ldots (15)$$

Die reine Zeitfunktion $P_m(\tau)$ stellt dabei physikalisch einen mittleren Gasdruck dar, während $\Delta P(\xi, \tau)$ die überlagerten Druckunterschiede im Gasraum angibt.

Entsprechend kann man auch für das spezifische Volumen des Gas-Pulver-Gemisches im Rohr setzen:

$$v^*(\xi, \tau) = v_m(\tau) + \Delta v^*(\xi, \tau) \quad \ldots\ldots (16)$$

$v_m(\tau) = v_m^*(\tau)$ stellt dabei ganz entsprechend einen Mittelwert des spezifischen Volumens aller Masseteilchen in dem betrachteten Gasraum dar, während $\Delta v^*(\xi, \tau)$ die überlagerten Unterschiede in ihm liefert.

Setzt man diese Gl. (15) und (16) in Gl. (14) ein, so erhält man zunächst:

$$(P_m + \Delta P)\left[\frac{v_m - \alpha}{y} + \frac{\Delta v^*}{y} - (v_p - \alpha)\frac{1-y}{y}\right]^n = P_0 (v_0 - \alpha)^n$$

[12]) Vgl. hierzu auch H. Pfriem, Der Einfluß der Kolbenbeschleunigung auf die Verdichtung von Gasen, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 13 (1942) H. 3, S. 112/24 und derselbe, Zur gegenseitigen Überlagerung ungedämpfter ebener Gaswellen großer Schwingungsweite, Akust. Z. Bd. 7 (1942) S. 56/65 (hier weitere Hinweise auf einschlägiges Schrifttum).

[13]) Vgl. hierzu H. Pfriem, Nichtstationäre Wärmeübertragung in Gasen, Berlin 1942 VDI-Forsch. H. 413 und derselbe, Der Wärmeübergang bei schnellen Druckänderungen in Gasen, VDI-Forsch. Bd. 13 (1942) H. 4 S. 150/64.

8126 8123

oder

$$P_m \left[\frac{(v_m - \alpha)}{(v_p - \alpha)(1 - y)} \right]^n \times \left(1 + \frac{\Delta P}{P_m}\right) \left[1 + \frac{\Delta v^*}{(v_m - \alpha)(v_p - \alpha)(1 - y)}\right]^n = P_0 \left(\frac{v_0}{v_p} - \alpha\right)^n \quad \ldots (17)$$

Definiert man nun v_m als den jeweiligen räumlichen Mittelwert des spezifischen Volumens des Gas-Pulver-Gemisches, so kann man diesen auch durch den gesamten zeitveränderlichen Gasraum $V(\tau)$ hinter dem Geschoß und das unveränderliche Gewicht L der Pulverladung wie folgt darstellen:

$$v_m(\tau) = \frac{V(\tau)}{L} = \frac{v_0^*}{l_0} x_r(\tau) \quad \ldots (18)$$

wenn bedeuten:

l_0 (m) die Länge des mit Pulver gefüllten Laderaumes bei Reduktion seines Querschnittes auf den Seelenquerschnitt des Rohres,

x_r (m) der relative Weg des Geschosses im Rohr (wobei der Ursprung von x_r im Stoßboden des Rohres liegt, s. Bild 1).

Der mittlere Gasdruck kann ferner entsprechend den thermodynamischen Zusammenhängen in folgender Weise definiert werden

$$P_m \left[\frac{(v_m - \alpha)}{(v_p - \alpha)(1 - y)} \right]^n = P_0 \left(\frac{v_0}{v_p} - \alpha\right)^n \quad (19)$$

Die so festgelegten Mittelwerte P_m und v_m entsprechen dann den thermodynamisch berechenbaren Mittelwerten bei bisherigen Berechnungen dieser Art.

Setzt man schließlich noch zur Vereinfachung der gesamten Entwicklungen und mit Rücksicht auf die beschränkte Genauigkeit des Vergasungsgesetzes eines Pulvers voraus, daß man in Gl. (6) den örtlich und zeitlich veränderlichen Druck $P = P(\xi, \tau)$ durch den Mittelwert $P_m(\tau)$ des Gasdruckes im betrachteten Raum ersetzen darf, so ergibt sich an Stelle von Gl. (6) die Beziehung:

$$\frac{dy}{d\tau} = \varphi(y)\, P_m(\tau) \quad \ldots (20)$$

Damit kann der Vorgang der Vergasung des Pulvers in der bisher üblichen Berechnungsweise berücksichtigt werden. Zur Bestimmung der für die Geschoßbeschleunigung wichtigen wirklichen Gasdrücke auf den Geschoßboden verbleiben dann noch die nachstehend entwickelten Bedingungen.

An Hand der Gl. (17) erhält man in Verbindung mit Gl. (19) unmittelbar an Stelle von Gl. (14) für die Unterschiede im Gasraum die exakte Beziehung:

$$\frac{\Delta v^*}{(v_m - \alpha)(v_p - \alpha)(1 - y)} = \left(1 + \frac{\Delta P}{P_m}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (21)$$

Entwickelt man diese Beziehung nach einer binomischen Reihe, so erhält man:

$$\frac{\Delta v^*}{(v_m - \alpha)(v_p - \alpha)(1 - y)} = \frac{1}{n}\frac{\Delta P}{P_m} + \frac{1}{n^2}\frac{n+1}{2}\left(\frac{\Delta P}{P_m}\right)^2 + \frac{1}{n^3}\frac{(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}\left(\frac{\Delta P}{P_m}\right)^3 + \ldots \quad (22)$$

Diese Reihe ist für Werte von $\frac{\Delta P}{P_m} < 1$ absolut konvergent.

Für genügend kleine Werte von $\frac{\Delta P}{P_m}$ findet man daher in erster Näherung:

$$\frac{\Delta v^*}{(v_m - \alpha)(v_p - \alpha)(1 - y)} \approx \frac{1}{n}\frac{\Delta P}{P_m} \quad \ldots (23)$$

Dabei ist vorausgesetzt:

$$\frac{n+1}{2n^2}\left(\frac{\Delta P}{P_m}\right)^2 \left[1 - \frac{2n+1}{3n}\frac{\Delta P}{P_m}\right] \ll 1 \quad \ldots (23a)$$

Mit den Gl. (15) und (16) geht ferner die Differentialgleichung (12) in die nachstehende Form über:

$$\frac{d^2 v_m}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \Delta v^*}{\partial \tau^2} = g\, v_0^{*2} \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \xi^2} \quad \ldots (24)$$

Diese Differentialgleichung (24) beschreibt also in Verbindung mit den Gl. (18) und (21) oder (22) die Unterschiede der Gaszustände im Rohr hinter dem Geschoß noch vollkommen exakt, wenn die zeitliche Abhängigkeit der Vergasung des Pulvers $y(\tau)$ bekannt ist.

Beim Schuß ist nun im allgemeinen infolge der verhältnismäßig großen Geschoßmasse die zeitliche Änderung des Gasraumes hinter dem Geschoß wesentlich größer als die Änderung der Unterschiede Δv^* der spezifischen Rauminhalte der Pulvergase, so daß man in erster Näherung, also $\partial^2 \Delta v^*/\partial \tau^2$ als sehr klein gegenüber $d^2 v_m/d\tau^2$ vernachlässigen kann; an Stelle der Gl. (24) erhält man dann die einfache Beziehung:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \xi^2} = \frac{1}{g\, v_0^{*2}} \frac{d^2 v_m}{d\tau^2} \quad \ldots (25)$$

Diese einfache Differentialgleichung erlaubt in Verbindung mit Gl. (18) zunächst die Bestimmung einer ersten Näherungslösung für die als Folge der hohen Beschleunigung des Geschosses im Gasraum hinter diesem auftretenden Druckunterschiede. Sie soll nachstehend vor allem mit dem Ziel integriert werden, jene Verringerung der Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses zu ermitteln, die sich infolge der Massenträgheit der Pulvergase einstellt.

2. Das Zustandsfeld im Rohr.

Für die folgenden Entwicklungen, die in erster Linie der Erfassung des Einflusses der Massenträgheit der Pulvergase auf die Mündungsgeschwindigkeit bzw. auf die Beschleunigung des Geschosses dienen, sollen zunächst für eine gegebene Anordnung in Form einer Nachrechnung, also vor allem mit der Voraussetzung durchgeführt werden, daß die zeitliche Abhängigkeit der Geschoßgeschwindigkeit im Rohr bekannt ist. Man findet dann allgemein mit Hilfe von Gl. (18):

$$\frac{d^2 v_m}{d\tau^2} = \frac{v_0^*}{l_0} \cdot \frac{d^2 x_r}{d\tau^2} = \frac{v_0^*}{l_0} \cdot \frac{d u_r}{d\tau} = \frac{v_0^*}{l_0} b_r \quad \ldots (26)$$

wenn bedeuten:

u_r (m/s) die relative Geschwindigkeit des Geschosses gegenüber dem Rohr und

b_r (m/s²) die relative Beschleunigung des Geschosses gegenüber dem Rohr.

Setzt man diese Beziehung in Gl. (25) ein, so erhält man:

$$g\, v_0^{*2} \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \xi^2} = \frac{v_0^*}{l_0} b_r(\tau) \quad \ldots (27)$$

Hieraus ergibt sich das Druckfeld in einem Geschützrohr durch zweimalige Integration nach ξ in der Form:

$$g\, v_0^{*2} \Delta P = \xi^2 \frac{v_0^*}{2 l_0} b_r(\tau) + \xi f_0(\tau) + f_{00}(\tau),$$

wenn $f_0(\tau)$ und $f_{00}(\tau)$ zunächst noch willkürliche Funktionen der Zeit darstellen.

Da nach Voraussetzung alle nur zeitveränderlichen Drücke in $P_m(\tau)$ enthalten sind, kann hierin ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f_{00}(\tau) = 0$ gesetzt werden. Damit findet man nach Gl. (10) für die Geschwindigkeit eines beliebigen Gasteilchens im Rohr die Beziehung:

$$u = \frac{\xi}{l_0} u_r(\tau) + \frac{1}{v_0^*} \int_0^\tau f_0(\tau)\, d\tau + h(\xi)$$

wenn $h(\xi)$ eine willkürliche Funktion von ξ ist.

Als Randbedingungen bestehen die Vorschriften, daß am Rohrverschluß (Stoßboden), wo der Ursprung $\xi = 0$ des Massenpunkt-Koordinatensystems liegen soll, die absolute Geschwindigkeit der Gasteilchen stets gleich der des zurücklaufenden Rohres (u_R) ist; ferner, daß die absolute Geschwindigkeit der Gasteilchen am Geschoßboden gleich der des Geschosses (u_G) ist. Als Anfangsbedingung besteht die Forderung, daß im Augenblick $\tau = 0$ des Beginnes der

8127

Geschoßbewegung sich noch alle Gasteilchen in Ruhe befinden.

Die zeitliche Anfangsbedingung ergibt für $\tau = 0$:

$$h(\xi) = 0,$$

da dann $u_r(0) = 0$ ist.

Die Randbedingung am Stoßboden $\xi = 0$ liefert

$$\frac{1}{v_0^*}\int_0^{\tau} f_0(\tau)\, d\tau = u_R \quad bzw. \quad \frac{1}{v_0^*} f_0(\tau) = \frac{d u_R}{d\tau} = b_R(\tau);$$

die Randbedingung am Geschoßboden $\xi = l_0$ ist dann von selbst erfüllt, da hier $u = u_G = u_r + u_R$ ist.

Die endgültige Beziehung für die Geschwindigkeit der Gasteilchen im Geschützrohr lautet also:

$$u = \frac{\xi}{l_0} u_r + u_R = \frac{\xi}{l_0}(u_G - u_R) + u_R \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Für die Abweichungen des Gasdruckes gegenüber dem mittleren Druck P_m findet man daher die folgende Gleichung:

$$\Delta P = \left(\frac{\xi^2 b_r}{2 g v_0^* l_0} + \frac{\xi b_R}{g v_0^*}\right) = \frac{\xi}{2 g v_0^*}\left[\frac{\xi}{l_0} b_R + \left(2 - \frac{\xi}{l_0}\right) b_R\right] \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Dabei ist zu beachten, daß die normalerweise der Geschoßbewegung entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten u_R bzw. Beschleunigungen b_R des Rohres in dieser Normalrichtung negativ sind.

Für die zu diesen Druckunterschieden im Gasraum nach Gl. (29) gehörenden Unterschiede des spezifischen Volumens erhält man damit aus Gl. (23) und (19) die nachstehende Beziehung, wenn man mit einem gleichbleibenden mittleren Wert von n rechnet.

$$\Delta v^* = -\frac{\Delta P}{n P_m}\left[(v_m - \nu) - (v_p - \nu)(1 - y)\right] \left[(v_m - \nu) - (v_p - \nu)(1 - y)\right]^{n+1} \frac{\xi}{2 g v_0^*}\left[\frac{\xi}{l_0} b_R + \left(2 - \frac{\xi}{l_0}\right) b_R\right] \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Der mittlere Gasdruck P_m ergibt sich definitionsgemäß aus Gl. (19). Damit sind alle Zustandsgrößen des Gases im Geschützrohr in ihrer zeitlichen und örtlichen Abhängigkeit berechenbar. Bei stufenweise veränderlichen Werten von n findet man ganz entsprechende Beziehungen jeweils für jeden einzelnen der gewählten Zeitabschnitte.

3. Die Beeinflussung der Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses.

Der höchste (statische) Gasdruck im Rohr wird immer nur in den Gasteilchen $\xi = \xi_0$ erreicht, deren Geschwindigkeit $u = 0$ ist. Dies ist nach Gl. (28) der Fall für:

$$\xi = \xi_0 = \frac{u_R}{u_r} \cdot l_0.$$

Der größte Druckunterschied ΔP_M im Gasraum ergibt sich daher nach Gl. (29) zwischen den ruhenden Gasteilchen $\xi = \xi_0$ und den Gasteilchen am Geschoßboden $\xi = l_0$ zu:

$$\Delta P_M = \Delta P_{\xi_0} - \Delta P_{l_0} = \frac{l_0}{2 g v_0^*}\left\{b_r\left[1 - \left(\frac{u_R}{u_r}\right)^2\right] + 2 b_R\left|1 + \frac{u_R}{u_r}\right|\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Der Zeiger M soll dabei den Größtwert des Druckunterschiedes im Gasraum andeuten. Da praktisch stets $b_R \ll b_r$ und $u_R \ll u_r$ ist, ergibt sich hieraus, daß der Druckunterschied im Gasraum während des Schusses um so größer ist, je größer die Relativbeschleunigung b_r des Geschosses ist. Gegenüber statischer Rechnung wirken daher am Geschoßboden immer kleinere Gasdrücke, die auch nur eine entsprechend geringere Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses zur Folge haben können.

Nach Gl. (29) werden für $\xi = 0$ die dem mittleren Gasdruck P_m überlagerten Druckunterschiede $\Delta P = 0$; der am Stoßboden meßbare Gasdruck entspricht also in erster Näherung dem bei thermodynamischen Rechnungen verwendeten mittleren Gasdruck P_m. Für den Unterschied ΔP_m zwischen diesem auf den Stoßboden $\xi = 0$ und dem auf den Geschoßboden $\xi = l_0$ wirkenden Gasdruck erhält man dann nach Gl. (29) die Beziehung:

$$\Delta P_m = \Delta P_0 - \Delta P_{l_0} = \frac{l_0}{2 g v_0^*}[b_r + 2 b_R] = \frac{l_0}{2 g v_0^*} \cdot (b_G + b_R) \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Die auf Grund dieses Druckunterschiedes gegenüber statischer Rechnung zu erwartende Minderung Δu_{G0} der Mündungsgeschwindigkeit des Geschosses ergibt sich nach dem Impulssatz zu:

$$\Delta u_{G0} = \frac{g F}{G}\int_0^{\tau_0} \Delta P_m\, d\tau \quad . \quad . \quad .

wenn bedeuten:

G_R (kg) das Gewicht aller rücklaufenden Teile der Waffe,

W_r (kg) der Bewegungswiderstand des Geschosses im Rohr einschließlich des Einpreßwiderstandes,

W_L (kg) der Widerstand der vor dem Geschoß beschleunigten Luft im Rohr,

W_R (kg) die äußeren Bewegungswiderstände am Rohr.

Setzt man diese Gl. (35) und (36) in Gl. (32) ein, so findet man nach einfachen Umformungen den Druckunterschied ΔP_m zwischen Stoß- und Geschoßboden in der Form:

$$\Delta P_m = \frac{L}{2G+L}\left[\left(1-\frac{G}{G_R}\right)\left(P_m-\frac{W_r}{F}\right)-\frac{1}{F}\left(W_L-\frac{G}{G_R}W_R\right)\right] \quad \ldots (37)$$

Setzt man schließlich diesen Wert für ΔP_m noch in Gl. (35) ein, so erhält man nach geeigneten Umformungen die nachstehende Beziehung:

$$\frac{G/g+L/2g}{1+L/2G_R}\,b_G = F\,P_m - W_r - W_L\frac{1}{1+L/2G_R} - W_R\frac{L/2G_R}{1+L/2G_R} \quad \ldots (38)$$

Hieraus erkennt man, daß die Trägheit der Pulvergase bei statischer Rechnungsgrundlage in erster Näherung tatsächlich durch eine entsprechende Vergrößerung der in die Rechnung eingehenden Geschoßmasse um einen bestimmten Bruchteil des Gewichtes der Pulverladung berücksichtigt werden kann. Dabei müßte theoretisch allerdings auch der Luftwiderstand W_L entsprechend angepaßt und der Bewegungswiderstand W_R des zurücklaufenden Rohres während der Dauer der Geschoßbeschleunigung berücksichtigt werden; da diese Widerstände aber im allgemeinen verhältnismäßig klein, vielfach auch nur ungenügend genau bekannt sind und überdies stets das Verhältnis $L/2\,G_R \ll 1$ ist, kann auf diese Anpassung praktisch verzichtet werden. Bei vollkommener Vernachlässigung des Rohrrücklaufes findet man so mit $L/2\,G_R = 0$ an Stelle von Gl. (38) für die Geschoßbeschleunigung:

$$\frac{G+L/2}{g}\,b_G = F\,P_m - W_r - W_L \quad \ldots (38a)$$

Der Einfluß der Massenträgheit der Pulvergase auf die Geschoßbeschleunigung kann danach also bei statischer Berechnungsweise in erster Näherung dadurch berücksichtigt werden, daß das Geschoßgewicht G um die Hälfte des Gewichtes L der Pulverladung vergrößert in Rechnung gesetzt wird. Damit ist die durch praktische Versuche nachgewiesene Annahme von Sébert über die Größe des Mitbeschleunigungsfaktors der Pulverladung in erster Näherung auch theoretisch bestätigt.

Die vorstehenden einfachen Beziehungen gelten jedoch nur unter der Voraussetzung, daß die eingangs vorgenommenen Vereinfachungen auch praktisch erfüllt sind. Nachstehend soll dies noch genauer untersucht werden.

2. Beschränkung der Zulässigkeit der vereinfachenden Voraussetzungen für die erste Näherung.

Eine wesentliche Voraussetzung für die vorstehende vereinfachte Berechnungsweise des Einflusses der Gasträgheit ist die Bedingung, daß in jedem Augenblick $\partial^2\Delta v^*/\partial\tau^2 \ll d^2v_m/d\tau^2$ ist. Berücksichtigt man für die Nachprüfung dieser Bedingung nur die Geschoßbeschleunigung, vernachlässigt also den untergeordneten Einfluß der Rohrbeschleunigung, so findet man zunächst nach Gl. (37) für das Verhältnis des jeweiligen größten Druckunterschiedes zum mittleren Gasdruck im Gasraum während des Schusses die einfache Beziehung:

$$\frac{-\Delta P_m}{P_m} = \frac{L}{2G+L}\left[1-\frac{1}{F\,P_m}\,(W_r+W_L)\right] < \frac{\delta L}{2G+L} \quad \ldots (39)$$

wobei $0 \leqq \delta < 1$ eine dimensionslose Verhältniszahl ist, die bei Einsetzung des praktisch nie erreichbaren Größtwertes $\delta = 1$ für die hier angestellten Überlegungen als unveränderlich angesehen werden kann. Da im allgemeinen das Verhältnis L/G zwischen $^1/_2$ bis $^1/_8$ liegt, ist hiernach $(\Delta P_m)^2$ bestimmt kleiner als 0,04 bis 0,008; die Voraussetzung zur Verwendung der Näherungsgleichung (23) ist daher für praktische Bedingungen meist mit ausreichender Genauigkeit erfüllt. Daher ist aber nach Gl. (23):

$$\frac{\Delta v_m^*}{(v_m-\alpha)-(v_p-\alpha)(1-y)} = -\frac{1}{n}\frac{\Delta P_m}{P_m} < \frac{\delta}{n}\frac{L}{2G+L}$$

Hieraus findet man schließlich durch zweimalige Differentiation nach der Zeit mit $\delta = \text{konst.}$ die Beziehung:

$$\frac{\partial^2\Delta v_m^*}{\partial\tau^2} < \frac{\delta}{n}\frac{L}{2G+L}\left[\frac{d^2v_m}{d\tau^2}+(v_p-\alpha)\frac{d^2y}{d\tau^2}\right] \quad \ldots (40)$$

Da hierin n etwa 1,2 bis 1,3 und δ auch nach der Einpressung des Geschosses in die Züge stets kleiner als 1 ist, erkennt man aus dieser Gl. (40), daß die Bedingung $\partial^2\Delta v_m^*/\partial\tau^2 \ll dv_m/d\tau^2$ selbst für Zeitpunkte nach der vollständigen Vergasung des Pulvers $(d^2y/d\tau^2 = 0)$ praktisch meist nur angenähert erfüllt ist. Die vorstehenden Entwicklungen stellen daher nur für kleine Verhältniswerte von Ladung zu Geschoßgewicht erste Näherungen dar. Für genauere Untersuchungen und vor allem für größere Verhältnisse von L/G ist daher auch eine genauere Berechnung des Druckverlaufes im Geschützrohr erforderlich; der Weg hierzu soll nachstehend kurz entwickelt werden.

V. Verfahren zur genaueren Berechnung des Druckfeldes hinter dem Geschoß.

1. Grundgedanken des Verfahrens.

Wie die vorstehenden Entwicklungen zeigen, entsteht praktisch nur durch Vernachlässigung der zweiten Ableitung von Δv^* nach der Zeit größere Ungenauigkeiten bei der Berechnung des Druckfeldes im Gasraum hinter dem Geschoß. Nun ist aber auf Grund der bisherigen Entwicklungen nach Gl. (30) eine erste Näherung für Δv^* bekannt. Setzt man diese in Gl. (24) ein, so findet man zunächst für ΔP eine genauere Lösung und kann damit wieder nach Gl. (22) bzw. (23) einen genaueren Wert für Δv^* berechnen usw. Auf diese Weise ist es möglich, durch wiederholtes Einsetzen von verbesserten Lösungen für Δv^* in die exakte Differentialgleichung (24) eine beliebig genaue Lösung dieser Aufgabe zu finden. Im allgemeinen dürfte im Hinblick auf andere Unsicherheiten dabei schon die zweite Näherung eine technisch brauchbare Lösung darstellen. Eine weitere Möglichkeit, die im allgemeinen sogleich zu genaueren Lösungen führt, soll nachfolgend noch betrachtet werden.

Man übersieht ohne weiteres, daß nach dem vorstehend angegebenen Verfahren die Zustandsfelder im Gasraum hinter dem Geschoß nach einer Reihe mit steigenden Potenzen von ξ entwickelt werden, deren Koeffizienten bestimmte Funktionen der Zeit sind. Daher kann man eine derartige unendliche Reihe zunächst einmal für Δv^* voraussetzen und erhält dann:

$$\Delta v^* = \xi f_1 + \xi^2 f_2 + \xi^3 f_3 + \xi^4 f_4 + \ldots \quad \ldots (41)$$

wenn $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die noch zu bestimmenden Funktionen der Zeit sind. Daraus ergibt sich:

$$-\frac{\partial^2\Delta v^*}{\partial\tau^2} = \xi f_1'' + \xi^2 f_2'' + \xi^3 f_3'' + \xi^4 f_4'' + \ldots$$

wobei $f_i'' = \dfrac{d^2 f_i}{d\tau^2}$, also die zweite Ableitung der $i$ten Funktion f_i nach der Zeit bedeutet $(i = 1, 2, 3 \ldots)$.

Setzt man diese Reihe in die exakte Differentialgleichung (24) ein, so erhält man zur Berechnung von ΔP die folgende einfache Beziehung:

$$-g v_0^{*2}\frac{\partial^2\Delta P}{\partial\xi^2} = v_m'' + \xi f_1'' + \xi^2 f_2'' + \xi^3 f_3'' + \ldots$$

Durch zweimalige Integration nach ξ findet man hieraus

$$-g v_0^{*2}\Delta P = f_{00} + \xi f_0 + \frac{\xi^2}{2}v_m'' + \frac{\xi^3}{2\cdot 3}f_1'' + \frac{\xi^4}{3\cdot 4}f_2'' + \frac{\xi^5}{4\cdot 5}f_3'' + \ldots \quad (42)$$

8129

wenn f_0 und f_∞ durch die Randbedingungen näher bestimmte Funktionen der Zeit sind; dabei kann $f_\infty = 0$ gesetzt werden, da ΔP nur die örtlichen Druckunterschiede gegenüber dem nur zeitveränderlichen Mitteldruck P_m darstellen soll.

Zur Bestimmung der zunächst willkürlichen Zeitfunktionen f_i dient noch die gegenseitige Abhängigkeit von ΔP und v^* nach Gl. (21) bzw. (22). Diese kann nach den vorstehenden Überlegungen zu Gl. (39) für praktische Verhältnisse beim Schuß meist mit technisch ausreichender Genauigkeit durch die einfache lineare Näherungsgleichung (23) ersetzt werden. Aber auch wenn diese Vereinfachung in Sonderfällen nicht zulässig ist, findet man durch Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung nach Gl. (22) grundsätzlich — wenn auch mit erheblich größerem Rechenaufwand — einfache Beziehungen zur Bestimmung der verschiedenen Zeitfunktionen f_i. Nachstehend soll dies zur Berechnung von Gliedern bis vierter Ordnung in ξ noch kurz gezeigt werden.

Setzt man die Gl. (41) und (42) in Gl. (22) ein, so erhält man bei Vernachlässigung aller Glieder von höherer als vierter Ordnung in ξ zunächst:

$$\frac{\xi f_1 + \xi^2 f_2 + \xi^3 f_3 + \xi^4 f_4 + \cdots}{(v_m - \alpha) - (v_p - \alpha)(1-y)} = \frac{\xi f_0 + \xi^2 v_m''/1\cdot 2 + \xi^3 f_1''/2\cdot 3 + \xi^4 f_2''/3\cdot 4 + \cdots}{n P_m g v_0^{*2}} + \frac{n+1}{2n^2}\,\frac{\xi^2 f_0^2 + \xi^3 f_0 v_m'' + \xi^4 f_0 f_1/3 + \xi^4 v_m''^2/4 + \cdots}{(P_m g v^{*2})^2} + \frac{(n+1)(2n+1)}{2\cdot 3 n^3}\,\frac{\xi^3 f_0^3 + 3\xi^4 f_0^2 v_m''/2 + \cdots}{(P_m g v_0^{*2})^3} + \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{2\cdot 3\cdot 4 n^4}\,\frac{\xi^4 f_0^4 + \cdots}{(P_m g v_0^{*2})^4} + \cdots \quad (43)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise soll nun gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{(v_m - \alpha) - (v_p - \alpha)(1-y)}{n P_m g v_0^{*2}} \\ \Phi_2 &= \Phi_1 \cdot \frac{n+1}{2n P_m g v_0^{*2}} \\ \Phi_3 &= \Phi_2 \frac{2n+1}{3n P_m g v_0^{*2}} \\ \Phi_4 &= \Phi_3 \frac{3n+1}{4n P_m g v_0^{*2}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots (44)$$

Damit findet man durch Vergleich von Gliedern gleicher Ordnung aus Gl. (43) die folgenden Beziehungen zur Berechnung der verschiedenen Zeitfunktionen f_i:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= f_0 \Phi_1 \\ f_2 &= \frac{v_m''}{1\cdot 2}\Phi_1 + f_0^2 \Phi_2 \\ f_3 &= \frac{f_1''}{2\cdot 3}\Phi_1 + f_0 v_m'' \Phi_2 + f_0^3 \Phi_3 \\ f_4 &= \frac{f_2''}{3\cdot 4}\Phi_1 + \left(\frac{f_0 f_1''}{3} + \frac{v_m''^2}{4}\right)\Phi_2 + \frac{3}{4} f_0^2 v_m'' \Phi_3 + f_0^4 \Phi_4 \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Danach kann also ohne weiteres jede folgende Zeitfunktion f_i immer aus den vorausgehenden Funktionen f_0 bis f_{i-2} berechnet werden. Nach den früheren Überlegungen zu Gl. (29) ist dabei:

$$f_0 = v_0 b_R \quad \cdots (45a)$$

Auf diese Weise ist es also möglich, auch für größere Werte des Gewichtsverhältnisses Ladung zu Geschoß eine beliebig genaue Lösung für die örtlich und zeitlich veränderlichen Zustandsfelder im Gasraum hinter dem Geschoß zu berechnen. Nachstehend soll danach eine bessere Näherung für den Mitbeschleunigungsfaktor der Pulvergase bestimmt werden, die zugleich auch eine Abschätzung der Genauigkeit des bekannten Sébertschen Wertes 0,5 liefert.

Berechnung des Mitbeschleunigungsfaktors der Pulvergase in zweiter Näherung.

Aus den Gl. (35) und (36) erhält man zunächst in einfacher Weise für den Druckunterschied ΔP_m zwischen Stoß- und Geschoßboden:

$$g F \Delta P_m = G b_G + G_R b_R + (W_R - W_L) g \quad \cdots (46)$$

Setzt man hierin zur Vereinfachung der Rechnung den Unterschied zwischen den Reibungskräften W_R am rücklaufenden Rohr und dem Luftwiderstand W_L vor dem Geschoß im Rohr: $W_R - W_L = 0$ und nimmt ferner zur Verbesserung der Übersicht an, daß das Rohrgewicht G_R sehr groß gegenüber dem Geschoßgewicht G ist, so wird praktisch die Rohrbeschleunigung b_R vernachlässigbar klein gegenüber der Geschoßbeschleunigung b_G, und man erhält als Relativbeschleunigung des Geschosses im Rohr $b_f \cong b_G$; trotzdem ist dabei das Produkt $G_R b_R$ von endlicher Größe. Nach Gl. (45a) findet man daher für die folgende Rechnung in guter Näherung: $f_0 = 0$ und damit nach Gl. (45): $f_1 = 0$. Andererseits wird nach Gl. (26): $v_m'' (v_0^*/l_0)\, b_G$ und damit nach Gl. (45): $f_2 = (v_0^*/2\, l_0) \cdot b_G \Phi_1$. Für den jeweiligen Druckunterschied ΔP_m zwischen dem Stoß- und dem Geschoßboden erhält man daher nach Gl. (42) mit $\xi = l_0$ die Beziehung:

$$-g v_0^* \Delta P_m = \frac{l_0}{2} b_G + \frac{l_0^3}{24}\cdot\frac{d^2(b_G \Phi_1)}{d\tau^2} \quad \cdots (47)$$

Ersetzt man hierin noch ΔP_m nach Gl. (46), so findet man mit $L = F l_0/v_0^*$ und der schon angeführten Vernachlässigung von $(W_R - W_L)$ nach einfachen Umrechnungen:

$$G_R(-b_R) = (G + L/2)\, b_G + \frac{L l_0^2}{24}\,\frac{d^2(b_G \Phi_1)}{d\tau^2} \quad \cdots (48)$$

Diese Beziehung liefert zu der bekannten Erfahrung, daß das Geschoßgewicht um die Hälfte des Gewichtes der Pulverladung vermehrt in Rechnung zu setzen ist, in dem zeitveränderlichen Summanden der rechten Seite noch eine weitere Korrektur, deren Betrag nun abgeschätzt werden soll. Da diese zusätzliche Verbesserung des Geschoßgewichtes als gering im Vergleich zur Sébertschen Korrektur angesehen werden darf — was sich später noch genauer bestätigt —, kann man ohne wesentlichen Fehler hierin die Geschoßbeschleunigung b_G nach Gl. (38a) ersetzen; man findet so mit $W_L = 0$ und in Verbindung mit Gl. (44) zunächst

$$b_G \Phi_1 = \frac{(F P_m - W_r)}{(G + L/2)\, n P_m v_0^{*2}} [(v_m - \alpha) - (v_p - \alpha)(1-y)]$$

Zur Vereinfachung der Überlegungen soll darin der hier untergeordnete Einfluß der Pulververbrennung noch vernachlässigt, also $y = 1$ gesetzt werden. Dies darf man um so eher, je größer der Teil des Pulvers ist, der schon vor Beginn der Bewegung des Geschosses bzw. im Bereich kleiner Geschoßbeschleunigungen verbrennt. Man erhält dann:

$$\frac{d^2(b_G \Phi_1)}{d\tau^2} = \frac{1}{n v_0^{*2}(G + L/2)} \left\{ F \frac{d^2 v_m}{d\tau^2} - \frac{d^2}{d\tau^2}\left[\frac{W_r}{P_m}(v_m - \alpha)\right]\right\}$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (48) ein, so ergibt sich nach einfachen Umformungen in Verbindung mit Gl. (26):

$$G_R(-b_R) = \left[G + L\left(0{,}5 + \frac{1}{24 n}\,\frac{L}{G + L/2}\right)\right] b_G - \frac{1}{24 n}\,\frac{L^2}{G + L/2}\,\frac{l_0}{v_0^*}\,\frac{d^2}{d\tau^2}\left[\frac{W_r}{F P_m}(v_m - \alpha)\right] \quad \cdots (49)$$

Hierin ist wegen $W_r < F P_m$ praktisch stets:

$$\frac{l_0}{v_0^*}\,\frac{d^2}{d\tau^2}\left[\frac{W_r}{F P_m}(v_m - \alpha)\right] < b_G$$

Dies bedeutet aber, daß das in Gl. (49) noch verbleibende zeitveränderliche Korrekturglied stets kleiner als die neu gewonnene, zeitlich unveränderliche Verbesserung $L^2/24\, n\, (G + L/2)$ des Geschoßgewichtes ist. Diese ergibt sich beispielsweise für $n = 1{,}25$ und für den verhältnismäßig großen Wert von $G/L = 3$ zu:

$$\frac{1}{24 n}\,\frac{L}{G + L/2} = 0{,}0095;$$

d. h. also, statt des Sébertschen Mitbeschleunigungsfaktors von 0,5 des Pulvergewichtes wäre bei üblichen Gewichtsverhältnissen als nächste Näherung ein um weniger als 1% der Pulverladung erhöhter veränderlicher Faktor in Rech-

8130

nung zu setzen, dessen zeitliche Änderungen praktisch wiederum weniger als 1% des Pulvergewichtes betragen. Eine Berücksichtigung dieser Schwankungen ist technisch im Hinblick auf andere, wesentlich größere Unsicherheiten der Rechnung keinesfalls notwendig. Die Entwicklungen zeigen klar, daß die Sébertsche Annahme eines unveränderlichen Mitbeschleunigungsfaktors von 0,5 der Pulverladung auch theoretisch sehr gut begründet werden kann, so daß scheinbar gemessene Abweichungen von diesem Werte im allgemeinen auf andere Ursachen zurückgeführt werden müssen.

VI. Zusammenfassung.

Im Gasraum einer Schußwaffe stellen sich infolge der Massenträgheit der Pulvergase Druckunterschiede zwischen Stoß- und Geschoßboden ein, die eine Verringerung der praktisch erzielbaren Mündungsgeschwindigkeit eines Geschosses im Vergleich zur theoretisch bei statischer Rechnung möglichen Geschwindigkeit zur Folge haben. Dieser Umstand wird bei den üblichen Berechnungsverfahren durch den Mitbeschleunigungsfaktor der Pulvergase Rechnung getragen. Zur Ermittlung der wahren Verhältnisse wird ein einfaches Näherungsverfahren entwickelt, nach dem bei beliebigen Gewichtsverhältnissen zwischen Treibpulver und Geschoß die zeitlich und örtlich veränderlichen Zustandsfelder im Gasraum hinter dem Geschoß mit jeder gewünschten Genauigkeit bestimmt werden können. Seine praktische Anwendung zur Berechnung des Mitbeschleunigungsfaktors führt zu dem Ergebnis, daß die Sébertsche Annahme eines unveränderlichen Faktors von 0,5 der Pulverladung unter üblichen Bedingungen den wahren Verhältnissen beim Schuß mit großer Genauigkeit gerecht wird.

8131

J. Bukowski

Systematische Windkanalmessungen an Luftschrauben

Meßergebnisse des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Warschau

Herausgegeben mit Unterstützung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig

Umfang 88 Seiten A 4 mit 84 Bildern und 61 Zahlentafeln

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 7,50 RM je Exemplar einschl. Porto und Verpackung durch die ZWB

B. v. Schlippe und R. Dietrich

Zur Mechanik des Luftreifens

Herausgegeben von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)

Umfang 20 Seiten A 4 mit 51 Bildern

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 3,— RM je Exemplar einschl. Porto und Verpackung durch die ZWB

J. Nikuradse

Turbulente Reibungsschichten an der Platte

Herausgegeben von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)

Umfang 24 Seiten A 4 mit 39 Bildern

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 3,— RM je Exemplar zuzüglich Porto und Verpackung durch die ZWB

Fourier-Integrale

für den praktischen Gebrauch

Vervielfältigt im Auftrage des Reichsluftfahrtministeriums von der Zentrale für wissenschaftliches Berichtswesen der Luftfahrtforschung des Generalluftzeugmeisters (ZWB)

Zu beziehen gegen einen Unkostenbeitrag von 5,50 RM je Exemplar einschl. Porto und Verpackung durch die ZWB