

000201

000201

000202

Erkenntnis (1): Die Zunahme von Einzel- ist die Ausprägung von Eigenschaften

zung, was nur die Ursache für die Beseitigung dieser Instabilität. Die Einzelbildung wird in diesem Falle nur ausgelöst durch die in den Auspuffgasen enthaltenen Kerne und Ionen, ohne, daß die Auspuffgase selbst Wasserdampf zu enthalten brauchen.

Wir wollen uns hier aber mit dem ersten Fall beschäftigen, bei dem der Einzel in einer stabilen, also nicht überzätigen Atmosphäre aus dem in den Auspuffgasen enthaltenen Wasserdampf entsteht.

II. Der Wasserdampfgehalt und die Enthalpie der Abgase

Alle flüssigen Brennstoffe bestehen im wesentlichen aus Kohlenstoff und Wasserstoff. Ihre Verbrennungsgase enthalten daher je nach der chemischen Zusammensetzung des Brennstoffes mehr oder weniger Wasser-

Erkenntnis (2): Die Zunahme von Einzel- ist die Ausprägung von Eigenschaften

hältnis des Wasserdampfes zum trockenen Teil des Abgases, und  $x$  bedeutet die Wasserdampfmenge in kg je kg trockenes Abgas, wobei aber die Kohlenäremoleküle durch die gleiche Anzahl Luftmoleküle ersetzt gedacht sind. Für einen schwefelfreien Brennstoff mit dem Kohlenstoffgehalt  $c$ , dem Wasserstoffgehalt  $h$ , dem Sauerstoffgehalt  $o$  und gegebenenfalls dem Wassergehalt  $w$  (alles in Gewichtsteilen) gilt dann<sup>1)</sup>

$$x = \frac{M_w}{M_n} = \frac{18}{29} \frac{c}{12} + \frac{18}{29} \left( \frac{c}{12} + \frac{h}{4} + \frac{o}{32} \right) \quad (1)$$

wenn  $M_w = 18$  und  $M_n = 29$  die Molekulargewichte von Wasser und Luft sind. Dieser kleine Kunstgriff der Einführung einer äquivalenten Luftmenge ändert nichts Wesentliches, er bietet aber den Vorteil, das bekannt für 1 kg Treibgasluft aufgestellte  $i, x$ -Diagramm der feuchten Luft von Moller auf unseren Fall anwenden zu können, wenn man es für tiefe Temperaturen und niedere Drücke rechnet.

Die Gleichung (1) gilt für trockene Luft, bei feuchter Verbrennungsluft mit dem Feuchtigkeitsgehalt  $x_1$  hat man zu dem aus Gleichung (1) berechneten Wert von  $x$  noch den Betrag  $x_1/29$  zu addieren, wobei

$$N = 0,79 + \frac{0,21}{1 + 3 \frac{h}{c} + \frac{3}{8} \frac{o}{c}} \text{ das Molverhältnis des trockenen Abgases}$$

zur trockenen Verbrennungsluft ist. Führt man zur Vereinfachung die Brennstoffkennziffer

$$\sigma = 1 + 3 \frac{h}{c} + \frac{3}{8} \frac{o}{c} \quad (2)$$

ein, so gilt für den Feuchtigkeitsgehalt des Abgases bei feuchter Verbrennungsluft an Stelle von Gleichung (1):

$$x = \frac{18}{29} \frac{6}{c} + \frac{2}{3} \frac{w}{c} + \frac{x_1}{1 + 21} \frac{0,21}{0,79 + \sigma} \quad (1a)$$

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu z. B. E. Schmidt, Einführung in die technische Thermodynamik, Berlin 1926.

Erkenntnis (1): Die Zunahme von Einzel- ist die Ausprägung von Eigenschaften

Tabelle 1  
Wasserdampfgehalt von Abgasen verschiedener Brennstoffe

Brennstoff	Zusammensetzung		Wasserdampfgehalt des Abgases bezogen auf			Heizwert bezogen auf		
	Formel	Cin Gew.T.	Abgasmenge kmol kmol	Äquivalent des Abgases n kmol kmol	Individueller Wasserdampfgehalt $\alpha$ kg kg	Brennwert $H_u$ kcal kcal	Individueller Wasserdampfgehalt $\beta_w$ kcal kcal	Tr $\frac{1}{Tr}$
Kohle	C	1,00	0,0	0,0	0,0	8.000	696	696
Brenzol	C <sub>9</sub> H <sub>8</sub>	0,91	0,081	0,088	0,005	9.550	749	749
Toluol	C <sub>7</sub> H <sub>8</sub>	0,91	0,089	0,098	0,004	9.750	756	756
Benzol, Benzol	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	0,85	0,135	0,157	0,007	10.210	740	740
Propan	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	0,82	0,151	0,162	0,113	11.060	771	771
Äther	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> O	0,65	0,458	0,488	0,117	8.060	772	772
Methylalcohol	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> O	0,59	0,486	0,229	0,432	6.370	770	770
Methylalcohol	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O	0,55	0,232	0,302	0,487	4.730	587	587

dampf. Tabelle 1 gibt Zusammensetzung, Heizwert und Wasserdampfgehalt der Abgase bei vollständiger Verbrennung mit der theoretischen Luftmenge für einige Brennstoffe an. In der Tabelle ist  $n$  das Molver-

Erstlich ist die Zeichnung von Einzel bei der Ausprägung von Fragmenten.

In größeren Höhen der Atmosphäre, wie sie uns hier interessieren, ist  $x$  sehr klein und damit das zweite Glied der Gleichung vernachlässigbar klein gegen das erste.

In ähnlicher Weise muß auch der gewöhnlich auf 1 kg Brennstoff bezogene Heizwert  $\frac{1}{2}$  und die Enthalpie der Abgabe auf die dem trockenen Algas äquivalente Luftmenge umgerechnet werden: Aus 1 kg schwefel-freiem Brennstoff entsteht an trockenem Algas

$$\left[ \frac{c}{12} + \frac{79}{21} \left( \frac{c}{12} + \frac{h}{3} - \frac{o}{32} \right) \right] \frac{\text{kmol}}{\text{kg}} = \frac{c}{12} \left( 1 + \frac{79}{21} \right) \frac{\text{kmol}}{\text{kg}} \quad (3)$$

oder wenn alle Moleküle des Abgases als Luft mit dem Molekulargewicht  $M_1 = 29$  angesehen werden, die äquivalente Luftmenge

$$\frac{c}{12} \left( 1 + \frac{79}{21} \right) \frac{29}{\text{kg}} \quad (3a)$$

Damit erhalten wir für den unteren Heizwert bezogen auf die 1 kg trockenem Algas äquivalente Luftmenge den Ausdruck

$$\bar{h}_u = \frac{12}{c \left( 1 + \frac{79}{21} \right)} H_u \quad (4)$$

Mit dieser Formel sind die Werte in Tabelle I berechnet. Die Werte des so definierten Heizwertes  $\bar{h}_u$  weichen überraschend wenig voneinander ab, trotzdem die Kraftstoffe sich nach Art und Heizwert je kg erheblich unterscheiden.

Wird der Brennstoff ohne Arbeitsleistung in Luft von  $0^\circ$  unmittelbar verbrannt, so ist der Dampfgleichheit  $x$  des Abgases durch Gleichung (1) bzw. (1a) gegeben, und die Enthalpie (Wärmeinhalt) des Abgases ebenfalls bezogen auf die 1 kg trockenem Algas äquivalente Luftmenge ist

$$i = \bar{h}_u + x r \quad (5)$$

Dabei bedeutet  $r$  die Verdampfungswärme des Wassers in kcal/kg, und die Enthalpie ist von  $0^\circ$  und flüssigen Zustand des Wassers an gezählt. Der Heizwert  $\bar{h}_u$  ist also gleich der Enthalpiezunahme  $i$  des Abgases, wenn man diese von 0 und gasförmigem Zustand des Wassers an rechnet.

000203

000204

Erstlich ist die Zeichnung von Einzel bei der Ausprägung von Fragmenten.

ist die Verbrennungsluft kälter als  $0^\circ$  so vermindert sich die Enthalpie der Abgabe um die aus Aufheizen von 1 kg Luft auf  $0^\circ$  erforderliche Wärme, wenn wir von den geringen Unterschieden der spezifischen Wärme in der Temperaturbereich und der Molekülen von Luft und Abgas absehen.

Man kann diese Korrekturen an Dampfgleichheit und Enthalpie der Abgabe infolge des Feuchtigkeitsgehaltes und der unter  $0^\circ$  liegenden Anfangstemperatur der Verbrennungsluft ohne Schwierigkeit anbringen; in den uns hier interessierenden Fällen sind sie aber so klein, daß wir davon absehen wollen.

### III. Das Mollereiche $i, x$ -Diagramm der feuchten Luft

Das gebrauchliche Mollereiche  $i, x$ -Diagramm<sup>1)</sup> ist in der Abbildung 1 dargestellt für Temperaturen oberhalb  $0^\circ$  und für einen konstanten Druck von 1 at = 735,5 mm QS. Darin ist die Enthalpie (Wärmeinhalt)  $i$  der feuchten Luft, bestehend aus 1 kg trockener Luft und  $x$  kg Wasser über dem Feuchtigkeitsgehalt  $x$  aufgetragen, sie wird also nicht — wie sonst üblich — auf 1 kg, sondern auf  $(1 + x)$  kg feuchte Luft bezogen. Die Enthalpie ist gleich 0 gesetzt für trockene Luft und flüssiges Wasser von  $0^\circ$ . Um das praktisch wichtige Zustandsgebiet nicht zu sehr zu vermindern, verwendet Mollere ein Actensystem, bei dem die  $i$ -Achse schräg nach rechts unten zeigt, so daß die Isotherme für ein Gemisch aus trockener Luft von  $0^\circ$  und dampfförmigem Wasser von  $0^\circ$  waagrecht verläuft. Die vertikale Entfernung eines Punktes der  $i$ -Achse von der arithmetischen Wägschneide durch den Koordinatenursprung entspricht also der Verdampfungswärme  $r$   $x$  der Wassermenge  $x$ , wenn  $r = 597 \text{ kcal/kg}$  die Verdampfungswärme des Wassers bei  $0^\circ$  ist. Die Wägschneide durch den Koordinatenursprung bezeichnet dann die Enthalpie von 1 kg trockener Luft von  $0^\circ$  und  $x$  kg dampfförmigen Wassers von  $0^\circ$ . Wenn man Wärmemengen von diesem Zustand an zählt, wie es z. B. beim unteren Heizwert der Fall ist, kann man sie unmittelbar von dieser Wägschneide an auftragen.

In dem Diagramm sind die Isothermen für verschiedene Temperaturen eingezeichnet. Sie sind im Dampfgleichheit oberhalb  $0^\circ$  mit wachsendem Dampfgleichheit schwach ansteigende gerade Linien, deren Neigung mit der

<sup>1)</sup> Vgl. R. Mollere, Z. VNH Bd 67 (1923) S. 869 u. Bd 73 (1929) S. 1069, Hütte 26, Aufl. (1923) Bd 1 S. 537 bis 541 sowie Fr. Hengstler, Techn. Thermodynamik, Bd II (1937) S. 30.

Zustand 1 und 2: Die Erzeugung von Emulsion im Auspuffrohr von Frigowasser

Temperatur nimmt, unterhalb  $0^{\circ}$  sind sie nach abwärts geneigt, aber so wenig, daß sie in dem schmalen Bereich zwischen der Ordinatennach- und der Grenzkurve praktisch als Waagrecht angesehen werden können. An der Grenzkurve haben die Isothermen einen Knick und verlaufen im Nebendampfgebiet nach Abbildung 1 nahezu parallel zu den Geraden konstanter Enthalpie. Die  $0^{\circ}$  Isotherme der feuchten Luft verläuft im Nebendampfgebiet parallel zur Scher der Isenthalpen, mit steigender Temperatur wird die Neigung der Isothermen langsam kleiner. Durch den  $0^{\circ}$ -Punkt der Sättigungslinie gibt es aber noch eine zweite etwas steilere Isotherme, die für Wasser in festem Zustand gilt. Der schmale Sektor zwischen der Flüssigkeits- und der Eisschmelze für  $0^{\circ}$  enthält die Zustände, bei denen flüssige Tropfen neben Einsäulen vorkommen.

Die Darstellung im  $t, x$ -Diagramm ist besonders geeignet, um Mischvorgänge zu untersuchen, denn bei der Mischung addieren sich sowohl die Mengen als auch die Enthalpien, und es läßt sich leicht einsehen, daß alle durch Mischen zweier Mengen mit den Zuständen 1 und 2 erreichten Zustände im  $t, x$ -Diagramm auf der geraden Verbindungslinie 1-2 liegen müssen. Für die Lage des Mischungspunktes auf dieser Geraden gilt der Schwerpunktatz, d. h. er teilt die Verbindungslinie im umgekehrten Verhältnis der Mengen 1 und 2.

Wegen der Krümmung der Sättigungslinie kann selbst die Mischung völlig trockener Luft mit feuchter, aber noch nicht gesättigter Luft höherer Temperatur Nebel erzeugen. Als Beispiel ist in Abbildung 1 die Mischung von völlig trockener Luft von  $0^{\circ}$  (Zustand 1) mit Luft von  $50^{\circ}$  und  $x_1 = 0,67$  (Zustand 2) entsprechend einem Sättigungsgrad  $Mischzustand$  liegen auf der Verbindungslinie 1-2. Diese Gerade schneidet bei A und B die Sättigungslinie. Mischungsverhältnis der beiden Luftarten 1 und 2, die zwischen den Werten der Streckenverhältnisse 2A:1A und 2B:1B liegen, führen also zur Nebelbildung. Man kann nach Mollier auch leicht das Verhältnis der flüssigen zur dampfförmigen Peneltigkeit des Nebels ermitteln. Dem zufolge wird die durch den Mischungszustand, z. B. Punkt 3 der Abbildung 1, hindurchgehende Isotherme bis zur Sättigungslinie und liegen hier im Punkt 3'. Den Sättigungsdampf  $x_3'$  ab. Dann ist  $x_3$  die ab Dampf und  $x_{3-2}$  die in Form von Flüssigkeitstropfen in dem Gemisch enthaltene Wassermenge.

Zustand 1 und 2: Die Erzeugung von Emulsion im Auspuffrohr von Frigowasser

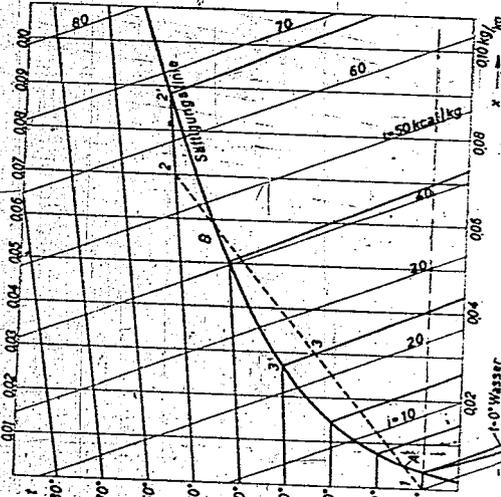


Abb. 1

Darstellung eines Mischungsverganges mit Nebelbildung im Mollierdiagramm ( $t, x$ -Diagramm der feuchten Luft)

#### IV. Das $t, x$ -Diagramm für Temperaturen unter $0^{\circ}$ und niedrige Drücke

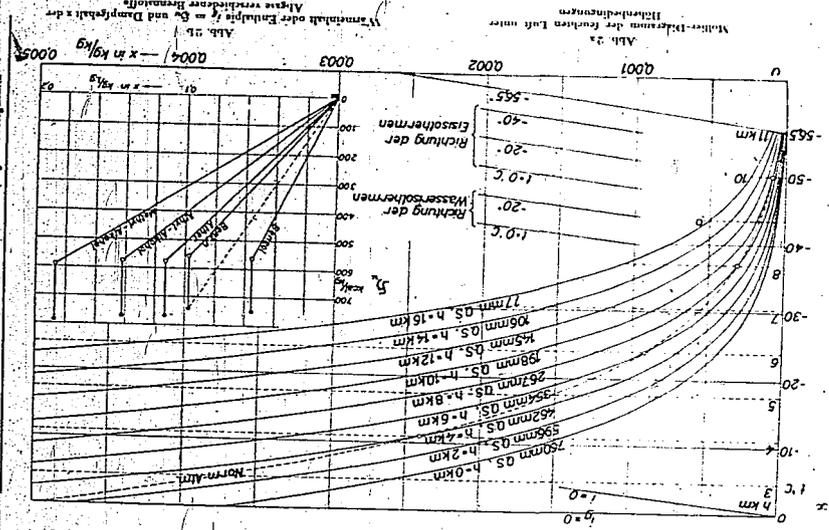
Ein  $t, x$ -Diagramm für Temperaturen unter Null, das unseren besonderen Zwecken angepaßt ist, ist in Abbildung 2 dargestellt. Der Maßstab ist in der  $x$ -Richtung stark gedehnt, so daß nur der Bereich  $0 < x < 0,005$  dargestellt ist. Die Geraden  $i = \text{konst.}$  verlaufen daher viel flacher als in Abbildung 1. Da sie im folgenden nicht gebraucht werden, ist nur die Gerade  $i = 0$  ausgegeben. Die Gerade  $i_1 = 0$  bildet den oberen Rand der Abbildung. Von dieser Geraden an ist zu sehen, wenn man die Einheitslinie  $i_1$  der Gemische aus Luft und dampfförmigem Wasser von

000207

000200

000208

Erst-Schnitt: Die Zeichnung von Einzel zur der Ausprägung von Regensorten



Erst-Schnitt: Die Zeichnung von Einzel zur der Ausprägung von Regensorten

0° gleich Null setzt. Die das Diagramm durchziehenden Kurven mit Abgah des Luftdruckes und der Höhe über dem Meeresspiegel sind die Sättigungslinien, sie gelten unterhalb 0° für das Gleichgewicht mit einer ebenen Eisoberfläche. Die Luftdrucke sind so gezeichnet, daß die den dann geschriebenen Höhen nach der internationalen Normatmosphäre (DIN 5450 vom Mai 1937) entsprechen. Mit abnehmendem Luftdruck rücken die Sättigungslinien nach rechts, d.h. bei gleicher Temperatur und abnehmendem Druck nimmt die von 1 kg freier Luft bis zur Sättigung aufzunehmende Wassermenge zu. Bei gleichbleibendem Druck und abnehmender Temperatur rückt aber der Dampfgehalt  $x$  (siehe der Sättigungslinie) stark ab. Beim Anfang in die Atmosphäre sinkt mit dem Druck auch die Temperatur, solange wir in der Troposphäre bleiben. Erst in der Stratosphäre oberhalb etwa 11 km bleibt die Temperatur konstant.

Um die Sättigungsverhältnisse in verschiedenen Höhen unter mittleren atmosphärischen Bedingungen nach zu übersehen, ist in das Diagramm die Kurve der Sättigungslinien für die Temperaturen und Drücke bzw. Höhen über dem Meeresspiegel für die internationale Normatmosphäre gestrichelt eingezeichnet. Sie schneidet die jeweils für eine bestimmte Höhe geltenden Sättigungslinien an den durch kleine Kreise bezeichneten Punkten. Die für einige Temperaturen gezeichneten Isothermen sind im Dampfgebiet in dem dargestellten Bereich praktisch waagerechte Geraden, sie gelten aber nur bis zu der jeweiligen Sättigungslinie. Hier liegen sie mit einem leichten Knick nach abwärts um und verlaufen im Einzelfeld als gestrigte Geraden. Da zu jeder Sättigungslinie eine andere Isothermenkurve eingetragen werden müßte, sind nur die Richtungen der Isothermen für 0°, -20° und -40° sowie für die mittlere Stratosphären-temperatur von -56,5° links unten in Abbildung 2a angegeben. Die Richtungsunterschiede sind so klein, daß man in dem in Frage kommenden Zustandsbereich alle Isothermen praktisch als Parallelreihen ansehen kann. Ferner sind noch die Richtung der 0°, und der -20°-Isotherme des flüssigen also bis -20° unterkühlten Wassers eingezeichnet.

V. Die Mischung von heißen Abgasen mit kalter Luft, dargestellt im  $t, x$ -Diagramm

Bei dem Maßstab der Abbildung 2a fallen die Zustandskoordinaten  $x$  und  $t, x = t - x = \xi$ , der Verbrennungszone üblicher Kraftstoffe weit über den Rand hinaus. Es ist daher recht unten eine Hilfsstapel 2b in 100fach

Fig. 15. Die Einwirkung von Benzin auf den Ausfall von Flugmotoren.

verkleinerten Maßstab gezeichnet. Die ganze Tafel 2a schrumpft in diesem Maßstab auf das kleine schwarz angelegte Rechteck am linken unteren Rand von 2b zusammen. In der Abbildung 2b sind nun die Zustände der Verbrennungsgase einiger Brennstoffe bei vollständiger Verbrennung ohne Verdünnung mit Luft von 0° als ausgefüllte Kreise eingetragen. Auf die Berücksichtigung der Arbeitsleistung gehen wir weiter unten ein. Die teilweise für Benzin gezeichnete gestrichelte Gerade verbindet diesen Zustand des Abgases mit dem Zustand trockener Luft von 0°, auf ihr liegen alle möglichen Mischungsverhältnisse. Ganz unten ist die Umgebungsluft kälter als 0°, so rücken beide Endpunkte der Mischgeraden etwas nach unten, ist sie feucht, so verschieben sie sich ein wenig nach rechts. Bis auf praktisch völlig vernachlässigbare Unterschiede bleibt aber die Richtung der Geraden unverändert. Man kann daher die Mischungsgerade in Abbildung 2a durch den hier genauer einzutragenden Zustand der Umgebungsluft parallel zu der entsprechenden Geraden der Abbildung 2b zeichnen. Schneidet diese Mischungsgerade die zu dem betreffenden Druck bzw. der Höhe, bei der die Mischung erfolgt gehörige Sättigungslinie, so entsteht Nebel. Berührt sie diese nur oder geht daran vorbei, so entsteht kein Nebel. Die Mischungsverhältnisse, bei denen sich Nebel bildet, sind, wie wir in Abbildung 1 gesehen hatten, nach dem Schwerpunktsatz aus der Lage der Schnittpunkte auf der Mischungsgeraden zu ermitteln. Die ganze Länge der Mischungsgeraden in Abbildung 2a ist dabei das Hundertfache ihrer Darstellung in Abbildung 2b.

In die Umgebungsluft nicht mit Wasserdampf gesättigt, so treten im allgemeinen zwei Schnittpunkte auf, d. h. bei einem gewissen Mischungsverhältnis entsprechend einer bestimmten Verdünnung des Abgases mit Luft bildet sich Nebel bei noch stärkerer Verdünnung verschwindet er wieder. In die Umgebungsluft mit Wasserdampf gesättigt, so verschwindet der Nebel erst bei unendlich starker Verdünnung des Abgases. Wir haben bisher den Zustand des Abgases in Abbildung 2b seinem vollen Heizwert entsprechend eingesetzt und wollen nun die ihm im Motor entzogene Arbeit und Wärme berücksichtigen:  
Bei Flugmotoren gehen im Mittel von unten. Heizwert des Brennstoffes 50% in das Abgas, 20% in den Kühler, und rund 30% werden der Luftschraube als mechanische Arbeit zugeführt (dieses und die folgenden Zahlenangaben über die Leistungsanforderung sind abgerundete Werte). Bei einem Wirkungsgrad der Luftschraube von 80% wird ihre Nutz-

Fig. 16. Die Einwirkung von Benzin auf den Ausfall von Flugmotoren.

leistung in Höhe von 24% des Brennstoffwertes an das Flugzeug übertragen und schließlich durch Oberflächenerwärmung und Wirbelbildung vertrieben. Bei neueren Flugzeugen mit hoher Geschwindigkeit entfällt auf Oberflächenerwärmung und feine Verwirbelung der größere Teil, der sich rasch in Wärme umsetzt. Der kleinere Teil bleibt länger am Lebern in der mechanischen Energie des großen von den Flügeln ausgehenden Doppelwirbels und wird erst in größerer Entfernung hinter dem Flugzeug in Wärme umgewandelt. Für diese Abschätzung wollen wir annehmen, daß diese beiden Anteile von gleicher Größe sind und je 12% des Heizwertes  $H$  beitragen. Die Verlustleistung der Schraube beträgt etwa 20% des Heizwertes.

In Tabelle 2 ist diese Aufteilung der Leistungen zusammengestellt. Da es ist das Verhältnis der Luftmengen angegeben, welche diese Energien

Art	Beitrag des Heizwertes	Gewichtverhältnis Luftmenge/Abgas an Basis	
		in 10 km Höhe	
Abgas	0,5	1	1
Kühler	0,2	8	5
Schraubenarbeit	0,08	1 000	400
Heizleistung	0,12	10 000	4 000
Doppelwirbel	0,12		

Tabelle 2  
Aufteilung der Brennstoffenergie (abgerundete mittlere Werte)

aufnehmen, verglichen mit der Menge des Abgases. Die Zahlen gelten für schnellts Flugzeuge. Mit zunehmender Höhe erhöhen die Luftmengen ab Bei Lastmotoren bleibt aber die Abgasmenge bis zur Vollrückhöhe etwa konstant. Die Kühlluft nimmt wegen der Regelung weniger stark ab, als der Luftschraubenabnahme entspricht. In 10 km Höhe ist vielleicht die Kühlluftmenge noch das Stfache, die Menge des Schraubenstrahles noch das 500fache der Abgasmenge.

Wie wir später sehen werden, kann Nebel sich erst bilden, wenn das Abgas, z. B. bei Benzin, je nach dem Zustand der Atmosphäre mit der etwa 100- und mehrfachen Luftmenge gemischt wird. Es bedarf also der Verdünnung des Abgases mit einem schon beträchtlichen Teil der

Erstschicht: Die Zeichnung von Eiseck aus dem Aufzuge von Flugmotoren

Mit Luft des Schraubenstrahles, um Nebel entstehen zu lassen. Da man annehmen darf, daß beim luftgekühlten Motor Abgas und Kühlluft sich schon gemischt haben, bevor sie in zur Nebelbildung ausreichendem Maße mit Schraubenluft verdünnt werden, dürfen wir so rechnen, als ob die ganze Kühlwärme im Abgas bliebe und dieses sich unmittelbar mit kalter Luft mischen würde. Die gleiche Annahme darf man auch beim wassergekühlten Motor machen, wenn der Kühler im Schraubenstrahl liegt, beim Tragflügelkühler ist sie dagegen nicht mehr berechtigt.

Von der Verlustleistung der Schrauben und von der Hauterwärmung wird ein Teil, den wir auf 5% des Heizwertes schätzen, am Rumpf und am Leitwerk im Bereich des Schraubenstrahles in Wärme umgesetzt, die ebenso wie die Kühlwärme zur Abgasenergie gezählt werden darf. Wir können also so rechnen, als wenn das Abgas mit einem Wärmehalt von 0,75 des Heizwertes sich mit kalter Luft vermischt.

In Abbildung 2a sind die den Wärmehalten des Abgases von 75% des Heizwertes entsprechenden Punkte durch leere Kreise bezeichnet. Auf der Senkrechten durch diese Punkte liegen alle möglichen Zustände des unvermischten Abgases der angeschriebenen Brennstoffe. Die gezeichneten Verbindungslinien der Zustandspunkte der Abgase mit 75% Heizwert mit dem Koordinatenursprung sind die Mischgeraden. Je geringer die Steilheit dieser Geraden, um so leichter tritt Eiseckel auf.

### VI. Anwendungsbeispiele

Mit Hilfe der Abbildungen 2a und 2b kann man für verschiedene Brennstoffe und für alle möglichen Zustände der Atmosphäre die Gefahr der Nebelbildung beurteilen. Für ein Flugzeug mit dem Kühler im Schraubenstrahl in 10 km Höhe bei  $-50^{\circ}$  einem Sättigungsgrad der Luft von 0,5 und bei Benzol als Kraftstoff berechnet die Mischgerade der Abgase, das 75% des Heizwertes an Wärme entläßt, die Sättigungskurve das erste Mal bei einem Mischungsverhältnis Abgas: Luft von 1:117, hier beginnt wieder Eiseckelbildung. Der zweite Schnittpunkt, bei dem der Nebel wieder verschwindet, entspricht einem Mischungsverhältnis von 1:1500. In Wirklichkeit wird sich der Nebel schon etwas früher auflösen, da bei dieser Verdünnung bereits ein Teil der mechanischen Energie des Schraubenstrahles wieder in Wärme verwandelt ist, Wäre die UmgebungsLuft gerade gesättigt, so würde der Nebel bereits bei einem Mischungsverhältnis von 1:110 entstehen und erst bei unendlicher Verdünnung wieder

Erstschicht: Die Zeichnung von Eiseck aus dem Aufzuge von Flugmotoren

verschwinden. Die Grenzen der Eiseckelbildung sind stets verwachsen, da der Mischvorgang turbulent verläuft und daher das Feuchtheitsfeld Schwankungen gleicher Art aufweist wie das Geschwindigkeitsfeld der turbulenten Bewegung. Nimmt man an, daß der Schraubenstrahl anfangs eine einheitliche Geschwindigkeit sowie einheitliche Temperatur und Feuchtigkeit aufweist, so ist wegen der Analogie von Impuls- und Stoffaustausch bei der Vermischung des Strahles mit der UmgebungsLuft das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld dem Felde der Axialkomponente der Geschwindigkeit ähnlich.

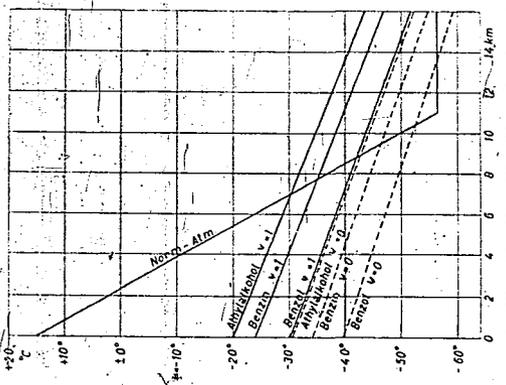


Abb. 3  
Grenzen der Eiseckelbildung durch Mischabgas bei niedriger ( $\gamma=0$ ) und gestiegener Atmosphäre in Abhängigkeit von der Höhe und von der Art des Brennstoffes

000215

000213

Erst 1934 ist die Färbung von Eisebel bei den Auspuffen von Flugzeugen

Die Zustände der Atmosphäre, bei denen sich gerade, noch-Eisebel bilden kann, erhält man aus den Berührungspunkten der Mischgeraden eines Brennstoffes mit der Sättigungslinie. Diese Geraden wägen für die 3 Brennstoffe Athylalkohol, Benzol und Diesel bei gesättigter Luft ( $\varphi = 1$ ) und bei völlig trockener Luft ( $\varphi = 0$ ) mit Hilfe von Abbildung 2 für Algen mit 75% Relativwert ermittelt, und in dem Zustandsdiagramm von Temperatur und Druck bzw. Höhe der Abbildung 3 dargestellt. Bei Zuständen der Atmosphäre unterhalb der Grenzlinie tritt Eisebel auf, darüber nicht. Bei Benzin und gesättigter Umgebungsluft entspricht z. B. bei einem Luftdruck von 353 mm QS (entsprechend 6 km Höhe nach der Normatmosphäre) Nebel, wenn die Temperatur dabei unter  $-32,5^{\circ}$  liegt. In die Abbildung ist auch die Zustandslinie der Normatmosphäre als gekrümmte Gerade eingetragen. Man übersieht sofort den Einfluß der Luftfeuchtigkeit und der Art des Brennstoffes. Breatet man z. B. das normale Fliegengeräte durch das wasserstoffärmere Diesel, so rückt die Nebelgrenze in der Normatmosphäre um etwa 1 km hinauf. Da die Temperatur oberhalb 11 km konstant bleibt, schneiden die Grenzlinien die Normatmosphäre zweimal, d. h. beim Aufstieg in die Stratosphäre und der Eisebel in einer bestimmten von der Art des Brennstoffes abhängigen den Höhen wieder verschwinden.

VII. Gesichtspunkte zur Vermeidung der Eisebelbildung

Das einfachste Mittel zur Vermeidung der Eisebelbildung ist die Verwendung von wasserstoffreicheren und kohlenstoffreicheren Kraftstoffen, z. B. Diesel statt Benzin. Bei reinem Kohlenstoff würde überhaupt kein Nebel entstehen. Wichtig ist ferner, wie wir sehen, die Mischung des Abgases mit der Kühlluft, bevor größere Mengen Umgebungsluft dazutreten, und die Einführung des Abgas-Kühlluftgemisches in den Kern des Schraubenstrahlers. Läßt man das Auspuffgas sich getrennt von der Kühlluft unmittelbar mit der Umgebungsluft mischen, so tritt Eisebel viel leichter auf.

Auch jede Wärmenutzung an den Abgasen vor oder nach ihrer Mischung mit der Kühlluft und dem Schraubenstrahl verzögert die Nebelbildung, sofern man mit der Wärme nicht zugleich Wasserdampf fortführt. Man könnte also daran denken, im Schraubenstrahl reinen Kohlenstoff zu verbrennen, aber dieses Mittel ist praktisch kaum anwendbar.

000214

Erst 1934 ist die Färbung von Eisebel bei den Auspuffen von Flugzeugen

Noch weniger ausführbar ist der unliebsame Gedanke, dem Abgas durch Kühlung Wasser zu entziehen, wie es bei den Zeppelinluftschiffen zur Ballastgewinnung geschah. Dazu müßten die Abgase vor der Mischung mit Luft unter ihrem Taupunkt abgekühlt werden. Ledder sind die übigen Kühlfächern für ein Flugzeug zu schwer und mit zu großen Strömungsverlusten behaftet, so daß diese Möglichkeit ausscheidet.

Dem Flieger in der Luft, der einen Nebelfog blüher sich beschleht, bleibt als Gegenmittel nur über zu fliegen oder den Motor zu drosseln. Im ersten Fall läßt selbst in gekügelter Normatmosphäre unterhalb 0,2 km der Nebel auf. Im zweiten Fall wird die Nebelfog dünner und klarer, um bei Abstellen des Motors natürlich ganz zu verschwinden. Auch durch Drosseln des Flugzeuges, also durch Erhöhen der Flugegeschwindigkeit bei gleichbleibender oder verminderter Motorleistung, läßt sich die Nebelfog etwas verkleinern.

006215

### Aussprache.

Georgii. Das Problem der Wolkenbildung durch Flugzeug wird bei der DFS seit Oktober vorigen Jahres untersucht. Der erste Forschungsbericht über diese Untersuchungen ist im November vergangenen Jahres über die gleiche Thematik, welches Herr Schmidt beabsichtigt hat, von Herrn Hähndel herausgegeben werden.

Das Problem der Wolkenbildung durch Flugzeuge ist die mehrfache:

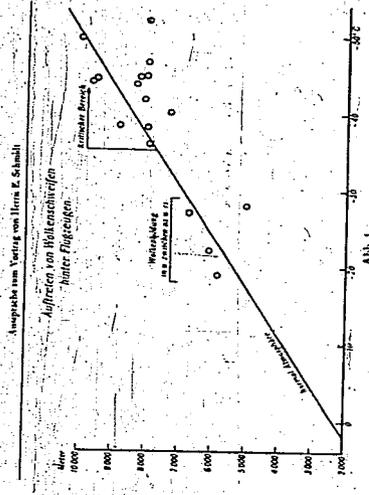
1. Sublimation oder Kondensation durch Wasserdampfzufuhr in ungesättigten Schichten.
2. Sublimation oder Kondensation in übersättigten, kornarmen Schichten durch Kornzufuhr.
3. Umhüllung der künstlich erzeugten Wölkchen unter bestimmten Feuchteverhältnissen der Atmosphäre.

Der erste Vorgang, Sublimation oder Kondensation durch Wasserdampfzufuhr in ungesättigten Schichten, ist von Köpfer, Hähndel ist von anderen Berechnungsgrundlagen ausgegangen als Herr Schmidt. Er nimmt an, daß der durchschnittliche Raum hinter dem Flugzeug sich länger Zeit unverändert hält. Die Beobachtung von Rauchfahnen an Schornsteinen und die Feststellung, daß die Wolkenfahne hinter dem Flugzeug zwei nebeneinanderliegende erstgrünere rotierende Wirbel bildet, berechtigen zu dieser Annahme. In dem Mischraum hinter dem Flugzeug kommt Wolkenbildung bei geringerer Luft zustande:

	nach Schmidt	nach Hähndel
In 1 000 m bei Temperaturen von	-30° C	-31° C
In 8 000 m bei Temperaturen von	-35° C	-37,5° C

Die Ergebnisse stimmen also gut überein. Aufm Kampfe und Wickmann von der DFS haben auf Grund der von ihnen durchgeführten Fluge des Auftretens der Wolkenbeweife, hinter Flugzeugen in Abhängigkeit von der Temperatur und der Luftfeuchte untersucht. Die beobachteten Abmessungen veranschaulichen die hierbei festgestellten Bedingungen. In Abbildung I treten zwei Nebengebiete des Auftretens der Wolkenfahnen hervor, der erste im Höhe bei Temperaturen von -25° C, der zweite oberhalb 3 000 m Höhe bei Temperaturen unter -40° C. Im tieferen Bereich weicht die Temperatur bei aufsteigenden Wolkenfahnen von dem theoretisch abgeleiteten Wert nicht unerheblich ab. Entweder beruht diese Abweichung auf geringerer Wärmeabfuhr des Motors an die Luft als bei den theoretischen Ableitungen zugrunde gelegt worden ist, oder sie hängt mit Oberströmung der umföhlenden Luft zusammen. Die DFS hat begonnen, die Lufttemperaturen im Mischraum hinter dem Flugzeug zu messen.

00217



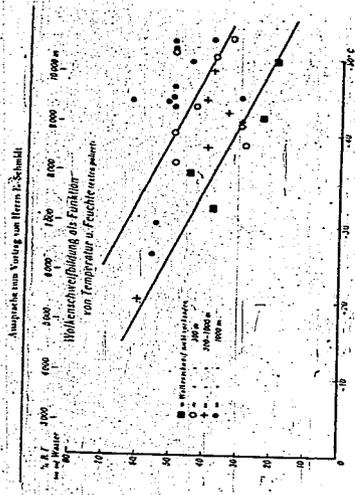
Ansprüche vom Vortrag von Herrn E. Schall

Aufzeichnungen von Wolkenerscheinungen hinter Flugzeugen.

Abb. 1

um so Werte über die Wärmehabungs des Motors zu erhalten. Bei einer höher durchgeführten Messung hat sich im Mittelungsraum 20 m hinter dem Flugzeug eine Ober-temperatur von 4° ergeben. Dieser Wert stimmt gut mit der von Händel in seiner theoretischen Arbeit aufgrund geleiteter Temperaturverteilung überein. Da bei dem Auftreten der Wolkenoberen hinter dem Flugzeug in 6000 m Höhe und bei Temperaturen von -25° gleichzeitig natürliches Wölken, Alu-Aluminium und Chlorwasser, in der fraglichen Schicht vorhanden waren, kann angenommen werden, daß diese Schicht wasser-dampfgesättigt oder sogar übersättigt gewesen ist. Der obere Bereich der Abbildung 1, welcher das Auftreten von Wolkenoberen oberhalb 6000 m Höhe und bei Temperaturen unter -40° umfaßt, entspricht den Ergebnissen der theoretischen Ableitung über Wolkenneubildung in ungesättigten Schichten bei tieferer Temperatur.

Abbildung 2 zeigt Wolkenneubildung in Abhängigkeit von Temperatur und Feuchtigkeit. Drei Bereiche treten-bereits links von der unteren Gerade, begrenzt etwa von der Temperatur- und Feuchtigkeitswerten von -10° C und 65% und -50° C und 20% tritt keine Wolkenneubildung auf, rechts von der oberen Gerade, mit Werten von -40° C und 50% bzw. -20° C und 30%, zeigen sich sehr lange Wolken-schweif, die sich nach zunehmender Zeit noch nicht aufgelöst haben, sondern be-ständig sind. Diese horizontalen Wolken-schweif, mehrere gewissermaßen meteorologi-schen Charakter an, sie können sich dem Zustand der Atmosphäre entsprechend um-zugewandeln. Solche Umgestaltung von Wolken zu meteorologischen Wolken werden vielfach beobachtet, und zwar, zu der Weise, daß Einzelteile in tieferen, feuchteren Schichten abkühlen und weiter weichen. Es ist die gleiche Erscheinung, auf die ich in meinem Akademievortrag im Juni vorigen Jahres hingewiesen habe.



Ansprüche vom Vortrag von Herrn E. Schall

Wolkenneubildung des Flugzeugen von Temperatur- u. Feuchteverteilung.

Abb. 2

Das Problem der Sublimation und Kondensation in übersättigten, kernenreichen Schichten durch Kernzufuhr konnte bis heute noch wenig gelöst werden. Offensichtlich treten über-sättigungen ohne Kondensation oder Sublimation aber nicht so häufig auf wie dies A. Wegener angenommen hatte. Manche der von Wegener beobachteten Erscheinungen dürften auf Wasserdampfschicht zurückzuführen sein. Auf ihren Höhenverläufen macht die DFS Versuche mit Injektion von bydrokohlischen und nichthydrokohlischen Kerne in der oberen Troposphäre. Endgültige Ergebnisse sind bisher noch nicht erreicht worden. Die Versuche kranken z. Zt. noch an der Unmöglichkeit, die Wasserdampfsättigung bei tiefen Temperaturen einzuandern zu lassen.

Der Grund der bisherigen Erfahrungen über Wolkenneubildung hinter Flugzeugen hat die DFS auf Anforderung des Reichsluft für die Fern-herausgebrach. Langsame Flugzeuge erzeugen leichter Wolkenneubildung als Schnellflugzeuge. Bei kurzen Wolken-schweif, bilden sich lange und beständige Wolkenfäden, so muß abwechselnd mit Steige und Stützung geflogen werden.

Das behandelte Problem hat weitere Bedeutung für die Bedingungen der Flugzeug-vereidigung. Inwieweit hat sich ein interessanter Fall der Flugzeugvereidigung hin-gefunden, der im Zusammenhang mit den hier behandelten Erscheinungen steht. Über-einer liegen und Ingeblowke in etwa 5000 m Höhe bildete sich in einer vollkommen klaren Schicht 6-10 cm dicken Eis an einem Flugzeug. Die Stärke des Eisminnen-ergänzt war übertrieben. Inwieweit geht aus dem Vorfalle hervor, daß offenbar über der Cumuluswolke eine klare Schicht mit hoher Übersättigung geflogen hat, deren Instabilität durch das Flugzeug ausgelöst wurde und an späterer Vereidigung geführt hat.

009218

Ansprache zum Vortrag von Herrn E. Schmidt

Der Fall hat große Ähnlichkeit mit dem Unfall von 3 italienischen Flugzeugen bei Lucca. Am 6. Dezember 1939 stürzten 3 Flugzeuge der italienischen Luftwaffe durch Verzerrung ab. Die Flugzeuge flogen in einem größeren Verband in 3 000 m Höhe über den Wolken in Sicht voneinander. Die in der Mitte des Verbandes liegenden Flugzeuge ereigneten beim Vorbeiflug zwischen zwei Wolkenströmen raschere Scherwolken, d. h. also Eiswolkenfahnen. Die nachfolgenden 3 Flugzeuge sind beim Passieren dieser Stelle abgestürzt, und zwar offenbar durch Flugzeugverringung. Der Fall scheint so zu liegen, daß zwischen den Wolkenströmen eine starke Frontüberhöhung getrennt hat, die durch die vorausliegenden Flugzeuge noch vermehrt und zur Auslösung gebracht worden ist, so daß bei den letzten Flugzeugen plötzliche rapide Verzerrung eingetreten hat.

Diese Fälle zeigen, wie gering z. Zt. noch unsere Kenntnisse von den in der Atmosphäre vorhandenen Überströmungsschichten sind, und wie wichtig die durchgeführten Untersuchungen der meteorologischen Verhältnisse der oberen Troposphäre für die Sicherheit der Luftfahrt sind. Ein wesentlicher Fortschritt kann aber erst erwartet werden, wenn endlich das Problem exakter Wasserdampfbestimmung bei tiefen Temperaturen durch Legung von tauchabende Meßinstrumenten gelöst ist.

Nachfolgend werden noch einige Aufnahmen gezeigt, die bei der DFS von Wolkenfahnen hinter Flugzeugen gemacht worden sind.

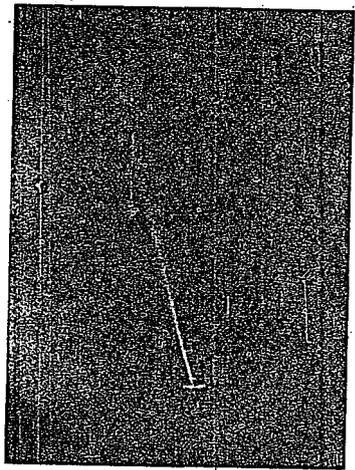


Abb. 3. Fernaufnahmen einer Überströmung mit Wolkenfahnen in 3000 m Höhe

009219

Ansprache zum Vortrag von Herrn E. Schmidt

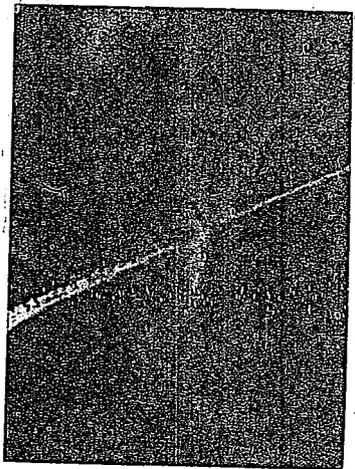


Abb. 4 u. 5. Begleitige Wolkenfahnen, die sich verzerren und größere Ausdehnung erlangen. Übergang von künstlichen zu natürlichen Wolken

000000

Ausgabe vom Verlag von H. R. Schmidt

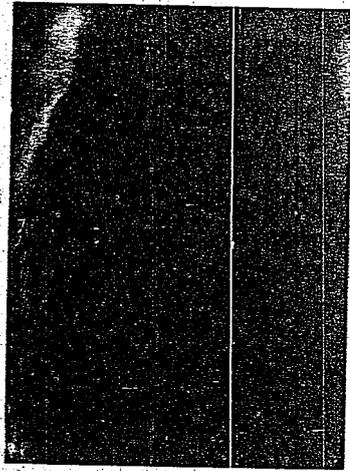


Abb. 6  
Wellenlinie mit Kollidieren aufeinander Elektrode

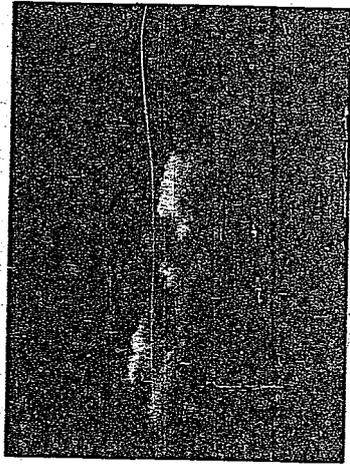


Abb. 7  
Umhüllung eines Wellenfadens aus unedleren Metalle

TITLE PAGE

2. Das Differenzenverfahren zur Loesung von Differentialgleichungen der nichtstationaeren Waermeleitung, Diffusion und Impulsausbreitung.

The method of finite differences for solving differential equations of the nonstationary heat conduction, diffusion and momentum transfer.

Frame Nos. 221 - 229

## Das Differenzenverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen der nichtstationären Wärmeleitung, Diffusion und Impulsausbreitung

Von ERNST SCHMIDT VDI, Braunschweig

Vor längerer Zeit hat der Verfasser ein Verfahren angegeben<sup>1)</sup>, das auf graphischen Wege unter Benutzung endlicher Differenzen Lösungen des Problems der nichtstationären Wärmeleitung in der Platte, der Diffusion und der Impulsausbreitung liefert. Die Übertragung dieses Verfahrens auf Zylinder und Kugel hat der Verfasser seit 1929 in Anwendungen benutzt und auf dem Ausschuß für Wärmelehre am 18. Mai 1931 in Köln vorgetragen, darüber ist aber nur ein kurzer Bericht erschienen<sup>2)</sup>. Im folgenden sollen die Erweiterungen dieses Verfahrens ausführlicher behandelt und darüber hinausgehende Verallgemeinerungen abgeleitet werden. Dabei wird in der Regel nur von Wärmeleitung gesprochen, die Ausführungen gelten aber ebenso für die nichtstationäre Diffusion und Impulsausbreitung, d. h. für alle Probleme, die von den behandelten Differentialgleichungen beherrscht werden.

1. Einleitung. Für die Wärmeleitung in platten-, zylinder- und kugelförmigen Körpern gelten die Differentialgleichungen:

$$\text{für die Platte} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\text{für den Zylinder} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$\text{für die Kugel} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (3)$$

Hierin bedeuten:

$\theta$  die Temperatur in °C,

$t$  die Zeit in h,

$x$  die Längenkoordinate in m,

$r$  die radiale Koordinate des Zylinders bzw. der Kugel in m (in beiden Fällen wird Polarsymmetrie angenommen, also von den andern Raumkoordinaten abgesehen),

$a = \lambda / (c \rho)$  die Temperaturleitfähigkeit in m<sup>2</sup>/h,

$\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit in kcal/mhgrd,

$c$  die spezifische Wärme in kcal/kggrd,

$\rho$  die Dichte in kg/m<sup>3</sup>.

Die analytischen Methoden zur Lösung der genannten Differentialgleichungen erfordern bekanntlich nicht unerheblichen mathematischen Aufwand (Fouriersche Reihen für die Platte, Reihen von Besselschen Funktionen für den Zylinder, von Kugelfunktionen für die Kugel) und sind nur für die einfachsten Grenzbedingungen und bei konstanter Temperaturleitfähigkeit möglich. Unser Diffe-

<sup>1)</sup> Ernst Schmidt, Über die Anwendung der Differenzenrechnung auf technische Abstrahl- und Abblühprobleme in „Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik“ (August-Föppl-Festschrift), Berlin 1924, S. 179/63. Einer brieflichen Mitteilung von Herrn Hausen verdanke ich den Hinweis auf die mir bisher unbekanntes Dissertation von L. Binder (Äußere Wärmeleitung und Erwärmung elektrischer Maschinen, München 1911), in der das Differenzenverfahren zur Vereinfachung der Fourierschen Lösungen der Differentialgleichungen der ebenen Wärmeleitung benutzt ist, ohne dies aber etwas über den analytischen Weg hinausgehenden Möglichkeiten erkannt wurden.

<sup>2)</sup> Z. VDI Bd. 75 (1931) S. 969. Ausgehend von meiner ersten Veröffentlichung in der Föppl-Festschrift haben A. Nuss und L. Nussle (Methodes graphiques pour l'étude des installations de chauffage et de réfrigération en régime discontinu, Paris 1929) den Zylinder und die Kugel, in neuerer Zeit auch H. Pfriem die Kugel behandelt (s. Luftf.-Forsch. Bd. 19 (1942) S. 197/99).

renzenverfahren läßt sich dagegen auf graphischem Wege mit einfachsten Hilfsmitteln für beliebige, auch zeitlich veränderliche, Grenzbedingungen und Stoffwerte durchführen; wobei diese sogar von der Temperatur abhängen können. Bei temperaturabhängigen Stoffwerten wird die Differentialgleichung bekanntlich nichtlinear, was ihre analytische Lösung außerordentlich erschwert.

2. Ableitung der Differenzgleichungen, und der Rekursionsformeln. Als Differenzgleichungen geschrieben, lauten die Differentialgleichungen 1, 2 und 3 für

die Platte  $\Delta_t \theta = a \frac{\Delta x}{(\Delta x)^2} \Delta x^2 \theta \dots (4)$

den Zylinder  $\Delta_t \theta = a \frac{\Delta r}{(\Delta r)^2} \left( \Delta r^2 \theta + \frac{\Delta r}{r} \Delta r \theta \right) \dots (5)$

die Kugel  $\Delta_t \theta = a \frac{\Delta r}{(\Delta r)^2} \left( \Delta r^2 \theta + 2 \frac{\Delta r}{r} \Delta r \theta \right) \dots (6)$

Dabei ist dem Differenzzeichen  $\Delta$  bei der abhängigen Veränderlichen  $\theta$  die unabhängige Veränderliche  $t$  oder  $x$ , nach der jeweils differenziert wird, als Index beigefügt. Unter  $\Delta t$  und  $\Delta x$  bzw.  $\Delta r$  sind feste kleine, aber endliche Stücke der Veränderlichen zu verstehen, die je nach dem gewünschten Grad der Genauigkeit zu wählen sind.

An Stelle der stetig veränderlichen Unbekannten führen wir entsprechend der Unterteilung des Gebietes in endliche Differenzen  $\Delta t$  und  $\Delta x$  oder  $\Delta r$  eine zweidimensionale Reihe  $\theta_{n,k}$  von Werten der Temperatur an den Stellen  $n \Delta x$  oder  $n \Delta r$  zu den Zeiten  $k \Delta t$  ein, wobei  $n$  und  $k$  die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufen von 1 bis zur Anzahl der gewählten Teilstücke. Dann wird

$$\Delta_t \theta = \theta_{n,k+1} - \theta_{n,k}$$

$$\Delta_x \theta \text{ oder } \Delta_r \theta = \theta_{n+1,k} - \theta_{n,k}$$

$$\Delta_x^2 \theta \text{ oder } \Delta_r^2 \theta = (\theta_{n+1,k} - \theta_{n,k}) - (\theta_{n,k} - \theta_{n-1,k}) = \theta_{n+1,k} + \theta_{n-1,k} - 2 \theta_{n,k}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Differenzgleichungen 4, 5 und 6 gehen diese über in Rekursionsformeln für

die Platte  $\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k} = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} [\theta_{n+1,k} + \theta_{n-1,k} - 2 \theta_{n,k}] \dots (7)$

den Zylinder  $\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k} = a \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} \left[ \theta_{n+1,k} + \theta_{n-1,k} - 2 \theta_{n,k} + \frac{1}{n} (\theta_{n+1,k} - \theta_{n-1,k}) \right] \dots (8)$

die Kugel  $\theta_{n,k+1} - \theta_{n,k} = a \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} \left[ \theta_{n+1,k} + \theta_{n-1,k} - 2 \theta_{n,k} + \frac{2}{n} (\theta_{n+1,k} - \theta_{n-1,k}) \right] \dots (9)$

Ist die Temperaturverteilung zu der Zeit  $k \Delta t$  durch die Reihe der Werte

$$\theta_{1,k}; \theta_{2,k}; \theta_{3,k} \dots \theta_{n,k} \dots$$

für jeweils um  $\Delta x$  bzw.  $\Delta r$  auseinanderstehende Werte der räumlichen Koordinate gegeben, so erlauben die Gl. 7, 8 und 9 die Berechnung der Verteilung

$$\theta_{1,k+1}; \theta_{2,k+1}; \theta_{3,k+1} \dots \theta_{n,k+1} \dots$$

zu der um  $\Delta t$  späteren Zeit. Sind diese Werte errechnet, so kann man in gleicher Weise jeweils um  $\Delta t$  fortschreiten und in Abständen von  $\Delta t$  aufeinanderfolgende Temperaturverteilungen und damit schließlich den ganzen Verlauf der Temperatur ermitteln.

3. Geometrische Deutung der Rekursionsformeln. a) Die Platte. — Die Rekursionsformel Gl. 7 läßt sich in sehr einfacher Weise geometrisch anschaulich deuten:

In Bild 1 soll der Linienzug  $(n-2), (n-1), n, (n+1), (n+2)$  eine Temperaturverteilung zu der Zeit  $k \Delta t$  darstellen; seine Ordinaten sind also die Werte  $\theta_{n-2,k}; \theta_{n-1,k}; \theta_{n,k}; \theta_{n+1,k}; \theta_{n+2,k}$ . Verbindet man nun die Punkte  $n-1$  und  $n+1$  durch eine Gerade, welche die Senkrechte durch  $n$  in  $n'$  schneidet, so ist, wie man sofort einsieht, die Strecke

$$n'n'' = \frac{1}{2} (\theta_{n+1,k} + \theta_{n-1,k} - 2 \theta_{n,k})$$

und der Zuwachs der Temperatur an der Stelle  $n$  in der Zeit  $\Delta t$  wird erhalten durch Multiplikation dieser Strecke mit dem konstanten Faktor  $a \Delta t / (\Delta x)^2$ . Für die praktische

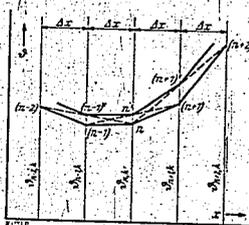


Bild 1. Durch Eckenabschneiden erhält man aus der gegebenen Temperaturverteilung (unterer Linienzug für den Zeitpunkt  $k \Delta t$ ) die Punkte der, nach dem Zeitabschnitt  $\Delta t$  sich einstellenden Temperaturverteilung (oberer Linienzug für den Zeitpunkt  $(k+1) \Delta t$ ).

Durchführung des Verfahrens ist es zweckmäßig, zu der angenommenen Teilung  $\Delta x$  das  $\Delta t$  so zu wählen, daß

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2} \quad (36)$$

wird. In diesem Falle vereinfacht sich die Rekursionsformel Gl. 7 zu

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{2} (\theta_n - 1) + \theta_{n-1} \quad (37)$$

und der Linienzug  $(n-1)$ ,  $n$ ,  $(n+1)$  des Bildes 1 gibt unmittelbar die gesuchte Temperaturverteilung zur Zeit  $(t-1)\Delta t$ . Aus ihr kann man durch Wiederholen des Verfahrens die Verteilungen zur Zeit  $(t-2)\Delta t$ ,  $(t-3)\Delta t$  usw. gewinnen. Man kann also allein mit Hilfe eines Lineals zu einer gegebenen Anfangsverteilung schrittweise den ganzen zeitlichen Verlauf der Temperaturkurven ermitteln. Wird nun fortwährendem Anblick die Liniensfolge zu eng, so kreuzt man nur die  $\Delta x$ -Teilung zu vergrößern, also z. B. jeden zweiten Punkt ausfallen zu lassen. Soll der Faktor  $n\Delta x/\Delta t$  trotz dieser Verdoppelung von  $\Delta x$  dem Wert  $\frac{1}{2}$  beibehalten, so muß  $\Delta t$  in quadratischem Verhältnis, also auf das Vierfache vergrößert werden.

b) Der Zylinder. — Beim Zylinder ist die Rekursionsformel, Gl. 8, nicht ganz so einfach wie bei der Platte. Man kann aber trotzdem ebenfalls Konstruktion zur Gewinnung von jeweils in Zeitabständen von  $\Delta t$  aufeinanderfolgenden Temperaturkurven anwenden, wenn man für die am gleiche  $\Delta t$  voneinander verschiedenen Werte von  $r$  einen logarithmischen Maßstab benützt. In Bild 2 sind  $A$ ,  $B$  und  $C$  die drei Temperaturpunkte  $\theta_{n-1,2}$ ,  $\theta_{n,2}$  und  $\theta_{n+1,2}$  aufgetragen über dem Abstand  $\ln[(n-1)\Delta r]$ ,  $\ln[n\Delta r]$  und  $\ln[(n+1)\Delta r]$ . Wir ziehen die Gerade  $AC$ , welche die Senkrechte durch  $B$  in  $D$  schneidet, und wählen nun einen Maß  $ED$  wie bei der Platte der Zuwachs  $\theta_{n,2} - \theta_{n-1,2}$  von  $\theta_{n,2}$  in der Zeit  $\Delta t$  ( $\Delta r^2/2a$ ) ist. Zum Beweis ziehen wir noch die Waagrechte  $AEF$ . Dann ist, wie man aus dem

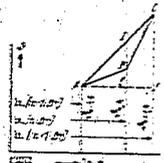


Bild 2. Zum Beweis der logarithmischen Verwertung beim Zylinder.

$$\frac{ED}{FC} = \frac{AE}{AC} = \frac{\ln(n\Delta r) - \ln((n-1)\Delta r)}{\ln(n\Delta r) - \ln((n+1)\Delta r)} = \frac{\ln \frac{n}{n-1}}{\ln \frac{n}{n+1}}$$

Mit  $FC = \theta_{n+1,2} - \theta_{n-1,2}$  und  $EB = \theta_{n,2} - \theta_{n-1,2}$  wird

$$BD = ED - EB = (\theta_{n+1,2} - \theta_{n-1,2}) \frac{\ln \frac{n}{n-1}}{\ln \frac{n}{n+1}} - (\theta_{n,2} - \theta_{n-1,2})$$

Durch Potenzentwicklung des Logarithmus ergibt sich

$$\frac{\ln \frac{n}{n-1}}{\ln \frac{n}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \dots}{-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} - \dots} = 2 \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \dots \right)$$

Vernachlässigt man alle Glieder dieser Reihen von  $1/3n^3$  an, so erhält man die Näherung

$$\frac{\ln \frac{n}{n-1}}{\ln \frac{n}{n+1}} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$$

Diese Vernachlässigung ist für größere Werte von  $n$  etwas weniger zulässig, aber selbst für  $n=1$  liefert die Näherung den Wert  $2/3$ , während der genaue Wert 1 ist. Dieser Fehler kann zugelassen werden, denn er tritt nur bei dem ersten  $\Delta x$  ein, und bei jedem Differenzverfahren muß man mit Abweichungen von der Größenordnung einer Differenz rechnen. Durch Einsetzen der Näherung ergibt sich

$$ED = \frac{1}{2} [\theta_{n+1,2} - \theta_{n-1,2} - 2\theta_{n,2} + \frac{1}{2n} (\theta_{n+1,2} - \theta_{n-1,2})]$$

Dies ist bei Benutzung von Gl. 10 aber gerade die rechte Seite der Gl. 8. Damit ist bewiesen, daß sich unser Verfahren des „Eckenschemas“ auch auf den Zylinder anwenden läßt, wenn man den Radius  $r$  logarithmisch aufträgt.

000224

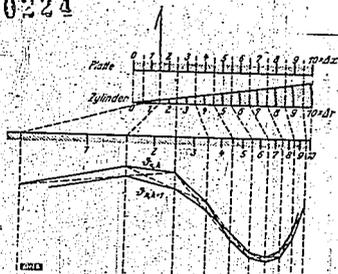


Bild 3. Die Durchführung des Differenzverfahrens für den Zylinder bei logarithmischer Verzerrung.

In Bild 3 ist im oberen Teil eine Platte; und ein Zylinder in 10 gleiche, ebene oder zylindrische Schichten 1 bis 10 jeweils von der Dicke  $\Delta x$  oder  $\Delta r$  geteilt. Die Temperatur jeder Schicht gibt man am besten in ihrer Mitte, also an den Stellen 0,5, 1,5, 2,5 usw. der Teilung an, die durch gestrichelte Senkrechte hervorgehoben sind; auf ihnen liegen die Knickpunkte der Linienzüge der Temperatur, und bei der ebenen Platte kann man diese äquidistanten, Senkrechten unmittelbar zur Konstruktion der späteren Temperaturverteilungen benutzen. Im Falle des Zylinders mit der Achse bei 0 muß man die Schichtenenteilung in einen logarithmischen Maßstab umzeichnen, um die Methode des Eckenschnittens anwenden zu können. Das ist im unteren Teil des Bildes 3 geschehen. Dabei vergrößert sich die Teilung nach der Zylinderachse hin, und diese selbst

rückt links ins Unendliche, was aber für die Konstruktion keine Erschwerung bedeutet. In die logarithmische Teilung ist ein Stück eines Linienzuges der Temperatur  $\theta_{n,k}$  eingetragen und darin die Durchführung der Konstruktion der nach  $\Delta t = (\Delta x)^2 / (2a)$  darauf folgenden Temperaturen  $\theta_{n,k+1}$  gezeigt. Die Lösung ist nicht ohne weiteres auf einen Hohlzylinder anwendbar. Man teilt dessen Dicke in gleiche Teile  $\Delta r$  und läßt bei der Konstruktion den Hohlraum unbeachtet.  
 c) Die Kugel. — Bei der Kugel können wir dieselbe Konstruktion anwenden, wenn wir die äquidistante Teilung in reziprokem Maßstab verzerren, die Temperaturen  $\theta_{n,k}$  also über  $1/r$  auftragen; dabei ist das Minuszeichen vorgesetzt, um durch die Verzerrung nicht die Reihenfolge der Teile umzukehren. In Bild 4 ist ganz entsprechend dem Bild 3 die Verzerrung der Teilung dargestellt;

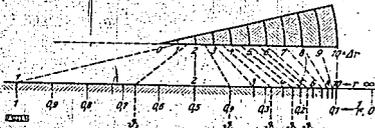


Bild 4. Reziproke Verzerrung bei der Kugel.

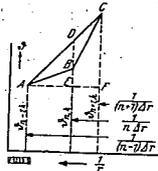


Bild 5 (rechts). Zum Beweis der reziproken Verzerrung bei der Kugel.

das oben genannte Minuszeichen ist dadurch berücksichtigt, daß die  $1/r$ -Teilung von rechts hier zählt. Der Kugelmittelpunkt rückt hier ähnlich wie beim Zylinder nach links ins Unendliche. Den Beweis erbringen wir an Hand des Bildes 5, aus dem wir ablesen:

$$\frac{ED}{FD} = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{1}{(n-1)\Delta r} - \frac{1}{n\Delta r}}{\frac{1}{(n-1)\Delta r} - \frac{1}{(n+1)\Delta r}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right);$$

damit wird

$$BD = ED - EB = \frac{1}{2} (\theta_{n+1,k} - \theta_{n-1,k}) \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - (\theta_{n,k} - \theta_{n-1,k})$$

oder

$$BD = \frac{1}{2} [(\theta_{n+1,k} + \theta_{n-1,k} - 2\theta_{n,k}) + \frac{1}{n} (\theta_{n+1,k} - \theta_{n-1,k})].$$

Das ist unter Berücksichtigung der Gl. 10 aber gerade die rechte Seite der Gl. 9, was zu beweisen war.

4. Verallgemeinerungen des Verfahrens. a) Die Wärmeleitung im Stab mit veränderlichem Querschnitt. Die Lösung für den Zylinder gilt zugleich für Keile, die man sich als Sektoren aus einem vollen oder hohlen Zylinder herausgeschnitten denken kann, wenn die Temperatur in ihnen außer von der Zeit nur eine Funktion des Abstandes von der Stirn des Keiles ist. Die Lösung der Kugel gilt entsprechend auch für Kegel oder Kegelstümpfe, die als Teile von Kugeln aufgefaßt werden können.

Man kann aber noch weiter verallgemeinern auf einen Stab mit beliebig über seiner Längskordinate  $x$  veränderlichem Querschnitt, wenn die Temperatur außer von der Zeit nur von  $x$  abhängt und wenn man annimmt, daß der Stab keine Wärme durch seine Oberfläche abgibt. Ist  $q(x)$  der Querschnittsverlauf des Stabes, so gilt, wie man leicht einsieht, für den Temperaturgleich in ihm die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{q'(x)}{q(x)} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = a \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{d(\ln q(x))}{dx} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (12)$$

oder als Differenzengleichung geschrieben

$$\Delta_t \theta = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left[ \Delta_x^2 \theta + \frac{q'}{q} \Delta x \Delta_x \theta \right] \quad (13)$$

Die Gl. 12 ist eine Verallgemeinerung der Gl. 2 und 3, wobei an Stelle von  $1/r$  bzw.  $2/r$  die Funktion  $q'(x)/q(x) = d(\ln q(x))/dx$  steht. Wir wollen versuchen, ob wir nicht unser Verfahren des Eckenabschneidens zur Lösung verwenden können, indem wir einen geeigneten Verzerrungsmaßstab wählen.

Die  $x$ -Kordinate des Stabes sei in gleiche Teile eingeteilt, aber vor Durchführung des Eckenabschneidens werde der Maßstab nach der zunächst noch unbekanntem Funktion

$$\xi = f(x) \quad (14)$$

verzerrt. An Stelle der gleichgroßen Differenzen  $\Delta x = h$  der Werte  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  treten dann in der Zeichnung die ungleichen Differenzen

$$\Delta \xi = f'(x) \Delta x = v(x) \Delta x \quad (15)$$

der Werte  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ . Man erhält die Verzerrung am bequemsten graphisch nach Bild 6 mit Hilfe der Funktion  $\xi = f(x)$ . Wir betrachten nun das Eckenabschneiden in dem über  $\xi$  aufgetragenen

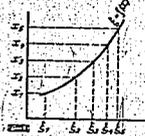


Bild 6 (links). Allgemeine Verzerrungsfunktion der Längskordinate.

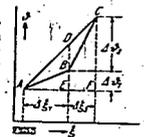


Bild 7 (rechts). Zum Beweise der allgemeinen Verzerrung beim Stabe veränderlichen Querschnittes.

Temperaturfeld des Bildes 7. Daraus ergibt sich für zwei aufeinanderfolgende Differenzen  $\Delta \xi_1$  und  $\Delta \xi_2$  mit den zugehörigen Differenzen  $\Delta \theta_1$  und  $\Delta \theta_2$  der Temperaturen  $\theta_{n,k}$ ;  $\theta_{n+1,k}$  und  $\theta_{n+2,k}$

$$\frac{\theta_{n+2,k} - (\theta_{n+1,k} + B D)}{\Delta \xi_2} = \frac{(\theta_{n+1,k} + B D) - \theta_{n,k}}{\Delta \xi_1}$$

oder

$$B D = \frac{\Delta \theta_2 \Delta \xi_1 - \Delta \theta_1 \Delta \xi_2}{\Delta \xi_1 + \Delta \xi_2} \quad (16)$$

Durch Reihenentwicklung ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta \xi_1 &= f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \dots \\ \Delta \xi_2 &= f(x+2h) - f(x+h) = h f'(x) + \frac{3}{2} h^2 f''(x) + \dots \\ \Delta \theta_1 &= \theta_{n+1} - \theta_n = h \theta'(x) + \frac{1}{2} h^2 \theta''(x) + \dots \\ \Delta \theta_2 &= \theta_{n+2} - \theta_{n+1} = h \theta'(x) + \frac{3}{2} h^2 \theta''(x) + \dots \end{aligned}$$

Damit wird bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Potenz in  $h$  gegen solche niederer

$$B D = \frac{h^2}{2} \left( \theta'' - f'' \theta' \right) \quad (17)$$

oder als Differenzengleichung mit  $h = \Delta x$  geschrieben

$$B D = \frac{1}{2} \left( \Delta_x^2 \theta - \frac{f''}{f'} \Delta_x \theta \right) \quad (18)$$

Das ist nach Gl. 13 gerade der Zuwachs  $\Delta_t \theta$  von  $\theta$  in der Zeit  $\Delta t = (\Delta x)^2 / (2a)$ , wenn die Verzerrung  $\xi = f(x)$  so gewählt wird, daß

$$\frac{f''}{f'} = \frac{q'}{q} \quad \text{oder} \quad \frac{d(\ln f')}{dx} = \frac{d(\ln q)}{dx} \quad (19)$$

ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt

$$r' = \frac{C}{q(x)} \quad \text{und} \quad \xi = f(x) = C \int \frac{dx}{q(x)} + c \quad (20)$$

Das bedeutet nach Gl. 15, daß die Differenzen  $\Delta x = h$  im umgekehrten Verhältnis des Stabquerschnittes zu verzerrt sind. In dieser Lösung sind, wie man leicht erkennt, der Zylinder mit  $q = kr$  und die Kugel mit  $q = \frac{1}{2} \pi r^2$  als Sonderfälle enthalten. Da über die Art des Querschnittsverlaufes keine besonderen Annahmen gemacht werden, kann  $q'/q$  eine beliebige Funktion  $Q(x)$  von  $x$  sein. Damit löst unser Verfahren die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = a \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Q(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (21)$$

wenn wir die Verzerrung so wählen, daß

$$f(x) = \psi(x) = \frac{d\xi}{dx} = C e^{-\int Q(x) dx} \quad (22)$$

wird.

b) Die Berücksichtigung örtlich veränderlicher Stoffwerte. — Das Lösungsverfahren erlaubt noch eine weitere Verallgemeinerung. Bisher hatten wir den Körper in Schichten gleicher Dicke  $\Delta x$  eingeteilt und diese in einem verzerrten Maßstab aufgetragen. Man kann aber auch von ungleichen, nach irgend einem Gesetz veränderlichen Differenzen

$$\Delta x = h \varphi(x) \quad (23)$$

ausgehen, wobei  $h$  eine kleine feste Größe und  $\varphi(x)$  eine gegebene Funktion von  $x$  ist. Diese ungleichen Differenzen können, wie vorstehend gezeigt, vor dem Auftragen noch zu den Differenzen

$$\Delta \xi = \psi(x) \Delta x = h \psi \varphi \quad (24)$$

verzerrt werden.

Für zwei aufeinanderfolgende Differenzen gilt dann bei Vernachlässigen höherer Potenzen von  $h$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 &= h \varphi(x) \\ \Delta x_2 &= h \varphi(x + \Delta x_1) = h \varphi + h^2 \varphi \varphi' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi_1 &= \psi(x) \Delta x_1 = h \psi \varphi \\ \Delta \xi_2 &= \psi(x + \Delta x_1) \Delta x_2 = \psi(x + h \varphi) (h \varphi + h^2 \varphi \varphi') = \\ &= h \psi \varphi + h^2 \varphi \varphi' (\psi \varphi' + \psi' \varphi) + h^3 \varphi^2 \varphi' \psi'' \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Für die zugehörigen Differenzen  $\Delta \theta_1$  und  $\Delta \theta_2$  gilt dann die Reihenentwicklung

$$\left. \begin{aligned} \Delta \theta_1 &= \Delta x_1 \theta' + \frac{1}{2} (\Delta x_1)^2 \theta'' + \dots \\ \Delta \theta_2 &= \Delta x_2 (\theta' + \Delta x_1 \theta'') + \frac{1}{2} (\Delta x_2)^2 (\theta'' + \Delta x_1 \theta''') \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

oder, wenn man  $\Delta x_1$  und  $\Delta x_2$  aus Gl. 25 einsetzt,

$$\left. \begin{aligned} \Delta \theta_1 &= h \varphi \theta' + \frac{1}{2} h^2 \varphi^2 \theta'' \\ \Delta \theta_2 &= h \varphi \theta' + h^2 (\varphi \varphi' \theta' + \frac{3}{2} \varphi^2 \theta'') \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

Führt man die Ausdrücke in Gl. 16 ein, so erhält man den durch das Eckenabschneiden erreichten Zuwachs von  $\theta$  in der Form

$$BD' = \frac{1}{2} h^2 \varphi^2 \left( \theta'' - \frac{\varphi'}{\varphi} \theta' \right) \quad (28)$$

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = a_0 P(x) \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + Q(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (29)$$

in der  $a_0$  ein fester Wert ist und  $P(x)$  und  $Q(x)$  gegebene Funktionen von  $x$  sind.

Als Differenzengleichung geschrieben, lautet sie:

$$\Delta_1 \theta' = a_0 \Delta_1 P(x) [\theta'' + Q(x) \theta'] \quad (29a)$$

Vergleicht man die Differenzengleichung mit Gl. 28, so sieht man, daß die Zunahme  $\Delta_1 \theta$  gerade gleich der durch das Eckenabschneiden gewonnenen Strecke  $BD$  ist, wenn die Differenzenteilung nach Gl. 23 und der Maßstab des Auftragens nach Gl. 24 so gewählt werden, daß

$$\varphi^2 = P(x) \quad \text{und} \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = -Q(x) \quad (30)$$

oder

$$\varphi = \sqrt{P(x)} \quad \text{und} \quad \psi = C e^{-\int Q(x) dx} \quad (30a)$$

ist, wenn außerdem für alle  $x$  gleichmäßig  $\Delta t = h^2/(2 a_0)$  gewählt wird.

Damit ist unser Verfahren geeignet, auch die Differentialgleichung 29 mit den beiden beliebigen Funktionen  $P(x)$  und  $Q(x)$  zu lösen. Diese Funktionen brauchen nicht in analytischer Form vorzuliegen, sondern können als empirische Kurven gegeben sein. Sind in einem Stab veränderlichen Querschnittes  $q$  die Stoffwerte  $\lambda, c, \gamma$  und damit auch  $a$  Funktionen von  $x$ , so gilt für den Wärmeausgleich in ihm die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a(x) \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda(x)} \ln(\lambda(x) \cdot q(x)) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (31)$$

Sie ist identisch mit Gl. 29, wenn man  $a(x) = a_0 P(x)$  und  $\frac{1}{\lambda(x)} \ln(\lambda(x) \cdot q(x)) = Q(x)$  setzt. In diesem Falle ermöglichen also die Verzerrungsfunktionen

$$\varphi = \sqrt{\frac{a(x)}{a_0}} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{1}{\lambda(x) \cdot q(x)} \quad (31a)$$

die Lösung nach unserem Verfahren.

c) Die Wärmeübertragung an strömende Medien. — Das Verfahren läßt sich auch anwenden auf die Wärmeübertragung an strömende Flüssigkeiten: Strömt z. B. durch ein zylindrisches Rohr eine Flüssigkeit mit der vom Radius  $r$  abhängigen Geschwindigkeit  $w(r)$ , so hat die Differentialgleichung für die Ausbildung des Temperaturfeldes bei laminarer Strömung die Form

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{a}{w(r)} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] \quad (32)$$

wobei  $z$  die Längenkoordinate in Richtung der Rohrachse ist. Das ist ein Sonderfall der Differentialgleichung 29, wobei nur an Stelle der Zeit  $t$  die Strecke  $z$  getreten ist. Die Geschwindigkeit soll dabei nur vom Radius, nicht auch noch von  $z$  abhängen, wir setzen also hydrodynamisch ausgebildete Strömung voraus.

Ist die Strömung turbulent, so hat man statt des wirklichen Wärmeleitvermögens der Flüssigkeit einen größeren, längs des Radius veränderlichen Wert  $\lambda(r)$  einzuführen, der den Wärmetransport durch turbulente Mischbewegung einschließt und der aus den hydrodynamischen Arbeiten über die Austauschgröße bei der ausgebildeten turbulenten Rohrströmung bekannt ist. Dann lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{a(r)}{w(r)} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \ln(r \cdot \lambda(r)) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] \quad (33)$$

oder

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{a(r)}{w(r)} \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] \quad (33a)$$

wobei  $a(r)$ ,  $w(r)$  und  $\lambda(r)$  gegebene Funktionen von  $r$  sind. Das ist eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = P(r) \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + Q(r) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] \quad (34)$$

die sich ähnlich wie Gl. 29 mit Hilfe der Verzerrungsfunktionen

$$\varphi(r) = \sqrt{\frac{a(r)}{w(r)}} \quad \text{und} \quad \psi(r) = \frac{1}{r \cdot \lambda(r)} \quad (35)$$

nach unserm Verfahren des Eckenabschneidens lösen läßt, wenn überall der Abstand  $\Delta z$  zweier in Richtung der Strömung aufeinander folgender Temperaturprofile nach der Gleichung

$$\Delta z = \frac{1}{2} h^2 \quad (36)$$

mit der ursprünglich gewählten kleinen festen Größe,  $h$  der Gl. 23 zusammenhängt.

d) Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte. Berücksichtigung von Wärmequellen. — Bei vielen praktischen Problemen hängen die Stoffwerte von der Temperatur ab. In besonders hohem Maße gilt das für die beim Stoff- und Impulsaustausch und bei der turbulenten Wärmeübertragung wesentliche Zähigkeit; aber auch Wärmeleitfähigkeit, spezifische Wärme, Wichte und damit die Temperaturleitfähigkeit können sich mit der Temperatur merklich ändern. Für die analytische Lösung der Differentialgleichungen bedeutet das eine bisher unüberwindliche Schwierigkeit, weil sie dann nichtlinear werden. Unser graphisches Verfahren bleibt aber anwendbar, es wird nur umständlicher, weil beim Eckenabschneiden in den Bildern 2, 5 und 7 die Strecke  $BD$  nicht mehr unmittelbar den Temperaturanstieg in der Zeit  $\Delta t = \frac{1}{2 a} (\Delta z)^2$  liefert. Ist die Temperaturabhängig-

(20) Verhältnis des Stabquerzylinders mit  $q = k r$  Querschnittsverlaufes  $Q(x)$  von  $x$  sein.  
(21)  
(22) Das Lösungsproblem in Schichten  
(23) Diese ungleichen Differenzen  
(24)  
(25)  
(26)  
(27)  
(27a)  
(28)  
(29)  
(29a)  
(30)

keit der Stoffwerte von der Art, daß sie sich durch Ersetzen der konstanten Temperaturleitfähigkeit  $a$  in den Gleichungen 4, 5, 6, 12 und 31 durch einen Ausdruck der Form  $a_m \cdot A(\theta)$  berücksichtigen läßt, wobei  $a_m$  ein passend gewählter Mittelwert und  $A(\theta)$  eine Funktion der Temperatur ist, so erhält man in der Zeit  $\Delta t = \frac{1}{2a_m} (\Delta x)^2$  den Temperaturanstieg  $BD' = BD \cdot A(\theta)$ , und  $D'$  ist ein Punkt der neuen Temperaturkurve.

Sind Wärmequellen vorhanden, deren Ergiebigkeit im allgemeinen eine Funktion der Temperatur ist (chemische Reaktionen oder Phasenumwandlungen, z. B. abbindender Beton), so kann man sie berücksichtigen, indem man den graphisch ermittelten Temperaturanstieg noch um ein der Ergiebigkeit der Quellen verhältnismäßiges Stück vergrößert.

Auch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = M(x, \theta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + N(x, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + L(x, \theta) \quad (37)$$

wobei  $M(x, \theta)$ ,  $N(x, \theta)$  und  $L(x, \theta)$  gegebene Funktionen sind, läßt sich noch lösen, wenn man beachtet, daß in Bild 2 die Strecke  $BD$  verhältnismäßig  $\frac{\partial \theta}{\partial x^2} \Delta x^2$  und  $ED$  verhältnismäßig  $\frac{\partial \theta}{\partial x} \Delta x$  ist. Der Zuwachs  $\Delta \theta$ , in der passend gewählten Zeit  $\Delta t$  ergibt sich dann als eine lineare Funktion

$$\Delta \theta = M(x, \theta) BD + N(x, \theta) ED + L(x, \theta) \quad (37a)$$

der Strecken  $BD$  und  $ED$ , die man mit Hilfe der gegebenen Funktionen  $M$ ,  $N$  und  $L$  leicht ausrechnen und zur Zeichnung der neuen Temperaturkurve benutzen kann. Die Funktion  $L(x, \theta)$  berücksichtigt dabei die Wärmequellen. In diesem allgemeinen Falle arbeitet man zweckmäßig mit unverzerrter Längenkoordinate, da sich die Art der Verzerrung im Laufe der Zeit ändern müßte.

Bei allen unverzerrten Maßstäben kann man das Zeichnen der Linienzüge der Temperatur leicht durch das Berechnen einer Zahlentafel ersetzen, was die Genauigkeit erhöht. Man hat dann nach den Vorschriften der Rekursionsformeln Mittelwerte und Differenzen von benachbarten Temperaturwerten zu bilden<sup>2)</sup>.

5. Die Erfüllung von Randbedingungen. Die vorstehenden Überlegungen erlauben die Ermittlung des zeitlichen Temperaturverlaufes im Innern von Körpern. Bei Anwendungen sind aber meist gewisse Randbedingungen an der Oberfläche oder der Begrenzung der Körper zu erfüllen, auf die wir nun eingehen wollen. Dabei werden die Vorteile unseres Verfahrens besonders hervortreten; denn es erlaubt die Anpassung an beliebige, auch zeitlich veränderliche Randbedingungen.

a) Vorgeschriebene Temperatur der Oberfläche. — Ist die Temperatur einer Oberfläche gegeben, so muß die Temperaturkurve stets durch den vorgeschriebenen Temperaturpunkt der Oberfläche gehen. Um das zu erreichen, setzt man den Linienzug der Temperatur „spiegelbildlich,



Bild 8a. Vorgeschriebene Temperatur der Oberfläche.



Bild 8b. Wärmedichteter Abschluß der Oberfläche.

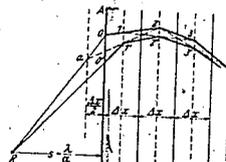


Bild 8c. Wärmeübergangsbedingung.

Bild 8a bis c. Anpassung an Grenzbedingungen.

aber mit umgekehrtem Vorzeichen über den gegebenen Oberflächenpunkt hinaus fort. Bild 8a zeigt dieses Verfahren, dabei ist  $A-A$  die Oberfläche des Körpers mit dem gegebenen Temperaturpunkt 0, und die Punkte 1, 2 und 3 geben die Temperatur in der Mitte dreier Schichten  $\Delta x$ . Wir setzen nun den Linienzug „spiegelbildlich“ zu 0 mit umgekehrtem Vorzeichen fort in den Punkten —1, —2 und —3. Durch Eckenabschneiden erhält man den Linienzug —2', —1', 0', 1', 2' als Bild der Temperatur nach der Zeit  $\Delta t$ .

b) Wärmedichteter Abschluß der Oberfläche. — Ist die Oberfläche wärmedicht abgeschlossen, so muß der Temperaturverlauf an der Oberfläche eine waagerechte Tangente haben. Dazu

<sup>2)</sup> Ein Rechenbeispiel dieser Art ist durchgeführt bei: Ernst Schmidt, Einführung in die technische Thermodynamik, Berlin 1936.

Temperaturleitfähigkeit  $\alpha$  ( $\theta$  berücksichtigen läßt, Temperatur ist, so erhält man  $\theta$  ist ein Punkt der neuen Funktion der Temperatur (der Beton), so kann man  $\theta$  noch um ein der Er

spiegelt man ihn ohne Vorzeichenumkehr an der Oberfläche und führt dann das Eckenabschneiden durch, wie das Bild 8b zeigt.

e) Wärmeübergangsbedingung. — In den meisten praktischen Fällen wird von einer Oberfläche mit der veränderlichen Temperatur  $\theta_0$  Wärme an ein flüssiges oder gasförmiges Medium von der Temperatur  $\theta_1$  abgegeben, wobei die Wärmeabgabe durch eine Wärmeübergangszahl  $\lambda$  bestimmt wird. In diesem Falle gilt für den Wärmefluß

$$\lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_0 = \alpha (\theta_0 - \theta_1) \quad (38)$$

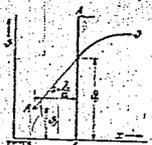


Bild 9.  
Endtangente und Richtpunkt bei der Wärmeübergangsbedingung.

wobei  $(\partial \theta / \partial x)_0$  das Temperaturgefälle unmittelbar unter der Oberfläche und  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit des festen Körpers ist. Stellt man die Temperaturverteilung als Kurve über der  $z$ -Achse dar, so bedeutet diese Bedingung, daß die Endtangente der Temperaturkurve durch einen Richtpunkt  $R$  gehen muß mit der Ordinate  $\delta$ , und dem Abstand  $s = \lambda/\alpha$  von der Oberfläche, wie das Bild 9 darstellt. Die Durchführung des Eckenabschneidens in diesem Falle zeigt Bild 8c. Dabei ist 0, 1, 2, 3 der anfängliche Verlauf der Temperatur. Die Änderung der Temperatur an den Stellen 2 und 3 erhält man wie bisher in den Punkten 2' und 3'. Um die Änderung des Punktes 1 zu ermitteln, ziehen wir eine Parallele zur Oberfläche im Abstände  $\frac{1}{2} s$  und verbinden den die Oberflächentemperatur kennzeichnenden Punkt 0 mit dem durch Flüssigkeitstemperatur und Wärmeübergangszahl bestimmten Richtpunkt  $R$ . Der Schnittpunkt dieser beiden Linien ergibt den Hilfspunkt  $a$ , der als Fortsetzung der anfänglichen Temperaturverteilung über die Oberfläche hinaus angesehen werden kann. Der Punkt 1' ergibt sich nun als Schnitt der Verbindungslinie  $a2$  mit der Ordinate durch 1. Ziehen wir noch die Gerade  $R1'$ , welche die Körperoberfläche in  $Dt$  schneidet, so ist 0', 1', 2', 3' die gesuchte Temperaturverteilung zur Zeit  $t + Dt$ . In dieser Weise fährt man fort, wobei der Richtpunkt entsprechend zu verschieben ist, wenn sich Wärmeübergangszahl und Flüssigkeitstemperatur im Laufe der Zeit ändern. Bei Anwendung verzerrter Koordinaten hat man zu beachten, daß die Entfernung  $s = \lambda/\alpha$  des Richtpunktes  $R$  von der Oberfläche in derselben Weise verzerrt werden muß wie ein Element der Längenkoordinate in unmittelbarer Nähe der Oberfläche. Unter Benutzung der durch Gl. 15 bzw. 24 eingeführten Verzerrungsfunktion  $\gamma$  erhält man dann

$$s = \frac{\lambda}{\alpha} \gamma_0$$

wenn der Index 0 den Wert dieser Funktion an der Oberfläche bezeichnet. Im Falle des Zylinders wird  $s = r_0/(2\alpha)$ , wobei  $r_0$  der Radius der Oberfläche ist.

Ist der Wärmefluß durch die Oberfläche gegeben, so entspricht dem eine Endtangente bestimmter Neigung. Der Richtpunkt  $R$  rückt dann ins Unendliche, d. h. er wird durch eine gegebene Richtung ersetzt.

Gegenüber der analytischen Methode besitzt unser Verfahren außer seiner Einfachheit den großen Vorteil, beliebigen, auch zeitlich veränderlichen Grenzbedingungen genügen zu können.

6. Zusammenfassung. Ein früher vom Verfasser angegebenes Differenzenverfahren für die Lösung der Differentialgleichung der Wärmeleitung, der Diffusion und des Impulsaustausches im nichtstationären Fall wird verallgemeinert auf den Zylinder, die Kugel, den Stab mit veränderlichem Querschnitt und mit örtlich veränderlichen Stoffwerten sowie auf den Wärmeübergang an strömende Medien. Dann werden allgemeinere Differentialgleichungen angegeben, die sich in gleicher Weise lösen lassen. Das Verfahren hat gegenüber den analytischen Lösungen den großen Vorteil des viel kleineren mathematischen Aufwandes und der Möglichkeit, auch verwickelten Grenzbedingungen genügen zu können.

[RF 1223]

TITLE PAGE

3. Das  $J, j$ -Diagramm, ein neues Hilfemittel zur Berechnung von Gasturbinenprozessen.  
The diagram of enthalpy vs. air-gas ratio, a new tool for the calculation of gas turbine processes.

Frame Nos. 230 - 244

0231

006230

Sonderdruck aus Band 70, 1933, Heft 3  
der Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung

Das  $\gamma$ -Diphenol, ein neues Hilfsmittel zur Messung von  
Gasturbulenprozessen  
von Ernst Schmidt

Der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung  
vorgelegt  
am 4. Dezember 1932

## Das J.-z-Diagramm, ein neues Hilfsmittel zur Berechnung von Gasführinnenprozessen

Von Ernst Schmitt

### Einleitung

Bei Gasführinnenprozessen muß man bei richtigem Luftführermaß vorbrezuen, was die Temperatur der Gase auf ein für Turbinenmaschinen noch erträgliches Maß zu vermindern. Zur Drosselung der Leistung gibt man weniger Kraftstoff, was wieder dem Luftführermaß erhöht. Damit steigt oder zum Verschieben der Luft erforderliche Bruchteil der Führungsbahn, und der Wirkungsgrad nimmt ab. Die Ermittlung der Wirkungsgrade des Prozesses und der Leistungen von Gasführin und Verdichter erfordert Arbeit umfangreiche und wenig durchsichtige Rechnungen, wenn man die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmen der Gase berücksichtigen will. In folgenden wird ein Hilfsmittel beschrieben, das den Überblick erleichtert und die Rechenarbeit wesentlich abkürzt.

### Das J.-z-Diagramm bei konstanten spezifischen Wärmen

Zur Vereinfachung der Leistungsverhältnisse, der Gastemperaturen und der Wirkungsgrade einer aus Verdichter, Brennkammer und Turbine bestehenden Kraftanlage bei verschiedenen Luftführermaß ist ein J.-z-Diagramm zweckmäßig, in dem die Entladung  $J$  des Abholmittels für verschiedenen Temperaturen aller dem Luftverhältnis  $z$  aufgetragen ist. Um aus mit der neuen Darstellung verträglich zu machen, entwickeln wir zunächst unter der der elementaren Behandlung von Gasführinnenprozessen gewöhnlich gemachten Voraussetzung eines vollkommenen Vorganges, ebenfalls unveränderten Arbeitstitels konstanter spezifischer Wärme. Wir nehmen also an, daß die Verbrennungswärme der Luft etwa von außen zugeführt wird und an Stelle des Ausströmens der Abgase im Frode, die Wärme nach Abzug des in Arbeit verwandelten Teiles, wieder abgeführt wird. Da der Heizwert gewöhnlich auf  $1 \text{ kg}$  Kraftstoff bezogen ist, geben wir die Enthaltigkeit für die Luftmenge  $z \text{ kg}$  an. Dabei ist  $z$  in  $\text{kg}/\text{kg}$  die zur abholmetrischen

LEISTUNGSGRÄDEZ: Die 12. Gruppe von vier verschiedenen

Verrechnung von 1 kg Kraftstoff, erforderlichen Mindestluftmenge und  
 des Luftverhältnisses (oder des Luftmengenverhältnisses) für die Einflüsse  
 der Luftmenge  $V_{Luft}$  kann man sich leicht schreiben

$$f = V_{Luft} \cdot \rho_{Luft} = G_{Luft} \cdot \rho_{Luft} \quad (1)$$

wobei  $\rho_{Luft}$  die absolute Temperatur  $\rho_{Luft}$  die Abweichung und  $G_{Luft}$  die Wärmemenge  
 bezogen auf die entsprechenden Luftmenge (beobachtet) ohne Gleichung  
 in in dem  $A, B$  Diagramm der Abbildung 2 dargestellt. Die Kurve  $Z = konst$   
 läßt sich als Gerade darstellen, das vom Punkt  $Z = 0$  der vertikalen  
 Achse ausgeht und das auf der horizontalen Achse  $Z = 1$  die Einflüsse der  
 entsprechenden Luftmenge  $V_{Luft}$  abschneidet.

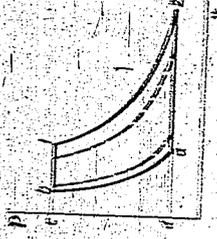


Abb. 2  
 Gesamte Apparatur im P-V-Diagramm

In diesem Diagramm wollen wir nun einen Querschnitt durch den Zustand  
 des Systems in der Abbildung 2 zeigen, damit wir  $a, b$  die Komplex-  
 geschwindigkeit  $Z$  die Expansionshöhe, für die durch die Fläche  $a, b, c, d$  dar-

$$I_2 - I_1 = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = G_{Luft} (P_2 - P_1) \quad (2)$$

$$I_2 - I_1 = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = G_{Luft} (P_2 - P_1) \quad (3)$$

$$\frac{I_2}{T_2} - \frac{I_1}{T_1} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p}{T} \, dV = \left( \frac{p}{T} \right)_{V_1}^{V_2} \cdot V \quad (4)$$

wobei der Nennwert der Ableitung eingeführt ist.  
 In dieser Gleichung ist  $\rho_{Luft}$  die absolute Temperatur, die den Wert  
 hat, wenn kein Luftverhältnis vorhanden ist, das heißt, wenn der Luftverhältnis  
 nicht vorhanden ist.

LEISTUNGSGRÄDEZ: Die 12. Gruppe von vier verschiedenen

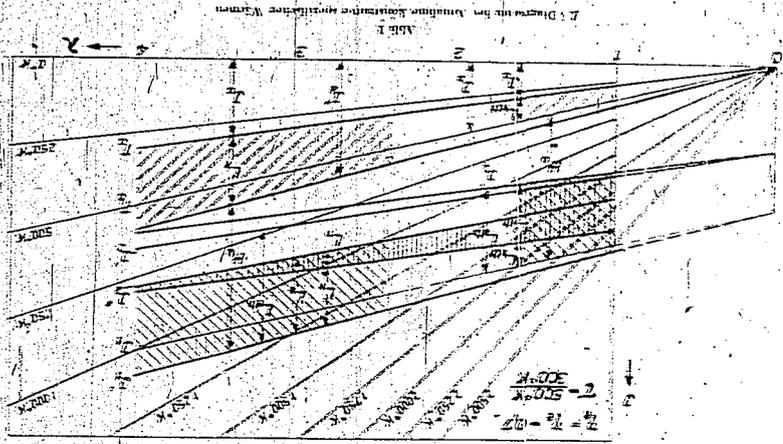


Abb. 1  
 Diagramm im Zustandsdiagramm

000235

Erst schließt die Z-Darstellung, die nach Rubinfeld aus:

schraffierten Streifen im rechten Teil der Abbildung 1, und das Gas hat hinter der Turbine die Enthalpie

$$H_2 = J_2 \cdot \eta_{21} \cdot T_2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) = J_2 \left[ 1 - \eta_{21} \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right]$$

die durch die mit  $J_2'$  bezeichnete Gerade dargestellt ist.

Zieht man wieder die Kompressorarbeit  $L_2$  von der Turbinenarbeit  $L_1$  ab, so erhält man die Nutzarbeit  $L_2$  als die Breite des senkrecht schraffierten Streifens im rechten Teil der Abbildung, der im Verhältnis zum Heißwert  $H_2$  ungefähr als Darstellung des Wirkungsgrades

$$\eta_{21} = \frac{L_2}{H_2} \quad (7)$$

ausgedrückt werden kann. Bei Maschinen mit Verdichten ist demnach der Wirkungsgrad von der Eintrittstemperatur der Turbine und damit vom Luftverhältnis nicht unabhängig, sondern er nimmt für die der Abbildung zugrunde gelegten Zahlenwerte  $\eta_{21} = \eta_{21} = 0,7$ ,  $\lambda = 500^\circ \text{K}/200^\circ \text{K}$  und als für ein Null ungefähr bei  $\lambda = 3,6$ .

Die graphische Darstellung ist viel übersichtlicher und anschaulicher als die entsprechende Rechnung, die, wie man unweigerlich ableitet, bei Annahme konstanter spez. Wärmefür den Wirkungsgrad auf die Formel

$$\eta_{21} = \frac{L_2}{H_2} = \frac{c_p \cdot T_2 \left[ \lambda - 1 - \frac{1}{\lambda} \right]}{c_p \cdot T_2 \left[ 1 - \frac{1}{\lambda} \right]} = \frac{\lambda - 1 - \frac{1}{\lambda}}{1 - \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda^2 - 1 - 1}{\lambda - 1} = \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda - 1} \quad (8)$$

folgt, die, wie es sich muß, eine lineare Abhängigkeit von  $\lambda$  zeigt. Der Wirkungsgrad Null ergibt sich für das Luftverhältnis

$$\lambda = \frac{2}{\eta_{21}} \quad (9)$$

hier recht die Turbinenleistung gerade aus, um den Kompressor zu treiben.

Das  $\lambda$ - $\eta_{21}$  Diagramm bei temperaturabhängiger spezifischer Wärme. Wir wollen nun unser Diagramm der Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmefür anpassen und auch die elementare Verschiedenheit von Bausgas und Luft berücksichtigen. Dagegen verursachungen wir wie bisher die Druckabhängigkeit der spezifischen Wärmefür und die Dichte, was bei den für Gasturbinen in Frage kommenden Drücken und Temperaturen ohne merkbare Fehler zulässig ist.

000234

Wir schließt die Z-Darstellung, die nach Rubinfeld aus:

Bei der Verrechnung wächst die Enthalpie um den Heißwert  $H_2$  nach der Gleichung

$$J_2 = J_1 + H_2 = J_1 + C_p \theta \quad (5)$$

wenn  $\theta$  die durch den Heißwert hervorgerufene Temperaturerhöhung der hochkomprimierten Luftmenge bedeutet.

In Abbildung 1 geht die Gerade  $T_2$  in Abhängigkeit von Luftverhältnis  $\lambda$  die Antriebsarbeit  $L_2$  mit der die Luft angesaugt wird. Der Verläufer steigt bei verhältnis ungenommener Verdichtung die Temperatur auf  $T_2$  und erhöht die Enthalpie auf  $L_2$  entsprechend der Differenz der Ordinate der Geraden  $T_2$  und  $T_1$ . Die senkrechte Breite des in der linken Hälfte der Abbildung 1 schraffierten Flächenstreifens zwischen  $T_2$  und  $T_1$  ist also die theoretische Kompressorarbeit  $L_{20}$  in Abhängigkeit vom Luftverhältnis  $\lambda$ . Ändert man zu  $L_2$  den Heißwert  $H_2$ , so erhält man die Enthalpie  $J_2$  nach der Verrechnung als zu  $L_2$  parallele Gerade, deren Schnittpunkte mit den Isothermen die Verbrennungstemperatur  $T_2$  in Abhängigkeit vom Luftverhältnis unter Berücksichtigung der Verdichtungsarbeit liefert. Die einseitige verändertes angenommenen adiabate Entspannung vermindert die Enthalpie auf

$$J_2 = J_1 + \frac{L_2}{\lambda} \quad (6)$$

und der im linken oberen Teil der Abbildung 1 schräg schraffierte Unterchied  $J_2 - J_1$  ist die Expansionsarbeit  $L_{20} = J_2 - J_1$  in Abhängigkeit vom Luftverhältnis  $\lambda$ . Legt man, wie in der Abbildung gezeigt,  $L_{20}$  auf  $L_{20}$  so wird die der Differenz  $L_{20} - L_{20}$  gleiche theoretische Nutzarbeit  $L_{20}$  der verlustlosen Prozesse durch einen im linken Teil der Abbildung senkrecht schraffierten Streifen konstanter Breite dargestellt, dessen Nutzarbeit und Wirkungsgrad sind beim verlustlosen Gasturbinenprozess vom Luftverhältnis und damit von der Temperatur  $T_2$  unabhängig, sondern werden allein vom Verhältnis  $T_2/T_1 = \tau$  bestimmt.

Treten Verluste auf, die wir durch die Wirkungsgrade  $\eta_2$  und  $\eta_1$  von Kompressor und Expansionsmaschine kennzeichnen, so erhält sich die Verdichtungsarbeit auf  $L_2 = L_{20}/\eta_2$  entsprechend dem unteren schräg schraffierten Streifen im rechten Teil der Abbildung 1, und die Enthalpie wächst von  $J_1$  auf  $J_2$ . Damit nimmt nach Gleichung 5 auch  $J_2$  um denselben Betrag auf  $J_2$  zu. Von  $J_2$  würde man bei verlustloser Entspannung die Enthalpie  $J_2 = J_2/\eta_1$  erreichen, wobei die Arbeit  $L_{20} = J_2 - J_1$  gewonnen wurde. Bei einem Turbinenwirkungsgrad  $\eta_1$  ist die Arbeit aber nur  $L_2 = \eta_1 L_{20} = \eta_1 J_2 - J_1$  entsprechend dem oberen schräg

000233

Erweit. Schmitt: Das Z. Abgemessene, ein neues Millimetermaß.

Bei Luft gilt, wenn wir die Beziehung der stoffmässigen Luftmenge  $V_{Luft}$  mit  $J_0$  und die der Luftmenge  $V_{Luft}$  mit  $J_1$  betrachten und alle Enthalpienwerte von jetzt ab nicht mehr vom absoluten Nullpunkt, sondern vom Tripunkt an rechnen:

$$J_1 = \lambda J_0 - \lambda V_{Luft} / \text{Sp. Lu.} \quad (10)$$

Dabei ist für 1 kg alles aus

a. Gesteinsten Kohlenstoff

b. Wasserstoff

c. Schwefel

d. Sauerstoff

bestehenden Brennstoffen bekanntlich:

$$V_{Luft} = 0.21 \left( \frac{8}{3} C + \frac{8}{3} H + \frac{1}{2} S + \frac{1}{8} O \right) \text{ kmol kg} \quad (11)$$

Für eine bestimmte Temperatur liefert nach Gleichung (10) die Enthalpie der Luft eine lineare Funktion des Luftverhältnisses  $\lambda$ ; die Isothermen der Luft bilden also auch hier eine vom Punkt  $\lambda = 0$  der Abszissenachse ausstrahlende Schar von Geraden, aber hier ausserordentlich dichtliegend, entsprechend der Zunahme der spezifischen Wärme.

Abbildung 31 zeigt in dem vom Punkt  $\lambda = 0$  ausstrahlenden gestrichelten Liniennetz unseren Teil und am rechten Rande ein Z. Diagramm der Luft mit Isothermen für einen Brennstoff ohne Schwefel und Sauerstoff mit  $a = 0.30$  und  $b = 0.15$ , wie er etwa einem mittleren Braunkohle oder Graukohle entspricht. Nach Gleichung (11) ist leichter  $V_{Luft} = 0.5157$  kmol/kg. Tabelle I enthält die der Abbildung 31 entnommenen Werte von  $J_0$  in kcal je kg Brennstoff für von  $100^\circ$  an  $100^\circ$  fortsetzende Temperaturen.

Das Diagramm eines Brennstoffes besteht aus

- 1. kmol Kohlenstoff
- 12.5 kg
- 2. kmol Wasserstoff
- 2 kg
- 3. kmol schwefeliger Shure
- 12.5 kg
- 0.79  $V_{Luft}$  Stickstoff.

000233

Erweit. Schmitt: Das Z. Abgemessene, ein neues Millimetermaß.

Die Temperatur des Brennstoffes und des Brenngases von  $100^\circ$  bis  $1100^\circ$  im Temperaturverhältnis  $\lambda = 100^\circ / T$  ist in  $J_0$  und  $J_1$  in  $J_1$  angegeben. Die Luftmenge  $V_{Luft}$  ist in  $J_0$  und  $J_1$  angegeben. Die Luftmenge  $V_{Luft}$  ist in  $J_0$  und  $J_1$  angegeben. Die Luftmenge  $V_{Luft}$  ist in  $J_0$  und  $J_1$  angegeben.

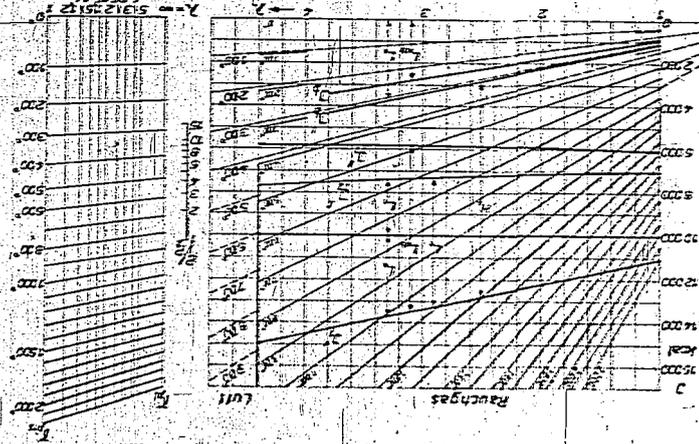


Abb. 31. Diagramm der Verteilung der Temperatur und des Brenngases von  $100^\circ$  bis  $1100^\circ$  im Temperaturverhältnis  $\lambda = 100^\circ / T$  ist in  $J_0$  und  $J_1$  angegeben. Die Luftmenge  $V_{Luft}$  ist in  $J_0$  und  $J_1$  angegeben.

Erstbestimmte Eigenschaften der verschiedenen Luftarten

$t$	$\rho$	$\rho_{\text{Luft}}$	$\rho_{\text{Wasserdampf}}$	$\rho_{\text{Luft + Wasserdampf}}$	$\rho_{\text{Luft}}$	$\rho_{\text{Wasserdampf}}$	$\rho_{\text{Luft + Wasserdampf}}$
0	0	0	0	0	0	0	0
100	0.946	0.808	0.138	0.946	0.946	0.138	1.084
200	0.801	0.683	0.117	0.801	0.683	0.117	0.918
300	0.694	0.587	0.103	0.694	0.587	0.103	0.797
400	0.608	0.512	0.091	0.608	0.512	0.091	0.709
500	0.542	0.450	0.081	0.542	0.450	0.081	0.653
600	0.487	0.398	0.072	0.487	0.398	0.072	0.609
700	0.441	0.354	0.064	0.441	0.354	0.064	0.574
800	0.401	0.317	0.057	0.401	0.317	0.057	0.545
900	0.367	0.285	0.051	0.367	0.285	0.051	0.521
1000	0.338	0.257	0.046	0.338	0.257	0.046	0.500
1100	0.312	0.232	0.041	0.312	0.232	0.041	0.481
1200	0.289	0.209	0.037	0.289	0.209	0.037	0.463
1300	0.269	0.188	0.033	0.269	0.188	0.033	0.447
1400	0.251	0.169	0.030	0.251	0.169	0.030	0.432
1500	0.235	0.152	0.027	0.235	0.152	0.027	0.418
1600	0.221	0.137	0.025	0.221	0.137	0.025	0.405
1700	0.208	0.123	0.023	0.208	0.123	0.023	0.393
1800	0.196	0.110	0.021	0.196	0.110	0.021	0.382
1900	0.185	0.098	0.019	0.185	0.098	0.019	0.372
2000	0.175	0.087	0.018	0.175	0.087	0.018	0.363

Folgende  $\rho_{\text{Luft}}$  und  $\rho_{\text{Wasserdampf}}$  sind die mittelmässigen Dichten der Luft und des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen  $t$  bei  $p = 1$  Atmosphäre.  $\rho_{\text{Luft + Wasserdampf}}$  ist die mittelmässige Dichte der Luft mit Wasserdampf bei  $p = 1$  Atmosphäre.

Man kann bei Luftberechnung nach

$$\rho = \rho_{\text{Luft}} + \rho_{\text{Wasserdampf}}$$

Die Endtemperatur  $T_2$  des Heilgases bei stöchiometrischer Verbrennung nach der Höhe von Temperaturen nach der Gleichung

$$T_2 = T_1 + \frac{Q_{\text{Verb}}}{c_p \cdot \rho_{\text{Luft}} + \rho_{\text{Wasserdampf}}} \quad (12)$$

ausrechnen, wobei  $\rho_{\text{Luft}}$ ,  $\rho_{\text{Wasserdampf}}$  und  $c_p$  die Endtemperatur  $T_2$  der betreffenden Gase sind. Für das Heilgas muss ein spezifischer

Erstbestimmte Eigenschaften der verschiedenen Luftarten

oder Gasen erhält man die Endtemperatur  $T_2$  der Tabelle 1. Bei ihrer Bildung in Abbildung 3a der Temperaturpunkte auf der Senkrechten für jede Lastung, die man parallel zu den entsprechenden Isothermen für reine Luft in Abbildung 3a zeichnen, dann die Isothermenkurve  $T_2 = T_1$  von dem Heilgas der stöchiometrischen Verbrennung zur die Mischlufttemperatur  $T_1$  hinanz, und die Endtemperatur  $T_2$  des Heilgases bei  $p = 1$  nach der Gleichung

$$T_2 = T_1 + \frac{Q_{\text{Verb}}}{c_p \cdot \rho_{\text{Luft}} + \rho_{\text{Wasserdampf}}} \quad (13)$$

Nachdem übersehen die Isothermen der Luft wie des Heilgases das ganze Bildfeld, so man die Isothermen über nur innerhalb  $400^\circ$  die Isothermen nur oberhalb dieser Temperaturbereich, ist in der Abbildung 3a die Isothermenkurve der Luft (vertikale Gerade), oben die des Heilgases (abgewinkelte Gerade) eingetragen.

Der prozentuale Konzentration des  $\text{H}_2$  Diagramms für verschiedene Isothermen, entsprechend Verlauf der Geradenkurve der Isothermen, ist auch bei Temperaturabhängigen spezifischen Wärmen berechnen. Nur wenn die Isothermen der Isothermen die gleiche Luftverhältnisse nicht mehr in gleichen Abständen, und sie gehen keine Heilgase auch nicht mehr durch einen Punkt.

Bei Temperaturabhängigen spezifischen Wärmen verbleibt aber die gleiche Gleichung (13), die die Temperaturverhältnisse mit den Druckverhältnissen verbindet, ihre Gültigkeit, und wir können die Endtemperatur einer durch die Anfangstemperatur und des Druckverhältnisse gegeben unabhängigen Zustandsänderung auf folgende Weise ermitteln:

Ein vollkommenes Gas, d. h. ein Gas, die der Zustandsgleichung  $pV = RT$  gehorcht, über dessen spezifische Wärme nach von der Temperatur abhängt, erfüllt bei einer kleinen druckabhängigen Zustandsänderung die kleine Entropiegleichung

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - \frac{p}{T} dp \quad (14)$$

oder integriert für eine endliche Zustandsänderung

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_p}{T} dT - \int_{p_1}^{p_2} \frac{p}{T} dp \quad (15)$$

Die mittelmässige spezifische Wärme bei Zustandsänderung, die  $T_1$  mit  $T_2$  verbindet, sind

Die Entropie  $\mathcal{E}_1$  ist sich also annehmen annehmen nur von der Temperatur...

$$\mathcal{E}_1 = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT \quad (15)$$

$$\mathcal{E}_2 = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT + \int_0^T \frac{C_p}{T} dT \quad (15a)$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2 + R \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (16)$$

$$\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_3 + R \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (16a)$$

ändert. Die Funktion  $\mathcal{E}_1$  ist kurz als Entropiefunktion bezeichnet, dabei...

Bei einer Adiabaten oder isentropischen Zustandsänderung ist in Gleichung (14) die Entropieänderung  $\mathcal{E}_1 = 0$  und also in Verbindung mit Gleichung (15) und (15a)

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = R \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (17)$$

Ist nun  $\mathcal{E}_1$  als Funktion von  $T$  bekannt, so kann damit zu jeder gegebenen Druckänderung die Temperaturänderung leicht ausgerechnet werden.

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = R \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (17a)$$

wenn  $\mathcal{E}_1$  die Entropiefunktion der reinen Luft ist. Für die Entropieänderung von Wasserdampf vom Druck  $p_1$  auf  $p_2$  gilt

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = R \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (17b)$$

wenn  $\mathcal{E}_1$  die Entropiefunktion des Wasserdampfes ist. Diese kann geschrieben werden

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = R \ln \frac{p_1}{p_2} + R \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (18)$$

Zusammenfassung der Ergebnisse...

wenn  $\mathcal{E}_2$  die Entropiefunktion des atmosphärischen Wasserdampfes und  $R$  das Verhältnis der Molekulargewichte des atmosphärischen Wasserdampfes und der Mischluftmenge von 1 ist. Für  $R$  mit  $\gamma = 0,35$  und  $\mu = 0,31$  wird

$$R = 1,4 \cdot 0,21 \cdot \frac{M}{\mu} = 1,36 \cdot 1,9727 \quad (19a)$$

In Abbildung 3b ist die Beziehung (19) für  $R$  bereits graphisch dargestellt. Dabei ist am linken Rand des Feldes  $\mathcal{E}_2$  entsprechend  $\gamma = 0$  und am rechten Rand  $\mathcal{E}_2$  entsprechend  $\gamma = 1$  in Abhängigkeit von  $\gamma$  als Leiter aufgetragen. Gleiche Temperaturen halber Leitern sind durch gerade Linien verbunden, die von der Seite der mit dem Luftverhältnis  $\lambda$  berechneten Senkrechten jeweils die Leiter der Entropiefunktion  $\mathcal{E}_2$  des Wasserdampfes abwärts bis zur Verbindung mit dem Luftverhältnis  $\lambda$  ausläuft. Die benutzten Zahlenwerte von  $\mathcal{E}_2$  sind  $\mathcal{E}_2$  sind in Tabelle I enthalten.

Unter Abbildung 3b ist eine Leiter gezeichnet, die  $\mathcal{E}_2(p_1/p_2)$  als  $\mathcal{E}_2(p_1/p_2)$  als Strecke für die angegebenen Werte von  $p_1/p_2$  darstellt. Um die zu einem bestimmten Druckverhältnis  $p_1/p_2$  gehörende adiabate Temperaturänderung zu finden, greift man  $\mathcal{E}_2(p_1/p_2)$  auf der Leiter ab, legt eine Strecke von der gegebenen Anfangstemperatur auf auf der zu dem gegebenen Luftverhältnis  $\lambda$  gehörenden Senkrechten der Entropiefunktion 3b ab und verbindet dem Isolierentfalle dieser Abbildung die Endtemperatur des Vorganges. Diese Endtemperatur überträgt man dann in das Isothermenfeld des  $\lambda$ -Diagramms des Diagramms auf der gleichen Senkrechten für  $\lambda$ , auf der auch die Anfangstemperatur angesetzt ist. Der senkrechte Abstand dieser beiden Punkte ist dann die maximums adiabate Expansionsarbeit  $J_{max}$ .

Die Möglichkeit der Anwendung des  $\lambda$ -Diagramms zu zeigen, ist in Abbildung 3a als Beispiel ein Gasturbineprozess eingezeichnet, bei dem Luft von  $9^\circ C$  und 1 auf 10 at bei ihrem Wirkungsgrad der Kompression von  $\eta_c = 0,80$  verdichtet und dann mit einem Brennstoff vom Heizwert  $H_0 = 10000$  kcal/kg verbrannt wird. Das heiße Gasgemisch wird in einer Gasturbine mit  $\eta_g = 0,80$  wieder auf 1 at entspannt. Gezeigt sind die Temperaturen, Arbeiten und Wirkungsgrade des Prozesses in Abhängigkeit vom Luftverhältnis  $\lambda$  der Verbrennung.

Die Endtemperatur der verbrennten adiabaten Kompression der Luft wird erhalten, indem man auf der Leiter für  $\mathcal{E}_2(p_1/p_2)$  den dem Druckverhältnis  $p_1/p_2 = 10$  entsprechenden Abstand der Punkte 1 und 10 abgreift und auf der linken Handleiter der Abbildung 3b von der gegebenen Anfangstemperatur von  $9^\circ C$  an nach oben aufträgt. Der so gefundene Punkt liefert in dem Felde der Isothermen die Endtemperatur von

000242

Ernst Schmidt: Das  $J_2$ -Diagramm, ein neues Hilfsmittel usw.

219° C. In der gestrichelten Isothermenteur für Luft der Abbildung 3a stellt dann die Isotherme dieser Temperatur zugleich die theoretische Kompressionsarbeit  $L_{20}$  und die Enthalpie  $H_2$  in Abhängigkeit vom Luftverhältnis  $\lambda$  dar, sie ist als kräftige Gerade eingetragen und mit  $L_2$  bezeichnet. Die wirkliche Kompressionsarbeit  $L_2 = L_{20}/\eta_2$  und die zugehörige Enthalpie  $H_2$  erhält man durch Vergrößern der Ordinaten von  $L_2$  im Verhältnis  $1/\eta_2$  als Gerade  $H_2$  entsprechend einer Temperatur von  $310^\circ$  C.

Trägt man von  $J_2$  nach oben den Heizwert  $H_2$  auf, so ergibt die dazu parallele Gerade  $J_2$  die Enthalpie des Gases nach der Verbrennung. Die Schnittpunkte von  $J_2$  mit den Isothermen des Rauchgases liefern die Verbrennungstemperatur als Funktion des Luftverhältnisses  $\lambda$ . Um die Zustandsänderung in der Turbine zu übersetzen, muß man zunächst die Endtemperatur der subhabeten Entspannung ermitteln. Dazu stellt man für das gegebene Luftverhältnis den der Verbrennungstemperatur entsprechenden Punkt im Entropiediagramm der Abbildung 3b und trägt von ihm die für das gegebene Druckverhältnis der Entspannung aus der Leiter für  $\lambda \ln P_2/P_1$  entnommene Strecke nach unten ab. Der gefundene Punkt ergibt die gesuchte Endtemperatur der subhabeten Entspannung, die man nun im  $J_2$ -Diagramm des Rauchgases überträgt. Führt man dies für einige Werte von  $\lambda$  durch, so erhält man die Linie  $J_1$ , sie ist keine Gerade mehr, aber so schwach gekrümmt, daß wenige Punkte genügen, um ihren genauen Verlauf festzulegen. Der senkrechte Abstand der Linien  $J_1$  und  $J_2$  ist dann die theoretische Entspannarbeit  $L_{20}$ , verkleinert man diesen Abstand im Verhältnis  $\eta_2$ , so erhält man die Kurve  $J_2'$  und damit die wirkliche Entspannarbeit  $L_2$ . Um die Nutzarbeit zu ermitteln, muß man von der Entspannarbeit  $L_2$  abziehen, die man von der Entspannung der Luft abzieht; dazu trägt man  $L_1$  von  $J_1$  aus nach unten ab und erhält die dem Heizwert  $H_2$  entsprechende waagerechte Gerade. Der senkrechte Abstand zwischen dieser Geraden und der Kurve  $J_2'$  ist dann die Nutzarbeit  $L_n$  und das Verhältnis  $L_n/H_2$  ist der Wirkungsgrad des Prozesses. Der Schnittpunkt der Linie  $J_2'$  mit den Rauchgasisothermen liefert die Temperatur der Gase beim Austritt aus der Turbine. Damit sind alle wesentlichen Fragen des Gasturbinenprozesses ohne Wärmetauscher beantwortet.

Aber auch die durch Vorwärmung der verdichteten Luft mittels der Abgase erzielbare Wirkungsgradsteigerung kann man leicht überschauen. In einem vollkommenen Wärmetauscher läßt sich nämlich gerade die dem senkrechten Abstand der Linien  $J_1$  und  $J_2$  entsprechende Wärmemenge zurückgewinnen. Dieser Betrag braucht dann nicht mehr durch den Brennstoff gedeckt zu werden, und der Wirkungsgrad ist das Ver-

000243

Ernst Schmidt: Das  $J_2$ -Diagramm, ein neues Hilfsmittel usw.

hältnis der Nutzleistung  $L_n$  zum senkrechten Abstand der Linien  $J_1$  und  $J_2$ . Bei einem unvollkommenen Wärmetauscher tritt an Stelle von  $J_2$  eine Linie, die im Isolierwertebereich um das Temperaturgefälle im Wärmetauscher tiefer liegt.

Das  $J_2$ -Diagramm ist hier für einen Kohlenwasserstoff mit der Zusammensetzung gerechnet, es läßt sich für andere Brennstoffe leicht mit Hilfe der Enthalpie- und Entropietabellen der Gase aufstellen. Seine Anwendung beschränkt sich nicht auf Gasturbinenprozesse, sondern bietet auch bei anderen Verbrennungsvorgängen Vorteile. Bei hohen Temperaturen muß man dann aber die Dissoziationsbedeutungen berücksichtigen.

Der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung vorgelegt am 3. Dezember 1932

000240

**Ansprache.**

Präsident: Ich danke Herrn Schmidt für diese Mittheilung über den Vertheilung der Wärme...

Herr Schmidt: Ich habe eine Frage. Wie verhält sich eine bestimmte Gasmenge bei wechselnder Temperatur...

Ackermann: Bei der ersten Gasmenge wird nur ein Drittel der Temperatur abgelesen...

Herr Schmidt: Ich würde zunächst daran denken, gerade schwarze Linien zu verwenden...

Ackermann: Wir haben auch ein anderes Gase getrocknet, wie die in der Kältepolitik...

Präsident: Ich danke, wir dürfen damit die Diskussion schließen und wenden Herrn...

TITLE PAGE

4. Vorreaktionen im Otto-Motor.  
Prereactions in the Otto Motor.

Frame Nos. 245 - 256

## Vorreaktionen im Otto-Motor

Von ERNST SCHMIDT VDI und E. MÜHLNER VDI, Braunschweig

Aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig

In dem von einem Otto-Motor verdichteten Kraftstoffdampf-Luftgemisch treten schon vor der Entzündung durch die von der Zündkerze ausgehende Flammenfront chemische Umsetzungen auf, die sog. Vorreaktionen. Ihre Untersuchung, die wegen ihrer Bedeutung für das Klopfen des Motors wichtig ist, kann am mit rascher Kraft laufenden Motor geschehen oder in Verbrennungsbomben. Während erstere Verfahren erschwerend sehr schwierig ist, hat das letztere den Nachteil, daß es von den Verhältnissen im Motor erheblich abweicht. Es wird deswegen zu neuen Versuchen ein fremd angetriebener, gemischverdichtender Motor ohne Zündung benutzt, in dem die auf tretenden Vorreaktionen durch ihre Wärmewirkung der Messung zugänglich sind.

### I. Einleitung

Im Verbrennungsmotor mit Gemischansaugung treten bekanntlich schon vor Einsetzen der Zündung Reaktionen auf, die die eigentliche Verbrennung einleiten und die sich bei genügend hoher Verdichtung bis zur Selbstzündung steigern können. Für den Mechanismus der Verbrennung sind diese Vorreaktionen von wesentlicher Bedeutung. Vor allem hängen von ihnen der Zündverzögerung ab und die im Motor als Klopfen bekannte besondere Form der Selbstzündung.

Zum Studium der Vorreaktionen hat man Gasluftgemische in einem geschlossenen Behälter erhitzt und den zeitlichen Verlauf des Druckanstieges für verschiedene Anfangstemperaturen gemessen<sup>1)</sup>. Bei Anfangstemperaturen von 200 bis 300° treten hierbei teilweise Oxydationen auf, die von Lumineszenzerscheinungen begleitet sein können und daher auch als kalte Flammen bezeichnet werden. Diese Oxydationen setzen bei höheren Kohlenwasserstoffen erst nach einer endlichen Zeit, der sogenannten Induktionszeit ein, die je nach den Versuchsbedingungen zwischen Bruchteilen von Sekunden und Stunden liegen kann. Die Reaktion beschleunigt sich durch die gebildeten Verbindungen. Die Umsatzgeschwindigkeit überschreitet ein Maximum und nimmt dann wieder bis auf null ab, falls sie sich nicht etwa bis zur Selbstzündung steigert. Im allgemeinen wird aber nur ein Bruchteil des verfügbaren Sauerstoffes umgesetzt, und dann schlägt die Reaktion wieder ein.

Andere Versuche wurden an strömenden Gemischen durchgeführt, die kurze Zeit auf hohe Temperatur gebracht und rasch wieder abgekühlt werden. Die chemische Analyse der Verbrennungsprodukte läßt dann den Umsatz erkennen. Dabei wurden außer CO<sub>2</sub> und CO Aldehyde und Peroxyde festgestellt.

Wenn man sich für die motorische Verbrennung interessiert, liegt es nahe, einen Gemisch ansaugenden Motor in üblicher Weise, aber mit Fremdantrieb und ohne Zündung laufen zu lassen. Solche Versuche haben neben Messungen an strömenden Gemischen Dumanois u. Mondain-Monrol<sup>2)</sup> bereits 1931 an einem kleinen Viertaktmotor angestellt und bei Temperaturen von 200 bis 300° Vorreaktionen beobachtet.

Ähnliche Versuche führten Felster und seine Mitarbeiter<sup>3)</sup> aus mit einem C.F.R.-Prüfmotor bei 900 U/min an einem Gemisch von 70% Isooktan und 30% n-Heptan, also von der Oktanzahl (OZ) 70. Die Vorreaktionen waren an einer Ausbeulung des Indikatordiagrammes während des Expansionshubes erkennbar. Die Wirkung nahm mit zunehmender Anreicherung des Gemisches zu und war am größten bei einem Brennstoffverhältnis von 1,8, wenn unter „Brennstoffverhältnis“ das Verhältnis der wirklichen Brennstoffmenge zur stöchiometrischen verstanden wird. (Wir vermeiden den bei Luftmangel irreführenden und auch sonst wenig glücklichen Ausdruck der Luftüberschußzahl, denn bekanntlich hat die Luftüberschußzahl den Wert  $\lambda = 1$  bei stöchiometrischer Verbrennung, also wenn der Luftüberschuß gerade null ist. Besser bezeichnet man die Luftüberschußzahl als „Luftverhältnis“, dessen Kehrwert dann das Brennstoffverhältnis ist.) Bild 1 zeigt ein solches von Felster mit einem optischen Indikator aufgenommenes versetztes Diagramm, bei dem die Arbeitspleide dreier Kraftstoffe verschiedener Oktanzahl übereinander geschrieben sind. Die linke Seite entspricht der Kompression, die rechte der Expansion. Man erkennt deutlich die je nach dem Kraftstoff verschieden starke Ausbeulung der Expansionslinie durch die Vorreaktionen. Mit zunehmendem Isooktangehalt, also steigender Oktanzahl, geht die Ausbeulung des Diagrammes mehr und mehr zurück. Die gleiche Wirkung hat der Zusatz von Bleitetraäthyl. Weitere Versuche führten die Verfasser an einem kleinen Zweitaktmotor mit 1500 U/min durch, bei denen nicht indiziert, sondern

<sup>1)</sup> Vgl. W. Jost, Explosions- und Verbrennungsvorgänge in Gasen, Berlin 1939.

<sup>2)</sup> P. Dumanois, P. Mondain-Monrol u. B. Quanguin, C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 192 (1931) S. 1158/60 und P. Mondain-Monrol Chim. et Ind. Bd. 37 (1932) S. 710/71.

<sup>3)</sup> L. A. Felster, S. G. van Hoogerstraten, J. Smittenberg u. F. L. Kooijman, Chl. et Ind. Bd. 20 (1939) S. 120/25.

000246

die Temperatursteigerung des Gemisches beim Durchgang durch den Motor gemessen wurde. Der Zylinder konnte elektrisch auf verschiedene Temperaturen vorgeheizt werden. Es ergab sich, daß bei 150° Ansaugtemperatur und Zylindertemperaturen zwischen 200 und 300° ein Gemisch mit 65% Isooktangehalt im Kraftstoff (OZ 65) sich um etwa 30°, ein solches mit 45% Isooktan (OZ 45) sich um etwa 50° erwärmte. Die Kondensation des austretenden Gemisches ergab neben unveränderten Bestandteilen im Betrage von etwa 5% des ursprünglichen Kraftstoffes im Wasserlöslichen wurden etwa 30% Peroxyde gefunden.

Über diese Messungen hat Broeze auf der öffentlichen Sitzung der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung im Mai 1939 zusammenfassend berichtet<sup>1)</sup>. Da die Versuche an wenigen Kraftstoffgemischen aus Isooktan und n-Heptan und nur in einem begrenzten Bereich von Versuchsbedingungen durchgeführt wurden, erschien ihre Erweiterung aussichtsreich. Im Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring wurden daher neue Versuche angestellt.

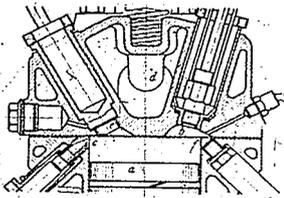
## II. Neue Versuche über Vorreaktionen im Otto-Motor bei abgestellter Zündung

1. Die Versuchsordnung. Beim Aufbau der Versuchsanlage wurde besonderer Wert auf definierte und reproduzierbare Versuchsbedingungen gelegt, soweit das an einem laufenden Motor überhaupt möglich ist.

Als Versuchsmotor diente der vom Forschungsinstitut für Kraftfahrzeuge und Fahrzeugmotoren der Technischen Hochschule Stuttgart gebaute flüssigkeitsgekühlte Kraftstoffprüfmotor<sup>2)</sup> mit einem Zylinder von 101 mm Bohrung und 130 mm Hub, entsprechend einem Hubraum von 1,04 l. Einen Schnitt durch den Zylinderkopf dieses Motors zeigt Bild 2. Mantel und Kopf des Zylinders bestehen aus Gußeisen mit eingegossenen Kühlkanälen. Der Kolben ist aus Leichtmetall. Ein- und Auslaßventile sind gleich und stehen senkrecht im Zylinderkopf. Das Auslaßventil öffnet 47° vor und außerdem Totpunkt und schließt 7° nach oberem Totpunkt. Das Einlaßventil öffnet 7° vor und schließt 47° nach u. T. Dabei gelten die Winkelangaben für den Öffnungsbeginn bzw. für das Ende des Schließens der Ventile.

Bild 2. Schnitt durch den Zylinderkopf des Versuchsmotors.

- a. Kolben,
- b. Quarzdruckmeßboje,
- c. Quarzfenster,
- d. Ventilschaftdurchführung,
- e. und f. Anschlußstutzen, die beim Versuch durch Blindstopfen verschlossen waren.



Der Verbrennungsraum hat die Form eines flachen Kreiszylinders. Die Kanäle zur Zu- und Abfuhr des Gemisches haben die übliche Form von Krümmern mit 90° Umlenkung. Das Verdichtungsverhältnis kann in weiten Grenzen von  $\epsilon = 4,5$  bis 25 geändert werden. Im Zylinder und Zylinderkopf befinden sich, wie Bild 2 erkennen läßt, im ganzen vier Stutzen, in die Quarzdruckmeßbojen für das Indizieren, Thermolemente, Quarzfenster usw. eingesetzt werden können. Die nicht benutzten Öffnungen wurden durch Stopfen geschlossen, welche auch den Kanal bis zum Zylinder fast vollständig ausfüllten.

Den gesamten Aufbau der Versuchsanordnung zeigt Bild 3. Die Luft wird bei a aus unter der Versuchshalle liegenden Kanälen mit recht gleichmäßiger, am Thermometer b ablesbarer Temperatur angesaugt, sie passiert einen Kammerluftmesser c und tritt dann in den 9,1 m<sup>3</sup> großen Druckausgleichs-Ressel d ein. Von hier strömt sie durch eine Ansaugleitung von 65 mm lichter Weite und 0,7 m Länge, in die zwei elektrische Heizungen e eingebaut sind, zum Vergaser f (Bauart Sum), dessen Drehschieberdrossel im allgemeinen ganz geöffnet war. Der Kraftstoffverbrauch wird in üblicher Weise volu-

<sup>1)</sup> J. H. Broeze, H. van Driel und L. A. Peletier. Betrachtungen über den Klopfvorgang im Otto-Motor, Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung Heft 9, München und Berlin 1939, S. 187/208.

<sup>2)</sup> P. Schmidt, Neue Kraftz. Ztg. Bd. 13, (1938) S. 79/80.

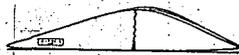


Bild 1. Veretztes Indikatorogramm mit Vorreaktionen von drei Kraftstoffen verschiedener Oktanzahl nach Peletier.

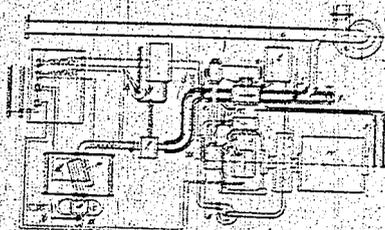


Bild 3. Aufbau der Versuchsanordnung.

- a. Injektionszylinder
- b. Zylinderkopf
- c. Zylinderblock
- d. Pleuellager
- e. Pleuellagergehäuse
- f. Pleuellagerbolzen
- g. Pleuellagerbolzenmutter
- h. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- i. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- j. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- k. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- l. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- m. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- n. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- o. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- p. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- q. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- r. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- s. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- t. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- u. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- v. Pleuellagerbolzenmutterkopf
- w. Pleuellagerbolzenmutterkopf

... durch Einleiten aus einem gewissen Glasgefäß  $\gamma$  gemessen. Im Falle der schrittweise bestimmten Wichte des Kraftstoffes ergibt sich dann das verbrauchte Gewicht. Ein drittes ist die wahre Temperatur des Kraftstoffes einsetzen zu können, vor in das Kolben ein Thermometer  $i$  eingeschoben.

Wenn Vergleichsstand des Gemisch zum Motor durch eine etwa 1 m lange und 60 mm weite, gut verinsulierte Leitung in die Röhre vor dem Zylinderkopf ein gewöhnliches Thermometer  $j$  wird ein mit einem besonders feingewichteten Zylinder versehenes Thermometer  $k$  eingesetzt ist. Ein etwa ungenügendes Kraftstoffgefäß, welches ebenfalls versehen die Leitung zwei Zylinder von 90° Einleitung. Nach Durchgang durch den Motor zu dem das Gemisch in die gleiche bester Lagerung, in die wieder ein Thermometer  $l$  und Kappenhalter eingesetzt ist, um seine Austrittstemperatur zu messen. Dann wird das Gemisch durch den Lüfter  $m$  gepumpt, nachdem ihn durch das Rohr  $n$  ein Ventil aus Luft befreit ist. Durch ein Ventil  $o$  kann man Gemisch zur Beobachtung unter dem Mikroskop durch das Rohr  $p$  lassen. Das Ventilgeschwindigkeit des Motors kann durch einen des Zylinderkopfes mit Hilfe der Kurbel  $q$  vermindert werden. Dabei ermöglichtes folgende Schritte des Nachhins der Auslassung. Zur Messung der Dichte des Gemisches vor und hinter den Motor dienen die Flüssigkeitswaagen  $r$ . Die Kühlmittel wird durch die Pumpe  $s$  über den Behälter  $t$  umgewälzt. In seinem Kreislauf sind die elektrische Heizung  $u$  und vor und hinter dem Zylinder Thermometer  $v$  eingebaut. Als Kühlmittel wurde technisches Glykol benutzt. Der Inhalt war mit 0,2 Tg. so reich, daß die Ein- und Austrittstemperatur des Kühlmittels sich um nicht mehr als 0,2° unterschieden. Die Temperatur des ganzen Zylinderblockes kann also einheitlich aufgenommen werden. Als Kühlmittel wurde Aerosol-Mittel benutzt; seine Temperatur wurde mit Hilfe einer im Kurbelgehäuse liegenden wasserführenden Kühlwicklung konstant gehalten. Als Antrieb des Versuchsmotors diente eine Gleichstrommaschine  $w$  für Drehmoment bis 2500 Watt, deren Moment durch einen mit einem Gewicht gemessen werden konnte.

Die Zylinderhalter zur Messung der Temperatur des Gemisches vor und hinter dem Zylinder zeigt, Bild 4, sie sind aus Aluminium gefertigt und besitzen eine große vom Gemisch berührte Oberfläche, um die Temperatur über dem Strömungsbereich möglichst zu messen. Der Kappen-

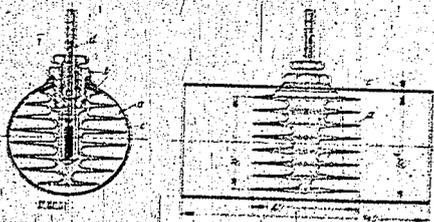


Bild 4. Thermometer mit Kappenhalter aus Aluminium zur Messung der Gemischtemperatur vor und hinter dem Zylinder.

- 1. Kappenhalter aus Aluminium
- 2. Pleuellager
- 3. Pleuellagergehäuse
- 4. Thermometer

000248

4

Körper ist vom Bohr durch fiberoptische thermisch isoliert, seine das Quecksilbergefäß des Thermometers aufnehmende Bohrung ist mit Öl gefüllt.

2. Durchführung der Versuche. Abgesehen von den besonders zum Studium des Einflusses geänderter Betriebsbedingungen angestellten Messungen wurden alle Versuche unter den folgenden Bedingungen geführt:

Drehzahl	$n = 1500$ U/min
Gemischtemperatur	$t_g = 149^\circ$
Kühlmitteltemperatur	$t_k = 149^\circ$
Öltemperatur	$t_o = 75^\circ$
Öldruck	$p_o = 2,4$ atm.

Das Erreichen des stabilsten Betriebszustandes des Motors dauerte etwa zwei Stunden, vor dem Beginn mit den Messungen begonnen werden. Jeder einzelne Versuchsdurchlauf erforderte durchschnittlich 45 Minuten Einleitzeit.

Vor jeder Messung mit Gemisch wurde zweifach ein Versuch mit reiner Luft geführt. Bei gleich gehaltener Eintrittstemperatur von  $149^\circ$  lag die Antriebsleistung der reinen Luft bei Verdichtungsverhältnissen von etwa  $\epsilon = 6$  meist bei  $14,5^\circ$ , doch schwankte dieser Wert von Tag zu Tag um wenige Grad, vermutlich infolge kleiner Änderungen des Motorzustands. Bei Beginn der ganzen Untersuchung lag die Antriebsleistung sogar um 2 bis 3° unter der Eintrittstemperatur. Um die Wirkung dieser Schwankungen anzuschauen, wurde die Temperaturmessung in dem Gemisch stets vor der unmittelbar vorher gemessenen Antriebsleistung der reinen Luft angesetzt. Nach dem Luftversuch wurde durch Öffnen der Ventile ein Kraftstoff zugegeben, wobei durch Regen der Halbzylinder der Antriebsleistung die Gemischtemperatur vor dem Zylinder stets auf  $149^\circ$  hielt. Mit zunehmender steigender Kraftstoffmenge wurde eine Reihe von Versuchen jeweils für ein Verdichtungsverhältnis durchgeführt. Dazu wurde dasselbe für andere Verdichtungsverhältnisse wiederholt. Das Verdichtungsverhältnis  $\epsilon$  ist dabei in der üblichen Weise, d. h. als das Verhältnis der vom Kolben in den beiden Totlagen abgegrenzten Volumina angegeben.

In dieser Weise wurden einige Kraftstoffe mit verschiedenen Ölschichten durchgemessen. In einzelnen, jeweils nur an einem Kraftstoff angestellten Messungen wurde durch die Einfiel einer Änderung der Betriebsverhältnisse untersucht. Daneben wurde die Verminderung des Drehmomentes des treibenden Pendelmotors durch die Vorkalibration ermittelte.

3. Genauigkeit der Messwerte. Die Betriebsbedingungen eines laufenden Motors lassen sich auch bei größter Sorgfalt nicht so genau über längere Zeit konstant halten, wie etwa bei einem physikalischen Apparat. Die Reibungsverhältnisse ändern sich im Laufe des Betriebes durch Einlaufen und Abnutzung und hängen vor allem vom Schmiermittel, ab dessen Zustand durch wechselnde Bedingungen, durch Verschmutzung, durch Aufnahme von Kraftstoff usw. in unvorhersehbarer Weise schwanken. Diese Unsicherheiten gehen unmittelbar in die Messung des Drehmomentes ein, beeinflussen aber die Reibungsverluste aber auch den Temperaturzustand des Motors. Zwei werden Zylinder und Zylinderdeckel durch das Kühlmittel auf nahezu konstanter Temperatur gehalten, aber der ungekühlte Kolben nimmt bei größerer Reibung eine höhere Temperatur an und gibt dann Wärme an die Luft ab. Dadurch erklärt sich die von Tag zu Tag etwas wechselnde Antriebsleistung beim Versuch mit reiner Luft. Gleichfalls war aber die für die Anwertung benutzte Differenz zwischen Gemischtemperatur und der Luftansichtstemperatur beim verschiedenen Reibungsverhältnis ebenfalls nicht vollkommen konstant. Unter diesen Umständen ergab sich bei Wiederholung des gleichen Versuches nach mehreren Tagen für diese Differenz ein möglicher Fehler von nur  $\pm 2^\circ$ . Innerhalb einer Versuchsreihe ohne Stillsetzen und Auslösen des Motors durchgeführten Versuchs war der Fehler nur etwa  $\pm 1^\circ$ . Die Fehler der einzelnen Thermometerablesung betragen dabei  $\pm 0,1^\circ$ . Das Berechnungsverhältnis konnte auf etwa  $\pm 2\%$  genau bestimmt werden. Die Genauigkeit der Drehmomentmessung war  $\pm 0,02$  kg, aber die Reproduzierbarkeit einer Messung war nur auf  $\pm 0,1$  kg möglich wegen der schon oben erwähnten Schwankungen der Reibungsverhältnisse.

4. Hilfsmittel für die Auswertung der Versuche. In den Kurventafeln ist das Verdichtungsverhältnis  $\epsilon$  stets in der üblichen Weise als Verhältnis der vom Kolben in den beiden Totlagen abgegrenzten Volumina angegeben. Das wirkliche Verdichtungsverhältnis ist aber kleiner, da das Antriebsverhältnis erst  $47^\circ$  nach dem unteren Totpunkt geschlossen ist. In Zahlentafel I sind die in üblicher Weise angegebenen Verdichtungsverhältnisse  $\epsilon$  und das einem gleichwertigen Schluß des Antriebsverhältnis  $\epsilon'$  nach  $\epsilon'$  entsprechende, bezugsweise Verdichtungsverhältnis  $\epsilon''$  einander gegenübergestellt. Die endliche Schließdauer des Ventils erhöht das tatsächliche Verdichtungsverhältnis etwas über  $\epsilon''$ , andererseits setzt der Wärmeaustausch mit der Wand die Verdichtungs-temperatur etwas herab.

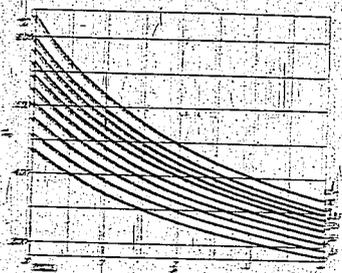


Abb. 7. Entzündtemperatur  $t_z$  der adiabatischen Verdichtung des Versuchsgases im Abhängigkeit von Brennstoffverhältnis  $\beta$  und vom Verdichtungsverhältnis  $\epsilon$  für eine Anfangstemperatur des Gemisches von 240°.

Für die Berechnung der Verdichtungsentzündtemperatur wird außer zweifach mit  $\epsilon$  und adiabatischer Verdichtungsgerichtet.

Von für jeden Versuch am Motor schnell die Verdichtungsentzündtemperatur ermittelt zu können, sind diese in Bild 7 für eine Anfangstemperatur des Gemisches von 240° in Abhängigkeit vom Brennstoffverhältnis  $\beta$  und vom Verdichtungsverhältnis  $\epsilon$  dargestellt. Die Kurven sind unter Angabe des adiabatischen Verdichtungsverhältnisses  $\epsilon$  beschriftet, über der beschrifteten Benutzungsdauer mit den üblichen Verdichtungsverhältnissen  $\epsilon$  beschriftet. Als typischer Kraftstoff wurde dieselbe Oktanzugrunde gelegt mit Werten für das Verhältnis  $\epsilon$  der spezifischen Wärmen, die nach G. Dandl für eine mittleren Verdichtungsentzündtemperatur von 540° ermittelt wurden und die in Zahlenreihe 2 für verschiedene Brennstoffverhältnisse angegeben sind. Die Kurven (Bild 7) zeigen die richtige Anlagerung der Verdichtungsentzündtemperatur mit dem Abichtungsverhältnis.

Zahlentafel 1. Beschriftung der Verdichtungsverhältnisse, in höherer Weise aus dem Verhältnis der Zylinderinhalt zu der Zylinderinhalt ermittelt.

1. Verdichtungsverhältnis, in höherer Weise aus dem Verhältnis der Zylinderinhalt zu der Zylinderinhalt ermittelt.

$\epsilon$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$\beta$	4.72	4.36	4.00	3.64	3.28	2.92	2.56	2.20	1.84	1.48	1.12

Zahlentafel 2. Adiabatenexponent  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  eines Oktanzugrunde gemisches in Abhängigkeit vom Brennstoffverhältnis  $\beta$  bei 290°.

$\beta$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$\gamma$	1.390	1.382	1.374	1.366	1.358	1.350	1.342	1.334	1.326

III. Versuchsergebnisse

1. Die untersuchten Kraftstoffe. Die bei den Versuchen benutzten Kraftstoffe sind mit ihren Hauptbestandteilen in Zahlentafel 3 zusammengestellt. Die Nummern an linken Rande dienen im folgenden zur kurzen Kennzeichnung der Kraftstoffe. Die Oktanzahlen sind nach der Motorprobe ermittelt. Unter Nenn-Oktanzahl ist die handelsübliche Angabe verstanden. Die „gemessenen“ Oktanzahlen wurden kennzeichnendweise in einigen Kraftstoffen zum technischen Prüfzweck gegen die I. G. Fachindustrielle A. G. mit dem I. G. Prüfverfahren für uns bestimmt. Bei der Zusammensetzung sind nur diejenigen Bestandteile in Prozentangaben angegeben, auf die sich die Analyse erstreckte. Eine Null bedeutet, daß der betreffende Bestandteil nicht vorhanden war, ein Strich dagegen, daß seine Menge nicht bestimmt wurde.

Die Fliegekräften Nr. 2, 3 und 4 mit der Nenn-Oktanzahl wurden eigentlich als Kraftstoff gleicher Art bezogen. In sich nicht unerhebliche Unterschiede erst bei der Auswertung der Motorprobeversuche zeigten, wurde veranlaßt, vor Kraftstoff Nr. 2 die Oktanzahl niedriger zu lassen, die wird aber zwischen 80 und 90 liegen. Von Kraftstoff Nr. 4 war nicht genügend vorhanden, um ein vollständiges Versuchsprogramm durchführen zu können, es wird daher von der Weitergabe der Versuche abgesehen, zumal sie nicht wesentlich von den Ergebnissen der Kraftstoffe Nr. 2 und 3 abweichen.

Die Kraftstoffe Nr. 10, 11 und 12 bestehen aus dem gleichen Eichbenzin I. G. 7 der I. G. Fachindustrielle A. G., aber bei Nr. 10 ohne Zusatz, bei Nr. 11 mit Zusatz von 1 cm<sup>3</sup> Diäthyläther je Liter, bei Nr. 12 mit Zusatz von 1.50 cm<sup>3</sup> Diäthyläther je Liter. Die 1.50 cm<sup>3</sup> Diäthyläther gemäß 1 cm<sup>3</sup> Diäthyläther enthält, ist also die zugesetzte Menge Diäthyläther in beiden Fällen die gleiche.

Der Kraftstoff Nr. 13 ist der gleiche wie Nr. 2, aber mit Zusatz von 1.5 cm<sup>3</sup> Diäthyläther je Liter.

2. Abhängigkeit der Verdichtungen vom Gemischzusammensetzung und Verdichtungsverhältnis. Den typischen Verlauf der Temperatursteigerung eines Gemisches durch Verdichtungen zeigt Bild 6 für einen Fliegekräften der Nenn-Oktanzahl 87 mit 4,07% Diäthyläther, über in Zahlentafel 2 unter

000250

Zahlentafel 3. Die untersuchten Kraftstoffe

Kraftstoff Nr.	Art des Kraftstoffes	Oktanzahl (OZ)		Zusammensetzung (Anteile in Volumen-Prozent)						theoret. Luftbedarf kg Luft kg Kraftstoff	
		Neun-OZ	zweizehn	Alkohol	Olefin	Paraffine	Aromaten	Naphthene	Bleibstoffe		
1	handelsübliches „Grund-Benzin“	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	ungebleit, Flieger-Benzin	58	50,4	0	8	—	7,3	—	0	—	14,68
3	Fliegerkraftstoff I	87	72,0	0	5	—	4,1	—	0	—	14,94
4	Fliegerkraftstoff II	87	88,1	—	3	—	17,0	—	0,07	—	14,71
5	Fliegerkraftstoff III	87	90,6	—	3,5	—	9,0	—	43,7	0,08	14,85
6	Sonderkraftstoff	100	—	0	2	—	2,5	—	44,2	0,09	14,86
7	Isoktan rein	100	—	—	—	—	—	—	—	—	14,32
8	Äthylalkohol	99,5*	—	—	0	100	0	0	0	—	15,18
9	Benzol techn. rein	105**)	—	99,9	0	0	0	0	0	—	9,04
10	Eichbenzin I.G. 7, der I. G. Farben	—	—	0	0	100,0	0	0	0	—	9,33***)
11	Eichbenzin I.G. 7 + 1 cm <sup>3</sup> Pb(A), je l.	44,6	44,6	0	0,6	77	3,4	20,0	0	—	15,0
12	Eichbenzin I.G. 7 + 1,53 cm <sup>3</sup> Eth. je l.	74,5	73,1	0	0,6	77	2,4	20,0	0,1	—	15,0
13	Kraftstoff Nr. 3 + 1,3 cm <sup>3</sup> Eth. je l.	74,5	73,2	0	0,6	77	2,4	20,0	0,1	—	15,0
		87	87,8	0	5	—	4,1	—	0,083	—	14,94

\*) Nach H. Jost s. Fußnote 1 a. a. O. S. 530.  
 \*\*) Extrapoliert aus Angaben der I.G.  
 \*\*\*) Für techn. Benzol (mit etwas Toluol).

Nr. 3 angeführt ist. In Wirklichkeit wird, wie oben unter 1. angegeben, die Oktanzahl etwas größer gewesen sein. In dem Bilde ist für verschiedene Verdichtungsverhältnisse die von der Austrittstemperatur reiner Luft an gezählte Temperatursteigerung  $\Delta t$  des Gemisches über dem Brennstoffverhältnis  $\beta$  aufgetragen. Um die Lage und die für Motorversuche sehr geringe Streuung der vielen Versuchspunkte zu zeigen, sind die Kurven durch Parallelverschieben nach oben auseinander gedreht. In Wirklichkeit beginnen sie alle im Koordinatenursprung. In Bild 7 sind dieselben Kurven, aber ohne die einzelnen Meßpunkte, in richtiger Lage übereinander gezeichnet. Die Vorreaktionen beginnen bei diesem Kraftstoff merklich zu werden etwa bei einem Verdichtungsverhältnis  $\alpha = 5$ ; sie nehmen mit

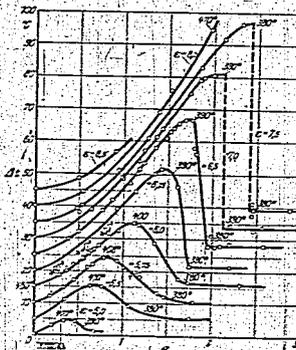


Bild 6. Die Kurven sind der Deutlichkeit halber durch Parallelverschieben nach oben auseinandergerückt. Die den einzelnen Kurvenpunkten beschriebenen Temperaturen sind die berechneten Höchsttemperaturen der adiabatischen Verdichtung.

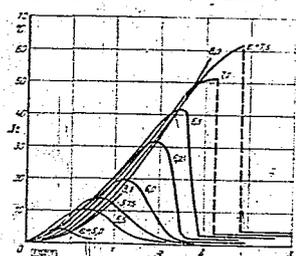


Bild 7. Die Kurven sind in richtiger Lage übereinander gezeichnet.

Bild 6 und 7. Temperatursteigerung  $\Delta t$  des Kraftstoffluftgemisches durch Vorreaktionen für Kraftstoff Nr. 3 (OZ 87) in Abhängigkeit vom Brennstoffverhältnis  $\beta$  und Verdichtungsverhältnis  $\alpha$  bei  $n = 1800$  /min, Gemischdrucktemperatur  $t_0 = 140^\circ \text{C}$ , Kühlmitteltemperatur  $t_2 = 140^\circ$ .

steigenden Brennstoffverhältnis zunimmt und seinen Wert bei einem geeigneten Maximum bei einem sehr armen Gemisch von  $\beta = 0,37$ . Bei weiterer Zunahme des Brennstoffverhältnisses nehmen die Vorkorklinien wieder ab und sind bei  $\beta = 1$  also gerade bei stöchiometrischem Gemisch praktisch wieder verschwunden. Mit steigendem Verdichtungsverhältnis werden die Kurven der Grenztemperatur höher, das Maximum verschiebt sich nach größeren Brennstoffverhältnissen und der Abfall der rechten Seite wird steiler. Von einem bestimmten Verdichtungsverhältnis  $\epsilon = 7,0$  an, gibt der Abfall in einem wesentlichen Sprung über, der auch bei wiederholten Versuchen stets an der gleichen Stelle auftritt. Links des Sprungs erhält man die höchsten Werte der Temperatursteigerung durch Vorkorklinien, rechts davon bei immer weiterem größeren Brennstoffverhältnis sind die Vorkorklinien immer auf Null zurückgegangen, und es bleibt nur eine geringe, von Brennstoffverhältnis praktisch unabhängige, aber mit steigendem Verdichtungsverhältnis etwas zunehmende Temperatursteigerung übrig. Erhöht man das Verdichtungsverhältnis auf  $\epsilon = 7,5$ , so verschiebt sich die Sprungstelle zu noch reicheren Gemischen und ihre Höhe wird größer. Bei  $\epsilon = 8,0$  gelang es nicht mehr, die Sprungstelle von links her zu erreichen, sondern erst bei dem Brennstoffverhältnis  $\beta = 2,2$  setzen erst im Ansprüngher und dann auch im Zylinder Selbstzündungen ein, die im Zylinder durchaus heftigen Klopfgeräuschen überliehen. Bei  $\epsilon = 8,5$  beginnen diese heftigen Selbstzündungen innerhalb des stöchiometrischen Brennstoffverhältnisses. Nach Erreichen solcher Selbstzündungen mußten die Versuche abgebrochen werden, da der Motor sich rasch erwärmte und knallend und stotternd weiterlief. Nur wenn seine Drehzahl vom Antrieb her rasch um etwa 200 U/min gesteigert wurde, gelang es die Selbstzündungen wieder zu besänftigen, ähnlich wie auch das Klopfen durch Schichtabkühlungen besänftigt werden kann.

Mit Hilfe des Bildes 5 wurden die Endtemperaturen der adiabatischen Verdichtung für einige ausgewählte Punkte der Kurven der Vorkorklinien ermittelt und in Bild 6 eingetragen. Dabei zeigt sich folgendes:

Gehet man von reihen Gemischen kommend zu kleineren Brennstoffverhältnissen über, so beginnt für alle Verdichtungsverhältnisse das sprunghafte Ansteigen der Endtemperatur der Vorkorklinien bei der gleichen Endtemperatur der adiabatischen Verdichtung von etwa 380°. Das Maximum der Vorkorklinien tritt bei adiabatischen Verdichtungs-temperaturen von 280 bis 410° auf. Links vom Maximum nimmt für jedes Verdichtungsverhältnis die adiabatische Verdichtungs-temperatur mit abnehmendem Brennstoffverhältnis weiter zu, wie das die in die Kurve  $\epsilon = 6,0$  eingeschlossenen Temperaturen zeigen. Aus diesem Verhalten folgt, daß die Stärke der Vorkorklinien wesentlich durch die Endtemperatur der adiabatischen Verdichtung und — wie wir später bei den Versuchen über den Einfluß der Drehzahl sehen werden — deren Wirkungsgrad bestimmt ist. Bei reicheren Gemischen tritt wegen ihres höheren Adiabatenexponenten diese Temperatur erst bei größeren Verdichtungsverhältnissen auf, daher ist aber wegen des höheren Kraftstoffgehaltes der Umsatz und damit die Temperatursteigerung größer.

Überschneidend bleibt das sprunghafte Ansteigen der Vorkorklinien bei höheren Verdichtungsverhältnissen. Es sieht so aus, als ob die Kraftstoffmoleküle selbst bei genügender Konzentration Radikale einleiten und Reaktionsketten abbrechen.

Bemerkenswert ist auch der Kurvenverlauf links des Maximums. Hier liegen, wie Bild 7 zeigt, die Kurven mit höheren Verdichtungsverhältnissen unter denen mit niedrigeren. Bei demselben Brennstoffverhältnis  $\beta$  hat die stärkere Verdichtung mit der höheren Endtemperatur also einen geringeren



Bild 5. Verminderung  $f_{M_2}$  des notwendigen Antriebsverhältnisses  $M_2$  des Motors durch Vorkorklinien bei Knackzahl Nr. 3 in Abhängigkeit von Brennstoffverhältnis  $\beta$  und Verdichtungsverhältnis  $\epsilon$ .  
 Dem oberen Bande des Koordinatensystems ist  $M_2 = 4$  entspricht bei Kurve  $\epsilon = 4,5$  ein Drehmoment  $M_2 = 2,2$  mkg, dem unteren Bande ( $M_2 = 0,5$  mkg) ein solches von  $M_2 = 1,3$  mkg. Für die anderen Verdichtungsverhältnisse sind, durch Verschiebung der Zahlen des Drehmomentes  $M_2$  analog von Bildern der Selbstzündungen des Motors.

Umsatz der Vorkorklinien zur Folge als die schwächere Verdichtung mit der kleineren Endtemperatur. Solche negativen Temperaturkoeffizienten von Reaktionen sind weitestgehend gefürchtet worden. Auch auf die von Toland<sup>9)</sup> und Mitarbeiter bei der Verbrennung von Kohlenwasserstoffparaffinen beobachteten kalten Zündgeräuschen sei hier hingewiesen.

<sup>9)</sup> D. F. A. Toland u. M. P. MacLean, Proc. roy. Soc. Lond. (A) Bd. 141 (1933) S. 484; vgl. auch W. J. Fox, Zeitschrift f. S. 463.

000252

Die Verminderung  $\Delta M_s$  des zum Antrieb des Motors erforderlichen Drehmomentes  $M_s$  durch die Vorkreaktionen zeigt für denselben Kraftstoff Bild 8. Die Abnahme entspricht im großen ganzen der Temperatursteigerung, doch sind diese Messungen wegen der veränderlichen Reibungsverhältnisse des Motors nur von beschränkter Genauigkeit.

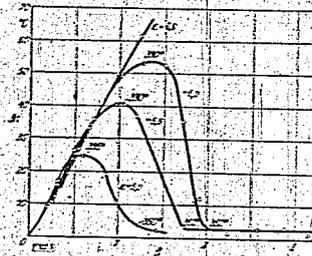


Bild 8. Kraftstoff Nr. 1 (OZ 56,4).

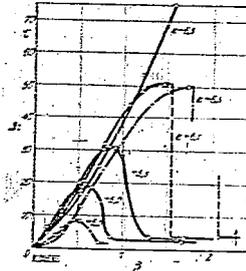


Bild 10. Angegebene Kurven: Kraftstoff Nr. 2 (OZ 73,4); strichpunktierte Kurven: Kraftstoff Nr. 13 (OZ 87,5) aus Nr. 2 durch Zusatz von 1,5 cm<sup>3</sup> Ethyläthyläther hergestellt.

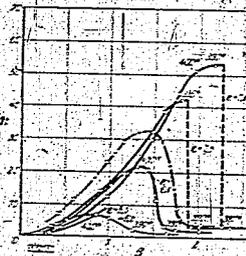


Bild 11 (links). Kraftstoff Nr. 5 (OZ 54,5). Die strichpunktierte Kurve gilt für Betrieb mit sauerstoffangereicherter Luft.

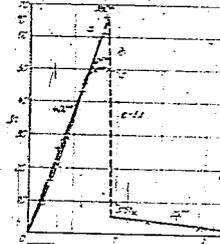
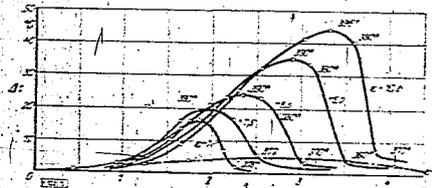


Bild 12 (rechts). Kraftstoff Nr. 16 (OZ 44,5) Kurve a - Nr. 11 (OZ 72,1) - b - Nr. 12 (OZ 72,2) - c. Bei allen Kurven ist das Verdichtungsverhältnis  $\epsilon = 5$ .

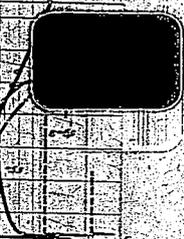
Bild 13 (rechts). Kraftstoff Nr. 7 (OZ 100) reines Isooktan, strichpunktierte Kurve: Kraftstoff Nr. 6 (OZ 100) mit 10% Aromatengehalt.

Bild 9 bis 12. Temperatursteigerung  $\Delta t$  durch Vorkreaktionen in Abhängigkeit vom Brennstoßverhältnis  $\beta$  bei der Drehzahl  $n = 1500/\text{min}$ , der Gemischtemperatur  $t_g = 140^\circ$  und der Kühlmitteltemperatur  $t_k = 140^\circ$  für Kraftstoffe verschiedener Oktanzahl. Die den Kurven beschriebenen Temperaturen sind die für die beschrifteten Punkte berechneten Höchsttemperaturen der schwebelosen Verdichtung.



2. Einfluß der Oktanzahl und der Kraftstoffzusammensetzung. Für ein handelsübliches Grundbenzin (Nr. 1 der Zahlenfolge 3) mit der Oktanzahl 56,4 zeigt Bild 9 die Temperatursteigerung durch Vorkreaktionen. Der Charakter der Kurven ist ähnlich wie bei dem Kraftstoff Nr. 3 mit der Oktanzahl 87, aber bei demselben Verdichtungsverhältnis sind die Kurven mehr als doppelt so hoch, sie beginnen

verhältnis  $M$  durch  
im großen ganzen  
Verhältnis



Kraftstoff Nr. 2  
Kraftstoff Nr. 3



Kraftstoff Nr. 11  
Kraftstoff Nr. 12

ähnliches Grund-  
steigerung durch  
der Oktanzahl  
sich zu beginnen

steiler und die Kurven höheren Verdichtungsverhältnissen liegen anfangs nicht so tief unter denen mit geringerer Verdichtung. Sprungstellen lassen sich hier nicht mehr erreichen, da beim Verdichtungsverhältnis  $\epsilon = 6,5$  bei Temperatursteigerungen von etwa  $70^\circ$  bereits Selbstzündungen auftreten.

Die Versuchsergebnisse an einem ungebleichten Fliegerbenzin OZ 72 (Kraftstoff Nr. 2 der Zahlentafel 3) zeigt Bild 10. Aus diesem Kraftstoff wird durch Zusetzen von Bleitetraäthyl das Fliegerbenzin OZ 87 hergestellt. Das Ausmaß der Vorreaktionen liegt, wie zu erwarten, zwischen den Werten OZ 56,4 des Bildes 9 und OZ 87 des Bildes 7. Beim Verdichtungsverhältnis  $\epsilon = 6,0$  erscheint wieder der Sprung. Bei  $\epsilon = 6,5$  läßt sich die Sprungstelle von der Seite ärmerer Gemische her nicht mehr erreichen, da vorher Selbstzündungen auftreten. Ein Versuch mit reichem Gemisch bei  $\beta = 2,08$ , bei dem die Vorreaktionen schon wieder verschwunden sind, zeigt aber, daß die Sprungstelle dicht oberhalb  $\beta = 2,0$  liegt.

Die in Bild 10 eingezeichneten strichpunktierten Kurven gehen für Kraftstoff Nr. 13, der aus Kraftstoff Nr. 2 durch Zusatz von  $1,3 \text{ cm}^3$  Ethylfluid je Liter, entsprechend  $0,50 \text{ cm}^3$  reinem Bleitetraäthyl hergestellt wurde, wodurch die Oktanzahl auf 87,8 ansteigt. Der Vergleich dieser Kurven mit Bild 7 zeigt, daß der Kraftstoff durch den Bleisatz tatsächlich dem Kraftstoff Nr. 3 mit der Oktanzahl 87 ähnlich geworden ist. Die Kurven sind niedriger und ihre Anfangsneigung ist darüber hinaus viel flacher geworden.

Die Messungen an einem gebleichten Fliegerbenzin OZ 90,6 (Kraftstoff Nr. 5 der Zahlentafel 3) zeigt Bild 11; die Kurven sind ganz ähnlich denen des Fliegerbensins OZ 87 (Nr. 3 der Zahlentafel 3), nur sind die Vorreaktionen, wie zu erwarten, etwas geringer. Die strichpunktierte Kurve bezieht sich auf mit Sauerstoff angereicherte Luft, worauf wir später zurückkommen.

Ein so ausgeprägter Einfluß des Bleisatzes ist aber keineswegs immer vorhanden, wie die in Bild 12 wiedergegebenen Versuche mit Eichbenzin der I. G. (Kraftstoff Nr. 10 der Zahlentafel 3) zeigen. Ohne Bleisatz hat dieses Eichbenzin die Oktanzahl 44,6 und zeigt schon bei  $\epsilon = 5,0$  starke Vorreaktionen, die bei diesem niedrigen Verdichtungsverhältnis für  $\beta = 0,9$  schon zu Temperatursteigerungen von  $65^\circ$  führen. Die Kurve  $\alpha$  in Bild 12 steigt fast geradlinig an und hat bereits unterhalb des stöchiometrischen Brennstoffverhältnisses ihre Sprungstelle. Ein üblicher Versuchsmotor läuft also bei stöchiometrischem Gemisch bereits oberhalb des Bereiches der Vorreaktionen. Der Zusatz von  $1,53 \text{ cm}^3$  Ethylfluid je Liter (Kraftstoff Nr. 12 der Zahlentafel 3), der die Oktanzahl auf 73,2 hinaufsetzt, veränderte, wie Kurve  $\beta$  in Bild 12 zeigt, den Kurvenverlauf wenig, nur die scharfe Spitze vor der Sprungstelle wurde abgerundet, diese selbst blieb unverändert. Um dies überraschende Ergebnis nachzuprüfen, wurde dem gleichen Kraftstoff  $1 \text{ cm}^3$  reines Bleitetraäthyl zugesetzt (Kraftstoff Nr. 11 der Zahlentafel 3); das ist dieselbe Menge wie bei Kraftstoff Nr. 12 im Ethylfluid, denn  $1,53 \text{ cm}^3$  Ethylfluid enthalten  $1,0 \text{ cm}^3$  Bleitetraäthyl. Mit dieser Mischung ergab sich aber fast dieselbe Kurve (c in Bild 12) wie mit Ethylfluid. Versuche mit anderen Verdichtungsverhältnissen konnten nicht gefahren werden, da der Motor keine kleineren zuließ und da größere sehr bald zu Selbstzündungen führten.

Für reines Isooktan mit der Oktanzahl 100 zeigt Bild 13 die Kurven der Temperatursteigerung. Die Art der Kurven ist wieder dieselbe, ihre Höhe bei dem gleichen Verdichtungsverhältnis ist aber wesentlich niedriger als bei OZ 87. Beim Verdichtungsverhältnis  $\epsilon = 10$  ist der Verlauf der Kurve noch stetig und ohne Sprungstelle. Erhöht man die Verdichtung auf 11, so treten bereits bei Brennstoffverhältnissen von etwa 1 stark knallende Selbstzündungen auf, die das Erreichen einer Kurve mit Sprungstelle verhindern. Bemerkenswert ist die starke Verschiebung der ganzen Kurvenschar nach reicheren Gemischen hin. In der Nähe des stöchiometrischen Gemisches, also im Gebiet des praktischen Motorbetriebes, sind die Vorreaktionen sehr schwach.

In dem Bilde ist noch eine flache Kurve bei  $\epsilon = 9,0$  aufgetragen; sie bezieht sich auf einen Sonderkraftstoff der Oktanzahl 100 mit etwa  $40\%$  Aromatengehalt, wahrscheinlich in Form von Benzol. Im Gegensatz zu den paraffinischen Kraftstoffen sind hier die Vorreaktionen sehr gering.

Bei reinem Benzol und bei Alkohol konnten Vorreaktionen nicht festgestellt werden, steigerte man die Verdichtung, so trat, ohne daß vorher Temperatursteigerungen zu beobachten waren, plötzlich Selbstzündung auf, und zwar bei  $140^\circ$  Gemischtemperatur und einer Drehzahl von 1800 min etwa bei  $\epsilon = 11,0$ .

Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß nur bei chemisch ähnlichen Kraftstoffen und innerhalb nicht zu großer Unterschiede der Oktanzahlen von einer einigermaßen eindeutigen Beziehung zwischen Oktanzahl und der Intensität der Vorreaktionen gesprochen werden kann. Die Untersuchung der Vorreaktionen läßt eben sehr viel mehr individuelle Eigentümlichkeiten des Kraftstoffes erkennen, als durch die Angabe einer einzelnen Größe wie der Oktanzahl zum Ausdruck gebracht werden können.

Eine gemeinsame Eigenschaft läßt sich aber aus allen aufgenommenen Kurven des Verlaufes der Vorreaktionen herauslesen, wenn man für die Kurvenpunkte mit Hilfe der Kurventafel Bild 5 die jeweiligen Höchsttemperaturen der adiabatischen Verdichtung ermittelt. In den Bildern sind

diese Temperaturen einzelnen Kurvenpunkten beigezeichnet. Für dasselbe Verdichtungsverhältnis  $\epsilon$  sinkt diese Höchsttemperatur mit zunehmendem Brennstoffverhältnis, weil damit auch der adiabatische Exponent kleiner wird. Überraschenderweise liegen aber die Maxima der Kurven für dieselbe Drehzahl bei allen untersuchten Kraftstoffen und allen Verdichtungsverhältnissen bei nahezu derselben Höchsttemperatur der adiabatischen Kompression von 390 bis 400°C. Auch die Temperaturen, bei denen von reichen Gemischen kommend die Vorreaktionen einsetzen, sind wenig verschieden und liegen zwischen 350 und 380°C. Daraus geht hervor, daß die Temperatur und wie wir später sehen werden, deren Einwirkungs-dauer die wesentlichen Einflußgrößen für die Vorreaktionen sind.

4. Einfluß der Versuchsbedingungen auf die Vorreaktionen. Die bisherigen Versuche wurden des besseren Vergleichs wegen sämtlich unter denselben in Abschn. II; 2 angegebenen Versuchsbedingungen ausgeführt. Nun soll die Wirkung der Änderung dieser Bedingungen untersucht werden. Bei dem Kraftstoff Nr. 5 (OZ 99,6) wurde für das Verdichtungsverhältnis  $\epsilon = 6,5$  die Drehzahl geändert, während Gemischtemperatur und Kühlmitteltemperatur bei 140°C blieben. Das Ergebnis zeigt, wie die in Bild 14 eingetragenen gerechneten Endtemperaturen der adiabatischen Verdichtung zeigen, höherer Temperaturen zum Einsetzen der Reaktionen, wobei die wirklichen Endtemperaturen der Verdichtung bei höheren Drehzahlen wegen der kleineren Wärmeabfuhr an die Wände eher etwas

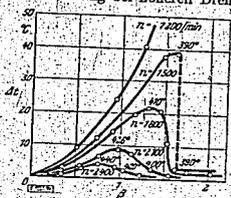


Bild 14. Einfluß der Drehzahl auf die Temperatursteigerung  $dt$  durch Vorreaktionen des Kraftstoffes Nr. 5 (OZ 99,6) beim Verdichtungsverhältnis  $\epsilon = 6,5$ , der Gemischtemperatur  $t_g = 140^\circ$ , der Kühlmitteltemperatur  $t_k = 140^\circ$ .

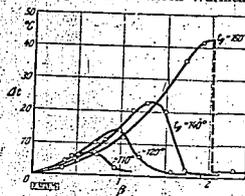


Bild 15. Einfluß der Gemischeintrittstemperatur  $t_g$  auf die Temperatursteigerung  $dt$  durch Vorreaktionen des Kraftstoffes Nr. 5 (OZ 99,6) bei  $\epsilon = 6,5$ ,  $n = 1800/\text{min}$ ,  $t_k = 140^\circ$ .

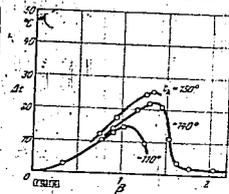


Bild 16. Einfluß der Kühlmitteltemperatur  $t_k$  auf die Temperatursteigerung  $dt$  durch Vorreaktionen des Kraftstoffes Nr. 5 (OZ 99,6) bei  $\epsilon = 6,5$ ,  $n = 1800/\text{min}$ ,  $t_g = 140^\circ$ .

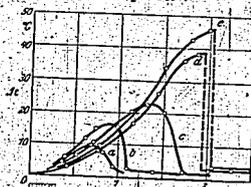


Bild 17. Einfluß der Änderung verschiedener Versuchsbedingungen auf die Temperatursteigerung  $dt$  durch Vorreaktionen des Kraftstoffes Nr. 5 (OZ 99,6) bei  $\epsilon = 6,5$ .  
 Kurve a:  $n = 2100/\text{min}$ ,  $t_g = 120^\circ$ ,  $t_k = 150^\circ$   
 Kurve b:  $n = 1800/\text{min}$ ,  $t_g = 120^\circ$ ,  $t_k = 120^\circ$   
 Kurve c:  $n = 1800/\text{min}$ ,  $t_g = 140^\circ$ ,  $t_k = 140^\circ$   
 Kurve d:  $n = 1800/\text{min}$ ,  $t_g = 150^\circ$  (markierte Kurve),  $t_k = 140^\circ$   
 Kurve e:  $n = 1800/\text{min}$ ,  $t_g = 150^\circ$ ,  $t_k = 150^\circ$

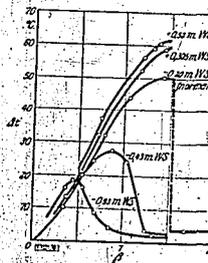


Bild 18. Einfluß gehobener Drücke in der Ansaugleitung, angegeben in m WS Oberdruck (+) oder Unterdruck (-) gegen die Atmosphäre, auf die Temperatursteigerung durch Vorreaktionen des Kraftstoffes Nr. 2 (OZ 72) bei  $n = 1800/\text{min}$ ,  $\epsilon = 6,0$ ,  $t_g = 140^\circ$ ,  $t_k = 140^\circ$ .

höher sind. Daraus geht hervor, welche bedeutende Rolle die Einwirkungs-dauer der Temperatur bei der Ausbildung der Vorreaktionen spielt. Bekanntlich nimmt auch die Klopfneigung von Motoren mit steigender Drehzahl ab, nur wird diese Erscheinung praktisch oft durch den Einfluß der unter sonst gleichen Bedingungen mit der höheren Drehzahl und damit höheren Leistung steigenden Temperatur der Ventile und Wände des Verbrennungsraumes überlagert.

Den Einfluß der Änderung der Gemischeintrittstemperatur für  $\epsilon = 6,5$ ,  $n = 1800/\text{min}$  und eine Kühlmitteltemperatur  $t_k = 140^\circ$  zeigt Bild 15 für den Kraftstoff 5. Steigende Gemischeintrittstemperatur

wirkt demnach ganz ähnlich wie eine Erhöhung der Verdichtung. Bei den Versuchen des Bildes 16 wurde die Kühlmitteltemperatur  $t_2$  bei festgehaltener Gemischeintrittstemperatur verändert, und die Werte von Drehzahl, Gemischeintrittstemperatur und Kühlmitteltemperatur untersucht. Eine wesentliche Steigerung der Kühlmitteltemperatur steigert demnach auch die Vorreaktionen, doch ist dieser Einfluß weniger groß als die Änderung der Gemischeintrittstemperatur, da er nur durch den Wärmeübergang von den Zylinderwänden her auf das Gemisch wirkt.

In Bild 18 sind schließlich noch Versuche mit geändertem Druck in der Ansaugleitung wiedergegeben. Der beobachtete große Einfluß des Druckes, besonders bei Unterdruck, ist aber vermutlich kein unmittelbarer, sondern er kommt auf dem Wege über die Änderung der Wärmeübergangsverhältnisse zustande.

Bei Kraftstoff Nr. 5 wurde auch ein Versuch mit sauerstoffreicherer Luft gemacht. Bei einem Sauerstoffgehalt der angesaugten Luft vor dem Vergaser von 34 Vol.-% wurde für  $\epsilon = 0,5$  die in Bild 11 strichpunktiert gezeichnete Kurve gemessen, wobei das Brennstoffverhältnis auf die erhöhte Sauerstoffmenge bezogen ist. Die Vorreaktionen nehmen also etwa in dem Maße der Steigerung des Sauerstoffgehaltes zu. Das Maximum der Kurve verschiebt sich dabei aber nicht merklich. Bei weiterer Erhöhung des Sauerstoffgehaltes auf 42 Vol.-% traten heftige Zündungen auf.

5. Induktordiagramme, chemische Untersuchungen und verschiedene Beobachtungen. Bei einigen Versuchen wurde der Druckverlauf im Zylinder mit einem Quarzdruckgeber über der Zeit aufgenommen. Solche Aufnahmen zeigt Bild 10a und b, wobei mehrere Arbeitsspiele auf denselben Film geschrieben sind, der um eine nicht ganz synchron mit dem Versuchsmotor laufende Trommel



Bild 10a. Für ungeladeten Kraftstoff OZ 72 (Nr. 2 der Zahlentafel 3).

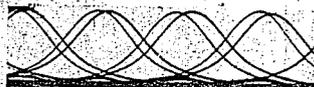


Bild 10b. Für denselben Kraftstoff, aber mit Bleisatz und OZ 72 (Nr. 13 der Zahlentafel 3).

Bild 10a und b. Mit Quarzdruckgebern aufgenommene Druckverläufe der Vorreaktionen im Motor bei  $n = 1800/\text{min}$  und dem Verdichtungsverhältnis  $\epsilon = 0,5$ . Die Zeichen an den unteren Rändern sind Zeitmarken, ihr Abstand entspricht  $1/1000$  s. Die Zeit läuft von links nach rechts.

gelegt war. Bild 10a wurde mit ungeladeten Fliegerbenzin (Kraftstoff Nr. 2 der Zahlentafel 3) mit OZ 72 bei  $n = 1800/\text{min}$ ,  $\epsilon = 0,5$ , Gemischeintrittstemperatur  $140^\circ$ , Kühlmitteltemperatur  $140^\circ$  aufgenommen. Die unsymmetrischen Höcker rechts neben den oberen Totpunkten der Kurven zeigen die Vorreaktionen. Bemerkenswert ist, daß sie nicht bei jedem Arbeitsspiel auftreten, sondern auf der Expansionsseite etwas vorläufig, d. h. die Vorreaktionen sind bei ihnen wohl angefahren, aber nicht ganz zur Entwicklung gekommen. Wenn nur bei jedem zweiten Hub eine ausgebildete Vorreaktion eintritt und im Mittel eine Temperatursteigerung  $\Delta t = 75^\circ$  beobachtet wird, so muß die Temperatursteigerung bei den wirksamen Hängen noch erheblich größer sein, wenn sie auch nicht dem doppelten Wert gleichkommt. Leider reichte die Genauigkeit der Diagramme und besonders der Lage der Totpunktmarken nicht aus, um den Anteil der einzelnen Arbeitsspiele an den Vorreaktionen genauer zu ermitteln.

Aus dem regelmäßigen Wechsel zwischen stark ausgeprägten und fast unmerklichen Vorreaktionen in Bild 10a kann man folgendes schließen: Die nach einer ausgeprägten Vorreaktion entstandenen Reaktionsprodukte, von denen ein Teil mit dem Restgas der neuen Ladung vermischt wird, begünstigen das Einsetzen der Vorreaktionen nicht. Anders ist es aber bei einer nur schwach angefahrenen und vorzeitig abgebrochenen Vorreaktion. Hier haben die mit dem Restgas der neuen Ladung zugesetzten aus den ersten Phasen der Vorreaktion stammenden Reaktionsprodukte offenbar einen stark fördernden Einfluß auf die Vorreaktionen des nächsten Arbeitsspiels. Durch diese Überlegungen wird der auch bei anderen Kraftstoffen beobachtete, mehr oder weniger regelmäßige Wechsel zwischen starken und schwachen Vorreaktionen verständlich. Von besonderem Interesse würde es sein, vergleichende chemische Analysen von Vorreaktionsprodukten verschiedener Entwicklungsstadien anzustellen.

Bild 10b zeigt den Druckverlauf unter denselben Bedingungen wie in Bild 10a mit demselben Kraftstoff, aber nach Zusatz von  $1,3 \text{ cm}^3$  Ethylfluid je Liter (Nr. 13 der Zahlentafel 3). Wie die

strichpunktierter Kurven in Bild 10 zeigen, geht die Temperatursteigerung  $\Delta t$  durch den Bleizusatz auf etwa  $\frac{1}{2}$  zurück. Noch merklicher ist aber die Wirkung im Druckverlauf: Der Höcker hinter dem oberen Totpunkt ist verschwunden, und die Kurve erscheint dem Auge fast symmetrisch, wenn sie auch bei der Expansion im Mittel höhere Drücke zeigt als bei der Kompression. Der Bleizusatz beseitigt also die Vorreaktionen nicht, sondern er mildert sie nur und glättet die Plötzlichkeit ihres Anstieges.

Aus der bis zu  $75^\circ$  gemessenen Temperatursteigerung ergibt sich, daß bei den Vorreaktionen bis zu etwa 4% der Verbrennungswärme frei werden können. Es nimmt also ein beachtlicher Teil von schätzungsweise 15 bis 20% der Kraftstoffmoleküle an den Vorreaktionen teil. Bei sämtlichen Versuchen wurde in Übereinstimmung mit älteren Beobachtungen ein scharfer und stechender Geruch der Abspuffgase festgestellt. Die Abspuffleitung bedeckte sich mit einer braunen, öligen Schmiere.

Bei dem I. G.-Eichbenzin (Nr. 10 der Zahlentafel 3) wurde auf unsere Veranlassung von G. Danköher und W. Eggeraß eine chemische Analyse der Reaktionsprodukte durchgeführt, über die an anderer Stelle genauer berichtet wird<sup>7)</sup>. Dabei lief der Motor bei dem Verdichtungsverhältnis  $\epsilon = 5,6$  mit einem Brennstoffverhältnis  $\beta = 0,9$ , Kühlmitteltemperatur  $140^\circ$ , Gemischtrittstemperatur  $140^\circ$ , Drehzahl 1800/min und zeigte etwa  $60^\circ$  Temperatursteigerung durch Vorreaktionen (vgl. Bild 12 Kurve a). Die Austrittsgase wurden in hintereinander geschalteten Kühlfallen niedergeschlagen, die mit Eis, Methanol-Trockeneis und flüssiger Luft gekühlt waren. Die Analyse ergab für ein Mol Kraftstoff, wenn man für diesen das Molekulargewicht 100 des Heptans annimmt, folgende in Mol je Mol Kraftstoff abgegebene Reaktionsprodukte: Aldehyde 0,141 (davon 0,084 Formaldehyd und 0,047 Acetaldehyd), Alkohole  $< 0,05$ , Säuren 0,024, Kohlensäure 0,0046, Wasser 1,07. Die Aldehyde bilden also, wie auch von anderer Seite festgestellt wurde, den Hauptbestandteil.

Ein blaüches Leuchten im Zylinder wurde nur in einem Falle bei einem Sonderkraftstoff beobachtet, der als Zündbeschleuniger für Dieseldie verwendet wird und dessen Oktanzahl weit unter Null liegt. Dieser Kraftstoff hatte bei  $\epsilon = 5,0$  und einer Gemischtrittstemperatur von  $110^\circ$  bereits sehr starke Vorreaktionen und zeichnete sich auch durch besonders scharfen Geruch des Abspuffs aus. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß schwache Leuchterscheinungen auch bei anderen Kraftstoffen auftraten und ihre Beobachtung nur durch Verlösen des Fensters verhindert wurde. Bei einigen Versuchen reichte die Arbeit der Vorreaktionen aus, um den Motor ohne Zündung und ohne Antrieb im Gang zu halten, wobei er fast geräuschlos lief.

**6. Gesichtspunkte für weitere Arbeiten:** Bei den beschriebenen Arbeiten war das Ziel, die bisher nur qualitativ benützte Methode der Untersuchung der Vorreaktionen durch die Temperatursteigerung des Gemisches im Motor ohne Zündung zu verfeinern, um eindeutig reproduzierbare und quantitativ auswertbare Ergebnisse zu erhalten. Nachdem uns das gelungen ist, wollten wir zunächst einen Überblick über das Verhalten verschiedener Kraftstoffe und den Einfluß einer Änderung der Betriebsverhältnisse des Motors gewinnen. Dabei wurde nicht nur das Verdichtungsverhältnis, sondern auch die Gemischzusammensetzung in weiten Grenzen geändert. Die Ergebnisse geben eine erhebliche Erweiterung unseres Erfahrungsmaterials und lassen neue Zusammenhänge zwischen dem Klopfverhalten und dem Verlauf der Vorreaktionen erkennen. Die Messungen sollen auf weitere Kraftstoffe ausgedehnt werden in Verbindung mit einer genaueren chemischen Analyse der Reaktionsprodukte. Die dazu notwendige Verfeinerung der Methoden der chemischen Analyse ist bei uns bereits in Angriff genommen. Da bei dem bisherigen Motor von rund 11 Hubvolumen wegen der Länge der Einlaßzeiten zum Erreichen eines ausreichend stationären Betriebszustandes die vollständige Durchmessung eines Kraftstoffes etwa 150 l benötigt und die Größe des Motors auch recht lange Versuchszeiten erforderlich macht, sollen die Messungen in Zukunft an einem besonders gebauten kleineren Motor ausgeführt werden, der so konstruiert wird, daß er möglichst plötzlich verdichtet und entspannt, so daß das Gemisch eine gewisse Zeit auf einer möglichst konstanten und gut definierten Verdichtungs-enttemperatur gehalten wird.

#### IV. Zusammenfassung

An einem mit Fremdantrieb ohne Zündung laufenden Viertaktmotor, der in üblicher Weise Kraftstoff-Luftgemisch ansaugt, wurden die Vorreaktionen einer Anzahl von Kraftstoffen untersucht durch Messung der Temperatursteigerung des Gemisches beim Durchgang durch den Motor. Die für zahlreiche Verdichtungsverhältnisse in Abhängigkeit vom Kraftstoffgehalt des Gemisches aufgenommenen Kurven der Temperatursteigerung zeigen für verschiedene Kraftstoffe charakteristische Unterschiede. Für Kraftstoffe verwandter Art nimmt die Temperatursteigerung durch Vorreaktionen zu mit abnehmender Oktanzahl. Zusatz von Bleitetraäthyl vermindert die Temperatursteigerung durch Vorreaktionen nicht immer so, wie man bei der Erhöhung der Oktanzahl erwarten sollte. Die Versuche wurden ergänzt durch Messungen des Druckverlaufs mit einem Quarzdruckgeber und durch chemische Analysen der Reaktionszerlegnisse.

[RF 1221]

<sup>7)</sup> Z. phys. Chem. Abt. B. Bd. 61 (1942) S. 157/80.

TITLE PAGE

III. Papers of various authors from "Institut fuer Motoren-  
forschung der Luftfahrtforschungsanstalt Herman Goering".

1. Berechnung der Intensitaetsverteilung im Bilde eines  
Flammenkegels.  
Calculation of the intensity distribution on the  
image of a flame cone.

Frame Nos. 257 - 275

Überreicht von  
Institut für Motorenbau  
der Luftfahrtforschungsuniversität  
Hermann Göring

000257

Sonderdruck aus *Annalen der Physik* 5. Folge, Bd. 39, April 1931  
VERLAG VON JOHANN AMBROSIVS BARTH IN LEIPZIG  
Printed in Germany

### *Berechnung der Intensitätsverteilung am Bilde eines Flammenkegels*

Von H.-J. Hübner und H. Klitzkens

(Erläuterung aus dem Institut für Motorenforschung  
der Luftfahrtforschungsuniversität Hermann Göring)

(Mit 8 Abbildungen)

#### I. Einleitung

Eine für die Untersuchung von Verbrennungsvorgängen sehr wichtige Größe ist die Flammengeschwindigkeit (Zündgeschwindigkeit). Sie ist definiert als der Quotient aus der in der Zeiteinheit zugeführten Gasmenge und der Größe der Brennfläche. Die gebräuchlichste Methode der Flammengeschwindigkeitsmessung, bei der definierte Stromungsverhältnisse gegeben und Wandströme weitgehend vermieden sind, ist die Bunsenbrennermethode nach Gouy<sup>1)</sup>. Bei einem Bunsenbrenner bildet der grünlich unter Umströmen auch bläulich leuchtende innere Kegel die Brennfläche. Er ist bei einem zylindrischen Brennerrohr ein Rotationskörper, dessen Oberfläche sich nach Vermessung seiner hellen Umrisßlinie berechnen läßt. Diese Vermessung kann entweder unmittelbar mit einem Mikroskop geschehen oder mittelbar durch Ausmessen eines in einem bekannten Maßstab aufgenommenen Lichtbildes des Kegels. Hierbei scheint die Umrisßlinie eher gewisse Dürre zu haben und man spricht daher auch von einer Leuchtzone. Dankohler<sup>2)</sup> hat erstmalig bei der Vermessung der Umrisßlinie von Kegeln laminar angeströmter Flammen auch diese scheinbare „Dicke“ der Leuchtzone bestimmt und zu Schlüssen über den Verbrennungsmechanismus herangezogen; unter anderem berechnet Dankohler aus dieser scheinbaren „Dicke“ der Leuchtzone in Analogie zur turbulent angeströmten Flamme eine minimale und eine maximale Flammengeschwindigkeit, entsprechend der äußeren bzw. inneren Begrenzungslinie des inneren Flammenkegels. Jedoch ergibt eine qualitative Überlegung bereits, daß die zur Beobachtung gelangende Intensitätsverteilung der ursprünglich vor-

1) G. L. Gouy, Ann. Chim. Phys. 15, S. 27, 1873; ferner H. Anche, Die Physik der Verbrennungserscheinungen, Leipzig 1918, S. 30; H. Brückner, Göttingen, München und Berlin 1937, S. 120ff.

2) G. Dankohler, Jahrb. 1939 d. Deutschen Luftfahrtforschung II, S. 3.

handenen so unähnlich ist, daß nur eine Abschätzung, aber keine genaue Messung der wahren Dicke der Leuchtzone möglich ist. Um quantitative Beziehungen zwischen der Verteilung der Dichte der leuchtenden Zentren in einem radialen Schnitt des Flammenkegels und der Intensitätsverteilung in seinem Bilde aufzufinden, haben wir unter gewissen Voraussetzungen die Intensitätsverteilung in dem Bilde eines kreisförmigen Hohlzylinders berechnet, dessen Wand durch eine leuchtende Schicht von gegebenem Verteilung der Dichte der leuchtenden Zentren gebildet wird. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind ohne weiteres auf den Flammenkegel übertragbar, da man durch eine senkrecht zur Achse geführte Einteilung des Flammenkegels in dünne Scheiben aneinander kleine Zylinder erhält. Die Ergebnisse unserer Rechnung weisen auf einen Weg zu einer näheren Bestimmung der Dicke der leuchtenden Schicht, und zwar durch Messung der Intensitätsverteilung im optischen Bild. Eine Untersuchung hierüber ist in Vorbereitung; ihre Ergebnisse sollen später veröffentlicht werden. Verweist sei nur die Rechnung und die Diskussion ihrer Ergebnisse mitgeteilt.

2. Berechnung der Intensitätsverteilung für eine kleine numerische Apertur des abbildenden Systems ohne Berücksichtigung der Selbstabsorption

Gegeben sei ein *gerad* leuchtender Hohlzylinder mit den Radien  $r_1 = r$  und  $r_2 = r_0$  (vgl. Abb. 1a); in dem Gebieten innerhalb  $r_1$  und außerhalb  $r_2$  ist die Intensität demnach gleich Null. Fernerhin werde in den genannten Gebieten die von dem Hohlzylinder ausgesandte Strahlung nicht absorbiert, eine für das sichtbare Spektralgelb erwählte Annahme, da bei der Vermessung des Kegels vorwiegend nur die im sichtbaren Spektralbereich gelegene Strahlung der  $r_1$  und OH-Flachale zur Wirkung gelangt und diese Radiale außerhalb der Leuchtzone nicht auftreten. Für die im Ultraviolett bei 3064 Å liegenden OH-Banden gilt diese Annahme nicht, da sie sowohl im Kegel als auch in der Zwischenzone auftreten, in der

1) Ein ähnlicher Fall liegt z. B. auch bei den von H. Sporn (Zentr. f. Phys. 12, S. 238, 1930) untersuchten Leuchtzonen von Glühmündelungskegeln vor, auf deren Unterschied, daß bei den von ihm u. a. untersuchten Leuchtzonen die geringen Kollisionsauslässe des leuchtenden Hohlzylinders, durch die Kontinuumstrahlung gebildet wird, unberücksichtigt ist. Daher treten dort die in unserer Forderung behandelten Erscheinungen hauptsächlich nur in den Randzonen auf. Hier bilden jedoch die von H. Sporn mitgeteilten Abbildungen (Abb. 9, S. 204 und Abb. 10, S. 205) eine wertvolle Illustration an unseren Ergebnissen.

Hilber u. Klauens. Berechnung der Intensitätsverteilung usw. 31

aus auch in Absorption beobachtet werden. Außerdem wird für das Innere des Hohlzylinders ( $r < r_1$ ) und dem Außenraum ( $r > r_2$ ) die gleiche Brechzahl wie für den Hohlzylinder selbst angenommen. Die Einstellenebene  $EE$ , die das Objekt  $L$  mit dem Halbmesser  $R$  ideal fehlerfrei, d. h. mit punktförmiger Strahleneigung in die Mattscheibenebene  $ME$  abbildet, enthält die Achse  $O$  des Hohlzylinders. Die Entfernung zwischen der Einstellenebene  $EE$  und dem Objekt  $L$  — die Gegenstandsweite — sei  $g$ ; im Grenzfall unendlich kleiner Öffnung des optischen Systems  $R \rightarrow 0$  geschieht die Abbildung nur durch den Hauptstrahl  $xx'$ , wobei  $z$  und  $z'$  konjugierte Punkte der Einstell- und der Mattscheibenebene sind. Be-

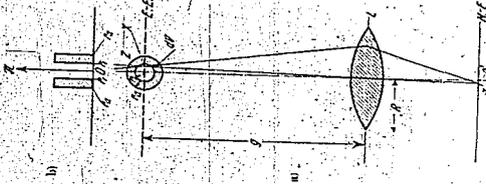


Abb. 2. Zur Berechnung der Länge des Strahlenweges im Hohlzylinder

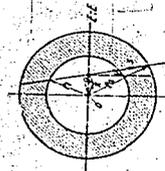


Abb. 1. a) Strahlengang bei der Abbildung eines schiefen Hohlzylinders durch ein Zylindersystem. b) Verlauf der Dichte der leuchtenden Zentren in einem Querschnitt des Hohlzylinders unter der Annahme  $\rho(r) = \text{const}$

rücksichtigt man die Selbstabsorption im Zylinder nicht, so ist die Intensität im Punkt  $x'$  der zentralen Dichte der leuchtenden Zentren im Bereich des Strahles proportional  $l$ . Diese Intensität ist also  $\int \rho dx$ , wo  $\rho$  die Anzahl der leuchtenden Zentren je Kubik-

zylinder und  $s$  eine Koordinate längs des Strahles  $xx'$  ist. Da wir nicht die absolute Größe der Intensität sondern nur die Intensitätsverteilung berechnen wollen, normieren wir die Intensität so, daß im Bildpunkt  $O$  des Achsenpunktes  $O$  des Kegels die Intensität Eins wird. Der durch diesen Punkt  $O$  gehende Hauptstrahl fällt mit dem Durchmesser des Zylinders zusammen, so daß die Intensität dort  $(\int \rho(x, s))_0 = 2 \int \rho(x, s)$  ist, wobei  $r$  der Abstand von

der Zylinderachse ist. Die Intensität in einem beliebigen Punkte ist also nach der Normierung

$$(1) \quad I = \frac{\int \rho(x, s) dx}{\int \rho(x, s)_0 dx}$$

ist  $\rho$  innerhalb der Leuchtzone konstant, so ergibt sich in einem Abstand  $x$  durch den Zylinder die in Abb. 1b dargestellte rechteckige Verteilung der Dichte der leuchtenden Zentren, nach man erhält die normierte Intensität

$$I = \frac{\int_{-r}^{+r} \rho(x, s) dx}{\int_{-r}^{+r} \rho(x, s)_0 dx} = \frac{\int_{-r}^{+r} \cos^2 \gamma dx}{\int_{-r}^{+r} 1 dx} = \cos^2 \gamma$$

das ergibt, wie man aus Abb. 2 ersieht,

$$I = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \gamma) = \frac{1}{2} (1 + \frac{x^2}{r^2})$$

wobei  $x$  der Abstand des Punktes  $x$  von der Zylinderachse und  $\gamma$  der Winkel zwischen Hauptstrahl und optischer Achse ist. Ist die Gegenstandsweite  $g$  groß gegen den Durchmesser des Zylinders ( $g \gg 2r$ ), so ist  $\cos \gamma = 1$ , und wir erhalten den Ausdruck

$$(2) \quad I = \frac{1}{2} (1 + \frac{x^2}{r^2}) = 1 + \frac{x^2}{2r^2}$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Spalte 2 der Tabellen 3-5 S. 42 und 43 wiedergegeben und durch die punktierte Kurve in Abb. 5, 6 und 7 dargestellt, und zwar für die Verhältnisse

$$\frac{r_2 - r_1}{r_2} = 0,5; 0,2; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01.$$

Der Fall  $\rho(x) = \text{const.}$  der ein sprunghaftes Einsetzen und Aufhören der zur Emission führenden Prozesse bedeutet, wird im Phänomenkegel kaum vorliegen. Vielmehr ist ein stetiges Anwachsen der Zahl der emittierenden Rindlinge bis zu einem Maximumwert und anschließend eine Abnahme zu erwarten. Um den Einfluß einer solchen Verteilung der leuchtenden Zentren auf die Intensitäts-

verteilung im optischen Bild zu untersuchen; haben wir die Verteilung

$$\rho(x) = \rho_0 (r_2 - r_1)^2 \cdot (r_2 - r_1)^2$$

angesetzt und dazu  $r_1 = 0,9$ ,  $r_2 = 1$  gewählt.  $\rho_0$  ist ein willkürlicher Faktor, der infolge der Normierung in das Ergebnis nicht eingeht. Diese Funktion hat gegenüber einer Verteilung nach der Gaußschen Fehlerfunktion den Vorteil, daß sie zwei Nullstellen im Endlichen hat und rechnerisch einfacher zu handhaben ist. In

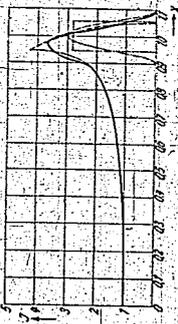


Abb. 3. Darstellung der Intensitätsverteilung im Bild für die Funktion des Gegenstandspunktes  $x$  gemäß Gl. (2) und (3).  
 - - - - - Dichte der leuchtenden Zentren; für  $\rho(x) = \rho_0 (r_2 - r_1)^2$   
 - - - - - Dichte der leuchtenden Zentren; für  $\rho(x) = \text{const.}$

Abb. 3) und Abb. 1b ist diese Verteilung neben der früher untersuchten Rechteckverteilung dargestellt, wobei die Halbwertsbreite in beiden Fällen gleich und die Fläche unter beiden Kurven und damit die Gesamtheit der leuchtenden Zentren infolge der gewählten Normierung ebenfalls dieselbe ist.

Wählt man als Nullpunkt von  $x$  den Punkt  $x$  (vgl. Abb. 2), so ist bei verschwindendem  $\gamma$

$$s^2 = r^2 - x^2$$

$$ds = \frac{x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Damit wird Gl. (1) zu

$$(3) \quad I = \frac{1}{2} \int_{-r}^{+r} \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{r_2^2 - (r_2 - r_1)^2}} \cdot (r_2 - r_1)^2 \cdot \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{r_2^2 - x^2}} dx$$

1) Der Durchmesser des Beugungserfoltes in den Punkten  $r_2$  und  $r_1$  beträgt  $9,9$  des Abstandes der Netzhäute in der Darstellung.

da sich  $\eta$  im Zähler und im Nenner vor die Integrale setzen läßt und wegläßt. Da die direkte Integration des Exponenten als Differenz sehr großer Zahlen hinfällt, wurde die Auswertung durch numerische Integration vorgenommen. Die Ergebnisse sind in Tab. 1a zusammenge- stellt und in Abb. 3 (ausgezogene Kurve) dargestellt. Die vom abgenutzten Verteilung der Leuchtzentren hergeleitete aber die scharfe Spitze der beobachteten Intensitätsverteilung, die im Falle der rechteckigen Verteilung der leuchtenden Zentren auftritt, ändert hier vom Charakter des Hüllers nicht wesentlich.

Intensitätsverteilung am Hüllort als Funktion des Dispersionsexponenten  $x$  für verschiedene relative Öffnung  $a$  und für  $\beta(0) = 3,0$ ,  $\beta_{\infty} = 0,5$ ,  $\beta' = 0,05$  und für  $\beta(0) = 1,0$  und  $\beta(0) = 0,5$

Tabella Ia

Table with 2 columns:  $\beta(0) = 3,0$  and  $\beta(0) = 1,0$ . Rows show values for  $\beta' = 0,05$  and  $\beta' = 0,20$  across various  $x$  values from 0 to 1,40.

3. Berechnung der Intensitätsverteilung für sehr kleine numerische Apertur des abbildenden Systems bei starker Solenabsorption in der leuchtenden Zone

Es wurde dann untersucht, welchen Einfluß die Solenabsorption in der Leuchtzone auf den Verlauf der Intensitätsverteilung am Hüllort hat. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt 2 wurde die Intensitätsverteilung für den Fall  $\beta(0) = \infty$  ermt unter der Annahme berechnet, daß die Helligkeit des ungeschwächten Lichtes der Wurzel aus dem Produkt aus der Anzahl der leuchtenden Zentren je Kubikzentimeter und der Dicke der leuchtenden Schicht pro- portional sei<sup>1)</sup>, also für den Fall starker Solenabsorption. Dann

1) E. Lecherburg u. F. Richter, a. a. O. Aus der Diskussion der Er- gebnisse von G. L. Gray (a. a. O.) und aus den Messungen von H. Benoit (Ann. d. Phys. 17, 8, 1903, 1913) geht hervor, daß in Plasmen für die  $D$ -Linie der Na die Fresnelabsorption und damit die hier proportionale Ge- samtenheit für große Dicken der leuchtenden Zentren der Wurzel aus dem

Hüller u. Abblenkens. Berechnung der Intensitätsverteilung usw. ergibt sich für ein voneinander kleines Öffnungsverhältnis mit Abb. 2 entsprechend  $\eta(0)$  für die Intensitätsverteilung am Hüllort folgender Ausdruck:

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \beta_{\infty}^2 - \beta_{\infty}^2} - \beta_{\infty}^2$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Spalte 2 der Tab. 9 S. 81 und punktiert in der Abb. 8 für  $\beta_{\infty} = 0,5$  wiedergegeben.

3. Berechnung der Hüllkurve der endlichen Öffnung auf die Intensitätsverteilung

Der behandelte Fall einer sehr kleinen Öffnung des abbildenden Systems ist ein Grenzfall, der nicht als verwickeltes ist, da dann die Intensitätsverteilung am Hüllort durch die Beugung am Hüllort nicht gegeben ist. Wir haben daher in folgenden den Einfluß der endlichen Öffnung der Abbildungsobjektive auf die gesuchte Intensitätsverteilung für den Fall  $\beta(0) = \infty$  ermt unter dem einzigen in Abschnitt 2 gemachten Voraussetzungen erachtet. In diesen Fällen tragen zur Abbildung Strahlen bei, die innerhalb der leuchtenden Zylinderzone verschiedene Wege zurückgelegt haben (vgl. Abb. 1a). Ein derartiger Wert der Intensität in einem Hüllpunkt der Mittenablenkung zu finden, muß man den Beitrag eines Volumenelementes des Zylindermantels berechnen und über die Beiträge aller Volumenelemente, die in dem betrachteten Strahlenkegel liegen, summieren. Das Volumenelement  $dV$  im Abstand  $r$  vom Punkte  $x$  strahlt die Energie  $E_0 dV$  aus, wobei  $E_0$  die Energie ist, die  $\beta$  leuchtende Zentren in fraglicher Wellenlängenberei austrahlen. Stimmt man von der Solenabsorption in der leuchtenden Schicht ab, so erhält man im Bilde des Volumenelementes die Energie

$$dE = E_0 \frac{\beta}{r^2} dV = \frac{E_0 \beta}{r^2} dV$$

$E = \int \frac{E_0 \beta}{r^2} dV$  ist der Nennwert, unter dem die Objektiv von  $dV$  aus erachtet. Ist die Entfernung der Mittenablenkung  $MF$  vom Objektiv  $Z$ , die Hüllweite  $\approx b \approx \frac{\beta}{\alpha}$ , so ist der Abstand des Hüllpunktes von  $dV$  von der Mittenablenkung

Produkt aus Solenstärke und Zentrenzahl proportional ist, und daß demnach unter dem gegebenen Voraussetzung die  $D$ -Linien eine Dispersionverteilung besitzen. Sie sind im Hüllort vgl. z. B. O. Oldenborg, Journ. Chem. Phys. 6, 8, 770, 1938, die Natur der Dispersionform etwisch wurde, kann man als wohl auch für die  $C$ - und  $D$ -Linien im Fluoreszenzkegel ver- nutzen und damit die Abschwächung für „Wellenlängen“ annehmen.

$$Ab = s \cdot \cos \varphi \frac{d}{dy} \left( \frac{g \cdot f}{g' - f'} \right)$$

$$Ab = -s \cdot \cos \varphi \cdot \frac{g'}{g}$$

Ist der Radius des Objektives  $R$ , dann entsteht auf der Mattscheibe ein Zerstreuungskreis vom Halbmesser  $H$ ,

$$R = H \cdot \frac{dV}{d\Omega} = H \cdot s \cdot \cos \varphi \cdot \frac{g'}{g}$$

$$\text{und der Fläche } F = \pi R^2 = \pi s^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{g'^2}{g^2}$$

Auf der Mattscheibe liefert das Volumenelement dann einen Beitrag  $dI$  zur Intensität

$$dI = \frac{dF}{F} = \frac{dV}{V} = \frac{dV}{4\pi r^2} \cdot \frac{g'}{g \cos \varphi}$$

Die gesamte Intensität im Punkte  $x'$  ist also

$$(6) \quad I = \frac{E_0}{3\pi} \int_0^{\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{dV}{r^2} \cdot \frac{g'}{g \cos \varphi}$$

wobei das Integral über alle  $dV$  innerhalb des betrachteten Strahlkegels zu erstrecken ist. Ist  $\varphi$  (vgl. Abb. 9) der Winkel eines Strahles senkrecht zur Zeichenebene, so gilt für den Rand des zur Intensität in  $x'$  beitragenden Kegels unter Voraussetzung  $r_0 \ll R \ll g$  oder, da  $g$  und  $\varphi$  kleine Winkel sind,

$$g' \approx g^2 \cdot \varphi + g' \cdot \varphi^2 \cdot \vartheta = R^2$$

$$\varphi^2 + \vartheta^2 = R^2$$

$$|g \cos \varphi| = |g \cdot \varphi| = R$$

$$s = \pm x \sin \varphi + \sqrt{r_0^2 - x^2 \cos^2 \varphi}$$

$$\cos \vartheta = \pm \sin \varphi + \sqrt{r_0^2 - x^2 \cos^2 \varphi}$$

$$I = \frac{E_0}{3\pi} \int_0^{\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{dV}{r^2} \cos \vartheta \cos \varphi$$

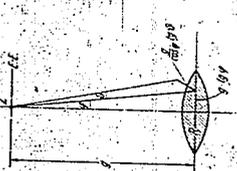


Abb. 4. Zur Abbildung der Grenzen des abblenden Strahlenscheitels bei caudaler Öffnung

Außerdem ist für die innere Begrenzung der Leuchtzone gilt für die äußere

Drückt man  $dV$  in den eingeführten Polarkoordinaten  $s, \varphi$  und  $\vartheta$  aus, so wird Gl. (6)

$$I = \frac{E_0}{3\pi} \int_0^{\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{dV}{r^2} \cos \vartheta \cos \varphi$$

tabelle ist zu integrieren über  $\vartheta$  in dem Intervall

$$-\sqrt{\frac{R^2}{g^2} - \varphi^2} \leq \vartheta \leq +\sqrt{\frac{R^2}{g^2} - \varphi^2}$$

über  $\varphi$  in dem Intervall

$$-\frac{g}{R} \leq \varphi \leq +\frac{g}{R}$$

über  $s$  in dem Intervall

$$-\frac{x \sin \varphi + \sqrt{r_0^2 - x^2 \cos^2 \varphi}}{\cos \vartheta} \leq s \leq \frac{x \sin \varphi + \sqrt{r_0^2 - x^2 \cos^2 \varphi}}{\cos \vartheta}$$

und in dem Intervall

$$-\frac{x \sin \varphi + \sqrt{r_0^2 - x^2 \cos^2 \varphi}}{\cos \vartheta} \leq s \leq \frac{x \sin \varphi + \sqrt{r_0^2 - x^2 \cos^2 \varphi}}{\cos \vartheta}$$

Die Integration über  $s$  ergibt

$$I = \frac{E_0}{3\pi} \int_0^{\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{dV}{r^2} \cos \vartheta \cos \varphi$$

die Integration über  $\vartheta$

$$I = \frac{E_0}{3\pi} \int_0^{\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{dV}{r^2} \cos \vartheta \cos \varphi$$

oder normiert

$$(6) \quad I = \frac{E_0}{3\pi} \int_0^{\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{dV}{r^2} \cos \vartheta \cos \varphi$$

Für den in Abschn. 8 behandelten Fall starker Selbstabsorption wird man daher entsprechend ansetzen können

$$(7) \quad I = \frac{E_0}{3\pi} \int_0^{\varphi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{dV}{r^2} \cos \vartheta \cos \varphi$$

Die Integrale (6) und (7) wurden durch Reihenentwicklungen ausgerechnet, wobei die ersten Faktoren der Integranden in den Gebieten, in denen sie regular sind, jeweils in passende Reihen entwickelt wurden.

000267

12 Annalen der Physik. 5. Folge. Band 39. 1911

Für das Integral (9) ergibt sich durch den Ansatz

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} + \dots + \sqrt{1-x^2} \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dots + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$\ln \text{Funk} \xi = \ln \Gamma(\xi) = \dots + \ln \Gamma(\xi) \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}$$

Der Verlauf der Funktion  $\eta$  für  $H = 0,0712$  ist in Tab. 2 gegeben.

Tabello 2

$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$
0,0000	0,0000	0,8999	0,0003
0,1750	0,0002	0,9007	0,0010
0,3500	0,0008	0,9018	0,0020
0,5250	0,0020	0,9029	0,0035
0,7000	0,0038	0,9040	0,0050

Die Intensitätsverteilung am Bildort für eine unendlich Apertur  $\sigma = 0,0712$ , entsprechend einer im Maßstab 2:1 vergrößerten Aufnahme mit der relativen Öffnung  $F:4,5$ , ist für das Verhältnis  $\xi_2/\xi_1 = 0,5; 0,2; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01$  aus den Tabellen II-8, Spalte 3 und den ausgezogenen Kurven der Abb. 6, 6 und 7 zu ersehen.

Intensitätsverteilung am Bildort als Funktion des Gegenstandspunktes  $\xi$  für verschiedene Werte von  $\xi_2/\xi_1$  unter Voraussetzung der Beibehaltung und für  $\sigma = 0,0712$

Tabello 3

$\xi$	$\xi_2/\xi_1 = 0,5$		$\xi_2/\xi_1 = 0,2$		$\xi_2/\xi_1 = 0,1$	
	$H/\sigma$	$\eta$	$H/\sigma$	$\eta$	$H/\sigma$	$\eta$
0	1,01	1,04	1,06	1,06	1,07	1,07
0,2	1,21	1,27	1,35	1,35	1,40	1,40
0,4	1,35	1,50	1,62	1,62	1,68	1,68
0,6	1,46	1,67	1,78	1,78	1,84	1,84
0,8	1,54	1,75	1,85	1,85	1,90	1,90
1,0	1,60	1,80	1,90	1,90	1,94	1,94
1,2	1,64	1,84	1,94	1,94	1,97	1,97
1,4	1,67	1,87	1,97	1,97	1,99	1,99
1,6	1,69	1,89	1,99	1,99	2,00	2,00
1,8	1,71	1,91	2,00	2,00	2,00	2,00
2,0	1,72	1,92	2,00	2,00	2,00	2,00
2,2	1,73	1,93	2,00	2,00	2,00	2,00
2,4	1,74	1,94	2,00	2,00	2,00	2,00
2,6	1,75	1,95	2,00	2,00	2,00	2,00
2,8	1,76	1,96	2,00	2,00	2,00	2,00
3,0	1,77	1,97	2,00	2,00	2,00	2,00
3,2	1,78	1,98	2,00	2,00	2,00	2,00
3,4	1,79	1,99	2,00	2,00	2,00	2,00
3,6	1,80	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
3,8	1,81	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
4,0	1,82	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
4,2	1,83	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
4,4	1,84	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
4,6	1,85	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
4,8	1,86	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
5,0	1,87	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00

000268

Höber u. Klänfers Berechnung der Intensitätsverteilung usw.

Tabello 4

$\xi$	$\xi_2/\xi_1 = 0,5$		$\xi_2/\xi_1 = 0,2$		$\xi_2/\xi_1 = 0,1$	
	$H/\sigma$	$\eta$	$H/\sigma$	$\eta$	$H/\sigma$	$\eta$
0	1,01	1,04	1,06	1,06	1,07	1,07
0,2	1,21	1,27	1,35	1,35	1,40	1,40
0,4	1,35	1,50	1,62	1,62	1,68	1,68
0,6	1,46	1,67	1,78	1,78	1,84	1,84
0,8	1,54	1,75	1,85	1,85	1,90	1,90
1,0	1,60	1,80	1,90	1,90	1,94	1,94
1,2	1,64	1,84	1,94	1,94	1,97	1,97
1,4	1,67	1,87	1,97	1,97	1,99	1,99
1,6	1,69	1,89	1,99	1,99	2,00	2,00
1,8	1,71	1,91	2,00	2,00	2,00	2,00
2,0	1,72	1,92	2,00	2,00	2,00	2,00
2,2	1,73	1,93	2,00	2,00	2,00	2,00
2,4	1,74	1,94	2,00	2,00	2,00	2,00
2,6	1,75	1,95	2,00	2,00	2,00	2,00
2,8	1,76	1,96	2,00	2,00	2,00	2,00
3,0	1,77	1,97	2,00	2,00	2,00	2,00
3,2	1,78	1,98	2,00	2,00	2,00	2,00
3,4	1,79	1,99	2,00	2,00	2,00	2,00
3,6	1,80	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
3,8	1,81	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
4,0	1,82	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
4,2	1,83	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
4,4	1,84	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
4,6	1,85	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
4,8	1,86	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
5,0	1,87	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00

Für die Gl. (7) ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck

$$I = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}}$$

(9) Dabei ist für  $\sigma = 0,0712$

$$I = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}}$$

$$I = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}}$$

wobei sich die  $A_n$  aus der Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2^n n!} x^n$$

ergeben. Für  $x = \sqrt{1-x^2}$  gilt die Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2^n n!} x^n$$

wobei sich die  $H_n$  aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{2^n n!} x^n$$

300259

41 Annalen der Physik, 5. Folge, Band 39, 1911

ersien: im Bereich  $\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}} \approx \frac{z}{R}$  gilt die Entwicklung

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{z^2}{R^2}\right)^n = \frac{R}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{R^{2n-1}} = \frac{R}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{R^{2n-1}}$$

im Bereich  $z \approx R$ , wird schliesslich  $Z = 0,005 \sqrt{\frac{R}{z}}$  für  $\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}} \approx \frac{z}{R}$ .

Für das Verhältnis  $\frac{z}{R} = 0,1$  und bei Annahme starker Selbstabsorption ergibt sich, wie aus Tab. 9 und Abb. 8 (angezogene Kurve) ersichtlich Intensitätsverteilung für die inneren Apertur  $R = 0,0742$ .

Intensitätsverteilung am Bildort als Funktion des Gegenstandspunktes  $z$  bei starker Selbstabsorption für  $g = 1$  und  $R = 0,1$

Tab. 9

$\frac{z}{R}$	$I$	$g$	$0,0712$	$0$	$0,0712$
0	1	1	1	1	1,05
0,1	1	1	0,99	0,99	1,03
0,2	1	1	0,97	0,97	1,01
0,3	1,03	1,01	0,94	0,94	0,99
0,4	1,05	1,05	0,92	0,92	0,97
0,5	1,08	1,08	0,90	0,90	0,95
0,6	1,11	1,11	0,88	0,88	0,93
0,7	1,14	1,14	0,86	0,86	0,91
0,8	1,17	1,17	0,84	0,84	0,89
0,9	1,20	1,20	0,82	0,82	0,87
1,0	1,23	1,23	0,80	0,80	0,85
1,1	1,26	1,26	0,78	0,78	0,83
1,2	1,29	1,29	0,76	0,76	0,81
1,3	1,32	1,32	0,74	0,74	0,79
1,4	1,35	1,35	0,72	0,72	0,77
1,5	1,38	1,38	0,70	0,70	0,75
1,6	1,41	1,41	0,68	0,68	0,73
1,7	1,44	1,44	0,66	0,66	0,71
1,8	1,47	1,47	0,64	0,64	0,69
1,9	1,50	1,50	0,62	0,62	0,67
2,0	1,53	1,53	0,60	0,60	0,65

Die Berücksichtigung der endlichen Apertur des Objektivs führt also in allen Fällen nur zu einer sehr kleinen Verbesserung der für den Grenzfall unendlich kleiner Öffnung berechneten Intensitätsverteilung.

5. Ergebnisse

Die Kurven der Abb. 3 und 6-8 geben die Intensitätsverteilung am Bildort in Abhängigkeit vom Gegenstandspunkt  $z$  wieder, wobei die Intensität mit in absoluten Einheiten sondern als Vielfaches ihres Wertes für  $z = z = 0$ , also für die Mitte des Bildes, aufgetragen ist. Alle Kurven zeigen ein ausgeprägtes Maximum in der Mitte des inneren Randes  $r_1$ , die Höhe des Maximums ist weitgehend durch das Verhältnis  $\frac{z}{R}$  bestimmt.

300270

Hübner, W. Näheres. Berechnung der Intensitätsverteilung usw. 45

Bei vernachlässigbarer Selbstabsorption in der leuchtenden Schicht ergibt sich aus dem folgenden: Für den Grenzfall unendlich kleiner Öffnung (Abb. 3-5) und des Fall einer konstanten Dichte der leuchtenden Zentren im Hohlzylinder (vgl. Abb. 1) liegen die Maxima der Verteilungskurven an der Stelle des geometrischen Bildpunktes des inneren Randes; am Bildpunkt des anderen Randes  $r_2$  ist die

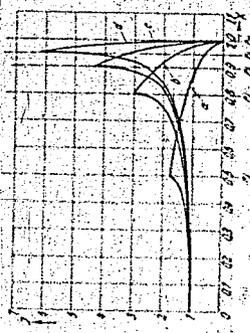


Abb. 5. Darstellung der Intensitätsverteilung am Bildort als Funktion des Gegenstandspunktes  $z$  gemäß Gl. (2) und (6) für  $\frac{z}{R} = 0,1$ , Kurve a; für  $\frac{z}{R} = 0,2$ , Kurve b; für  $\frac{z}{R} = 0,3$ , Kurve c; für  $\frac{z}{R} = 0,4$ , Kurve d; für  $\frac{z}{R} = 0,5$ , Kurve e; für  $\frac{z}{R} = 0,6$ , Kurve f; für  $\frac{z}{R} = 0,7$ , Kurve g; für  $\frac{z}{R} = 0,8$ , Kurve h; für  $\frac{z}{R} = 0,9$ , Kurve i; für  $\frac{z}{R} = 1,0$ , Kurve j.

Intensität Null. Die Höhe des Maximums ist gegeben durch  $\sqrt{\frac{z}{R}}$ , so wächst also sehr schnell beim Übergang zu kleineren Werten von  $\frac{z}{R}$ , also zu geringeren Dicken der Leuchtzone.

Für den Fall, daß die Dichte der leuchtenden Zentren stetig nach den Rändern des Hohlzylinders zu abnimmt (Abb. 6), verschiebt sich das Maximum der Intensität nach der Mitte der Leuchtzone hin und wird gleichzeitig etwas flacher. Die Intensität vermindert wieder am Ort des Bildes des äußeren Randes, wobei der Abfall der Intensität nach Null entsprechend der Verteilung der Dichte der leuchtenden Zentren weniger steil erfolgt. Zu beachten ist auch noch der Unterschied im Verlauf dieser und der vorher behandelten Kurven von der Stelle des Maximums an nach der Mitte ( $z = 0$ ) an.

000271

40

Abhandl. der Physik. 6. Folge. Band 30. 1911

Die für einen kleinen Zylinderrechner und damit für kleine Planniveaus bei Ableitung der Gl. (5), (6) und (7) gemachte Voraussetzung  $\gamma \approx 1$  kann experimentell durch Anwendung des an der Miquelle telezentrischen Strahlengänge (s. auch Abb. 10) auch bei

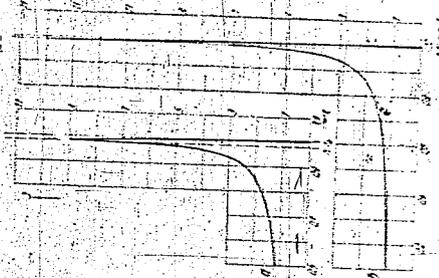


Abb. 10. Darstellung der Linsenverzerrung am Hilbert als Funktion des Gegenstandspunktes  $\alpha$  gemäß Gl. (5) und (6) für  $\frac{b_2}{a_2} = 0,92$  (Abb. 10a) und  $\frac{b_2}{a_2} = 0,91$  (Abb. 10b).

..... Identität am Hilbert für  $\beta = \alpha$ .

..... Identität am Hilbert für  $\beta = 0$ .

großem Zylinderrechner, also auch bei größeren Planniveaus, nahezu streng erfüllt werden.

Der Einfluß der endlichen Öffnung des Abbildungssystems ist an Hand der Abb. 6-8 aus der Differenz zwischen der punktierten und der ausgezogenen Kurve zu ersehen. Er ändert sich bei großen

000272

Hilbert u. Ribbens. Berechnung der Intensitätsverteilung usw. 37

Werten von  $\frac{b_2}{a_2} < 1$ , also dicken Linschichten, in einer geringen Größenverhältnis des Maximum nach größeren Werten von  $\alpha$  und in einer unvollständigen Verfertigung der Maximalintensität.

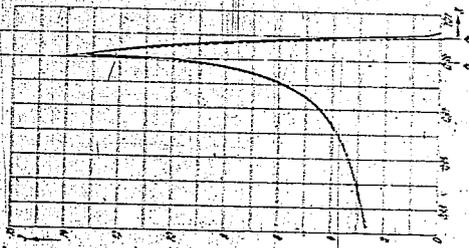


Abb. 7. Darstellung der Intensitätsverteilung am Hilbert als Funktion des Gegenstandspunktes  $\alpha$  gemäß Gl. (5) und (6) für  $\frac{b_2}{a_2} = 0,91$ . Abszissenmaßstab gegenüber Abb. 10b zehnmal vergrößert.

Auch die Intensität Null wird erst etwa außerhalb der geometrischen Bildes im äußeren Zylinderenden erreicht (vgl. Abb. 7). Die Differenz zwischen den Maximalintensitäten bei endlicher und unendlich kleiner Öffnung ist proportional dem Quadrat der unvollständigen Apertur  $\frac{b_2}{a_2}$ . Nicht nur zu kleinen Linschichten über, für die  $\frac{b_2}{a_2} < 1$ ,  $\frac{b_2}{a_2} < 1$  wird, 40 fällt, wie man aus Gl. (8) und Tab. 2 ersehen kann, ohne Auswertung in dem Einfluß der endlichen Öffnung des Objektivs ein.

Das Maximum rückt in die Mitte der Leuchtzone (vgl. Abb. 7) und die Differenz der Maximalintensitäten wird in erster Näherung der unendlichen Apertur  $R/g$  selbst proportional.

Unter dem Einfluß der Selbstabsorption wird die Maximalintensität, kleiner, ohne daß die Lage des Maximums verändert wird. Wie man aus Gl. (9) und ihren Entwicklungen sieht, gilt das über den Einfluß der endlichen Öffnung für den Fall verschwindender Selbstabsorption. Gelegte unvertindert auch hier.

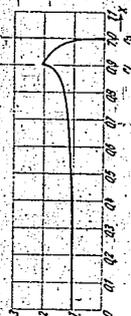


Abb. 8. Darstellung der Intensitätsverteilung am Bildort als Funktion des Gegenstandspunktes  $x$  gemäß Gl. (4) und (7) für  $(x - x') = 0$ .

..... Intensität am Bildort für  $R = 0$ ,  
Intensität am Bildort für  $R = g$

Wendet man nun die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung auf den Flammenkegel an, so ergibt sich, daß die Verteilung der leuchtenden Zentren in der Leuchtzone in ihrem Bild nicht wiedergeben wird. Die Intensitätsverteilungskurve weist zwei hervorragende Punkte auf, die Maximalintensität in der Mitte des inneren und die Intensität Null in der Mitte des äußeren Randes. Während der erste Punkt gut meßbar ist, kann der zweite infolge der Diffusionserscheinungen in der photographischen Schicht und der Gestalt der Schwärzungskurve bei einer einfacilen photographischen Aufnahme nicht erfaßt werden. Es läßt sich daher nur eine bezwungte Unrichtigkeit des Kegels bestimmen. Durch Überschreiten des geringeren Teiles der Schwärzungskurve, unzureichendes Auflösungsvermögen des verwendeten Objektivs, mangelhafte Scharfeinstellung und Diffusionseffekte in der photographischen Schicht kann besonders bei der Verdopplung dieser Einflüsse beim Emkopieren eine gewisse Breite des Maximums vorgetuscht werden, die mit den tatsächlichen Verhältnissen im Flammenkegel nichts zu

Hübner u. Kästner. Berechnung der Intensitätsverteilung usw. 49.  
un hat. Eine direkte Messung der Dicke der Leuchtzone ist also nicht möglich.

Sind die Grenzen der Leuchtzone einandersehr scharf definiert, so ist unter der Annahme verschwindend kleiner Selbstabsorption in der leuchtenden Schicht die Intensitätsverteilung durch das Verhältnis  $(x - z)$  eindeutig gegeben. Es liegt daher nahe, aus einem gemessenen Intensitätsverteilung nach der von Hörmann) angegebenen Methode mit Hilfe der Ableiten Integralgleichung auf die Verteilung der leuchtenden Zentren in der Leuchtzone und damit rückwärts auf die Dicke der Leuchtzone zu schließen. Die Annahme verschwindender Selbstabsorption im inneren Flammenkegel wird dabei durch die Ergebnisse von Wolfhard) gestützt. Er fand bei der 0,0-Bande von  $C_2$  im Flammenkegel nur eine ganz geringfügige Absorption von weniger als 2%, so daß der Flammenkegel für die  $C_2$ -Strahlung als unendlich dünne Schicht zu betrachten ist. Für die  $CH$ -Banden sind noch keine demartigen Untersuchungen ausgeführt. Es ist aber nicht anzunehmen, daß bei diesen wesentlich andere Anregungsbedingungen vorliegen werden, also kann man auch die  $CH$ -Strahlung als frei von Selbstabsorption ansehen. Sollte aber doch in der Kegelebstrahlung eine gewisse Selbstabsorption vorliegen, so bewirkt diese nach Abb. 8 eine Verflachung der gemessenen Kurve. In der gleichen Richtung wirken Diffusionseffekte in der photographischen Schicht, mangelhaftes Auflösungsvermögen des Objektivs, Abweichungen von der vorausgesetzten Verteilung der leuchtenden Zentren in der Leuchtzone und die endliche Breite des Photostempelpapieres. Da alle diese Erscheinungen zur Folge haben, daß man bei dem oben angezeigten Meßverfahren eine zu große Dicke bestimmt, so stellen die so erhaltenen Werte für die Dicke der Leuchtzone einen oberen Grenzwert dar. Versuche über die Ausführbarkeit der vorgeschlagenen Methode sind in Vorbereitung.

6. Zusammenfassung

Um zu untersuchen, ob in dem durch ein optisches System erzeugten Bild eines Flammenkegels die wahre Dicke der Leuchtzone unmittelbar ausgemessen ist, wurde die Intensitätsverteilung in dem optischen Bild eines leuchtenden Hohlzylinders mit gegebener Verteilung der leuchtenden Zentren unter gewissen Annahmen berechnet.

1) H. Hörmann, Zeech. f. Phys. 97. S. 333. 1935.  
2) J.-G. Wolfhard, Ziech. f. Phys. 112. S. 107. 1939.  
Annalen der Physik. 6. Folge. 29.

000275

30. *Annalen der Physik*, 5. Folge, Band 39, 1911

Es ergibt sich:

1. Die Intensitätsverteilung in der Mittelschichtebene ist im Vergleich zu der gegebenen Intensitätsverteilung in der Einzelfaser so verzeichnet, daß nur eine Abschätzung aber keine genaue Messung der wahren Dichte der Leuchtzone durch Vermessung ihres Bildes möglich ist.

2. Der Verlauf der Intensitätsverteilungskurve hängt von der vorgegebenen Verteilung der leuchtenden Zentren in der Leuchtzone von Umgebungsverhältnissen des abbildenden Systems und der Selbstabsorption in der leuchtenden Schicht ab.

3. Die Bestimmung der wahren Dichte der Leuchtzone erreicht durch Messung der Intensitätsverteilung möglich. Vorsicht hierzu sind in Vorbereitung.

Braunschweig, im September 1910.

(Eingegangen 14. November 1910)

TITLE PAGE

2. Die Eigenschaften stationärer Flammen im Unterdruck.  
The properties of stationary flames at low pressure.

Frame Nos. 276 - 281

000276

## Einleitung

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> war die Intensitätsverteilung in den Spektren der  $C_2$ - und OH-Moleküle im Inneren von Flammen gemessen, woraus Schlüsse über das Temperaturgleichgewicht gezogen wurden. Es bestand die Hoffnung, weitere Aufschlüsse über den Reaktionsmechanismus in Flammen zu erhalten, wenn man diese im Unterdruck brennt. Bei Änderung des Druckes zeigen stationäre Flammen, die in der Art einer Bunsenflamme brennen, bemerkenswerte Eigenschaften, so daß sich deren Beschreibung lohnt. Über die spektroskopischen Untersuchungen soll in einer weiteren Arbeit berichtet werden.

Stationäre Flammen sind im Unterdruck bisher<sup>2)</sup> lediglich von Ubbelohde und Anwaander<sup>3)</sup> gebrannt worden, und zwar unter Verwendung eines CO-Luft-Gemisches als Brenngas. Sie kamen hierbei bis zu etwa  $1/3$  atm herab. Ihre Messungen dürften aber von den Flammen im Unterdruck nicht das richtige Bild ergeben, wie noch gezeigt werden wird.

## Anordnung

In ein größeres Glasgefäß ist am unteren Ende als austauschbare Brenndüse ein Quarzrohr mittels eines Schließes eingeführt, auf welchem die Flamme brennt. Die Rohr-, d. h. aber die Düsendurchmesser, variieren je nach dem Druck von 0,5 bis 31 mm. Mit Hilfe eines Funkens oder einer Gasentladung wird die Flamme in dem Gefäß gezündet. Durch seitlich an dem Gefäß angeklebte plane Fenster kann die Flamme und besonders der interessierende Innenkegel abgebildet werden. Die Flamme brennt wie beim normalen Bunsenbrenner vertikal. Am oberen Ende des Gefäßes wird durch eine Wälz- oder eine Wasserringpumpe abgesaugt.

Untersucht wird in der Hauptsache ein Gemisch von  $C_2H_2-O_2$ , ferner noch  $C_2H_2$ -Luft- und  $C_2H_2-O_2$ -Argon-Gemische. Die Gase werden ungeeignet den üblichen Gasflaschen entnommen. Die Messung der Volumina geschieht durch Strömungsmanometer bei geringem Überdruck, unabhängig von dem im Verbrennungsgefäß herrschenden Druck. Alle Untersuchungen werden mit stöchiometrischem Gemisch durchgeführt.

## Die Stabilitätsbereiche

Trägt man in Abb. 1 b als Abszisse den Druck in Torr und als Ordinate die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Düse  $v_{50}$  auf, dann sei unter Stabilitätsbereich der Druck- und Strömungsgeschwindigkeitsbereich verstanden, innerhalb dessen

<sup>1)</sup> H. G. Wolfhard, ZS. f. Phys. 112 (1939), 107.

<sup>2)</sup> H. Straghold, Luftfahrtmedizin 4 (1939), 25.

<sup>3)</sup> L. Ubbelohde u. R. Anwaander, Journ. Gasbeleuchtung 60 (1917), 23.

## Die Eigenschaften stationärer Flammen im Unterdruck

Von H. G. Wolfhard, Braunschweig.

(Mitteilung aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig)

Mit 8 Abbildungen im Text

Inhalt. Es werden stationäre Flammen nach Art einer Bunsenflamme im Unterdruck gebrannt und Stabilitätsbereiche aufgestellt. Für eine Azetylen-Sauerstoff-Flamme wird die maximale Verbrennungsgeschwindigkeit, die Kegelgröße und das Kegelvolumen in Abhängigkeit vom Druck gemessen.

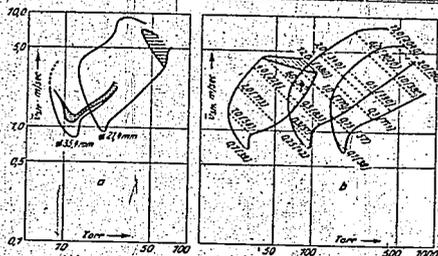


Abb. 1. a) Stabilitätsbereiche der  $C_2H_2-O_2$ -Argon-Flamme.  
b) Stabilitätsbereiche der  $C_2H_2$ -Luft-Flamme.

bei konstantem Düsenquerschnitt eine stationäre Flamme stabil brennt. Zu jeder Düse gehört also ein Stabilitätsbereich. Die jeweils in der Sekunde umgesetzte Gasmenge wird durch die im Gemisch befindliche  $C_2H_2$ -Menge, in auf NPT reduzierten  $cm^3$  gemessen, ausgedrückt. Diese Zahlen sind in Abb. 1 bin die Stabilitätsbereiche eingetragen. Die in Klammern angegebenen Zahlen sind die für die jeweilige Strömung im Quarzrohr geltenden Reynold'schen Zahlen. Die drei eingezeichneten Bereiche gehören zu den Düsendurchmessern 21,4, 7,1, 3,18 mm, und zwar in der Weise, daß der Düsenquerschnitt bei den nach höheren Drucken hin verschobenen Bereichen kleiner wird.

Betrachten wir z. B. für den mittleren der drei Stabilitätsbereiche, also für eine Düse von 7,1 mm Durchmesser, bei einer Gasmenge von  $2,0 cm^3$  (NPT) die Flamme bei 200 Torr, dann erhalten wir die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $v_{St}$  in der Düse, indem wir im Stabilitätsbereich dieser Düse die Linie 2,0 suchen. Ihr Schnittpunkt mit  $p = 200$  Torr, ergibt  $v_{St} = 2,7 m/s$ . Verkleinern wir nun den Druck, indem wir stärker absaugen, so vergrößern wir die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $v_{St}$ , da die Gasmenge (NPT) konstant bleibt. Wir bewegen uns also auf einer Geraden unter 45° Neigungswinkel. Wir können den Druck nicht unbeschränkt verkleinern, da sich mit wachsender mittlerer Strömungsgeschwindigkeit von einem Punkt ab die Flamme abhebt. Vergrößern wir den Druck, so wird mit kleiner werdender mittlerer Strömungsgeschwindigkeit von einem Punkt ab die Flamme zurückschlagen wie bei einem gewöhnlichen Bunsenbrenner. Wir erhalten so für die Gasmenge  $2,0 cm^3 C_2H_2$  den Bereich, in dem die Flamme stationär brennt. Diese Bestimmung der Brenngrenzen führt man nun für verschiedene Gasgemenge bei konstanter Gemischzusammensetzung durch und erhält so den Gesamtbereich für eine Düse, in welchem überhaupt eine stationäre Flamme möglich

ist. Ist dieser Stabilitätsbereich einmal ausgemessen, so kann man immer die Grenzen der stabil brennenden Flamme angeben, gleichgültig, ob der Druck konstant gelassen und nur die Gasmenge und damit die mittlere Strömungsgeschwindigkeit geändert, oder ob diese konstant gelassen und nur die Gasmenge und damit der Druck geändert wird.

Der Stabilitätsbereich ist nach großen Gasgemenge zu nicht begrenzt. Die Flamme wird jedoch bald turbulent. Turbulent brennende Flammen sollen hier nicht untersucht werden. Nach kleinen Gasgemenge zu verengt sich der Stabilitätsbereich, um sich dann zu schließen. Unterhalb einer minimalen Gasmenge ist keine Flamme mehr möglich. Unter oberer Grenze seien im folgenden die Punkte verstanden, an denen sich die Flamme abhebt; unter unterer Grenze die Punkte, an denen die Flamme zurückschlägt.

Verändert man den Düsenquerschnitt, so erhält man einen im wesentlichen ähnlichen Stabilitätsbereich.

Das Aussehen der Flamme hängt sehr stark von der Stellung im Stabilitätsbereich ab. An der oberen Grenze ist der Kegel spitzer als an der unteren, da ja die normale Verbrennungsgeschwindigkeit  $v_n$  im wesentlichen konstant bleibt. Da an der oberen Grenze die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $v_{St}$  groß ist, so muß der Kegelswinkel  $\alpha$  klein sein, da in erster Annäherung  $v_n = v_{St} \cdot \sin \alpha$  (Abb. 2). Verfolgt man die Grenzlinie an der oberen oder

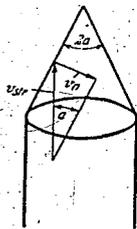


Abb. 2. Ableitung der Beziehung  $v_n = v_{St} \cdot \sin \alpha$

unteren Grenze in Abhängigkeit von der Gasmenge, so sieht man, daß die Kegel stumpfer werden, je mehr man sich der Einschnürung des Stabilitätsbereiches nähert (Abb. 3). Schon weit vor dem

unteren Ende des Stabilitätsbereiches liegt der Kegel völlig flach auf der Düse. In der Nähe der minimalen Gasmenge hängt der Kegel bereits etwas nach innen durch. Bei geringen Drucken sind die

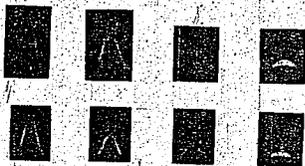


Abb. 3. Abhängigkeit der Form und Größe des Kegels einer  $C_2H_2-O_2$ -Flamme für eine Düse von 4,67 mm Durchmesser von der Gasmenge an der oberen und unteren Grenze des Stabilitätsbereiches. Gasmenge von links nach rechts: 1) 0,6; 2) 1,5 cm<sup>3</sup>/h  $C_2H_2$ ; obere Reihe: obere Grenze des Stabilitätsbereiches; untere Reihe: untere Grenze des Stabilitätsbereiches!

Flammen nur auf größeren Düsen stabil. Die Flamme ist also in ihrer Gesamtausdehnung größer. Das Aussehen des Kegels ist jedoch weitgehend in allen Stabilitätsbereichen ähnlich.

Um zu geringen Drucken zu gelangen, darf man also nicht, wie aus den vorhergehenden Betrachtungen über die Stabilitätsbereiche hervorgeht, zu kleineren Gasmengen übergehen, da man damit nur geringe Druckbereiche überbrücken kann, sondern man muß den Düsenquerschnitt erheblich heraufsetzen und die Gasmenge zumindest konstant lassen, wenn nicht noch vergrößern. In Abb. 1 sehen wir, daß gleiche Gasmengen in verschiedenen Stabilitätsbereichen sich immer weiter der Einschnürung nähern, zu je größeren Düsenquerschnitten, d. h. geringeren Drucken, wir gelangen. Die minimale Gasmenge ist druckabhängig, und zwar nimmt sie mit fallendem Druck stark zu. Das sieht man besonders gut bei den Stabilitätsbereichen der  $C_2H_2-O_2$ -Flamme (Abb. 4). Die minimale Gasmenge nimmt von weniger als 0,1 cm<sup>3</sup> bei geringem Unterdruck bis 1 cm<sup>3</sup> bei einem Druck von etwa 3 Torr zu. Auch hier sind im wesentlichen die Stabilitätsbereiche ähnlich. Nach geringen Drucken zu scheint der stationäre Flamme keine Grenze gesetzt zu sein, wenn man nur die Düse groß genug wählt. Lediglich die Leistungsfähigkeit der vorhandenen Pumpe setzt bisher eine Grenze, da unter 3 Torr das dann erforderliche große Volumen nicht mehr abgesaugt werden konnte.

Will man nun Eigenschaften von Flammen, z. B. die normale Verbrennungsgeschwindigkeit  $v_n$  bei verschiedenen Drucken messen, so muß man in ähnlichen Gebieten des Stabilitätsbereiches den Vergleich anstellen. Uhbelohde hat bei seiner Messung von  $v_n$  den Düsenquerschnitt konstant gelassen und den geringeren Druck dadurch erreicht, daß er die Gasmenge herabsetzte. Er bleibt also in einem und demselben Stabilitätsbereich und ist bei der minimalen Gasmenge an einer Druckgrenze angelangt, die er nicht unterschreiten kann. Hätte er den Düsenquerschnitt variiert, dann wäre er wohl mühelos zu geringeren Drucken heruntergekommen. Die von ihm beobachtete normale Verbrennungsgeschwindigkeit  $v_n$  wird kurz vor Erreichen der unteren Druckgrenze klein, was eben damit zusammenhängt, daß er in der Einschnürung des Stabilitätsbereiches mißt. Somit hat er aber keine vergleichbaren Verhältnisse gemittelt.

Um ein Ergebnis vorwegzunehmen: Die normale Verbrennungsgeschwindigkeit  $v_n$  ist bei der  $C_2H_2-O_2$ -Flamme im Bereich 10 bis 760 Torr konstant; sie beträgt etwa 9 m/s und ist vom Druck unabhängig. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $v_{str}$  ist dementsprechend sehr hoch und erreicht Werte bis 100 m/s. In der Einschnürung des Stabilitätsbereiches liegt der Kegel flach auf der Düse, so daß hier also  $v_{str} \approx v_n$ . Bei der minimalen Gasmenge sinkt aber die mittlere Strömungsgeschwindigkeit zum Teil herab bis auf 2 m/s. Demnach muß die normale Verbrennungsgeschwindigkeit im Bereich der Einschnürung absinken, während, wie die Messung zeigt, sich im ganzen übrigen Bereich ein konstanter Wert einstellt. Will man also z. B. die Gesamtrahlung der  $C_2$ - oder  $CH$ -Moleküle in Abhängigkeit vom Druck messen, oder die Rotationsverteilung dieser Radikale, so muß man immer weit genug im oberen Teile des Stabilitätsbereiches bleiben, um nicht Trugschlüssen über die Druckabhängigkeit zum Opfer zu fallen.

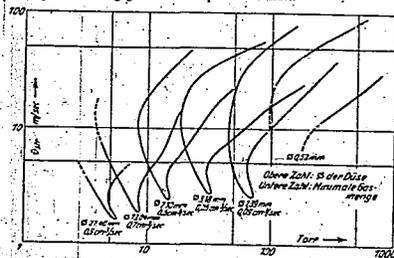


Abb. 4. Stabilitätsbereiche der  $C_2H_2-O_2$ -Flamme für stöchiometrisches Gemisch

Instabile Bereiche

Eine Besonderheit wurde bei einer  $C_2H_2-O_2$ -Argon-Flamme gefunden (Abb. 1 a). Im Stabilitätsbereich der Düse von 21/4 mm Durchmesser findet man einen gestrichelten Bereich eingezeichnet, innerhalb dessen sich der Kegel verändert, und zwar in der Weise, daß der Innenkegel sich plötzlich nach unten zu stumpferen Winkeln einstellt, während gleichzeitig aus demselben Kegel nach oben ein zweiter Kegel herauswächst. Man hat also gewissermaßen einen doppelten Kegel. Diese Erscheinung ist nicht damit zu vergleichen, daß bei sauerstoffarmen Gemischen die Flamme nicht völlig entleuchtet ist und dadurch der Kegel sich mit einer Korona umgibt, da hier ja immer mit stöchiometrischen Gemischen gearbeitet wird. Diese Aufspaltung des Innenkegels ist sehr druckempfindlich, aber jederzeit reproduzierbar. Im Stabilitätsbereich der Düse von 33 mm Durchmesser liegt der Bereich der doppelten Kegel ganz im normalen Bereich eingeschlossen. Diese doppelten Kegel brennen am Ende ihres Bereiches recht stabil; je weiter man in den gestrichelten Bereich hineingelangt, desto instabiler wird die Erscheinung, bis der Kegel anfängt zu flattern, um dann an der innersten Begrenzungslinie zu erlöschen.

Auch die  $C_2H_2$ -Luft-Flamme zeigte bei geringen Drücken diesen Effekt, jedoch nicht die  $C_2H_2-O_2$ -Flamme, trotzdem man hier im Vergleich zu den anderen Flammen mit dem Druck weiter herunterkommt. Diese doppelten Kegel werden sich wohl erst erklären lassen, wenn darüber noch mehr experimentelles Material vorliegt. In Kürze wird hierüber noch eine weitere Mitteilung erscheinen.

Experimentelle Ergebnisse

Messungen der normalen Verbrennungsgeschwindigkeit, der Dicke und des Volumens der Leuchtzone sind bis jetzt erst an der  $C_2H_2-O_2$ -Flamme durchgeführt. Es wurde dabei so vorgegangen, daß die Untersuchungen in jedem Stabilitätsbereich bei vier verschiedenen Gasmengen in den Abstufungen 1:2:4:8 vorgenommen wurden. Diese Gasmengen sind so gewählt, daß erst bei den kleinsten Drücken die kleinsten Gasmengen in die Einschnürung der Stabilitätsbereiche gelangen. Größere Gasmengen konnten nicht genommen werden; da sie bei kleineren Drücken durch die Leistungsfähigkeit der Pumpe und nach hohen Drücken hin durch die dann einsetzende Turbulenz begrenzt werden. Die Flamme wurde vergrößert aufgenommen, und die Kegel wurde unter dem Mikroskop ausgemessen. (Da nun nach Gouy):

\*) Inzwischen gelang es, auch bei normalem Druck Flammen mit doppeltem Kegel zu brennen.

$r_0 = G/F$ , wobei  $G$  das Volumen der zugeführten Gasmenge und  $F$  die Oberfläche des Innenkegels ist, so mußte durch Planimetrieren diese Oberfläche gewonnen werden. Im Unterdruck hat der Innenkegel eine beträchtliche Dicke. Man muß sich nun entscheiden, ob die innere oder die äußere Begrenzungsfläche zur Berechnung von  $r_0$  herangezogen werden soll. Die Unterschiede in der Größe der Flächen sind nämlich erheblich. Folgende Untersuchungen führten dann dazu, die innere Begrenzungsfläche des Kegels zur Berechnung von  $r_0$  zu

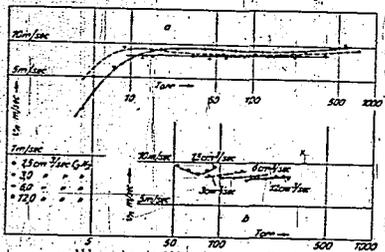


Abb. 1 a)  $r_0$  in Abhängigkeit vom Druck.

benutzen: Definiert man  $v_0$  als die Geschwindigkeit, mit der sich die vordersten Teile der Reaktionszone gegen die Strömungsgeschwindigkeit fortbewegen, dann muß die innere Begrenzungsfläche ausgemessen werden. Will man ferner bei einer Flamme, deren Kegel völlig flach auf der Düse liegt, und deren Kegel eine beträchtliche Dicke im Verhältnis zum Düsendurchmesser aufweist, überhaupt noch von einer normalen Verbrennungsgeschwindigkeit sprechen, so kann man auch nur die innere Begrenzungsfläche des Kegels zur Messung heranziehen.

Die Intensitätsverteilung über den Querschnitt der Leuchtzone ist stetig, sie weist keine Sprünge auf. Der Eindruck einer meßbaren Dicke entsteht durch die Kontrastwahrnehmung des Auges des Beobachters. Eine derartig gemessene Dicke der Leuchtzone ist natürlich nur angenähert ein Maß für die tatsächliche Dicke der Reaktionszone. Diese Fehler dürfen aber dann vernachlässigt werden, wenn nur die recht erhebliche Druckabhängigkeit

\*) Vgl. z. B. H. Maché, Physik der Verbrennungserscheinungen, Leipzig 1918.

\*) Näheres über alle hiermit angeschnittenen Fragen vgl. H. J. Hübner u. H. Klaukova, Ann. d. Phys. (5) 89 (1942), 33; H. J. Hübner, Z. f. Instrüde, 61 (1941), 491; Ophio Nr. 31 (1941) (zusammenfassender Bericht über einen Vortrag am 27. 9. 1941 auf der 49. Gau-tagung der D. Ges. f. angew. Optik, München). Ausführliche Mitteilung erfolgt demnächst in den Ann. d. Phys.

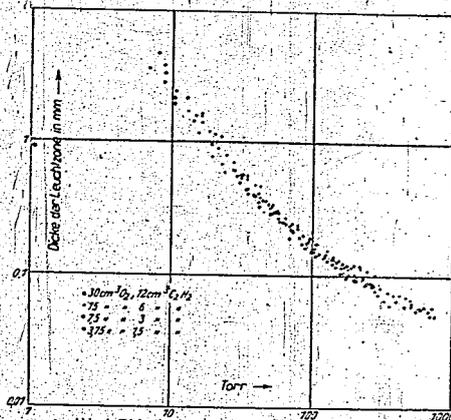


Abb. 6. Dicke der Leuchtzone in Abhängigkeit vom Druck

keit der Kegeldicke interessiert. Auch sind bei kleineren Drücken die Kegel schon so diffus, daß z. B. die Dicke auf höchstens 20 bis 30 v. H. genau gemessen werden kann. In Abb. 5 b sind die so gemessenen Werte von  $v_n$  für eine Düse von 2,06 mm Durchmesser bei den vier Gasgemengen 1,5, 3, 6, 12 cm<sup>3</sup>/s C<sub>2</sub>H<sub>2</sub> aufgetragen. Man sieht, daß die Größe von  $v_n$  sich nur wenig innerhalb des Stabilitätsbereiches ändert. Auch für die verschiedenen Gasgemengen ist nur eine geringe Abhängigkeit vorhanden. Der Anstieg der normalen Verbrennungsgeschwindigkeit bei höheren Drücken für jeweils eine Gasmenge ist damit zu erklären, daß an der unteren Grenze des Stabilitätsbereiches der Kegel fest auf der Düse aufsitzt, während der Kegel kurz vor dem Abheben in einem Abstand über der Düse schwebt. Bei den jeweils höheren Drücken kann also der Düsenrand den Kegel stärker beeinflussen. Um nun einen Vergleich über einen größeren Druckbereich durchführen zu können, wurden die Messungen für eine bestimmte Gasmenge und einen bestimmten Düsenquerschnitt gemittelt. Dies könnte geschehen, da die Messungen immer gleichmäßig über den ganzen Stabilitätsbereich verteilt wurden. Vergleicht man nun diese Mittelwerte (Abb. 5 a), so sieht man, daß die normale Verbrennungsgeschwindigkeit  $v_n$  praktisch vom Druck unabhängig ist. Geringere Gasgemengen geben etwas höhere Werte von  $v_n$ , was aber vermutlich wieder dadurch hervorgerufen wird, daß bei kleineren Gas-

mengen die Kegel flacher sind und daher stärker vom Brennerand beeinflusst werden. Bei der C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>-O<sub>2</sub>-Flamme liegen die Verhältnisse insofern ungünstig, als die Flamme bei höheren Drücken nur auf sehr engen Düsen stabil brennt, so daß hier also eine starke Wechselwirkung zwischen Düsenrand und Flamme stattfindet. Aus der Abb. 5 a ersehen wir, daß erst in den Bereichen ein Abfall der normalen Verbrennungsgeschwindigkeit stattfindet, in denen die Meßpunkte in die Einschnürung der Stabilitätsbereiche gelangen. Man erkennt, wie dementsprechend bei den kleineren Gasgemengen schon frühzeitig dieser Abfall eintritt.

Die Kegeldicke ist innerhalb der Meßfehler von Gasmenge und Düsenquerschnitt unabhängig (Abb. 6). Sie ist an mehreren Stellen eines jeden Kegels gemessen. Diese Werte werden dann gemittelt, da die Einzelbeobachtung bei den diffusen Kegeln recht ungenau ist.

Physikalisch interessant ist auch das Volumen der Leuchtzone (Abb. 7). Dieses Volumen ist, wie nicht anders zu erwarten, direkt der Gasmenge proportional. Es ergibt sich ein Anstieg des Volumens von  $2,5 \times 10^{-2}$  mm<sup>3</sup> bei 760 Torr bis  $7 \times 10^2$  mm<sup>3</sup> bei 4 Torr. Um die Unterschiede einer Flamme bei 760 und 4 Torr zu

7). Dieses Volumen ist, wie nicht anders zu erwarten, direkt der Gasmenge proportional. Es ergibt sich ein Anstieg des Volumens von  $2,5 \times 10^{-2}$  mm<sup>3</sup> bei 760 Torr bis  $7 \times 10^2$  mm<sup>3</sup> bei 4 Torr. Um die Unterschiede einer Flamme bei 760 und 4 Torr zu

Zählentafel I  
Gasmenge 1,5 cm<sup>3</sup>/s C<sub>2</sub>H<sub>2</sub>

Druck	Kegelhöhe	Kegeldicke	Fläche	Volumen	Düsendurchmesser
760 Torr	0,8 mm	0,05 mm	0,3 mm <sup>2</sup>	0,025 mm <sup>3</sup>	0,52 mm
4 Torr	Kegel flach	16 mm	240 mm <sup>2</sup>	7000 mm <sup>3</sup>	21,4 mm

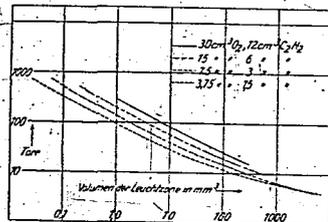


Abb. 7. Volumen der Leuchtzone in Abhängigkeit vom Druck

veranschaulichen, seien die Größenverhältnisse dieser beiden Flammen in Zahlenformel nebeneinander gestellt:

Bemerkenswert ist, daß trotz des großen Spielraumes der Dimensionen  $v_0$  konstant bleibt, sofern

märe an, so kann dieser leicht aus den gemessenen Daten berechnet werden (Abb. 8). Es ergibt sich ein geradliniger Abfall nach kleineren Drucken. Eine Abweichung vom linearen Verlauf ergibt sich erst wieder in den Gebieten, in denen wegen der mangelnden Pumpenleistung in der Einschmürung der Stabilitätsbereiche gearbeitet werden muß.

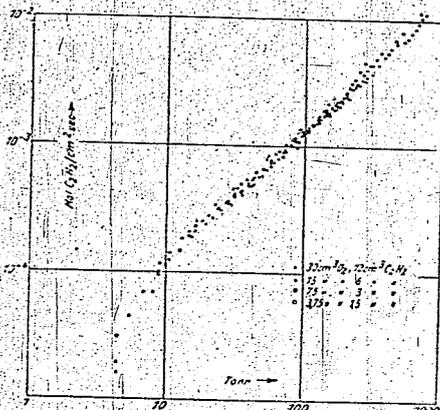


Abb. 8. Umsatz in Mol  $C_2H_2/cm^2$  Kegelfläche

man die Einschmürungen der Stabilitätsbereiche vermeidet.

Sieht man für die Flamme nicht die normale Verbrennungsgeschwindigkeit, sondern den Umsatz, z. B. in Mol  $C_2H_2$  je  $cm^2$  Kegelfläche, als das Pri-

Drücken brennen, nur dann ein richtiges Bild geben, wenn die Lage der Betriebsdaten in den jeweiligen Stabilitätsbereichen in Betracht gezogen wird.

(Eingegangen am 10. Juli 1943)

Zusammenfassung

Zusammenfassend ergibt sich also, daß es bei geeigneter Wahl der physikalischen Bedingungen gelingt, stationäre Flammen bis zu so geringen Drucken zu brennen, daß die mittlere Stoßzeit nicht mehr klein gegen die mittlere Lebensdauer angeregter Zustände ist. Man dürfte also Aussicht haben, über die Frage der Anregung in Flammen nähere Auskunft zu erhalten. Der Vorteil stationärer Flammen gegenüber den bisher fast ausschließlich benutzten kurzzeitigen Explosionen in abgeschlossenen Gefäßen liegt darin, daß der Wandeinfluß weitgehend ausgeschaltet wird und für spektroskopische Untersuchungen größere Intensitäten zur Verfügung stehen. Eine untere Druckgrenze für eine  $C_2H_2-O_2$ -Flamme konnte nicht beobachtet werden. Sie müßte unter 3 Torr liegen. Gleichzeitig wurde gezeigt, daß Vergleiche an Flammen, die bei verschiedenen

... sind und  
... Brenner  
... bei der  $C_2H_2-O_2$   
... Verhältnis  
... sehr  
... daß hier  
... Fl  
... w  
... ab  
... die Ein  
... die  
... auch  
... Leuchtz  
... zu erwa  
... ergibt sich  
...  $10^{-10}$  mm  
... Torr. Um die  
... Torr zu

$H_2$	Dasen- durch- messer
0,025 mm <sup>2</sup>	0,32 mm
0,0025 mm <sup>2</sup>	0,14 mm

$O_2$	$C_2H_2$
16	
15	

TITLE PAGE

3. Das Verhaeltnix von wahrnehmbarer Dicke der Leuchtzone eines Flammenkegels zur wirklichen Leuchtdichteverteilung.

The ratio of the apparent width of the luminous zone of a flame cone to the intensity distribution normal to the zone.

Frame Nos. 282 - 286

## Das Verhältnis von wahrnehmbarer Dicke der Leuchtzone eines Flammenkegels zur wirklichen Leuchtdichteverteilung.

Von H. J. Hübner und H. Kläukens.

Bericht aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

Im Hinblick auf die Bedeutung der Dicke der Leuchtzone des inneren Flammenkegels für die Erforschung des Verbrennungsmechanismus wird die Beziehung zwischen radialer Leuchtdichteverteilung und der Intensitätsverteilung im Bilde eines durchsichtigen leuchtenden Hohlzylinders aufgestellt. Für eine Reihe vorgegebener Leuchtdichteverteilungen werden die entsprechenden Intensitätsverteilungen berechnet und der Eindruck zum Vorhandensein einer Leuchtzone wird auf Grund der verschiedenen Konstruktions erklärt. Modellversuche ergeben, daß die beobachtete Dicke der Leuchtzone von der radialen Leuchtdichteverteilung abhängig und stets kleiner als die wahre ist.

### Inhalt.

1. Einleitung.
2. Berechnung der Intensitätsverteilung.
3. Intensitätsverteilung für vorgegebene Leuchtdichteverteilung (Fig.).
4. Bestimmung der Dicke der Leuchtzone.
5. Zusammenfassung.

### 1. Einleitung.

Die gebräuchlichste Methode zur Bestimmung der Flammengeschwindigkeit ist die Bunsenbrennermethode nach Gouy<sup>1)</sup>. Hierbei erhält man die Flammengeschwindigkeit als Quotienten aus der in der Zeiteinheit zugeführten Gasmenge und der Größe der Brennfläche. Diese wird auf folgende Weise bestimmt: Man nimmt allgemein an, daß die Brennfläche mit dem hell leuchtenden inneren Kegels der Flamme identisch ist. Diesen inneren Kegel sieht der Beobachter als eine leuchtende Fläche, deren Umrißlinie ihm besonders Brennerrohres mit der Koordination eines zylindrischen Brennerrohres mißt man die entsprechenden Rotationskörper und erhält damit die Größe der Brennfläche. Danköhler<sup>2)</sup> hat als erster auch die Dicke der Umrißlinie, von ihm Leuchtzone genannt, gemessen und zu Schlüssen über den Verbrennungsvorgang herangezogen. Dieses Vorgehen setzt jedoch voraus, daß die Helligkeitsverteilung im Bilde des leuchtenden Zentrums weitgehend bis zu einem gewissen Grade entspricht. Die Verfasser haben im folgenden untersucht, wie weit diese Voraussetzung erfüllt ist.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß die beobachtete Intensitätsverteilung nicht mit der radialen Verteilung der Leuchtdichte identisch sein kann: Im Innenraum des Kegels findet keine oder nur eine unvollständige Umsetzung des brennenden Gemisches statt, und daher wird dort kein Licht ausgestrahlt. In der Mantelzone des Kegels hat der Umsatz seinen höchsten Wert erreicht und wird von einer intensiven Lichtemission begleitet. Da Innenraum und Mantelzone durchsichtig sind, so nimmt der Beobachter stets beide gleichzeitig wahr, und daher erscheint ihm der Kegel als Fläche, die in ihrer ganzen Ausdehnung leuchtet, nicht aber nur an ihrer Berandung. Daraus ergeben sich zwei Aufgaben, die wir im folgenden behandeln:

<sup>1)</sup> G. L. Gouy, Ann. Chim. Phys. Bd. 15 (1879), S. 27; ferner H. Mache, Die Physik der Verbrennungsvorgänge, Leipzig 1916, S. 36; H. Brückner, Gastfahen, München und Berlin 1917, S. 120ff.  
<sup>2)</sup> G. Danköhler, Jahrb. 1929 d. deutschen Luftfahrtforschung II, S. 3; Z. Elektrochem. Bd. 45 (1940), S. 601.

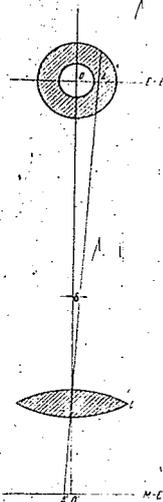


Bild 1. Strahlengang bei der Abbildung eines durchsichtigen selbstleuchtenden Zylinders.

1. Welche Intensitätsverteilung ergibt sich bei einer vorgegebenen radialen Verteilung der Dichte der leuchtenden Zentren (Leuchtdichte)?

2. Wie entsteht die beobachtete Dicke der Leuchtzone?

Da man sich den wirklichen Flammenkegel beliebig genau durch eine Reihe zylindrischer Stücke ersetzt denken kann, genügt es, diese Betrachtung auf eine gedachte zylindrische Flamme (durchsichtigen leuchtenden Hohlzylinder) zu beschränken.

### 2. Berechnung der Intensitätsverteilung.

Bild 1 zeigt den die Abbildung vermittelnden Strahlengang. Die Linse L bilde die Einstellenebene E-E, die die Achse des leuchtenden Hohlzylinders enthält, ideal, d. h. aberrationsfrei, scharf auf die Mattschildebene (Netzhaut) M-E ab. Die Strahlung des inneren Kegels besteht im sichtbaren Spektralbereich im wesentlichen aus den Banden

300283

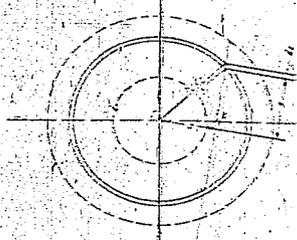


Bild 2. Zur Abbildung der Flamme (2). Grenzen der wahrgenommenen Leuchtzone.

der Brennstoff  $C_1$  und  $H_2$ . Für das  $C_1$  habe Wolfmanst, daß die Abbildung in der Flamme die gleiche ist. Für das  $H_2$  sind die Abbildungen von Funtz gleichfalls der Flamme immer merklich. Abschließend bemerken wir, daß die Intensität proportional dem Produkt aus Leuchtstärke und Zylinderinhalt ist. Die Brennstoffe der Luft, die unverbrannt durchschießen und der Flamme zugehen, wie nahe bei 1 und unterscheiden sich nur wenig voneinander; daher dürfen die abbildenden Strahlen als gerade Näherungen hierzu betrachtet werden. Der Abstand des Strahls  $AA'$  von der optischen Achse sei  $r$  (Bild 2). Dann ist die Entfernung  $O'A'$

$$O'A' = r \sin \alpha$$

wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen der Achse  $OO'$  und dem Strahl  $AA'$  ist. Für geringe Winkel  $\alpha$  d. h. wenn der Durchmesser des Zylinders klein gegen die Brennweite ist, gilt

$$O'A' \approx r \alpha \quad (2a)$$

und

$$O'A' \approx r \alpha \quad (2b)$$

wenn  $f$  der Abbildungsmaßstab ist.

Wir betrachten nun in Bild 2 eine Zone des leuchtenden Hohlzylinders. Die Dicke der leuchtenden Zone in dieser Zone sei  $\Delta r = R_2 - R_1$ . Der Strahl  $AA'$  im Abstand  $r$  von der optischen Achse durch die peripheren Zone der Flamme  $A$  zurück. Es ist

$$r = R_2 \sin \alpha - R_1 \sin \alpha$$

Folglich ist

$$\Delta r = R_2 \sin \alpha - R_1 \sin \alpha$$

und

$$\Delta r = \frac{r}{\sin \alpha} \sin \alpha$$

Die im Bereich eines solchen Strahles übermittelte Energie ist dem Produkt aus der Zahl der leuchtenden Zonen und der durchlaufenden Strahlstärke proportional; folglich ist der Beitrag der betrachteten Zone zur Intensität im Punkte  $A'$

$$dI = 2\pi R_2 \sin \alpha \cdot r \cdot \Delta r$$

Die Leuchtintensität im Punkte  $A'$  ist also

$$I = 2\pi R_2 \sin \alpha \cdot r \cdot \Delta r$$

Hilber, Wolfmanst, Z. Physik, Bd. 101, S. 209, 1937.  
 G. W. Funtz, Dissertation S. 10, 1937.  
 P. Hilber, Z. Physik, Bd. 101, S. 209, 1937.

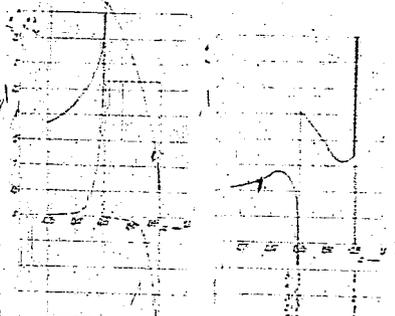


Bild 1a. Intensitätsverteilung im Bild I als Funktion der Entfernung r von der optischen Achse. Bild 1b. Kurve der Wahrscheinlichkeit der Leuchtstärke I als Funktion der Entfernung r von der optischen Achse.

wobei das Integral über alle  $r$  für die  $R_2 \sin \alpha \geq r$  erstreckt werden muß. Nachwort nach  $I$  so, daß für den durch die Zylinderhöhe gebundenen Strahl  $r = 0$  ist

$$I = 2\pi R_2 \sin \alpha \cdot r$$

Es ergibt sich aus dem Ausdruck

$$I = 2\pi R_2 \sin \alpha \cdot r$$

Dieser Ausdruck stellt die Abbildung durch einen Hauptstrahl dar, wobei unter Berücksichtigung von Gl. (1)  $r$  durch die Strecke  $O'A'$  ersetzt werden darf. In der Mathematikselbst findet man an Stelle von  $r$  und  $r$  die Größen  $r_2$  und  $r_1$ .

Tatsächlich erfolgt allerdings die Abbildung nicht durch den Hauptstrahl allein, sondern durch ein Strahlenbündel, dessen Öffnung  $2\alpha$  die  $\alpha$  des Hauptstrahls übersteigt. In der Zentralbedingung korrekter Abbildung, solange man sich nicht mit sehr geringen Werten der leuchtenden Zone bzw. sehr großen Flammendurchmessern befaßt.

3. Intensitätsverteilung für kreisförmige Leuchtlichtverteilungen  $R_1$ .

Für eine Reihe von kreisförmigen Leuchtlichtverteilungen wurde die Intensitätsverteilung im Bild mit Gl. 1 berechnet. Die durch numerische Integration erhaltene Ergebnis ist in den zugehörigen Kurven, Bild 2a bis 2c, wiedergegeben. Die Verteilung der leuchtenden Zonen im Bild hat so gewählt, daß in den Bereichen  $r < 0,5 R_2 \sin \alpha$  und  $r > 0,5 R_2 \sin \alpha$  im Bereich  $0,5 R_2 \sin \alpha < r < R_2 \sin \alpha$  und  $r > R_2 \sin \alpha$  im Bereich  $r > R_2 \sin \alpha$  gilt.

- Für Bild 2a  $R_1 = 0,5 R_2 \sin \alpha$
- •  $5a R_1 = 0,5 R_2 \sin \alpha$
- •  $4a R_1 = 0,5 R_2 \sin \alpha$
- •  $3a R_1 = 0,5 R_2 \sin \alpha$
- •  $2a R_1 = 0,5 R_2 \sin \alpha$
- •  $1a R_1 = 0,5 R_2 \sin \alpha$

Die Kurven sind in den Bildern gestrichelt angezeichnet und zwar wurde die Proportionalitätskonstante so gewählt, daß die Kurven in Bild 2a bis 2c die gleiche Höhe haben.

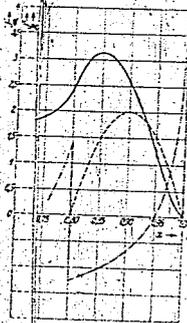


Bild 4a.  
Intensitätsverteilung am  
Bildort  $f(\alpha)$  —  
Leuchtdichteverteilung  
 $S(\alpha)$  —  
für  $S(\alpha) = (1 - 0,8)\alpha(1 - \alpha)$

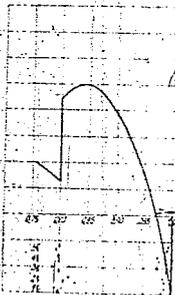


Bild 4b.  
Kurve der letzten Erregung  
für die Intensitätsverteilung  
nach Bild 4a  
Lage der Meßpunkte des  
jeweiligen  
Beobachters 1



Bild 5a.  
Intensitätsverteilung am  
Bildort  $f(\alpha)$  —  
Leuchtdichteverteilung  
 $S(\alpha)$  —  
für  $S(\alpha) = (1 - 0,8)\alpha(1 - \alpha)$

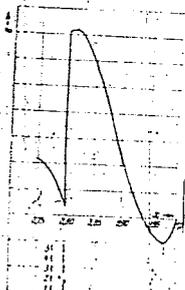


Bild 5b.  
Kurve der letzten Erregung  
für die Intensitätsverteilung  
nach Bild 5a  
Lage der Meßpunkte des  
jeweiligen  
Beobachters 1

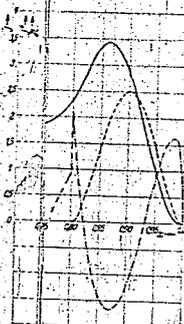


Bild 6a.  
Intensitätsverteilung am  
Bildort  $f(\alpha)$  —  
Leuchtdichteverteilung  
 $S(\alpha)$  —  
für  $S(\alpha) = (1 - 0,8)\alpha(1 - \alpha)$

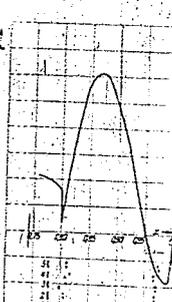


Bild 6b.  
Kurve der letzten Erregung  
für die Intensitätsverteilung  
nach Bild 6a  
Lage der Meßpunkte des  
jeweiligen  
Beobachters 1

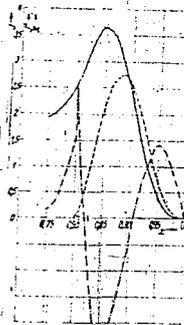


Bild 7a.  
Intensitätsverteilung am  
Bildort  $f(\alpha)$  —  
Leuchtdichteverteilung  
 $S(\alpha)$  —  
für  $S(\alpha) = (1 - 0,8)\alpha(1 - \alpha)$

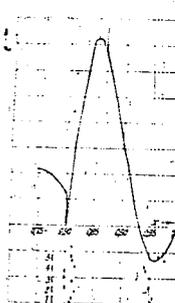


Bild 7b.  
Kurve der letzten Erregung  
für die Intensitätsverteilung  
nach Bild 7a  
Lage der Meßpunkte des  
jeweiligen  
Beobachters 1

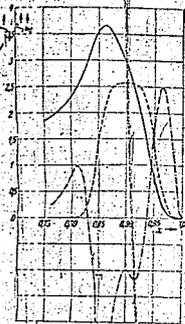


Bild 3a. Intensitätsverteilung am Bildort  $f(x)$  und Leuchtdichteverteilung  $\frac{d^2I}{dx^2}$  für  $\mathfrak{R}(r) \sim 10^{-4}$ .

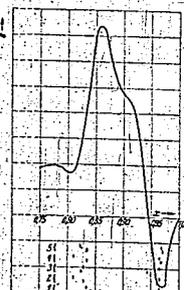


Bild 3b. Kurve der letzten Erregung nach Bild 3a. Lage der Messpunkte des jeweiligen Beobachters.

daß der Wert des Integrals  $\int \mathfrak{R}(r) dr$  für alle Kurven der gleiche ist.

Zu der Wahl der vorstehend angegebenen Funktionen führen folgende Überlegungen: Jede wirkliche Verteilung der Leuchtdichte entspricht einer Funktion, die in einem bestimmten Bereich, z. B.  $0,8 < r < 1,0$  von Null verschieden, an den Rändern des Bereiches aber und außerhalb derselben Null ist. Eine rohe Annäherung ist die Kurve  $\mathfrak{R}(r) = \text{konst.}$ , Bild 3a. Durch Polynome, die für  $r = 0,8$  bzw.  $r = 1,0$  Nullstellen haben, sind bessere Näherungen zu erhalten. Die in Bild 4a bis 7a dargestellten Verteilungsfunktionen sind die einfachsten dieser Polynome; von ihnen treten die Funktionen in Bild 5a und 7a nur auf, wenn eine unsymmetrische Verteilung der Dichte der leuchtenden Zentren vorliegt. Bild 8a endlich zeigt eine Leuchtdichteverteilung, die nach der heutigen Kenntnis des Reaktionsverlaufes durchaus möglich ist.

Die Intensitätsverteilungskurven (ausgezogen) verlaufen durchaus anders als die Verteilung der Leuchtdichte. Sie zeigen alle in Übereinstimmung mit der Beobachtung ein ausgeprägtes Maximum in der Nähe des äußeren Randes, also dort, wo die Funktion  $\mathfrak{R}(r) + 0$  ist. Das Maximum der Intensitätsverteilungskurven ist allerdings bei allen vorliegenden Kurven gegenüber dem Maximum der Leuchtdichte nach dem Zylinderinneren zu verschoben. Da die Kurven aber alle, bis auf die zu  $\mathfrak{R}(r) = \text{konst.}$  gehörende, schlitze sind, d. h. weder Sprünge noch Knicke aufweisen, bedarf es einer näheren Untersuchung folgender noch offener Fragen:

1. Woher erhält der Beobachter den Eindruck eines hellen Streifens (Leuchtzone), dessen Breite meßbar ist?
2. In welcher Beziehung steht die so bestimmte Breite zu der Verteilung der leuchtenden Zentren?

Bestimmung der Dicke der Leuchtzone.

Die Untersuchungen von Mach<sup>1)</sup> und Kühl<sup>2)</sup> über die Kontrastwahrnehmung des menschlichen Auges führen zu dem Ergebnis, daß das Auge Helligkeitsunterschiede im Falle stetiger Intensitätsverteilung  $I = f(x)$  vornehmlich dort wahrnimmt, wo die Kurve der sogenannten letzten

Erregung einen ausgezeichneten Punkt besitzt. Die letzte Erregung bzw. Erregungsgröße  $e$  ist definiert als

$$e = I(x) - k/2 \frac{d^2 I}{dx^2} \quad (\text{Mach'sches Kontrastgesetz}) \quad (3)$$

In unserem Falle ist  $I(x)$  die berechnete Intensität,  $d^2 I/dx^2$  ihre zweite Ableitung nach  $x$  und  $k/2$  ein empirisch zu bestimmender Proportionalitätsfaktor. In Bild 3a bis 8a sind die zweiten Ableitungen  $d^2 I/dx^2$  strichpunktiert eingetragen, die danebenstehenden Bilder 3b bis 8b geben die Kurven der letzten Erregung unter Zugrundelegung eines willkürlich gewählten Faktors  $k/2$  wieder<sup>3)</sup>. Ausgezeichnete Punkte im Sinne der Mach'schen Kontrasttheorie sind Sprungstellen, Wendepunkte und Minima der Erregungsgröße. Die Kurve Bild 3b hat zwei Sprungstellen bei  $x = 0,85$  und  $x = 0,95$ , die Kurve Bild 4b zwei Sprungstellen bei  $x = 0,8$  und  $x = 1,0$ , die Kurve Bild 5b eine Sprungstelle bei  $x = 0,80$  und ein Minimum bei  $x = 0,96$ , die Kurve Bild 6b eine Sprungstelle bei  $x = 0,80$  und ein Minimum bei  $x = 0,99$ , die folgende Kurve Bild 7b eine Sprungstelle bei  $x = 0,80$  und ein Minimum bei  $x = 0,96$ , die Kurve Bild 8b endlich hat zwei Minima bei  $x = 0,80$  und  $x = 0,97$ , außerdem einen Wendepunkt bei  $x = 0,85$ . Da alle diese Kurven zu beiden Seiten des Maximums der Helligkeit mindestens je einen solchen ausgezeichneten Punkt haben, nimmt das Auge einen hellen Streifen definierter Breite wahr. Die Ränder dieses Streifens sind in der Nähe der erwähnten ausgezeichneten Punkte zu erwarten. Damit sind die oben gestellten Fragen grundsätzlich beantwortet, und die Beobachtung der Leuchtzone im inneren Flammenkegel ist verständlich geworden.

Zur quantitativen Untersuchung des Sachverhaltes haben wir mit den von uns berechneten Intensitätsverteilungen Modellversuche durchgeführt und zu diesem Zweck die von Mach<sup>1)</sup> angegebene Zylindermethode verwendet. Auf ein weißes Blatt wurden die Intensitätsverteilungskurven maßstäblich aufgetragen und der oberhalb der Kurve liegende Teil des Papiers geschwärzt. Das Blatt wurde dann zu einem Zylinder zusammengeklebt, der auf eine Trommel geschoben werden konnte. Läßt man diese Trommel mit einer so großen Umlaufzahl rotieren, daß jegliches Flimmern verschwindet, so erblickt das Auge nach dem Talbot'schen Gesetz eine Fläche, auf der die Helligkeitsverteilung der berechneten Intensitätsverteilung entspricht. Wie zu erwarten, sieht man einen hellen Streifen, der sich von seiner Umgebung abhebt. Die Grenzen des Streifens werden durch Beobachtung mit einem schwach ( $\sim 1,4$ fach) vergrößerten Fernrohr bestimmt, das mit einer Okularskala versehen war. Die Messungen wurden von fünf Beobachtern<sup>4)</sup> durchgeführt. Dabei wurden die Zylinder in willkürlicher Reihenfolge von jedem Beobachter je zweimal gemessen. Die erhaltenen Werte sind in Bild 3b bis 8b eingetragen.

Bei fast allen Sprungstellen stimmt die gemessene und berechnete Lage überein. Bei den Minima und den vom Auge offenbar als solche empfundenen Sprungstellen bei  $x = 1,0$  in Bild 4b und bei  $x = 0,8$  in Bild 6b zeigen die gemessenen Werte gegenüber den berechneten eine leichte Verschiebung nach der helleren Seite. Ein Grund für die Abweichung kann darin zu suchen sein, daß der Bild 3b bis 8b zugeordnete willkürliche Faktor  $k/2$  zu klein gewählt wurde. Einer Vergrößerung von  $k/2$  würde eine Verschiebung der berechneten Minima in Richtung auf die beobachteten Grenzstellen entsprechen. Die endliche Größe der Nachausgleichsgröße bewirkt, daß die schwächeren Sprungstellen nicht mehr als solche vom Auge empfunden werden. Aus den Bildern 3b bis 8b ergibt sich also, daß bei einer Leuchtdichteverteilung nach Bild 3a sowohl die innere als

1) E. Mach, Sitzungsber. d. Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Wien Bd. 52 (1866), S. 302; ebenda Bd. 51 (1865), S. 323.  
2) A. Kühl, Physikal. Zeitschr. Bd. 22 (1928), S. 1.  
3) Die Ordinaten in Bild 3b bis 8b tragen keine Bestimmung, da der zur Berechnung von  $e$  notwendige Faktor  $k/2$  unbekannt ist und daher willkürlich angenommen wurde. Die Abbildungen geben also nur ein qualitatives Bild.  
4) E. Mach, ebenda Bd. 52 (1866), S. 323.  
5) Einem Mitarbeiter, die sich für die Messungen zur Verfügung stellten, sie auch an dieser Stelle gedankt.



auch die äußere Grenze der radialen Leuchtdichte-Verteilung bestimmt wird, bei Leuchtdichteverteilungen nach Bild 5a bis 2a nur die innere Grenze, nicht aber die äußere, und bei einer Leuchtdichteverteilung nach Bild 8a weder die äußere noch die innere Grenze.

Zahlentafel 1.

$\mathfrak{R}(r) =$	konst.	$\frac{r-0,81}{(1-r)^2}$	$\frac{r-0,81}{(1-r)^2} + \frac{r-0,81}{(1-r)^2}$	$\frac{r-0,81}{(1-r)^2} + \frac{r-0,81}{(1-r)^2}$	$10^{-2} \cdot (1-r)^2$
Halbwertsbreite	0,1000	0,1414	0,1270	0,1089	0,0945
Gemess. Breite	0,0998	0,1835	0,1615	0,1017	0,1458
Ganze Breite	0,1000	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000

In Zahlentafel 1 sind die Halbwertsbreiten der untersuchten Leuchtdichteverteilungen, d. h. die Strecken, innerhalb deren die Verteilungsfunktionen nur Werte annehmen, die größer oder gleich der Hälfte ihrer Maximalwerte sind, der Mittelwert aus den beobachteten Breiten und die Gesamtbreite, d. h. die Strecken, innerhalb deren die Funktionen definitionsgemäß überhaupt von Null verschieden sind, zusammengestellt. Die gemessenen Breiten der Leuchtzone sind viel der vollen der vorgehenden Verteilung der Leuchtdichte abhängig, sie liegen 10 bis 30% unter den Gesamtbreiten und 15 bis 30% über den Halbwertsbreiten. Bei  $\mathfrak{R}(r) = \text{konst.}$  sind Halbwertsbreite und Gesamtbreite gleich; daher wird dort dieser Wert gemessen. Ein unmittelbarer mathematischer Zusammenhang zwischen den gemessenen Werten und irgendwelchen Eigenschaften der Ausgangsfunktion war nicht aufzufinden. Für exakte Untersuchungen der Leuchtzone, die die wahre Verteilung

der Dichte der leuchtenden Zentren und damit auch die Breite liefern sollen, ist es daher erforderlich, die Intensitätsverteilung photometrisch zu bestimmen und daraus nach der bereits bei Gasentladungen durchgeführten Methode (Hohl\*) die Verteilung der leuchtenden Zentren mit Hilfe der Abel'schen Integralgleichung zu berechnen, ein Vorgehen, auf das die Verfasser\*) bereits früher hingewiesen haben, und dessen Ausführung in Angriff genommen ist.

## 5. Zusammenfassung.

Aufgabe der vorliegenden Arbeit war die Untersuchung der Beziehung zwischen der an inneren Kegeln von Bunsenbrennern beobachteten Breite der Leuchtzone einerseits und der wahren Verteilung der leuchtenden Zentren im Kegel andererseits. Zu diesem Zwecke wurde die Intensitätsverteilung im Bilde eines leuchtenden Hohlzylinders für eine Reihe vorgegebener Leuchtdichteverteilungen berechnet. Es ergab sich, daß die Intensitätsverteilung im Bildort der ursprüngliche Verteilung nicht wiedergibt, aber eindeutig von ihr abhängt.

Dafür wurden auf Grund der Macheschen Kontrasttheorie die Orte der beobachtbaren Bildgrenzen festgestellt und das Ergebnis dieser Überlegungen durch Modellversuche bestätigt.

Daraus ergibt sich, daß die beobachteten Breiten von der vorgehenden Verteilung der Leuchtdichte abhängig sind und zwischen der Gesamtbreite und der Halbwertsbreite derselben liegen.

\*) W. Eichenlaub, Physica I, S. 679, 1934

\*\*) H. Hoffmann, Zeitschr. Phys., Bd. 97 (1935), S. 539.

\*\*\*) H.-J. Höpner und H. Klaukott, z. z. G.

TITLE PAGE

4. Verhalten von trockenem Silbermethyl.  
Behavior of dry silvermethyl.

Frame Nos. 287 - 292

Sonderdruck aus „Zeitschrift für Elektrochemie“ 49, 426–430 (1943).

000287

VERHALTEN VON TROCKENEM SILBERMETHYL

Von *Heinz Theile*.

(Aus dem Institut für Motorenforschung der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.)

000288

Sehr viele chemische Gasreaktionen, vor allem die technisch bedeutungsvollen, verlaufen über freie Radikale. Die Kenntnisse über Radikalreaktionen sind meist indirekt gewonnen; das direkte Studium würde einen erheblichen Fortschritt bedeuten. Dabei ist eine Schwierigkeit, die Radikale unter geeigneten Bedingungen, ohne störende Begleitstoffe zu erhalten. In der vor-

liegenden Arbeit sollte festgestellt werden, ob man die von Semerano und Mitarbeitern<sup>1)</sup> dargestellten

<sup>1)</sup> G. Semerano und L. Riccoboni, *Ztschr. physikal. Chem.* A 188, 203 (1941); *Ber. Deut. chem. Ges.* 74, 1099 (1941); G. Semerano, L. Riccoboni und F. Callegari, *Ber. Deut. chem. Ges.* 74, 1257 (1941); G. Semerano, L. Riccoboni und L. Götz, *Ztschr. Elektrochem.* 47, 454 (1941).

Silberalkyle als Radikalquelle bei tiefen Temperaturen heranziehen kann.

#### Darstellung von trockenem Silbermethyl.

Das Silbermethyl wurde wie bei Semerano und Mitarbeitern bei Trockeneisttemperatur aus methylalkoholischen Lösungen von Silbernitrat und Bleitetramethyl gefällt. Gewöhnlich wurden 100 cm<sup>3</sup> 1/2 mol. Bleitetramethyl-Lösung portionsweise zu 100 cm<sup>3</sup> 1/2 mol. Silbernitrat-Lösung gegeben. Nach Semerano u. Mitarbeitern enthält der Niederschlag bei Silbernitratüberschuß noch AgNO<sub>3</sub>. Aus den Zahlenangaben bei Semerano [Ber. Dtsch. chem. Ges. 74, 1095 (1941)] findet man für das bei uns

in der Lösung vorliegende Verhältnis  $\frac{\text{AgNO}_3}{\text{Pb}(\text{CH}_3)_2} =$   
eine Zusammensetzung des Niederschlags von  
AgNO<sub>3</sub> = 0,8. Wir haben auf folgenden Wegen  
AgCH<sub>3</sub> etwas niedrigere Werte gefunden. Ein vollständig  
ohne Verpuffung zersetztes Pulver (0,186 g) wurde  
mit Wasser geschüttelt und die AgNO<sub>3</sub>-Menge  
sowohl aus dem Gewichtsverlust (wieder getrock-  
netes Pulver = Ag = 0,111 g als auch durch  
Titration mit NaCl bestimmt (0,075 g). Daraus  
folgt für den AgCH<sub>3</sub>-Niederschlag

$$\frac{\text{AgNO}_3}{\text{AgCH}_3} = \frac{0,075}{0,111} \cdot \frac{108}{170} = 0,43.$$

Ein anderes Mal wurde ein 5 Tage alter Niederschlag nach sorgfältigem Trocknen zersetzt und in einem ausgewogenen Kolben 10,3 cm<sup>3</sup> NPT C<sub>2</sub>H<sub>4</sub> als gasförmiges Zersetzungsprodukt aufgefangen. Mit dem zurückbleibenden Ag-AgNO<sub>3</sub>-Gemisch (0,185 g) ergibt sich das Verhältnis von 0,52.

Der Kolben mit dem suspendierten feinkörnigen gelben Silbermethyl wird nach der Fällung für einen oder mehrere Tage in ein großes Dewar-Gefäß mit Trockeneis gestellt. Längeres Stehenlassen ist wegen der Bildung größerer Kristallite günstig, aber schon nach einem Tag kann man den Niederschlag weiter verarbeiten. Die Lösung wird vorsichtig möglichst weitgehend dekantiert. Den Niederschlag gießt man dann mit dem Rest der Lösung auf einen Reinteller, wie sie im chemischen Laboratorium zum Trocknen von Substanzen üblich sind. Der Teller muß natürlich auch Trockeneisttemperatur haben. Zweckmäßig läßt man ihn über Nacht in einem Dewar-Gefäß mit Trockeneis liegen. Nachdem der Alkohol aufgesaugt ist, kratzt man in dem Dewar-Gefäß das schon pulverförmig, lockere Produkt zusammen. Recht bequem kann man dafür einen in flüssige Luft getauchten Schraubenzieher mit Holzgriff benutzen. Die vollständige Trocknung erfolgt in der Hochvakuumapparatur. Durch einen Schliff wird mit Hilfe eines Papiertrichters das Silbermethyl in ein gekühltes Gefäß eingeworfen. Eine kurzzeitige Berührung

mit Luft von Zimmertemperatur schadet dabei nichts; es gelingt, ein noch gelbes Produkt in die Apparatur zu bekommen. Durch zweistündiges Abpumpen mit der Quecksilberpumpe bei -50°C kann man ein vollständig trockenes Silbermethyl erhalten, wie Dampfdruckmessungen zeigen. [Dampfdruck des Methanols bei -50°C etwa 1 mm Hg, während z. B. in einem Versuch nach 2 Stunden 2·10<sup>-3</sup> mm Hg gemessen wurden.] Durch schon bei -50°C langsam einsetzende Zersetzung ist bei dem Trocknen gewöhnlich das Produkt sehr wenig dunkler geworden.

Das auf dem Reinteller getrocknete Silbermethyl löst sich bei -50°C leicht in Methyamin. Bei Zugabe von Methanol fällt es wieder aus, wobei infolge der durch die Abschwärmung bedingte Temperaturerhöhung leicht Zersetzung eintritt. Vielleicht läßt sich die Lösung des reaktionsfähigen AgCH<sub>3</sub> für präparative Zwecke verwenden.

#### Beständigkeit des trockenen Silbermethyls.

Die geschilderte Trocknung im Hochvakuum wurde bei den ersten Versuchen auf einer Glasfritte durchgeführt [Glaskugel von etwa 2,5 cm Durchmesser mit Fritte G 4 der Firma Schott u. Gen.]. Wenn nach erfolgter Trocknung ein Wasserstoffstrom durch die Fritte geleitet wurde, verpuffte das Silbermethyl auch beim vorsichtigen Öffnen des Hahnes unterhalb von -60°C. Da das Gas in einem Kühlrohr gezwungen wurde, die Badtemperatur vor dem Erreichen des Silbermethyls anzunehmen, wird vermutet, daß entweder Silbermethylstäubchen aus den Frittenöffnungen gepreßt wurden und dadurch der Zerfall eingeleitet wurde, oder die Zündung durch elektrische Aufladung des Gasstromes bedingt ist. Klopfen an den Glasrohren so daß sich das Pulver auf der Fritte hin- und herbewegte, führte nicht zur Verpuffung. Trotz der kleinen eingesetzten Menge von etwa 0,3 g Niederschlag führte in einem Fall die Verpuffung zur Zerstörung der Glassapparatur. Jede Verpuffung ist mit einem hellen, schlagartigen Ton verbunden, so daß zunächst vermutet wurde, es sei durch Anschlagen des Quecksilbers im Manometer bedingt. Das Pulver wurde bei der explosionsartigen Zersetzung in dem Glasrohr verteilt und sah grau aus, während bei langsamer Zersetzung ein tief-schwarzes Produkt hinterblieb. Als die Glasfritte durch ein einfaches U-Rohr ersetzt wurde, trat Verpuffung beim Anstellen des Gasstromes nicht mehr ein. Jedoch erfolgte spontane Verpuffung häufig aber nicht regelmäßig auch nach teilweiser Zersetzung, bei langsamem, auf mehrere Stunden ausgedehntem Aufwärmen, meist bei etwa -20°C

<sup>1</sup>) Semerano und Mitarbeiter (L. c.) hatten ihre Produkte abertausendmal und so keine vollständig trockenen Silberalkyle erhalten.

<sup>2</sup>) Nach der Firmenangabe hat die Fritte einen Porendurchmesser von 40 bis 90 μ.

(Einen Überblick gibt Tabelle 1, in der die Daten der Hauptversuche zusammengestellt sind.)

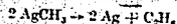
Als gasförmiges Produkt sowohl der langsamen als der explosionsartigen Zersetzung findet man Athan, das durch seine Dampfdruckkurve identifiziert wurde.

An einem 7 Tage alten getrockneten Silbermethyl wurde bei  $-50^{\circ}\text{C}$ . die Athanentwicklung in 2 Stunden aus der Druckzunahme in der Apparatur bestimmt, bei  $-40^{\circ}$  in 1 Stunde, bei  $-32^{\circ}$  in 10 Min.<sup>4)</sup> Aus den ermittelten Zerfallgeschwindigkeiten werden unter Annahme eines Zerfallsgesetzes erster Ordnung (entsprechend dem radioaktiven Zerfall) Halbwertszeiten des Zerfalls errechnet. Sie sind in Tabelle 2 wiedergegeben.

Tabelle 2.  
Halbwertszeit des Silbermethylzerfalls.

Badtemperatur	$-50^{\circ}\text{C}$	$-40^{\circ}\text{C}$	$-32^{\circ}\text{C}$
Halbwertszeit	6 Monate	3,4 Tage	3,0 Stunden
Aktivierungsenergie (kcal)	40	43	

Aus den Meßpunkten erhält man eine Aktivierungsenergie von etwa 40 kcal. Bei der Badtemperatur von  $-32^{\circ}\text{C}$  war die Temperatur des Silbermethyls sicher etwas höher, entsprechend die Aktivierungsenergie zu hoch, da sich das Silbermethyl beim Zerfall erwärmen wird. Wenn man annimmt, daß die Reaktion



mit etwa 20 kcal<sup>5)</sup> exotherm ist und man dem  $\text{AgNO}_3$ -haltigen Silbermethyl eine molare Wärmekapazität von etwa 50 cal zuschreibt<sup>6)</sup>, so kann sich das Produkt ohne Wärmeableitung bei einer Badtemperatur von  $-30^{\circ}\text{C}$  in einer Minute um  $1^{\circ}\text{C}$  erwärmen.

Von einer bestimmten Temperatur ab muß also die Reaktion bei unzureichender Wärmeableitung zur Verpuffung führen. Ganz entsprechend ist der Verlauf folgender Versuchs zu erklären. Zwischen einem Ofen, in dem man Bleitetramethyl in einem Wasserstoffstrom zerfallen lassen konnte, und einem Tellurspiegel, dessen eventueller Abbau durch Radikale mit einer Photoelementanordnung gemessen wurde, befand sich ein U-Rohr, in dem

\*) Tabelle 1. Versuch 18.

\*) Die Reaktion  $2\text{CH}_3 \rightarrow \text{C}_2\text{H}_6$  liefert nach Trenner, Morikawa und Taylor [Journ. chem. Phys. 5, 203 (1932)] etwa 100 kcal; die Athanbildung aus  $\text{AgCH}_3$  hat eine Aktivierungsenergie von 40 kcal. Wenn man annimmt, daß die Athanbildung ohne Ketten vor sich geht und primär freies  $\text{CH}_3$  gebildet wird, ist die Bindungsstärke des  $\text{CH}_3$  im  $\text{AgCH}_3$  gleich oder wahrscheinlicher kleiner als die gemessene Aktivierungsenergie. Man erhält damit die Wärmetönung mindestens  $100 - 2 \cdot 40 = 20$  kcal, wenn man die Gitterenergie von  $\text{AgCH}_3$  und  $\text{Ag}$  als etwa gleich betrachtet. Etwas exaktere calorische Abschätzungen lassen sich nicht anführen, da man für die Verdampfungswärme des  $\text{AgCH}_3$  keine Anhaltspunkte hat.

\*) Molwärme von  $\text{C}_2\text{H}_6 = 9$  cal, von  $\text{AgNO}_3$  24, Atomwärme von  $2\text{Ag} = 12$  cal, Summe  $\approx 50$  cal.

Silbermethyl getrocknet werden konnte. In einem Vorversuch war bei gekühltem U-Rohr die Aufzehrungsgeschwindigkeit des Tellurspiegels gemessen worden. Die übliche Menge Silbermethyl (etwa 0,3 g) wurde bei  $-50^{\circ}\text{C}$  in dem U-Rohr getrocknet. Das Produkt hatte sich dabei kaum verpufft. Dann wurden unter den gleichen Bedingungen wie im Vorversuch im Wasserstoffstrom Methylradikale durch das U-Rohr geleitet. Der Tellurspiegel änderte sich nicht, nach 50 sec verpuffte das Silbermethyl.  $\text{AgCH}_3$  fängt also unter den Versuchsbedingungen  $\text{CH}_3$ -Radikale weg, um nach 50 sec zu verpuffen.

#### Abgabe von Methylradikalen an die Gasphase

Wenn Silbermethyl Radikale an die Gasphase abgeben würde, so wäre eine ideale Radikalquelle, da es dann die Radikale ohne störende Nebenstoffe und bei tiefen Temperaturen liefert. Ob eine solche Abgabe erfolgt, wurde mit einem Selen- oder Tellurspiegel geprüft. Durch die geschilderte Glasröhre bzw. das an ihre Stelle getretene U-Rohr konnte ein Gasstrom im Unterdruck geleitet werden; der freierverdrängte Radikale wegsüßte und 5 cm hinter dem Silbermethyl außerhalb des Bades auf einen Testspiegel traf; dieser wurde bei den ersten Versuchen subjektiv, dann auch mit Photoelement beobachtet. Als Trägergas wurde Wasserstoff gewählt, der bei etwa 3 mm Hg mit Geschwindigkeiten von 500 bis 800 cm/sec durch das Rohr strömte. Bei der Zersetzung von schon vollständig getrockneten Produkten erfolgte keine Änderung des Photostroms. Wenn der Spiegel vor dem Eindringen des Silbermethyls erzeugt war, trat eventuell beim Trocknen im Wasserstoffstrom zwischen  $-50$  und  $-40^{\circ}\text{C}$  eine schwache Aufhellung ein, die jedoch von den kleinen Helligkeitsschwankungen der Lampe nicht sicher zu unterscheiden war. Da der Effekt auf jeden Fall zu klein ist, um für reaktionskinetische Untersuchungen eine Bedeutung zu haben, wurde ihm nicht näher nachgegangen. Ein Testspiegel dürfte aus etwa  $10^{18}$  Atomen bestehen (1 cm<sup>2</sup> Fläche, Schichtdicke 1000 Atome). Die eingesetzte Menge  $\text{AgCH}_3$  von rund  $10^{-2}$  mol hätte etwa  $10^{21}$  Methylradikale liefern können. Da der Spiegel nur wenige cm hinter dem Silbermethyl saß und sicher alle Radikale weggefangen hätte<sup>7)</sup>, beweist seine praktische Unveränderlichkeit, daß weniger als 1% des Methyls als freies Radikal an die Gasphase abgegeben wurde. Bei einer Verpuffung schien eine merklichere Spiegelaufhellung stattgefunden zu haben; dies aber nicht quantitativ angebar ist, weil das Rohr durch Pulver des Zersetzungsproduktes verunreinigt wurde (Tabelle 1, Versuch 8).

Da vielleicht nur die oberflächenschicht des

\*) F. O. Rice and K. K. Rice, The Aliphatic Free Radicals, Baltimore 1935.

Tabelle I. Zersetzungsversuche mit Silbermethyl. (Eingesetzte Menge  $\text{AgCH}_3 + \frac{1}{2} \text{AgNO}_3$  jeweils etwa 0,3 g =  $10^{-2}$  mol.)

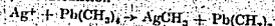
Nr.	Alter (Tage)	Trocknung <sup>1)</sup>	Farbe nach Trocknung	Substanz (Menge)	Spiegel	Dichtezeit (mal in min)	Druck in mm	Temperaturerhöhung in °C	Zellzeit in Std.	Versuch bei	Ausfall	Beobachtung
1	0	3 Stunden - 60° H	braun	—	H <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—
2	2	1 1/2 Stunden - 45° H	dunkelbraun	Se verf	H <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—
3	2	keine Aufheizen	—	Se verf	H <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—
4	1	keine Aufheizen	—	Se verf	H <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—
5	2	beim Aufheizen	—	Se verf	H <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—
6	3	beim Aufheizen	—	Se verf	H <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—
7	4	beim Aufheizen	—	Se verf	H <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—
8	0	2 Stunden - 60° H	hellbraun	—	H <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—
9	1	2 Stunden - 60° H	dunkelbraun	—	H <sub>2</sub>	—	—	—	—	—	—	—
10	1	1 Stunde - 40° H	—	—	Luft	10	-40 bis -21	3	10	Luft	—	—
11	1	2,5 Stunden - 60° H	—	—	Luft	20	-40 bis -21	1	15	Luft	—	—
12	1	1,5 Stunden - 60° H	—	—	Luft	25	-40 bis -24	2	17	Luft	—	—
13	10	1 Stunde - 45° H	braun	—	Luft	30	-60 bis -20	4	—	Luft	Hauptmenge CH <sub>4</sub> , H <sub>2</sub> O CH <sub>2</sub> , CO <sub>2</sub>	—
14	11	3 Stunden - 60° H	braun	—	Luft	30	-40 (konst.)	4	—	Luft	Hauptmenge CH <sub>4</sub> , H <sub>2</sub> O CH <sub>2</sub> , CO <sub>2</sub>	—
15	1	2,5 Stunden - 60° H	—	—	O <sub>2</sub>	10	-30 bis -10	3	—	O <sub>2</sub>	Hauptmenge H <sub>2</sub> , O <sub>2</sub>	Auf HCHO geprüft, ohne Erfolg (< 10 <sup>-4</sup> mol)
16	4	4 Stunden - 60° H	braun	—	O <sub>2</sub>	0	-30 bis -10	1	—	O <sub>2</sub>	Hauptmenge H <sub>2</sub> , O <sub>2</sub>	Auf HCHO geprüft, ohne Erfolg (< 10 <sup>-4</sup> mol). Beim Versuche, vermutlich beim Verpuffen, Spritzen Aufschwächen beobachtet
17	6	2 Stunden - 60° H	braun	—	O <sub>2</sub>	10	-40 bis -20	1,5	—	O <sub>2</sub>	Hauptmenge H <sub>2</sub> , O <sub>2</sub>	Auf HCHO geprüft, ohne Erfolg (< 10 <sup>-4</sup> mol). Beim Versuche, vermutlich beim Verpuffen, Spritzen Aufschwächen beobachtet
18	7	1/2 Stunde - 40° H	hellbraun	—	O <sub>2</sub>	10	-30 bis -10	3	—	O <sub>2</sub>	Hauptmenge H <sub>2</sub> , O <sub>2</sub>	Auf HCHO geprüft, ohne Erfolg (< 10 <sup>-4</sup> mol). Beim Versuche, vermutlich beim Verpuffen, Spritzen Aufschwächen beobachtet
19	7	3 Stunden - 60° H	—	—	Luft	30	-60 bis -20	1,5	—	Luft	Hauptmenge CH <sub>4</sub>	—

1) H = Trocknung im Hochvakuum, G = Trocknung im Gasstrom wie unter Spalte 5 bis 8.  
 2) ve = Spiegel vor Einfließen des  $\text{AgCH}_3$ , erzeugt, vt = nach Einfließen des  $\text{AgCH}_3$ , vor Trocknen des  $\text{AgCH}_3$ , erzeugt, nt = nach dem Trocknen erzeugt.

\*) = Aufschling innerhalb der Schwankung der Leuchtintensität, die Zahlen geben die bei Verpuffung erreichte Temperatur des  $\text{AgCH}_3$ , bei der die Beobachtung gemacht wurde.  
 1)  $\text{C}_2\text{H}_2$  und  $\text{CO}_2$  in gleicher Gasabmessung.

werden konnte. In einem  
 Ableiten U-Rohr die Auf-  
 Tellerspiegels gemessen  
 unge Silbermethyl (etwa  
 dem U-Fohr getrocknet,  
 dabei kaum verflüchtigt  
 gleichen Bedingungen wie  
 toffstrom Methylradikale  
 Der Tellerspiegel ver-  
 sec verpuffte das Silber-  
 so unter den Vorzeichen  
 Radikale  
 Radikale  
 Radikale ohne störende  
 Temperaturen lieferte  
 folgt, wurde mit einem  
 gerührt. Durch die ge-  
 das an ihre Stelle ge-  
 in Gasstrom im Unter-  
 freiverdende Radikale  
 inter dem Silbermethyl  
 einen Testspiegel traf,  
 Verändern subjektiv  
 beobachtet. Als  
 stoff gewählte, der bei etwa  
 drigen von 600 bis  
 strömte. Bei der Zer-  
 und getrockneten Pro-  
 erung des Photostroms  
 Eindringen des Silber-  
 eventuell beim Trocknen  
 - 50 und - 40° C  
 ein, die jedoch von den  
 ungen der Lampe nicht  
 ar. Da der Effekt auf  
 für reaktionskinetische  
 utung zu haben, würde  
 ungen. Ein Testspiegel  
 omen bestehen (1 cm  
 Atome). Die eingesetzte  
 10<sup>-2</sup> mol hätte etwa  
 können. Da der Spiegel  
 lang  
 erthe  
 Radik  
 die  
 ersetzungs-  
 (Versuch 8).  
 le  
 Oberflächenschicht des  
 Noe, The Aliphatic Free

Silbermethyls Methylradikale abgibt, wurde versucht, die Reaktion



auf andere Weise für die Radikalgewinnung nutzbar zu machen. Mittels eines Schlifflies wurde ein poröses Steatitrohr konzentrisch in einem etwas weiteren Glasrohr gehalten. Das Steatitrohr wurde mit methyalkoholischer Silbernitratlösung getränkt und im Hochvakuum getrocknet. In einem Wasserstoffstrom von etwa 3 mm Hg wurde eine geringe Bleitetramethylmenge an dem Silbernitrat vorbeigespült. Ein unmittelbar hinter dem Steatitrohr aufgedampfter Tellurspiegel zeigte keine Veränderung. Als das Rohr in der Silbernitratlösung aufgelegt wurde, trat erst über 100°C eine Aufhellung des Spiegels ein, als sich ein Zerfall des Bleitetramethyls durch einen dunklen Beschlag an ihm am Glasrohr kundtat, so daß also die obige Reaktion nicht als Radikalquelle angesehen werden kann.

#### Zerfall von Silbermethyl in Gegenwart von Sauerstoff.

Wenn Silbermethyl wie oben beschrieben in der Hochvakuumapparatur getrocknet wird, dann aber anstatt des Wasserstoffs trockene und kohlenstofffreie Luft oder reiner Sauerstoff übergeleitet wird<sup>1)</sup>, so findet man als gasförmiges Produkt in wechselnden Mengen  $\text{C}_2\text{H}_4$  mit  $\text{CO}_2$ , wie durch Aufnahme der Dampfdruckkurve und durch Absorption mit KOH festgestellt wurde. Daneben wird Wasser gefunden. Die ausgeföhrten Zersetzungsprodukte wurden auch auf Formaldehyd<sup>2)</sup> geprüft, indem sie über einigen  $\text{cm}^3$   $\text{H}_2\text{O}$  kondensiert wurden und das Wasser nach dem Auftauen mit Schiff'schem Reagens untersucht wurde. Es trat keine Reaktion ein, so daß sicher weniger als 10<sup>-4</sup> Mol HCHO aufgefangen waren, das ist weniger als 1% der Menge, die sich nach der Gleichung  $\text{CH}_3 + \text{O}_2 \rightarrow \text{HCHO} + \text{OH}$  theoretisch hätte bilden können.

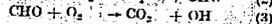
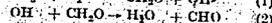
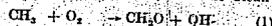
Während gewöhnlich nur von Zeit zu Zeit kontrolliert wurde, ob das Silbermethyl verpufft war, wurde in einem Fall die Verpuffung im  $\text{O}_2$ -Strom direkt beobachtet. Sie war mit einer intensiven, gelben Leuchterscheinung verbunden.

Wenn in Methanol-suspendiertes Silbermethyl unter Durchleitung von Sauerstoff bei etwa -30°C zersetzt wurde, so fand man in dem aufgefungenen Gas einmal 74, ein anderes Mal 80% der theoretisch möglichen Äthanmenge.

Auf Grund der Versuchsergebnisse gewinnt man von der Zersetzung des Silbermethyls folgendes Bild: Die Methylradikale kombinieren vor dem

<sup>1)</sup> Damit der  $\text{O}_2$  hinreichend schnell zur Kornoberfläche diffundieren kann, wurde bei Drucken von einigen cm Hg gearbeitet. Die Produkte wurden ausgeföhrt.

Übertritt in die Gasphase zu Äthan. Von der Oberfläche werden vielleicht einige freie Radikale abgegeben; bei Verpuffung könnten größere Radikalmengen in Freiheit gesetzt werden. Die beachtete  $\text{CO}_2$ -Bildung bei der Zersetzung im  $\text{O}_2$ -Strom und das gleichzeitige Fehlen von  $\text{CH}_2\text{O}$  wäre vielleicht dadurch zu verstehen, daß die Reaktionen<sup>3)</sup>



unmittelbar hintereinander in der adsorbierten Phase ablaufen. Das nach (1) gebildete  $\text{CH}_2\text{O}$  kann sich daher nicht so schnell vom OH entfernen wie in der Gasphase (wo  $\text{CH}_2\text{O}$ -Bildung nachgewiesen ist), und reagiert sofort, eventuell nach (2) weiter. Das dabei gebildete CHO-Radikal, höchstwahrscheinlich ebenfalls im adsorbierenden Zustand wird aber wieder von  $\text{O}_2$  angegriffen und  $\text{CO}_2$  gebildet. Reaktion (3) ist der Reaktion (1) wohl analog und dürfte wie diese eine kleine Aktivierungswärme haben.

Für Reaktion (1) in der Gasphase geben Damköhler und Egger<sup>3)</sup> auf Grund der Versuche von Bates und Spruce 3 kcal Aktivierungswärme an und Tiggelen (l. c.)<sup>4)</sup> nach eigenen Versuchen 1,7 kcal.

#### Zusammenfassung.

Trockenes Silbermethyl läßt sich gewinnen, indem man den in Methanol gefällten und dekantierten Niederschlag auf dem Tonteller trocknet und den Rest des Lösungsmittels im Hochvakuum bei etwa -30°C abdampft.

Das Silbermethyl beginnt sich bei -50°C zu zersetzen und verpufft ohne äußeren Anlaß häufig, in vielen Fällen nach teilweiser Zersetzung erst bei -20°C. Bei der langsamen wie bei der explosionsartigen Zersetzung bildet sich Äthan. Bei der langsamen Zersetzung scheint höchstens die Oberflächenschicht Radikale abzugeben; bei der Verpuffung treten vielleicht größere Radikalmengen auf.

In Gegenwart von Sauerstoff entsteht neben Äthan auch Kohlendioxyd und Wasser, während Formaldehyd nicht nachgewiesen werden konnte.

Herrn Dr. phil. habil. G. Damköhler danke ich für die Anregung zu der Arbeit und das ihr entgegengebrachte Interesse.

<sup>1)</sup> Sie wurden jüngst von A. v. Tiggelen für die Gasphase diskutiert [Ann. Mines Belg. 42, 773 (1941)].

<sup>2)</sup> G. Damköhler und W. Egger, Ztschr. physikal. Chem. B 64, 167 (1942).

(Eingegangen am 19. April 1943.)

TITLE PAGE

IV. Papers by Hans Pfrim.

1. Beitrag zur Theorie der Waermeleitung bei periodisch veraenderlichen (quasistationaeren) Temperaturfeldern.  
Contribution to the theory of heatconduction in periodically changing (quasistationary) temperature fields.

Frames Nos. 293 - 323

Überreicht von Verfasser

000293

**Beitrag zur Theorie der Wärme-  
leitung bei periodisch veränderlichen  
(quasistationären) Temperaturfeldern**

Von der Technischen Hochschule „Fridericiana“ Karlsruhe  
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

genehmigte

**Dissertation**

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Hans Pfrlem

Tag der Promotion: 26. November 1934

---

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A. G., Würzburg  
1935

Herrn Dr.-Ing. habil. F. Schmidt  
vom Verf. überreicht.

900094

1. Einführung und nähere Betrachtung der Lösung für den einseitig unendlich ausgedehnten Körper. Bei der mathematischen Behandlung von Wärmeleitungsproblemen bildet vielfach die Ermittlung geeigneter Funktionen, die der Differentialgleichung der Wärmeleitung genügen und den vorgeschriebenen Randbedingungen angepaßt werden können, die Hauptschwierigkeit.

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung lautet allgemein

$$a \Delta t = \frac{dt}{dt}$$

Dabei bedeutet:

$t$  = Zeit,

$T$  = Temperatur an beliebiger Stelle zu beliebiger Zeit,

$\Delta$  = Laplacescher Operator, der sich z. B. für rechtwinklige Koordinaten  $x, y, z$  ergibt zu

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$  = Temperaturleitzahl des Stoffes,

$\lambda$  = Wärmeleitzahl des Stoffes,

$c$  = spezifische Wärme des Stoffes,

$\rho$  = spezifisches Gewicht des Stoffes.

Es ist dies (bei Voraussetzung temperaturunabhängiger Stoffeigenschaften) eine partielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine bestimmte Lösung kann somit als Summe von partikulären Integralen dargestellt werden. Daher kann auch ein allgemeines Temperaturfeld stets zusammengesetzt werden aus einem stationären, einem quasistationären und einem nichtstationären Feld, wobei man jeden dieser Anteile für sich allein betrachten darf. Nachfolgend werden nur quasistationäre Temperaturfelder behandelt, d. h. es werden nur diejenigen periodisch wiederkehrenden Zustände betrachtet, die sich theoretisch erst nach unendlich langer Zeit einstellen würden. In den meisten Fällen ist dies aber für die praktische Anwendung keine wesentliche Beschränkung, weil schon nach relativ kurzer Zeit eine periodisch veränderliche Temperaturverteilung besteht, deren Abweichung vom endgültigen Zustand innerhalb der erzielbaren Meßgenauigkeit liegt.

Über den Inhalt dieser Arbeit würde auf der Wärmetagung des VDI am 23. Oktober 1934 in Leipzig auszugsweise berichtet.

# ABSTRACT

Method of measuring the temperature of a substance...

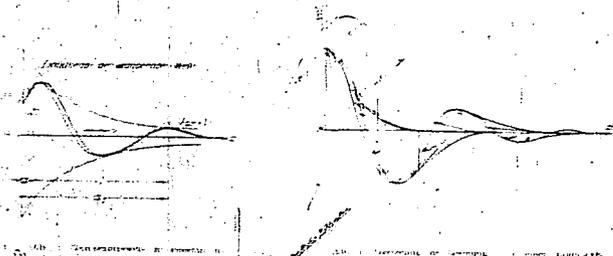
It is well known that the temperature of a substance is not the same as the temperature of the medium in which it is placed. This is because the temperature of the substance is determined by the distribution of energy in the substance, and the temperature of the medium is determined by the distribution of energy in the medium. The temperature of the substance is therefore a function of the distribution of energy in the substance, and the temperature of the medium is a function of the distribution of energy in the medium.

The method of measuring the temperature of a substance is therefore a function of the distribution of energy in the substance. This method is based on the fact that the temperature of a substance is a function of the distribution of energy in the substance, and the temperature of the medium is a function of the distribution of energy in the medium.

The method of measuring the temperature of a substance is therefore a function of the distribution of energy in the substance. This method is based on the fact that the temperature of a substance is a function of the distribution of energy in the substance, and the temperature of the medium is a function of the distribution of energy in the medium.

The method of measuring the temperature of a substance is therefore a function of the distribution of energy in the substance. This method is based on the fact that the temperature of a substance is a function of the distribution of energy in the substance, and the temperature of the medium is a function of the distribution of energy in the medium.

The method of measuring the temperature of a substance is therefore a function of the distribution of energy in the substance. This method is based on the fact that the temperature of a substance is a function of the distribution of energy in the substance, and the temperature of the medium is a function of the distribution of energy in the medium.



The graph shows the relationship between temperature and energy distribution. The x-axis is labeled 'Energy' and the y-axis is labeled 'Temperature'. The graph shows a curve that rises to a peak and then falls, with a dashed line indicating a theoretical or reference curve. The curve is labeled 'Temperature of substance' and 'Temperature of medium'.

This method of measuring the temperature of a substance is based on the fact that the temperature of a substance is a function of the distribution of energy in the substance, and the temperature of the medium is a function of the distribution of energy in the medium.

Die Lösung ist nach dem Ansatz der Formel ...

u = a + b \* x + c \* x^2 + d \* x^3

Daher ergibt sich die Fortleitungsbeschleunigung ...

v = u / lambda

Veränderung und Mittenfrequenz ...

Die Verteilung zweier ...

Die Größe der ...

Die Verteilung ...

Dieser ...

Diese ...

Die ...

Die ...





300299

2. Interferenz von Grenzwellen beim Wärmeleitungsproblem der Platte. (Vgl. Abb. 2) An den beiden Oberflächen einer unbegrenzten ebenen Platte von der Dicke  $2a$  sind  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$  vorgegebene, periodische Temperaturerregungen, die der linken Seite  $x=0$  in der Phase  $\omega t$  und der rechten Seite  $x=2a$  in der Phase  $\omega t + \delta$  entsprechen. Die Aufgabe ist es, die Temperaturverteilung in der Platte zu bestimmen.

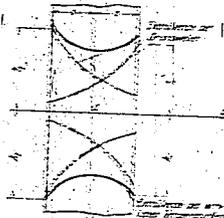


Abb. 2 Verlauf der Temperaturerregung  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$  an den beiden Oberflächen der Platte. Die Kurve  $\vartheta_0$  ist die Erregung an der linken Seite  $x=0$ , die Kurve  $\vartheta_1$  die Erregung an der rechten Seite  $x=2a$ . Die Phaseverschiebung zwischen den Erregungen ist  $\delta$ .

Bevor diese Aufgabe gelöst wird, wird zunächst die allgemeine Lösung der Wärmeleitungs-Gleichung für periodische Erregungen an beiden Oberflächen der Platte bestimmt. Diese lautet:

Die verallgemeinerte Temperaturerregung in der Platte  $\vartheta(x,t)$  setzt sich aus zwei Teilen zusammen, die an den Oberflächen  $x=0$  und  $x=2a$  vorgegebene, periodische Erregungen  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$  entsprechen. Die allgemeine Lösung der Wärmeleitungs-Gleichung für periodische Erregungen an beiden Oberflächen der Platte lautet:

Diese Gleichung besteht aus zwei Partialdifferentialgleichungen, die die Wärmeleitungs-Gleichung der Platte darstellen und die durch die vorgegebenen Randbedingungen an den Plattenoberflächen  $x=0$  und  $x=2a$  bestimmt werden.

In jeder von diesen zwei Bedingungen treten zwei periodische Schwingungen von gleicher Amplitude  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$  auf, die sich durch die Wärmeleitungs-Gleichung der Platte verbinden. Die Amplituden  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$  sind durch die vorgegebenen Randbedingungen an den Plattenoberflächen  $x=0$  und  $x=2a$  bestimmt.

Die Randbedingungen an den Plattenoberflächen  $x=0$  und  $x=2a$  sind durch die vorgegebenen Temperaturerregungen  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$  bestimmt. Die allgemeine Lösung der Wärmeleitungs-Gleichung für periodische Erregungen an beiden Oberflächen der Platte lautet:

und daraus ergeben sich nach Größe und Phase

$$T_1 = \frac{2T_0 e^{i(\omega t + \pi)} - T_0}{e^{2i(\omega z - \pi)} - e^{-2i(\omega z - \pi)}} \quad (9)$$

$$T_2 = \frac{2T_0 e^{i(\omega t + \pi)} - T_0}{e^{2i(\omega z - \pi)} - e^{-2i(\omega z - \pi)}} \quad (9a)$$

Für immer dicker werdende Platte (bzw. sehr hohe Schwingungszahl oder sehr kleine Temperaturleitzahl) ergibt sich als Grenzwert, wie zu erwarten ist,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T_1 = T_0.$$

Einen zweiten Sonderfall erhält man aus dem Vorangehenden durch folgende Vorschrift: An der rechten Plattenseite soll die Oberflächentemperatur stets Null sein, während sie sich an der linken Oberfläche harmonisch ändert. Praktisch ist dies vorstellbar bei sehr gutem Wärmeübergang auf der rechten Seite der Platte. Aus den Gleichungen (9) und (9a) erhält man jetzt

$$T_1 = \frac{2T_0 e^{i(\omega t + \pi)} - T_0}{e^{2i(\omega z - \pi)} - e^{-2i(\omega z - \pi)}} \quad \text{also} \quad T_2 = -T_0 e^{-2i(\omega z - \pi)}$$

$$T_2 = \frac{2T_0 e^{i(\omega t + \pi)} - T_0}{e^{2i(\omega z - \pi)} - e^{-2i(\omega z - \pi)}} \quad = T_0 e^{-2i(\omega z - \pi)}$$

d. h. die Amplituden der zwei Grundschwingungen an der rechten Plattenseite müssen gleich, ihre Phasenwinkel aber um  $\pi$  verschieden sein. Dadurch löschen sie sich in jedem Augenblick gegenseitig aus und die Temperatur bleibt hier stets unveränderlich.

Die Gleichung für das Temperaturfeld lautet dann

$$T = T_0 e^{i(\omega t + \pi)} [e^{-\omega(z-x)} - e^{-\omega(z+x)}] \quad \text{für } z \geq x \geq -s.$$

Entsprechend kann man eine Gleichung aufstellen für vertauschte Oberflächenbedingungen:

$$T = T_0 e^{i(\omega t + \pi)} [e^{-\omega(s-x)} - e^{-\omega(s+x)}] \quad \text{für } s \geq x \geq -s.$$

Setzt man noch  $\omega s = \omega_0$  und addiert die beiden Ausdrücke  $T = T_1 - T_2$ , so erhält man die Lösung für den völlig unsymmetrischen Fall  $\theta_1 = \omega_0$ ,  $\theta_2 = A$ . In der Form

$$T = \frac{T_0 e^{i(\omega t + \pi)}}{2} \left[ \frac{e^{-\omega(z-x)} - e^{-\omega(z+x)} - e^{-\omega_0(s-x)} + e^{-\omega_0(s+x)}}{e^{-\omega(z-x)} - e^{-\omega(z+x)} - e^{-\omega_0(s-x)} + e^{-\omega_0(s+x)}} \right]$$

Hierbei lassen sich die Amplituden und Phasen der Grundwellen besonders leicht anpassen, da an den Oberflächen jeweils  $\theta_1$  oder  $\theta_2$  verschwindet. Für die linke Begrenzungsfläche  $x = -s$  der Platte gilt dann beispielsweise als Bedingungsgleichung:

$$T_1 = T_0 e^{i(\omega t + \pi)} [1 - e^{-2i(\omega s + \pi)}] = A_1 e^{i(\omega t + \pi)}$$

Das Amplitudenverhältnis wird also

$$\frac{A_1}{T_0} = e^{i(\omega t + \pi)} [1 - e^{-2i(\omega s + \pi)}] \quad (11)$$

Bei Darstellung dieses Ausdruckes in der Gaußschen Zahlenebene erhält man das Diagramm von Abb. 4, in welchem die den Grundwellen entsprechenden Vektoren künftig als Grundvektoren bezeichnet werden.

Man trägt zunächst die beiden Summanden in der eckigen Klammer von (11) auf (wobei man die Richtung des Grundvektors  $T$  beliebig annehmen kann) und findet so  $(A_1/T_0)$ . Da dieser Quotient nur reell sein kann, ist damit die Richtung der Achse der reellen Zahlen festgelegt. Der Winkel zwischen  $(A_1/T_0)$  und dem Grundvektor  $T$

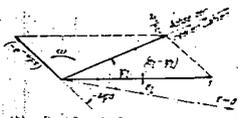


Abb. 4. Darstellung des Quotienten  $A_1/T_0$  in der Gaußschen Zahlenebene zum Zweck der rechnerischen Ermittlung der Oberflächenbedingungen bei der quasistationären Platten.

000301

entspricht dann dem Exponentialglied vor der Klammer. Da  $\nu$  durch die Randbedingung vorgegeben ist, findet man die Richtung  $\tau = 0$ , indem man  $\nu$  von der Achse der reellen Zahlen aus rückwärts anträgt. Damit erhält man auch den Phasenwinkel  $\epsilon$  der (Grundwellen). Denkt man sich das ganze Diagramm  $z = 0$  um den Ursprung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  umlaufend, so ergibt die Projektion der Strecke  $\omega \Delta t / \nu$  auf die festgehaltene Gerade  $\tau = 0$  die zeitlich veränderliche Temperatur an der linken Oberfläche für die Einheitsamplitude der Temperaturgrundgröße.

Ein ganz entsprechendes Diagramm erhält man für die rechte Oberfläche. Damit ist in allen Fällen ein einfaches graphisches Verfahren zur Bestimmung der Randbedingungen gegeben.

Rechnerisch erhält man das Amplitudenverhältnis aus

$$\frac{|\theta_1|}{|\theta_2|} = \frac{1 - e^{-2\epsilon}}{1 - e^{-2\epsilon} \cos 2\varphi}$$

und den Phasenwinkel  $\epsilon_2$  aus

$$\tan(\epsilon_2 - \epsilon_1) = \frac{e^{-2\epsilon} \sin 2\varphi}{1 - e^{-2\epsilon} \cos 2\varphi}$$

Beide Beziehungen sind elementar aus dem Diagramm abzulesen.

Den einfachsten Sonderfall erhält man, wenn die Temperaturen beider Oberflächen von gleicher Frequenz, Amplitude und Phase sind, also  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$  und  $\epsilon_2 - \epsilon_1 = 0$ . Aus Symmetriegründen muß dann sein

$$T_1 = T_2 = T \quad \text{und} \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$$

Die Gleichung des Temperaturfeldes lautet dann

$$T = T_0 + \frac{1}{2} (e^{-\nu x} + e^{-\nu (2l-x)}) \cos(\omega t - \nu x) \quad (12)$$

Dabei ist  $A_1$  die wirklich meßbare Temperaturamplitude an der Stelle  $x$  und  $\nu$  der wirklich meßbare Phasenwinkel an der Stelle  $x$ . Die Klammernausdrücke laßt sich in der gewöhnlichen Zahlenschrift darstellen, wie in Abb. 3. Man trägt an die beliebige Richtung  $\tau = 0$  die Vektoren  $\nu$  für beliebige Stellen  $x$  an. Ihre Endpunkte liegen dann auf dem Kreisbogen  $K$  einer logarithmischen Spirale, das Zentrum ist durch die Scheitel des Winkels  $2\epsilon$  des

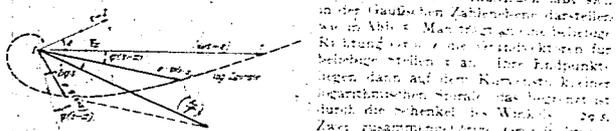


Abb. 3. Darstellung der Gleichung (12) in der gewöhnlichen Zahlenschrift zum Zweck der anschaulichen Bestimmung des Temperaturfeldes in einer planparallelen Platte, in deren Oberflächen harmonische Temperaturverläufe eintreten werden.

Zwei zusammengehörige Vektoren  $\nu$  schneiden sich stets genau bei einem Punkt mit den Endlagen  $\tau = 0$ . Die Projektion des umlaufenden resultierenden Vektors  $\nu$  auf die Richtung  $\tau = 0$  liefert die Temperatur zu beliebiger Zeit  $t$  an der gewünschten Stelle  $x$ . Das Diagramm läßt sich sinngemäß auch auf das unsymmetrische Problem übertragen. Man erhält dann nur an Stelle der gemeinsamen logarithmischen Spirale je zwei getrennt liegende.

Die vorliegende völlig symmetrische Aufgabe wurde schon von Grober-Erk<sup>1</sup> behandelt. Die Lösung lautet dort mit den hier verwendeten Zeichen

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \left[ \frac{|\theta_1| e^{-\nu x} + |\theta_2| e^{-\nu (2l-x)}}{1 - e^{-2\epsilon}} \right] \cos(\omega t - \nu x - \epsilon) \quad (13)$$

und den Abkürzungen

$$|\theta_1| = \frac{2\epsilon \cos \epsilon}{\sin 2\epsilon} \quad \text{und} \quad |\theta_2| = \frac{2\epsilon \sin \epsilon}{\sin 2\epsilon}$$

Man kann nachweisen, daß diese Lösung mit unserer Lösung (12) übereinstimmt. Grober-Erk, a. O. S. 11 bis 12.

Ein Vergleich der Entwicklungen beider Ergebnisse zeigt besonders klar, wie überlegen die hier eingeschlagene Wege. Während die frühere Lösung eine weitere System umfassende Ableitung erfordert, kann die Lösung hier unmittelbar abgelesen werden. Dabei bietet ihre physikalische Anschaulichkeit überdies noch die Möglichkeit einer einfachen mathematischen Auswertung (Abb. 3) abschließend mit 2.1) die folgenden Sagen

Das Temperaturfeld im Inneren einer planparallelen Platte, deren Oberflächen-temperaturen beliebig periodisch veränderlich sind, kann man sich durch folgende Überlagerung von entsprechend bestimmten Grundwellen vorstellen, welche von beiden Oberflächen ausgehend in die Platte gedrungen.

3. Reflexion von Grundwellen an der Grenzfläche zweier Stoffe. Aufg. 2. An eine planparallele Platte von der Dicke  $l$  schließt sich einseitig ein unendlich ausgedehnter Körper aus anderem Stoff an (Abb. 6). Auf der freien Plattenoberfläche werden harmonisch veränderliche Temperaturerregungen erzeugen, die in jedem Punkt derselben stets von gleicher Amplitude  $A$ , Phase  $\psi$  und Frequenz  $\omega$  sind. Gesucht wird das Temperaturfeld im beiden Stoffen, wenn an der Grenzfläche keine Übergangswärme besteht.

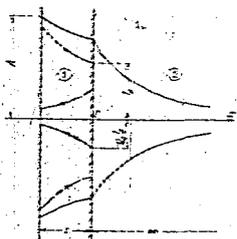


Abb. 6. Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 1 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 2 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 3 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 4 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 5 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 6 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 7 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 8 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 9 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 10 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 11 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 12 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 13 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 14 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 15 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 16 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 17 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 18 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 19 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 20 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 21 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 22 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 23 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 24 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 25 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 26 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 27 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 28 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 29 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 30 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 31 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 32 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 33 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 34 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 35 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 36 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 37 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 38 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 39 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 40 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 41 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 42 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 43 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 44 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 45 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 46 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 47 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 48 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 49 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 50 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 51 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 52 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 53 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 54 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 55 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 56 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 57 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 58 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 59 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 60 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 61 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 62 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 63 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 64 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 65 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 66 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 67 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 68 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 69 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 70 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 71 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 72 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 73 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 74 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 75 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 76 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 77 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 78 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 79 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 80 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 81 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 82 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 83 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 84 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 85 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 86 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 87 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 88 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 89 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 90 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 91 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 92 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 93 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 94 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 95 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 96 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 97 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 98 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche. Die Kurve 99 zeigt die Temperaturerregung an der freien Plattenoberfläche. Die Kurve 100 zeigt die Temperaturerregung an der Grenzfläche.

Die Stoffeigenschaften und Temperaturen in beiden Gebieten dieser zusammengesetzten Körper werden nachfolgend durch die Zeichen  $\lambda$  und  $\theta$  unterschieden. Der Koordinatenursprung  $\theta$  wird in die Grenzfläche gelegt, um die Form der Gleichungen möglichst zu vereinfachen.

Das mittlere Temperaturfeld in Stoff 1 kann man sich beispielsweise in Analogie zur entsprechenden vollen Erregung zusammengesetzter Gittern aus zwei einander entgegengesetzten Grundwellen, wobei die nachlaufende Welle als die an der Grenzfläche teilweise reflektierte, ausbreitende Welle aufzufassen ist. Zweckmäßig bezeichnet man nun die Amplitude der ungestört an der Grenzfläche ankommenden Grundwelle mit  $T_0$  und den zugehörigen Phasenwinkel mit  $\psi_0$ .

Folgt man dann noch der Reflexionszahl  $q_0$ , dann ist die Amplitude der Grundwellen der zurücklaufenden zur ankommenden Temperaturerregung an der Grenzfläche ist, so lautet die Gleichung des Temperaturfeldes in Stoff 1 die Form

$$T_1 = T_0 \cos(\omega t - \psi_0 - \theta) + q_0 T_0 \cos(\omega t - \psi_0 + \theta)$$

In der Grenzfläche  $\theta = 0$  ergibt sich danach eine Temperatur  $T_0$

$$T_0 = T_0 (1 - q_0)$$

und da hier nach Voraussetzung kein Temperaturerregung auftreten soll lautet die Gleichung des Feldes in Stoff 2

$$T_2 = T_0 (1 - q_0) \cos(\omega t - \psi_0 - \theta)$$

Beide Gleichungen sind Lösungen der Differentialgleichung der Wärmeleitung, sofern  $q_0$  konstant ist. Ihre veränderten Oberflächenbedingung für  $\theta = 0$  ist nach dem vorausgesetzten Erregung der Platte durch passende Wahl von  $T_0$  und  $\psi_0$  leicht zu erfüllen. Es muß somit nur noch die Übergangsbedingung an der Stelle  $\theta = 0$  verlangt werden, daß in jedem Zeitpunkt die von links in die Grenzfläche einströmende Wärme gleich der nach rechts weitergehenden Wärme ist, d. h. es gilt

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \theta} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \theta}$$

000323

Es ist aber

$$\frac{\partial t_1}{\partial x} = -T_0 \gamma_1 (1 - \beta) e^{i(\omega t - \alpha x)} - \epsilon_0 e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial x} = -(1 + \epsilon_0) T_0 \gamma_2 (1 - \beta) e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

Setzt man diese Ausdrücke mit  $x=0$  in die vorstehende Bedingungs-gleichung ein, so erhält man die Bestimmungsgleichung für die Reflexionszahl  $\epsilon_0$

$$\lambda_1 \gamma_1 (1 - \epsilon_0) = \lambda_2 \gamma_2 (1 + \epsilon_0)$$

Hieraus ergibt sich wegen (6)

$$\epsilon_0 = \frac{\lambda_1 \gamma_1 - \lambda_2 \gamma_2}{\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2} = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}$$

Die Reflexionszahl  $\epsilon_0$  ist also tatsächlich eine dimensionslose Konstante, die nur von den Wärmebelastungszahlen der beiden angrenzenden Stoffe abhängt. Wie leicht ersichtlich gilt  $|\epsilon_0| \leq 1$ , da die Wärmebelastungszahlen ihrer physikalischen Bedeutung nach nur positive Größen sein können.

Positive Werte von  $\epsilon_0$  besagen hierbei, daß die Temperaturgründwelle mit gleicher Phase reflektiert wird; Sie ergeben sich für Werte  $b_1 > b_2$ .

Negative Werten von  $\epsilon_0$  entspricht eine Reflexion der Temperaturwelle mit entgegengesetzter Phase, wobei  $b_1 < b_2$  ist.

Keine Reflexion tritt ein, wenn die Wärmebelastungszahlen beider Stoffe gleich sind, also für  $b_1 = b_2$  selbst wenn sehr große Unterschiede in den Temperatur- oder Wärmeleitzahlen bestehen.

Für  $\epsilon_0 = +1$  erhält man an der Grenzfläche eine vollkommene Reflexion der Temperaturgründwelle in gleicher Phase. Dies trifft dann zu, wenn einer der beiden Stoffe zwei Fälle eintritt:

- A.  $b_2 = 0$ ,  $0 < b_1 < \infty$ . Physikalisch kann dies 1. bedeuten, daß Stoff 2 ein absoluter Wärmeisoliator ist. Dabei wird  $\lambda_2 = 0$  und  $\gamma_2 = 0$ .

Somit ergeben sich die Temperaturen

$$t_1 = T_0 e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

$$t_2 = 0$$

Diesem Grenzfall entspricht technisch die übliche Isolation durch einen Stoff.

2.  $b_2$  wird aber auch dann Null, wenn  $\gamma_2 = 0$  und  $\lambda_2 \neq 0$  ist, d. h.  $\alpha_2 = 0$  hat keine praktische Bedeutung. Dabei erhält man als Temperaturen

$$t_1 = T_0 e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

$$t_2 = 2 T_0 e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

Das bedeutet, daß das Temperaturfeld in dieser einseitig nicht vollkommen isolierten Platte das gleiche ist wie früher, wobei aber der Isolierstoff 2 im Gegensatz zum Fall 1 die Temperaturschwingung der Grenzfläche in allen Punkten gleichphasig und in gleicher Größe mitmacht. Dem letztgenannten Grenzfall entspricht technisch etwa die Wärmeisolierung durch ein mächtig verdünntes Gas.

B.  $b_2 \neq 0$  und  $b_1 = \infty$ . Dieser Fall hat keine praktische Bedeutung. Ist  $\epsilon_0 = -1$ , so erhält man vollkommene Reflexion einer Temperaturgründwelle mit entgegengesetzter Phase. Dabei gibt es wieder zwei Fälle

C.  $b_1 \neq 0$  und  $b_2 = \infty$ . Dies entspricht praktisch einer unendlichen Wärmeübergangszahl an der Grenzfläche, daß deren Temperatur konstant bleibt. Man erhält als Lösung

$$t_1 = T_0 e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

$$t_2 = 0$$

<sup>1</sup> Die im vorausgehenden Abschnitt entwickelten Lösungen für die endlich dicke Platte können auch aus den Sonderfällen  $\epsilon_0 = \pm 1$  der Aufgabe 2 abgeleitet werden.

000304

D:  $b_1 = 0$  und  $0 < b_2 < \infty$ . Hierbei ist wiederum zu unterscheiden:

1.  $\gamma_1 \approx 0$  und  $c_2 \gamma_2 \neq 0$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} t_1 &= T_0 e^{\gamma_1(x+\delta)} [e^{-\gamma_2 x \alpha + \beta} - e^{-\gamma_1 x \alpha + \beta}] \\ t_2 &= 0 \end{aligned}$$

(wobei  $\gamma_1$  hier sehr groß wird). Dies entspricht dem praktisch denkbaren Fall, daß Stoff 1 ein technischer Wärmeisolator, Stoff 2 ein Metall ist.

2.  $\gamma_1 \gamma_2 \approx 0$  und  $c_1 \neq 0$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} t_1 &= T_0 e^{\gamma_1(x+\delta)} [e^{-\gamma_1 x \alpha + \beta} - e^{-\gamma_1 x \alpha + \beta}] \\ t_2 &= 0 \end{aligned}$$

Diesem Grenzfall entspricht technisch der Wärmeübergang von einem Gas an eine Metallwand, sofern sich eine laminaire Grenzschicht ausgebildet. Letztere stellt dann den Stoff 1 dar (vgl. Abschnitt 4).

Für den Verlauf der Wärmewellen in Stoff 1 erhält man die Gleichung

$$q_1 = -\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} = b_1 \gamma_0 T_0 e^{\gamma_1(x+\delta)} [e^{-\gamma_1 x \alpha + \beta} - \rho_0 e^{\gamma_1 x \alpha + \beta}]$$

Die Reflexionszahl  $\rho_0$  gibt also auch hier das Verhältnis der Grundvektoren der reflektierten zur ankommenden Wärmewelle an. Im Gegensatz zur Gleichung (5) zugehörigen Temperaturfeldes besitzt aber der zweite Summand der vorangehenden Gleichung negatives Vorzeichen. Das bedeutet, daß bei positivem  $\rho_0$  eine Wärmegrundwelle mit entgegengesetzter Phase reflektiert wird. Die Verhältnisse liegen somit umgekehrt, wie bei Temperaturgrundwellen. Physikalisch ist dies anschaulich zu erklären. Bei einer Wärmerückstrahlung ( $b_1 > b_2$ ) werden die durch die Grenzfläche tatsächlich noch hin- und herpendelnden Wärmemengen kleiner, dafür aber die meßbaren Temperatureusschläge größer als im homogenen Stoff. Für  $b_2 > b_1$  gilt das Umgekehrte.

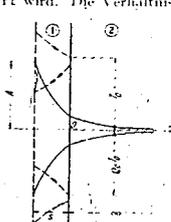


Abb. 7. Bestimmung des Temperaturfeldes in einer Platten-Grenzschicht (1), die sich zwischen einem Gasraum und der Wand von Stoff (2) befindet, sowie Bestimmung einer Wärmeübergangszahl für laminare verdrängte Gasströmungen.

4. Anwendung auf die Wärmeübertragung zwischen Gasen (Flüssigkeiten) und festen Körpern beim Vorhandensein einer Grenzfläche. Vor einer unendlich dicken Wand mit ebener Oberfläche soll sich ein Gas befinden, dessen Temperatur harmonisch veränderlich ist. Mit Ausnahme einer dünnen Randschicht (Prandtsche Grenzschicht) soll diese dabei in allen Punkten des Gasraumes stets gleiche Amplitude, Phase und Frequenz besitzen. Von der Randschicht wird vorausgesetzt, daß sie eine scharfe Grenze gegen den Gasraum besitzt und ihre den Vorgang beeinflussenden Eigenschaften wirkliche Konstanter sind. Die Temperaturen in den Berührungsfächen Gasraum/Grenzschicht und Grenzschicht/Wand sollen keine sprunghafte Änderung aufweisen. Es soll die Wärmeübergangszahl berechnet werden.

In der Grenzschicht (Abb. 7) tritt ein Temperaturabfall ein, der unter Annahme reiner Wärmeleitung nach Gleichung (17) berechnet werden kann. Es war dort

$$t_1 = T_0 e^{\gamma_1(x+\delta)} [e^{-\gamma_1 x \alpha + \beta} + \rho_0 e^{\gamma_1 x \alpha + \beta}] \quad (17)$$

An der Wandoberfläche  $x=0$  erhält man dann folgende Temperatureinwirkung

$$t_0 = T_0 e^{\gamma_1 \delta} (1 + \rho_0)$$

Beim Wärmeübergang von einem Gas an eine Metallwand ist nun  $b_1$  sehr klein gegenüber  $b_2$  so daß  $\rho_0$  nahezu  $-1$  wird (z. B. für Luft/Eisen:  $\rho_0 = -0,9999$ ). Man

erkennt daraus, daß auch bei großen Amplituden der Grundwellen an der Wandoberfläche nur sehr kleine Temperaturschwankungen bestehen, obwohl die Temperaturleitzahl der Grenzschicht von gleicher Größenordnung wie die eines Metalles ist. Die Temperatur an der Gasseite der Grenzschicht berechnet sich für  $\theta = \theta_0 \cos \omega t$  zu

$$T_s = T_0 e^{i(\omega t - \alpha x)} - \theta_0 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \alpha x)}$$

Diese ist aber nach Voraussetzung gleich der Gastemperatur  $\theta$ , so daß also  $\theta = \theta_0 \cos \omega t$  wird. Die je Zeit- und Flächeneinheit an die Wand übergehende Wärmemenge läßt sich sowohl aus der Wärmeübergangsbedingung, als auch aus der Wärmeleitungsbeziehungen berechnen:

$$q_0 = \alpha (\theta - \theta_0) = -\lambda_1 \left. \frac{\partial T_s}{\partial x} \right|_0 = -\lambda_2 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_0$$

Nach der Wärmeübergangszahl  $\alpha$  aufgelöst, erhält man die Definiertengleichung

$$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_0$$

Es ist aber

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_0 = -\alpha_0 \sqrt{\frac{\omega}{2}} e^{-\alpha_0 x} \sin(\omega t - \alpha_0 x)$$

Setzt man alle berechneten Größen in die vorstehende Gleichung für  $\alpha$  ein, so erhält man

$$\alpha = \frac{\lambda_2 \alpha_0 \sqrt{\frac{\omega}{2}} e^{-\alpha_0 x} \sin(\omega t - \alpha_0 x)}{\lambda_1 (1 - e^{-\alpha_0 x} \cos(\omega t - \alpha_0 x))} = \alpha_0 \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

Entsprechend dem physikalischen Vorgang der Wärmeübertragung durch eine Grenzschicht ist bei harmonisch veränderlichen Temperaturen nicht zu erwarten, daß der Wärmeaustausch zwischen Gas und Wand in gleicher Phase mit dem Unterschied der Temperaturen des Gasraumes und der Wandoberfläche vor sich geht. Demnach ist aber auch eine einfache reelle Wärmeübergangszahl zur Kennzeichnung dieses Vorganges nicht mehr ausreichend, da diese nur das Amplitudenverhältnis festlegen kann. Es muß daher noch eine zweite Größe eingeführt werden, die den Phasenunterschied zwischen der harmonisch veränderlichen Temperaturdifferenz und der Wärmeschwingung angibt. Beide Größen lassen sich aber für die Rechnung in einfacher Weise in Form einer komplexen Zahl zu einer einzigen komplexen Wärmeübergangszahl vereinigen. Aus Gleichung 17 ist nun zu erkennen, daß die Wärmeübergangszahl für harmonische Temperaturänderungen im allgemeinen tatsächlich eine komplexe Größe ist. Ihr absoluter Betrag ist dabei das Verhältnis der Amplitude der Wärmeschwingung zur Amplitude der Temperaturdifferenz  $\theta - \theta_0$  und der Phasenunterschied beider wird durch das Argument  $\mu$  der komplexen Übergangszahl dargestellt (vgl. Abb. 8).

Für praktische Verhältnisse Gas-Metall, die man in erster Näherung  $\alpha_0 = 1$  setzen und erhält so als vereinfachte Beziehung

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

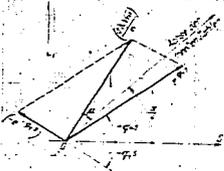


Abb. 8. Darstellung der Gleichung (17a) in der Gaußschen Zahlenebene zum Zweck der anschaulichen Bestimmung der komplexen Wärmeübergangszahl.

Stellt man den Nenner dieses Ausdr. kos in der Gaußschen Zahlenebene dar, so ergibt sich das Diagramm der Abb. 8.

An einem beliebigen Strahl  $S$  trägt man die Winkel  $\mu_1$  und  $\mu_2$  an. Dadurch erhält man die Achse der reellen Zahlen, sowie die Lage der beiden Grundvektoren. Ihre Berechnung von  $\alpha$  aus dem Temperaturfeld in der Wand liefert nur eine Kontrolle.

000306

Resultierende ergibt die Größe  $(2k_1 \omega^2 / \alpha^2)$  mit dem Phasenwinkel  $\mu$ . (Für  $\tau_1 s = 0$  ist auch  $\mu = 0$ ; mit zunehmendem  $\tau_1 s$  wird auch  $\mu$  größer.)

Läßt man die Dicke der Grenzschicht gegen Null gehen, so wird die Wärmeübergangszahl  $\lambda$  unendlich groß. Physikalisch entspricht dies einem Verschwinden des Warmewiderstandes zwischen Gasraum und Wand. Die Wandoberfläche macht dabei die Temperaturschwung des Gases unverzögert und in gleicher Größe mit.

Läßt man die Kreisfrequenz  $\omega$  gegen den Grenzwert Null gehen, so erhält man zunächst einen unbestimmten Ausdruck. Seine Berechnung liefert:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha = \frac{b_1 (1 - \epsilon_0) e^{-\frac{\tau_1}{2s}}}{(1 - \epsilon_0) (1 - f) \sqrt{2a_1}} = \frac{\tau_1}{2s}$$

Man erhält also den aus Grenzschichtbetrachtungen für stationäre Probleme bekannten Wert.

Die Bedeutung der Gleichung (17) liegt wohl kaum darin, daß man hiermit Wärmeübergangszahlen berechnen kann. Dazu sind die Verhältnisse, in denen sie Verwendung finden könnte (beispielsweise für die Untersuchung des Wärmeüberganges in einem Verbrennungsmotor) viel zu verwickelt, da die Dicke der Grenzschicht nicht unveränderlich ist. (Auch die Voraussetzung hinsichtlich der Unveränderlichkeit ihrer Stoffeigenschaften ist nicht erfüllt.) Die angestellten Betrachtungen ermöglichen es aber vielleicht, einzelne Versuchsreihen an einer bestimmten Maschine bei verschiedenen Belastungen und Drehzahlen) in Zusammenhang zu bringen, da ja die Strömungs- und Verbrennungsvorgänge im gleichen Zylinder immer unter geometrisch ähnlichen Bedingungen verlaufen. Schließlich liefert sie auch den mathematischen Beweis für die Notwendigkeit der Einführung einer komplexen Wärmeübergangszahl, wenn man die Wärmeübertragung durch eine Grenzschicht bei periodisch veränderlichen Temperaturen) einfach erklären will.

5. Erweiterung der Auffassung über die Reflexion von Grundwellen. Wie aus den bisherigen Betrachtungen hervorgeht, wird im allgemeinen eine Grundwelle an der Grenzfläche zweier Stoffe zum Teil reflektiert. Nun kann man aber auch die freie Oberfläche eines Körpers als eine solche Grenzfläche auffassen, so daß auch hier eine Reflexion eintreten müßte. Eine von der Oberfläche her eindringende Grundwelle würde dann zwischen den Randflächen von Stoff 1 so lange hin- und zurücklaufen, bis ihre Amplitude Null geworden ist. Setzt man die Reflexionszahl der Grenzfläche, wie bisher gleich  $\epsilon_0$ , die der Oberfläche gleich  $\epsilon_1$ , die Amplitude und Phase der erstmalig an die Grenzfläche kommenden Grundwelle an dieser gleich  $T$  bzw.  $\tau$ , so kann man das Temperaturfeld durch folgende Gleichung wiedergeben:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= T e^{i(\omega t - \epsilon_1 x)} \left[ e^{-\epsilon_1 x} + \epsilon_0 e^{-\epsilon_1 x} + \epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_1 x} + \dots \right] \\
 &= T e^{i(\omega t - \epsilon_1 x)} \left[ e^{-\epsilon_1 x} \left( 1 + \epsilon_0 e^{-\epsilon_1 x} + \epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_1 x} + \dots \right) \right] \\
 &= T e^{i(\omega t - \epsilon_1 x)} \left[ e^{-\epsilon_1 x} \frac{1 - \epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_1 x}}{1 - \epsilon_0^2} \right] \\
 &= T e^{i(\omega t - \epsilon_1 x)} \left[ e^{-\epsilon_1 x} \frac{1 - \epsilon_0^2 e^{-2\epsilon_1 x}}{1 - \epsilon_0^2} \right]
 \end{aligned}$$

wobei:

$$\epsilon_0 = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \quad \text{und} \quad -s < x < s$$

Die bei Versuchen aufgenommenen Wand- und Gastemperaturen waren harmonisch zu analysieren; aus den zusammengehörigen Oberwellen heßen sich dann für die entsprechenden Frequenzen die komplexen Wärmeübergangszahlen berechnen.

000307

Vergleicht man hiermit die früher gefundene Lösung (13), so erkennt man, daß diese Form bis auf Amplitude und Phasenwinkel völlig mit ihr übereinstimmt. Da nun letztere nach den vorgeschriebenen Oberflächenbedingungen bestimmt werden konnten, muß also die vorstehende Gleichung tatsächlich eine Lösung der Aufgabe sein. Dabei ist aber die Reflexionszahl an der Oberfläche noch völlig frei wählbar (vgl. S. 111). Man kann also auch  $q = 0$  setzen und erhält so unmittelbar die Gleichung (13). Durch einfache Umformung der vorstehenden Lösung ergibt sich:

$$t_1 = \left[ T e^{i(\omega t - v x)} + e^{-i(\omega t - v x)} \right] \frac{1 - \epsilon e^{-2\lambda x}}{1 - \epsilon e^{-2\lambda s}} - T_0 \quad (14)$$

Hierbei stellt der erste eingeklammerte Ausdruck für sich allein eine Grundwellen dar. Der nachfolgende Quotient kann dann als Korrekturglied  $k$  angesehen werden, das den Einfluß der anderen Stoffeigenschaften auf der rechten Seite der Grenzfläche wiedergibt. Da in dieser Gleichung über die Reflexionszahl  $\epsilon$  an der Oberfläche noch beliebig verfügt werden darf (vgl. S. 111), kann durch geeignete Wahl in bestimmten Fällen eine Vereinfachung erzielt werden.

Es sei z. B. an der Oberfläche  $x = 0$  die harmonische Temperaturschwängung  $t_{s1} = A e^{i(\omega t - v x)}$  vorgeschrieben. Man erkennt sofort, daß sich mit  $q = -1$  nach Gleichung (13) die Oberflächentemperatur berechnen ergibt:

$$t_{s1} = T e^{i(\omega t - v x)}$$

Durch Vergleich mit der Oberflächenbedingung findet man:

$$T = A e^{-\lambda s} \quad \text{und} \quad \epsilon = v - v_1$$

Die Randbedingungen sind auf diese Weise äußerst einfach zu erfüllen. Die Lösung lautet

$$t_1 = A e^{i(\omega t - v x - \lambda s)} \frac{1 - \epsilon e^{-2\lambda x}}{1 - \epsilon e^{-2\lambda s}} - T_0 \quad (15a)$$

d. h. sie setzt sich als Produkt zusammen aus derjenigen Grundwelle, die sich unter dem Einfluß der aufgezogenen Oberflächentemperatur ausbilden würde, wenn der Körper homogen (also nicht aus zwei verschiedenen Stoffen zusammengesetzt wäre) und einem Korrekturglied, das eine Funktion der Eindringtiefe ist.

Schreibt man an der Oberfläche eine harmonische Wärmeschwängung vor, also  $q_{s1} = Q e^{i(\omega t - v x)}$ , so findet man für  $q = -1$  die einfachste Möglichkeit zur Erfüllung dieser Randbedingung. Nach (13) erhält man

$$q = -\lambda \frac{\partial t_1}{\partial x} = T b_1 \omega e^{i(\omega t - v x - \lambda s)} \frac{1 - \epsilon e^{-2\lambda x}}{1 - \epsilon e^{-2\lambda s}}$$

für  $x = 0$

$$q_{s1} = T b_1 \omega e^{i(\omega t - v x - \lambda s)} \frac{1 - \epsilon e^{-2\lambda x}}{1 - \epsilon e^{-2\lambda s}}$$

Durch Vergleich mit der Randbedingung ergibt sich

$$T = \frac{Q}{b_1 \omega} e^{-\lambda s} \quad \text{und} \quad \epsilon = v_1 - v - \frac{4}{3} - q_1$$

Damit lautet die Gleichung des Temperaturfeldes

$$t_1 = \left[ \frac{Q}{b_1 \omega} e^{i(\omega t - v x - \lambda s)} \frac{1 - \epsilon e^{-2\lambda x}}{1 - \epsilon e^{-2\lambda s}} \right] - T_0 \quad (15b)$$

Auch diese Lösung setzt sich als Produkt zusammen aus der Grundwelle, die unter dem Einfluß der an der Oberfläche aufgezogenen Wärmeschwängung in homogenen Körper entstehen würde und einem von der Eindringtiefe abhängigen Korrekturglied. Letzteres läßt in beiden Fällen unmittelbar die Abweichung von der zugehörigen Grundwelle erkennen.

Zähler Z und Nenner N des Koeffizienten in 18 lassen sich ganz allgemein in der Gestalt der Zählerseite Abb. 9 ersatzweise darstellen:

$$Z = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\dots}$$

Alle Exponenten des Zählers bzw. Nenners faktoriell liegen auf logarithmischem Papier mit dem Punkt 1.

Die Größe von  $\alpha$  ergibt sich als Quotient der absoluten Beiträge:

$$\alpha = \frac{Z}{N}$$

und der zugehörige Phasenwinkel wird:

$$\varphi = \psi - \alpha \varphi$$


Abb. 9. Geometrische Bestimmung der absoluten Beiträge  $Z$  und  $N$  für eine bestimmte Darstellung des Zählers und des Nenners in der Zählerseite Abb. 9.

Es ist zu berücksichtigen, dass die Randbedingungen in der Grenzfläche zu berücksichtigen sind.

Die schräge Wellen in der Grenzfläche  $\alpha$  sind zu berücksichtigen. Es ist zu berücksichtigen, dass es sich um eine fortschreitende Grenzfläche handelt. Die Randbedingung ist die, dass die Randbedingung bestimmt ist durch die Werte  $\alpha$  und  $\varphi$  sowie die Temperatur der fortschreitenden Grenzfläche, welche selbst über nicht.



4. Mehrfach geschichtete Körper. Ein ebener unendlich ausgedehnter Körper besteht aus drei unendlich dünnen Schichten, die in der Grenzfläche mit einem Oberflächenelement parallel sind. An dieser soll eine harmonische Temperaturverteilung vor der stehenden  $\alpha$  Phase  $\varphi$  und Frequenz  $\omega$  angenommen werden. Gesucht ist die Temperatur in der Wand.

Abb. 10. Darstellung der Randbedingungen in der Grenzfläche  $\alpha$  für eine ebene unendlich ausgedehnte Körper mit drei unendlich dünnen Schichten.

Die Temperaturverteilung in der ersten Schicht wird durch die Lösung der Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  bestimmt. Die Lösung ist durch die Lösung der zweiten Schicht bestimmt. Die Lösung für die Berechnung zweiter Schicht von Kreisbogen-Übergangswinkel in die unebere Grenzfläche  $\alpha$  ist die Lösung ist sich vorwärts die Phase  $\varphi$  und  $\omega$  ergibt sich die vorher bekannte Aufgabe. Man kann also die Temperaturverteilung in der ersten Schicht der unebere Grenzfläche und die mittlere Temperaturverteilung in der Grenzfläche  $\alpha$  die Amplitude  $A_0$  und die Phase  $\varphi_0$  bestimmen, die die Randbedingungen sind:

Die Temperatur in der Grenzfläche  $\alpha$  ergibt sich durch die Lösung:

$$u = A_0 \cos(\alpha x - \omega t + \varphi_0)$$

und damit wird die Temperaturverteilung in der Wand:

$$u = A_0 \cos(\alpha x - \omega t + \varphi_0)$$

00039

Die Temperaturverteilung in Stoff 1 läßt sich wie früher aus einer Summe von Grundwellen zusammensetzen, die an den Begrenzungsflächen der Platte 1 reflektiert wurden. Die Reflexionszahl  $r_{12}$  muß aber jetzt eine andere Größe besitzen als in den vorangehenden Aufgaben. Verlegt man den Koordinatenursprung  $x=0$  an die Fläche 1, 2, so erhält man nach 10a das Temperaturfeld in Stoff 1

$$T_1 = A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{-i(\omega t - kx)} + C e^{i(\omega t - kx)} + D e^{-i(\omega t - kx)}$$

Die Randbedingungen an der Grenzfläche 1, 2 lauten dabei

$$T_1 = T_2$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x}$$

oder

$$-A_1 e^{-kz_1} + A_2 e^{kz_1} = -A_3 e^{-kz_2} + A_4 e^{kz_2}$$

$$-k A_1 e^{-kz_1} + k A_2 e^{kz_1} = -k A_3 e^{-kz_2} + k A_4 e^{kz_2}$$

Es ist aber für  $x=0$

$$T_1 = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} + C e^{i\omega t} + D e^{-i\omega t}$$

und für  $x = -z_2$

$$T_1 = A e^{i(\omega t - kz_2)} + B e^{-i(\omega t - kz_2)} + C e^{i(\omega t - kz_2)} + D e^{-i(\omega t - kz_2)}$$

Eingesetzt in die Grenzbedingungen ergeben sich folgende Gleichungen für  $A_1, A_2, A_3$  und  $A_4$ :

$$A_1 e^{-kz_1} + A_2 e^{kz_1} = A_3 e^{-kz_2} + A_4 e^{kz_2}$$

$$-k A_1 e^{-kz_1} + k A_2 e^{kz_1} = -k A_3 e^{-kz_2} + k A_4 e^{kz_2}$$

(Dieses Ergebnis kann unmittelbar in die Gleichungen für die Temperaturfelder der Stoffe 2 und 3 eingesetzt werden.)

$$A_1 e^{-kz_1} + A_2 e^{kz_1} = A_3 e^{-kz_2} + A_4 e^{kz_2}$$

$$-k A_1 e^{-kz_1} + k A_2 e^{kz_1} = -k A_3 e^{-kz_2} + k A_4 e^{kz_2}$$

Dividiert man beide Gleichungen voreinander, so erhält man

$$\frac{1 - \frac{A_2}{A_1} e^{2kz_1}}{1 - \frac{A_4}{A_3} e^{2kz_2}} = \frac{1 - \frac{A_4}{A_3} e^{2kz_2}}{1 - \frac{A_2}{A_1} e^{2kz_1}}$$

und damit wird

$$\frac{A_2}{A_1} e^{2kz_1} = \frac{A_4}{A_3} e^{2kz_2}$$

Man sieht hieraus, daß die Reflexionszahl an der Grenzfläche 1, 2 (also  $r_{12}$ ) von den Wärmebelastungswerten der Stoffe 1, 2 und 3 sowie von der Dicke und der Temperaturleitfähigkeit der Platte 2 abhängt. Außerdem ist sie auch mit der Frequenz der Temperaturschwängung veränderlich ( $r_{12} = f(\omega)$ ), da entsprechend einer Änderung der Grundwellenlänge die Plattendicke relativ zu ihr kleiner oder größer wird. Im allgemeinen wird dabei  $r_{12}$  eine komplexe Größe sein, d. h. die an der Grenzfläche 1, 2 reflektierte Welle wird mit dem Phasenwinkel der Reflexionszahl zurückgeworfen.

Grenzfälle für  $r_{12}$ . Es soll sein

1.  $r_{12} = 0$ , dann wird  $r_{12} = \frac{A_2}{A_1} e^{2kz_1} = \frac{A_4}{A_3} e^{2kz_2} = 0$
2.  $A_2 = \infty$  (oder  $A_1 = 0$ ,  $\omega = \infty$ ), dann wird  $r_{12} = \frac{A_4}{A_3} e^{2kz_2}$
3.  $A_2 = 0$  (oder  $A_1 = \infty$ ,  $\omega = 0$ ), dann wird  $r_{12} = \frac{A_4}{A_3} e^{2kz_2}$

In allen drei Fällen erhält man, wie zu erwarten ist, die Reflexionszahl für den aus zwei Stoffen bestehenden Körper.

$$R = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \text{dann wird } r_{12} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Dies entspricht der Grundwelle, die an der Grenzfläche mit Reflexion  $r_{12}$  reflektiert wird und anschließend durch die Grenzfläche 1, 2 in Stoff 1 einstrahlt.

Die vorstehende Erwählung über die aus drei Stoffen bestehende Wand besitzt praktische Bedeutung, z. B. bei der Beurteilung des Einflusses der Luftschicht entsprechend angeordneten Thermoelemente auf die Messung zeitlich veränderlicher Temperaturen. Es kann etwa Stoff 1 eine Kupferplatte, Stoff 2 eine Stahlplatte und Stoff 3 eine Eisenwand sein.

Entsprechende Aufgaben mit vier und mehr Stoffen lassen sich durch entsprechende Fortsetzung der durchgeführten Ableitung ohne weiteres lösen. Auch die Temperaturverteilung in Platten von unendlicher Länge, die aus unendlichen Schichten von unendlichen Stoffen bestehen, können leicht aus dem oben Angeführten abgeleitet werden. Es soll nachfolgend als Beispiel die Fortwärtführung der Lösung für eine aus zwei Schichten bestehende Platte (Abb. 11) kurz angegeben werden. Auf den freien Platten-Oberflächen sollen harmonische Temperaturverteilungen bestehen, die links und rechts durch die Größen  $e_1 \cos(\omega t - \alpha_1 x)$  und  $e_2 \cos(\omega t - \alpha_2 x)$  gegeben sind. Man betrachte zunächst als Teilaufgabe die Lösung für eine Halbbestimmung, die vollständig an der Grenzfläche eine unveränderliche Temperatur  $t_0$  voraussetzt. Es heißt sich nur das entsprechende Aufgabe noch einfach als Sonderfall abzuwickeln, indem man die Wärmedurchgangszahl  $\alpha$  des Stoffes 1 unendlich groß setzt. Dadurch wird  $\alpha_1 = \infty$ ,  $\alpha_2$  bleibt unendlich kleiner. Reflexion der ankommenden Temperaturgrundwelle mit entgegengesetzter Phase ein. Überlagert man der so gewonnenen Temperaturverteilung die entsprechende Lösung für vorausgesetzte Reflexion, so erhält man die Lösung für verlässliche Randbedingung. Die Hälfte unverändert, die Oberflächebedingungen.

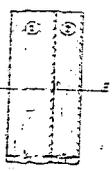


Abb. 11. Platte aus zwei Schichten. Die obere Schicht ist mit 1, die untere mit 2 beschriftet. Die Plattenoberflächen sind mit a und b markiert. Die Grenzfläche ist in der Mitte. Ein Koordinatensystem mit x-Achse ist eingezeichnet.

Zusammenfassend kann man folgendes sagen. Das Temperaturfeld in einem geschichteten Körper, auf dessen Oberfläche periodische Temperaturverteilungen eintreffen werden, kann man sich dadurch entstanden denken, daß er an der Grenzfläche zweier Stoffe ankommenden Grundwellen über teilweise reflektiert werden. Die Oberflächen dürfen dabei als Grenzflächen mit beliebigem Reflexionswert angesehen werden.

7. Brüche von Grundwellen an der Grenzfläche zweier Stoffe. Aufgabe 2. Ein allseitig unendlich ausgedehnter Körper soll aus zwei verschiedenen, in sich bewegenden Stoffen bestehen. Gehe Grenzfläche eine Ebene an. Gesucht wird das resultierende Temperaturfeld, wenn in Stoff 1 eine ebene Grundwelle unter beliebigem Winkel zur Grenzfläche verläuft. Ihre Amplitude soll dabei lange einer Wellenfront konstant sein.

Ein rechtwinkliges Achsenkreuz wird zweckmäßig so gelegt, daß eine Koordinatenachse senkrecht zur Grenzfläche steht. Die beiden anderen x und y liegen dann in der Ebene und sollen so gewählt werden, daß die Achse x parallel zu den ankommenden Wellenfronten liegt. Indem man die Aufgabe als ebene Problem mit den Koordinaten x, y behandelt werden. In Anlehnung an die bekannten Erscheinungen an Grenzflächen (z. B. bei Lichtwellen) kann man sich das gesamte Temperaturfeld in Stoff 1 zusammensetzen denken aus der an der Grenzfläche unter dem Einfallswinkel teilweise reflektierten Grundwelle und dieser selbst. Von der in Stoff 2 übertragenden Welle mußte dann angenommen werden, daß sie unter anderem Winkel zur Grenzfläche

000311

weiterläuft als die in Stoff 1 ankommende Grundwelle. Man würde danach die in Abb. 12 skizzierte Grundwellenverteilung erwarten.

Ein solches Temperaturfeld kann man sich etwa dadurch entstanden denken, daß entlang der durch den Ursprung gehenden Wellenfront eine ebene Oberfläche besteht, an welcher entsprechende Wärmeschwingungen erzwungen werden. (Dabei würden dann allerdings im allgemeinen noch Beugungserscheinungen bei den reflektierten Wellen auftreten.)

Es sind nun die Gleichungen für diese Temperaturverteilung aufzustellen, und es ist zu zeigen, daß die Randbedingungen an der Grenzfläche erfüllt sind. Die Gleichung Grundwelle erhält man am einfachsten durch eine Koordinatendrehung. Eine in Richtung der  $x^*$ -Achse wandernde Welle besitzt die Form:

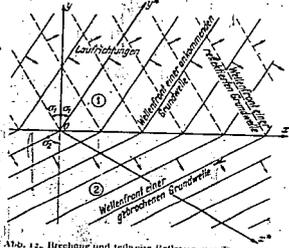


Abb. 12. Brechung und teilweise Reflexion von Temperatur-Grundwellen an der ebenen Grenzfläche zweier verschiedener Stoffe, wenn die Wellenfront der ankommenden Grundwelle nicht parallel zur Grenzfläche verläuft.

$$t = T_1 e^{i(\omega t + \omega \rho - \epsilon_1 t + \beta)}$$
 wobei  $T_1$  die Amplitude und  $\epsilon_1$  die Phase entlang der  $y^*$ -Achse ist. Dreht man dieses  $(x^*, y^*)$ -System um den Winkel  $\alpha_1$  gegen den Uhrzeigersinn, so erhält man das  $x, y$ -System. Die Transformationsgleichung lautet dabei

$$x^* = x \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1,$$

so daß sich folgende Gleichung der ankommenden Grundwelle ergibt:

$$t_1 = T_1 e^{i(\omega t + \omega \rho - \epsilon_1 t + \beta) \cos \alpha_1 + i \omega y \sin \alpha_1}.$$

Dabei ist dann auch  $\alpha_1$  der Winkel zwischen einer beliebigen Wellenfront und einer Normalen zur Grenzfläche (Abb. 12). Entsprechend ergibt sich mit einem Reflexionsfaktor  $g_1$ , die an der Grenzfläche teilweise zurückgeworfene Grundwelle

$$t_0 = T_1 g_1 e^{i(\omega t + \omega \rho - \epsilon_1 t + \beta) \cos \alpha_1 + i \omega y \sin \alpha_1}.$$

Damit erhält man die Gleichung des tatsächlich meßbaren Temperaturfeldes in Stoff 1

$$t_1 = t_1 + t_0 = T_1 e^{i(\omega t + \omega \rho - \epsilon_1 t + \beta) \cos \alpha_1} [e^{i \omega y \sin \alpha_1} + g_1 e^{-i \omega y \sin \alpha_1}] e^{i \omega y \sin \alpha_1} \quad (22)$$

Die Temperaturverteilung entlang der Grenzfläche erhält man hieraus, indem man  $y = 0$  setzt zu

$$t_0 = T_1 e^{i(\omega t + \omega \rho - \epsilon_1 t + \beta) \cos \alpha_1} [1 + g_1].$$

Schließlich muß das Temperaturfeld in Stoff 2 eine unter dem Winkel  $\alpha_2$  schräg zur Grenzfläche weiterlaufende Grundwelle sein (deren Amplitude  $T_2$  und Phase  $\epsilon_2$  vorläufig angenommen wird):

$$t_2 = T_2 e^{i(\omega t + \omega \rho - \epsilon_2 t + \beta) \cos \alpha_2 + i \omega y \sin \alpha_2} \quad (22a)$$

so daß sich hiermit folgende Temperaturverteilung entlang der Grenzfläche ergibt

$$t_{20} = T_2 e^{i(\omega t + \omega \rho - \epsilon_2 t + \beta) \cos \alpha_2}.$$

Da aber in keinem ihrer Punkte ein Temperatursprung auftreten darf, muß also  $t_{10} = t_{20}$  sein, d. h.

$$T_2 = (1 + g_1) T_1, \quad \epsilon_2 = \epsilon_1, \quad g_1 \cos \alpha_1 = g_2 \cos \alpha_2.$$

Aus der letzten Bedingung ergibt sich nach Kürzung mit  $\cos \alpha_2$  das Brechungsgesetz für ebene Grundwellen:

$$\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{h_1}{h_2} \quad (23)$$

wenn  $v_1, v_2$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und  $l_1, l_2$  die Wellenlängen bedeuten. Dies ist aber das bekannte Snelliussche Brechungsgesetz mit dem Wurzelverhältnis der Temperaturleitzahlen als Brechungsindex. Man erhält damit<sup>1</sup>

$$\sin \alpha_2 = \pm \sqrt{1 - \frac{a_2}{a_1} \cos^2 \alpha_1} \quad (23a)$$

Die Gleichung der Temperaturwelle in Stoff 2 lautet also

$$\varrho = (1 + \varrho) T_1 e^{i(\alpha_1 x + t)} e^{-\alpha_1(1 + \varrho) \sqrt{\frac{a_1}{a_2} \cos^2 \alpha_1 - 1}} \sqrt{1 - \frac{a_2}{a_1} \cos^2 \alpha_1} \quad (24)$$

In jedem Punkt der Grenzfläche muß außerdem noch folgende Bedingung erfüllt sein:

$$-\lambda_2 \left( \frac{\partial \varrho}{\partial y} \right)_{y=0} = -\lambda_1 \left( \frac{\partial \varrho}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Damit erhält man die Bedingungsgleichung für die Reflexionszahl

$$\frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} = \frac{\lambda_1 \tau_1 \sin \alpha_1}{\lambda_2 \tau_2 \sin \alpha_2}$$

Ersetzt man hierin  $\sin \alpha_2$  nach (23a) und löst nach  $\varrho$  auf, so ergibt sich die Reflexionszahl:

$$\varrho = \frac{b_1 \sin \alpha_1 - b_2 \sqrt{1 - \frac{a_2}{a_1} \cos^2 \alpha_1}}{b_1 \sin \alpha_1 + b_2 \sqrt{1 - \frac{a_2}{a_1} \cos^2 \alpha_1}} \quad (25)$$

Es zeigt sich also, daß die angeschriebenen Gleichungen (22 und 24) dann die Lösung dieser Aufgabe darstellen, wenn die Reflexionszahl entsprechend der vorstehenden Beziehung eingesetzt wird. Dieser Fall ist hierbei nicht nur von den Wärmebelastungszahlen der beiden Stoffe allein abhängig, sondern auch von deren Temperaturleitzahlen und vor allem vom Einfallswinkel  $\alpha_1$ .

Sonderfälle der Reflexionszahl: Es ergibt sich für

$$1. \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}: \quad \varrho = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}$$

das ist, wie zu erwarten war, die bekannte Abhängigkeit bei senkrecht auftreffenden Grundwellen:

$$2. \quad \alpha_1 = \alpha_2: \quad \varrho = \frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_2}$$

Infolge gleicher Temperaturleitzahlen sind Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit in beiden Stoffen gleich, dadurch tritt auch bei schrag an der Grenzfläche ankommenden Wellen keine Brechung ein und die Reflexion erfolgt nur in Abhängigkeit von den Wärmebelastungszahlen:

$$3. \quad b_1 = b_2: \quad \varrho = \frac{\sin \alpha_1 - \sqrt{1 - \frac{a_2}{a_1} \cos^2 \alpha_1}}{\sin \alpha_1 + \sqrt{1 - \frac{a_2}{a_1} \cos^2 \alpha_1}}$$

Bei gleichen Wärmebelastungszahlen aber verschiedenen Temperaturleitzahlen beider Stoffe ergibt sich infolge der Brechung auch eine vom Einfallswinkel abhängige Reflexion.

4. Der Zähler in (25a) kann Null werden, wenn

$$b_1 \sin \alpha_1 = b_2 \sqrt{1 - \frac{a_2}{a_1} \cos^2 \alpha_1}$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \pm \sqrt{\frac{b_2^2 (a_1 - a_2)}{a_1 (b_1^2 - b_2^2)}}$$

<sup>1</sup> Für die vorstehende Aufgabe hat zunächst nur das positive Vorzeichen der Wurzel physikalische Bedeutung.

009213

d. h. sofern diese Wurzel reell ist, läßt sich stets ein Winkel  $\sigma_1$  finden, bei dem keine Reflexion auftritt

5. Im Fall

$$\sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2} \cos^2 \sigma_1} = 0,$$

also für

$$\cos \sigma_1 = \sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}} \quad \text{nur möglich, wenn } a_2 > a_1$$

wird

$$q = -1.$$

Das bedeutet dann folgendes: Für  $a_1 \leq a_2$  besteht immer ein Einfallswinkel  $\sigma_1$  Grenzwinkel, bei dem eine vollkommene Reflexion mit gleicher Phase möglich ist.

6. Beim Unterschreiten dieses Grenzwinkels wird

$$\frac{a_2^2}{a_1^2} \cos^2 \sigma_1 > 1 \quad \text{nur möglich, wenn } a_2 > a_1,$$

und!

$$\sin \sigma_2 = -\sqrt{1 - \frac{a_2^2}{a_1^2} \cos^2 \sigma_1} = -j \sqrt{\frac{a_2^2}{a_1^2} \cos^2 \sigma_1 - 1}.$$

Die Reflexionszahl wird also eine komplexe Größe!

$$r^* = \frac{b_1 \sin \sigma_1 - j b_2 \sqrt{\frac{a_2^2}{a_1^2} \cos^2 \sigma_1 - 1}}{b_1 \sin \sigma_1 + j b_2 \sqrt{\frac{a_2^2}{a_1^2} \cos^2 \sigma_1 - 1}} = e^{j\epsilon} \quad 22a$$

Dies bedeutet dann, daß die Grundwelle mit der Phase  $\epsilon$ , der komplexen Reflexionszahl  $r^*$  total reflektiert wird.

7. Für  $\sigma_1 = 0$  wird im allgemeinen  $b_2 \neq 0$  und  $a_1 \neq a_2$

$$q = -1.$$

Die Grundwellenfront in Stoff 1 steht dabei senkrecht zur Grenzfläche. Die Reflexion müßte dann mit entgegengesetzter Phase und voller Amplitude erfolgen. Dadurch wäre aber die Temperatur an jeder Stelle unveränderlich, d. h. es ist kein Feld dieser Art (konstante Amplitude entlang einer Wellenfront) möglich.

Die Temperaturfelder in den Sonderfällen 1 bis 4 bieten nichts wesentlich Neues und sollen daher nicht angeschrieben werden.

Dem Fall 5 entspricht in der Optik die Totalreflexion beim Erreichen des Grenzwinkels. Man erhält hierfür einen Brechungswinkel  $\sigma_2 = 0$  und damit die folgende Temperaturverteilung aus (22) und (24):

$$T_1 = T_1 e^{i(\omega t - \omega x)} e^{-\alpha_1 y} \left[ e^{i(\sigma_1 y - \omega t)} + 1 \right] \quad T_2 = 2 T_1 e^{i(\omega t - \omega x)} e^{-\alpha_2 y} \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right] \quad \text{für } a_1 > a_2$$

d. h. in Stoff 2 muß in Richtung der x-Achse eine Grundwelle lauten, die konstante Amplitude längs einer Wellenfront besitzt. Es besteht daher senkrecht zur Grenzfläche kein Temperaturgefälle und damit keinerlei Wärmeaustausch zwischen benachbarten Stoffen. Die in Stoff 1 schräg zur Grenzfläche ankommende Temperaturgrundwelle muß also mit voller Amplitude und gleicher Phase reflektiert werden. Stoff 2 erscheint von Stoff 1 aus gesehen als vollkommener Wärmespeicher mit  $\gamma, B = \alpha_2^2 b_2 = 0$  und  $\gamma_2 = 0$  (Gas unter geringem Druck).

Im Fall 6 sind die Gleichungen des Temperaturfeldes formal dieselben wie (22) und (22a). Man hat hierbei nur zu beachten, daß jetzt das negative Vorzeichen der

\* Hierbei ist nur das negative Vorzeichen der Wurzel physikalisch von Bedeutung.

Wurzel von (23a) gilt und damit auch an Stelle von  $\varrho$  die komplexe Größe  $\varrho^*$  tritt, so daß man erhält

$$I_1 = T_1 e^{i(\omega t + n)} e^{-\sigma_1(1+n)x \cos \alpha_1} [e^{\sigma_1(1+n)y \sin \alpha_1} + \varrho^* e^{-\sigma_1(1+n)y \sin \alpha_1}], \quad (y \geq 0, \quad a_2 > a_1),$$

$$I_2 = (1 + \varrho^*) T_1 e^{i(\omega t + n)} e^{-\sigma_1(1+n)x} \left[ x \sqrt{\frac{a_1}{a_2} \cos \alpha_1 + i} \sqrt{\frac{a_1}{a_2} \cos^2 \alpha_1 - 1} \right] \quad (y \leq 0, \quad a_2 > a_1, \quad \cos \alpha_1 \geq \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}).$$

Dabei wird also in der zweiten Gleichung der in der Klammer des Exponenten stehende Faktor von  $y$  imaginär. Multipliziert man diese Klammer aus und trennt hierbei in reelle und imaginäre Glieder, so erhält man

$$I_2 = (1 + \varrho^*) T_1 e^{i(\omega t + n)} e^{-(\sigma_1 x \cos \alpha_1 - y \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 - \varrho^2}) - i(\sigma_1 x \sin \alpha_1 + y \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 - \varrho^2})}$$

Man sieht daraus, daß alle Punkte in Stoff 2, deren Temperaturschwingungen gleiche Phasen besitzen, auf parallelen Geraden liegen, deren Gleichungen wie folgt lauten:

$$\eta_1 x \cos \alpha_1 + y \sqrt{\eta_1^2 \cos^2 \alpha_1 - \varrho^2} = B = \text{konst.}$$

Ihre Neigungswinkel erhält man aus

$$\tan \sigma_2^* = \frac{dy}{dx} = \frac{\eta_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{\eta_1^2 \cos^2 \alpha_1 - \varrho^2}} = \frac{-\cos \alpha_1}{\sqrt{\cos^2 \alpha_1 - \frac{a_1}{a_2}}}$$

Hierdurch sind die Wellenfronten in Stoff 2 festgelegt. Die Temperaturverteilung entlang einer solchen ergibt sich durch Einführung dieser Geradengleichung in die vorstehende Lösung:

$$I_2 = (1 + \varrho^*) T_1 e^{i(\omega t + n)} e^{2y \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 - \varrho^2} - \sigma_1 x - i n} \quad (y \leq 0, \quad a_2 > a_1, \quad \cos \alpha_1 \geq \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}).$$

Man erkennt daraus, daß die Amplitude der in Stoff 2 laufenden Welle mit abnehmendem  $y$  nach einer Exponentialfunktion kleiner wird. Es ergibt sich daher das in Abb. 13 dargestellte Gesamtbild:

Die ankommende Grundwelle wird unter gleichem Winkel, aber mit der Phase der komplexen Reflexionszahl vollkommen reflektiert, da deren absoluter Betrag stets gleich 1 ist. Die in Stoff 2 weiterlaufende Welle ist um den Winkel der komplexen Größe  $(1 + \varrho^*)$ , d. h. also, um den halben Phasenwinkel von  $\varrho^*$  gegenüber der ankommenden Grundwelle verschoben und besitzt entlang einer Wellenfront keine konstante Amplitude mehr (die Schraffurstriche in den entlang der drei Wellenfronten eingezeichneten Flächen sollen die Amplituden in jedem Punkt derselben andeuten). Die physikalische Erklärung hierfür ergibt sich aus der Voraussetzung, daß  $a_2 > a_1$  sein soll. Dadurch sind die Wellenlängen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Grundwellen in Stoff 2 größer als in Stoff 1. Nun wird aber an der Grenzfläche eine kleinere Wellenlänge und eine geringere Fortpflanzungsgeschwindigkeit erzwungen, als sich bei dieser Frequenz in Stoff 2 bei einer Grundwelle ausbilden würde. Daher zeigen alle von der Grenzfläche weiter abliegenden Punkte gegenüber näherliegenden ein Vorwärtren der Welle und infolge der zu klein aufgezogenen Wellenlänge die Neigung, diese zu vergrößern. Dabei laufen dann die einzelnen Wellenzüge ineinander, d. h. sie löschen sich mit zunehmendem Abstand von der Grenzfläche gegenseitig mehr und mehr aus.

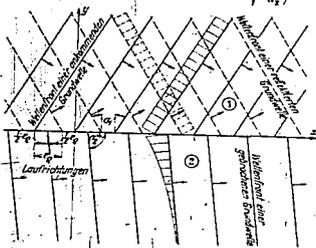


Abb. 13. Brechung und Reflexion von Temperaturgrundwellen an der ebenen Grenzfläche zweier verschiedener Stoffe, wenn der Einfallswinkel positiv des Grenz winkels der „Totalreflexion“ liegt.

000315

Zu 7. ist noch folgendes zu sagen: Die Unmöglichkeit eines Temperaturfeldes mit konstanter Amplitude langs aller Wellenfronten, wenn diese senkrecht zur Grenzfläche stehen, ist physikalisch bedingt durch die Notwendigkeit eines Temperaturgefälles quer zu dieser. Nur wenn Stoff 2 entweder ein vollkommener Wärmeisoliator ist ( $\sigma_2 = 0$ ), oder die gleiche Temperaturleitzahl besitzt wie Stoff 1 ( $1 - \sigma_2 \sigma_1 = 0$ ), entfällt diese Bedingung. Für die Reflexionszahl kann man in beiden Fällen jeden beliebigen Wert annehmen, da  $\sigma = \frac{1}{2}$  wird.

Nach den vorausgehenden Entwicklungen kann man allgemein den Satz aussprechen: Läuft eine Temperaturgrundwelle schrag gegen die Grenzfläche zweier Stoffe, so wird sie an dieser unter dem Einfallswinkel teilweise reflektiert. Die in den zweiten Stoff eindringende Welle geht (im allgemeinen als Grundwelle) gebrochen weiter. Einfallswinkel und Brechungswinkel gehorchen dem Snellius'schen Brechungsgesetz, wobei der Brechungsindex gleich dem Wurzelverhältnis der Temperaturleitzahlen ist.

8. **Biegung von Grundwellen.** Wie bei allen wellenförmig verlaufenden Vorgängen ist auch bei Temperatur- (Wärme-) Wellen zu vermuten, daß sie die Erscheinung der Biegung zeigen. Der unmittelbare Nachweis durch eine einfache mathematische Lösung eines bestimmten Beispiels ist dem Verfasser bisher nicht gelungen.

Biegungserscheinungen sind bei technischen Problemen häufig zu erwarten. Es wäre daher eine übersichtliche Lösung einer einfachen Aufgabe wünschenswert, um die dabei auftretenden Erscheinungen näher untersuchen zu können.

9. **Kugelprobleme.** Das bisher entwickelte Lösungsverfahren für quasistationäre Wärmeleitungsprobleme ist nicht nur auf ebene Temperaturfelder beschränkt. Es soll zunächst an entsprechenden Beispielen bei kugelsymmetrischer Temperaturverteilung gezeigt werden. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung lautet hierfür in Kugelkoordinaten<sup>1</sup>



Abb. 14. Wärmequelle im adiabatisch abgeschlossenen Kugelkörper in Form einer Kugelfläche vom Halbmesser  $r_0$ . deren Temperatur harmonisch veränderlich ist, gesucht ist das äußere Temperaturfeld.

$$\frac{a}{c} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Kugelhalbmesser}$$

Die Form dieser Gleichung ist dieselbe wie bei ebenen Aufgaben. Ein partikulares Integral lautet dabei

$$T = C e^{i(\omega t - k r)} \quad \text{Integrationskonstante}$$

Die Grundaufgabe ist dabei folgende:

In einem allseitig abgeschlossenen, homogenen Stoff (Abb. 14) soll auf einer Kugelfläche vom Halbmesser  $r_0$  die Temperatur harmonisch veränderlich sein, und zwar derart, daß sie in jedem ihrer Punkte gleiche Amplitude  $A$ , Phase  $\psi$  und Frequenz  $\omega$  aufweist. Die Gleichung für das Temperaturfeld im Stoff außerhalb der Kugelfläche lautet dann

$$T = A \frac{e^{i(\omega t - k r)}}{r} \quad r \geq r_0 \quad (26)$$

Diese Gleichung stellt eine nach außen wandernde Welle dar, die ähnliche Eigenschaften besitzt wie eine ebene Grundwelle. Sie unterscheidet sich von dieser nur durch das mit dem Ort veränderliche Verhältnis zweier Temperaturen, die um eine Wellenlänge auseinanderliegen:

$$\delta = \frac{r_2}{r_1} = \left(1 + \frac{2\pi}{\sigma r}\right) e^{\sigma r} = \left(1 - \frac{l}{r}\right) e^{\sigma r}$$

Beachtet man, daß dieses Verhältnis bei allen dämpfungsfreien, elastischen Kugelwellen (z. B. Schallwellen) den Wert  $\delta_0 = 1 + \frac{l}{r}$  besitzt, so erkennt man, daß auch die Temperaturkugelwelle (26) das unveränderliche Dämpfungsverhältnis  $\delta = e^{\sigma r}$  aufweist.

<sup>1</sup> Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik S. 122 Braunschweig 1919.

ines Temperaturfeldes mit senkrecht zur Grenzfläche eines Temperaturfeldes innerer Wärmeisolator) ist Stoff:  $\gamma = (\gamma_1 - \alpha_1 / \alpha_2 = 0)$ , an in beiden Fällen jeden

allgemein den Satz aus die Grenzfläche zweier ise reflektiert. Die in den

Grussel  
Tem  
Ver  
Bie  
einf  
r nicht gelungen.  
häufig zu erwarten. Es abe wünschenswert, um u können.

uren für quasistationäre felder beschränkt. Dies beispielem bei kugelsym zeigt werden. Die Diffe lautet hierfür in Kugel

(Kugelhalmesser)

be wie bei ebenen Auf tüt daher Integrationskonstante) ende

omogenen Stoff (Abb. 14) messer  $r_0$  die Temperatur an ihrer Punkte gleiche ng für das Temperatur

$$(26)$$

ur, die ähnliche Eigen et sich von dieser nur raturen, die um eine

ien, rkerk ungen

Durch Vertauschen des Vorzeichens im Exponenten des zweiten Exponentialgliedes in (26) erhält man ganz entsprechend wie bei ebenen Aufgaben eine Welle, die entgegen der positiven Koordinatenrichtung läuft:

$$t = A \frac{r_0}{r} e^{-(\omega t + \psi)} e^{\sigma(r - r_0) + \eta} \quad (r > r_0). \quad (26a)$$

Das Verhältnis zweier um eine Wellenlänge auseinanderliegender Temperaturen wird hierbei

$$\frac{\theta - K}{\theta} = \frac{A(r_0 + \eta)}{A} = \frac{1}{1 + \frac{\eta}{2\sigma}} e^{2\sigma} = \frac{1}{\delta K_0} e^{2\sigma}.$$

In beiden Fällen erhält man außerdem als Grenzwert für gegen unendlich gehenden Kugelhalmesser  $r_0$  die bekannte Grundwelle für ebene Aufgaben. Diese zwei Wellen (26) und (26a) sollen daher nachfolgend als Grundwellen für kugelsymmetrische Probleme bezeichnet werden. Die letztere kann dabei nicht die Lösung für ein innerhalb der Kugelfläche vom Halbmesser  $r_0$  stetiges Temperaturfeld sein, da sie im Mittelpunkt ( $r=0$ ) unendlich große Amplitude besitzt.

10. Interferenz und Reflexion von Kugelgrundwellen. Aufgabe 5: Ein allseitig ausgedehnter Körper von Stoff 2 umschließt eine Hohlkugel aus anderem Stoff 1 (Abb. 15), auf deren Innenfläche eine harmonisch veränderliche Temperaturschwingung erzwungen wird, die in allen Punkten gleiche Amplitude  $A$ , Phase  $\psi$  und Frequenz  $\omega$  besitzt. Das Temperaturfeld ist gesucht, wenn zwischen beiden Stoffen kein Übergangswiderstand besteht.

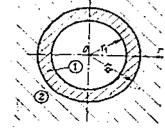


Abb. 15. Hohlkugel, Stoff 1 im Inneren, Stoff 2 im Äußeren. Die Hohlkugel hat den Halbmesser  $r_1$ , der Kern den Halbmesser  $r_2$ . Die Grenzfläche zwischen den Stoffen ist bei  $r_12$  markiert. Die Hohlkugel ist in zwei Hälften geteilt, die als 1 und 2 beschriftet sind.

Man setzt zunächst voraus, daß alle ankommenden Temperaturgrundwellen an der Innenfläche mit einer Reflexionszahl  $\rho_{12}$  an der Grenzfläche mit  $\rho_{21}$  zurückgeworfen werden. Eine von der inneren Kugelfläche ausgehende Welle wird dann solange an den Begrenzungsflächen reflektiert, bis ihre Amplitude Null ist. Schreibt man der zuerst an der Grenzfläche ankommenden Grundwelle an dieser die Amplitude  $T_{12}$  und Phase  $\epsilon_{12}$  zu, so läßt sich unmittelbar entsprechend (18) auch die Kugellösung anschreiben:

$$t_1 = \left[ T_{12} e^{i(\omega t + \epsilon_{12})} \frac{r_1}{r} e^{-\sigma_1(r - r_1) + \eta} \right] \frac{1 + \rho_{12} e^{-2\sigma_1(r_1 - r_2) + \eta}}{1 - \rho_{12} e^{-2\sigma_1(r_1 - r_2) + \eta}} \quad (r_1 < r < r_{12}). \quad (27)$$

Wählt man  $\rho = -1$ , so kann man die an der Innenfläche vorgeschriebene Randbedingung sofort erfüllen:

$$T_{12} = A \frac{r_1}{r_{12}} e^{-\sigma_1(r_1 - r_2) + \eta}, \quad \epsilon_{12} = \psi - \sigma_1(r_{12} - r_1),$$

so daß man als Gleichung des Temperaturfeldes in Stoff 1 folgende erhält:

$$t_1 = \left[ A \frac{r_1}{r} e^{i(\omega t + \psi)} \frac{r_1}{r} e^{-\sigma_1(r - r_1) + \eta} \right] \frac{1 + \rho_{12} e^{-2\sigma_1(r_1 - r_2) + \eta}}{1 + \rho_{12} e^{-2\sigma_1(r_1 - r_2) + \eta}} \quad (r_1 < r < r_{12}). \quad (27a)$$

(Bezüglich der Form dieser Lösung gilt genau dasselbe wie bei ebenen Aufgaben. Die Temperatur der Grenzfläche wird hiermit

$$t_{12} = A \frac{r_1}{r_{12}} e^{i(\omega t + \psi)} \frac{r_1}{r_{12}} e^{-\sigma_1(r_1 - r_2) + \eta} \frac{1 + \rho_{12}}{1 + \rho_{12} e^{-2\sigma_1(r_1 - r_2) + \eta}}$$

und damit erhält man als Gleichung des Temperaturfeldes in Stoff 2

$$t_2 = t_{12} \frac{r_{12}}{r} e^{-\sigma_2(r - r_2) + \eta} \quad (r > r_{12}). \quad (28)$$

In allen diesen Gleichungen ist  $\rho_{12}$  noch unbekannt. Die Berechnung der Reflexionszahl erfolgt wieder mit Hilfe der Übergangsbedingung an der Grenzfläche, wobei gleichzeitig der Nachweis geliefert wird, daß diese tatsächlich erfüllt werden kann

000317

Für  $r = r_{12}$  muß sein  $q_{12} = q_{21}$  oder

$$-\lambda_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_{r=r_{12}} = -\lambda_2 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)_{r=r_{12}}$$

Es ist aber

$$\left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_{r=r_{12}} = -f_{12} \left[ r_1^{-1} - f \frac{1 - \epsilon_{12}}{1 - \epsilon_{21}} - \frac{1}{r_{12}} \right]$$

und

$$\left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)_{r=r_{12}} = -f_{21} \left[ r_2^{-1} - f - \frac{1}{r_{12}} \right]$$

In die Bedingungsgleichung eingesetzt, erhält man

$$\lambda_1 \left[ r_1^{-1} - f \frac{1 - \epsilon_{12}}{1 - \epsilon_{21}} - \frac{1}{r_{12}} \right] = \lambda_2 \left[ r_2^{-1} - f - \frac{1}{r_{12}} \right]$$

oder nach  $\epsilon_{12}$  aufgelöst

$$\epsilon_{12} = \frac{b_1 \left[ 1 - \frac{r_1}{2f_1 r_{12}} \right] - b_2 \left[ 1 - \frac{r_2}{2f_2 r_{12}} \right]}{b_1 \left[ 1 - \frac{r_1}{2f_1 r_{12}} \right] - \lambda_2 \left[ 1 - \frac{r_2}{2f_2 r_{12}} \right]}$$

Man sieht sofort, daß diese Beziehung für wachsenden Halbmesser der Grenzfläche in die bekannte Form für ebene Aufgaben übergeht. Im vorliegenden Fall ist die Reflexionszahl im allgemeinen eine komplexe Größe. Ihre Veranlassung mit dem Halbmesser der Grenzfläche war von vornherein zu vermuten, weil die Krümmung derselben von Einfluß sein mußte. Dadurch wird aber auch die Abhängigkeit von der Größe verständlich, da für diese entsprechend eine bestimmte Wellenlänge eintritt und im Vergleich mit der Krümmung der Grenzfläche groß oder klein erscheint.

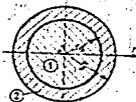


Abb. 16. Vollkugel (Stoff 1) im Hohlkugel (Stoff 2), die Grenzfläche  $r = r_{12}$  harmonische Temperaturverteilung erzeugen werden.

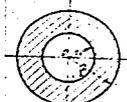


Abb. 17. Hohlkugel (Stoff 1) im Inneren einer Vollkugel (Stoff 2), die Grenzfläche  $r = r_{12}$  harmonische Temperaturverteilung erzeugen werden.

Eine der vorausgehenden Aufgaben entsprechende Lösung erhält man für eine Vollkugel (Abb. 16) oder Hohlkugel (Abb. 17) entsprechend entzerrt werden soll.

Aufgabe 6. Eine Vollkugel von Stoff 1 ist in eine Hohlkugel von Stoff 2 eingeschlossen. An der freien Oberfläche  $r = r_2$  werden harmonische Temperaturverteilungen erzeugt, die in jedem Punkt vorgegebener Amplitude  $A$ , Phase  $\psi$  und Frequenz  $\omega$  sind. Das Temperaturfeld in beiden Stoffen ist gesucht.

Die Temperaturverteilung in Stoff 2 kann man nach 27a unmittelbar angeben, indem man die Vorzeichen in den Exponenten, entsprechend der umgekehrten Laufrichtung der Grundwellen, ändert. Es ist dann

$$\varphi_2 = A e^{i(\omega t - \omega r_2 + \psi)} e^{-\epsilon_{21}(\omega r - \omega r_2)} - \frac{1 - \epsilon_{21}}{1 + \epsilon_{21}} e^{i(\omega t - \omega r_2 + \psi)} e^{-\epsilon_{21}(\omega r_2 - \omega r)}$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Randbedingung an der Oberfläche erfüllt ist, wenn man  $r = r_2$  setzt. Da nun voraus die Lösung für Stoff 1 noch unbekannt ist, kann auch die Reflexionszahl  $\epsilon_{21}$  nicht ohne weiteres berechnet werden. Infolge der verschiedenen Krümmungen ist aber von vornherein zu vermuten, daß ihr Wert nicht mit dem in der vorausgehenden Aufgabe berechneten  $\epsilon_{12}$  übereinstimmt. Man kann aber trotzdem nach 30 den Sonderfall  $\epsilon_{21} = -1$  betrachten, da dies eine Randbedingung erfüllt, die an der Grenzfläche  $r = r_{12}$  eine unvariierte Temperatur vorschreibt.

Auf diese Weise ist es möglich, das Temperaturfeld in der Wand einer Hohlkugel mit den Halbmessern  $r_2$  und  $r_1$  (Abb. 17) anzugeben, auf deren äußerer und innerer Oberfläche verschiedene harmonische Temperaturschwingungen  $A_1, A_2, \psi_1, \psi_2, \omega_1, \omega_2$  vorgeschrieben sind, wenn man noch die Lösung der Aufgabe 5 mit  $\varrho_{12} = -1$  überlagert. Es ergibt sich dann folgende Gleichung:

$$t = A_1 e^{i(\omega_1 t + \psi_1)} \frac{r_2}{r} e^{-\varrho(r-r_2)(t+\beta)} \frac{1 - e^{-2\varrho(r_2-r_1)(t-\beta)}}{1 - e^{-2\varrho(r_2-r_1)(t-\beta)}} + A_2 e^{i(\omega_2 t + \psi_2)} \frac{r_1}{r} e^{-\varrho(r-r_1)(t+\beta)} \frac{1 - e^{-2\varrho(r_2-r_1)(t-\beta)}}{1 - e^{-2\varrho(r_2-r_1)(t-\beta)}} \quad (31)$$

Durch Einsetzung von  $r = r_2$  bzw.  $r = r_1$  kann man leicht sehen, daß die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt sind. Geht man in dieser Lösung zur Grenze  $r_1 = 0$  über, so erhält man folgende Beziehung:

$$t^* = \lim_{r \rightarrow 0} t = A_2 e^{i(\omega_2 t + \psi_2)} \frac{r_1}{r} \frac{e^{\varrho r_1(t-\beta)} - e^{-\varrho r_1(t-\beta)}}{e^{\varrho r_1(t-\beta)} - e^{-\varrho r_1(t-\beta)}} \quad (32)$$

[Der erste Summand der rechten Seite von (31) fällt bei diesem Grenzübergang völlig heraus, was durch die auf den Mittelpunkt zusammenschrumpfende Innenfläche bedingt ist. Dies bedeutet physikalisch, daß endliche Temperaturänderungen in einem (mathematischen) Punkt eines homogenen Stoffes auf die Umgebung keine Wirkung ausüben.]

Nach (32) ergibt sich als Temperatur in der Kugelmitte

$$t_0^* = \lim_{r \rightarrow 0} t^* = A_2 e^{i(\omega_2 t + \psi_2)} \left( \frac{r_1}{r} \right)^{2, 2, 2 \varrho r_1} \dots$$

Diese ist also endlich und stets von kleinerer Amplitude als an der Oberfläche, da der Nenner des Bruches immer größer als der Zähler ist. An der Kugeloberfläche ist aber die Randbedingung  $t^* = A_2 e^{i(\omega_2 t + \psi_2)}$  erfüllt. Daher ist (32) die Lösung für das quasistationäre Temperaturfeld im Innern einer Vollkugel.

Nachdem nun diese gefunden ist, kann auch die Abhängigkeit der Reflexionszahl  $\varrho_{21}$  in (30) aus der Wärmeübergangsbedingung an der Grenzfläche 1, 2 ermittelt werden. Hierzu ist zunächst noch die Temperatur der Grenzfläche aus (31) zu berechnen

$$t_{12} = A_1 e^{i(\omega_1 t + \psi_1)} \frac{r_2}{r_{12}} e^{\varrho(r_{12}-r_2)(t+\beta)} \frac{1 - \varrho_{21} e^{-2\varrho(r_2-r_1)(t-\beta)}}{1 - \varrho_{21} e^{-2\varrho(r_2-r_1)(t-\beta)}}$$

Damit ergibt sich das Temperaturfeld in Stoff 1 zu

$$t_1 = t_{12} \frac{r_{12}}{r} \frac{e^{\varrho(r_1(t-\beta)} - e^{-\varrho(r_1(t-\beta))}}{e^{\varrho(r_1(t-\beta)} - e^{-\varrho(r_1(t-\beta))}}$$

Die Temperaturgradienten an der Grenzfläche werden dann

$$\left( \frac{\partial t_1}{\partial r} \right)_{12} = t_{12} \left[ \varrho_2 \left( 1 + \beta \right) \frac{1 - \varrho_{21}}{1 + \varrho_{21}} - \frac{1}{r_{12}} \right] \cdot \left( \frac{\partial t_1}{\partial r} \right)_{11} = t_{12} \left[ \varrho_1 \left( 1 + \beta \right) \frac{e^{\varrho_1(r_1(t-\beta)} - e^{-\varrho_1(r_1(t-\beta))}}{e^{\varrho_1(r_1(t-\beta)} - e^{-\varrho_1(r_1(t-\beta))}} - \frac{1}{r_{11}} \right]$$

Mit Verwendung von Hyperbelfunktionen mit komplexem Argument kann man schreiben

$$\left( \frac{\partial t_1}{\partial r} \right)_{12} = t_{12} \left[ \varrho_1 (1 + \beta) \left( \vartheta_{12} + \beta \right) - \frac{1}{r_{12}} \right]$$

Setzt man diese Gradienten in die Wärmeübergangsbedingung an der Grenzfläche ein, so ergibt sich als Reflexionszahl

$$\varrho_{21} = \frac{b_2 \left[ \frac{1 - \varrho_{21}}{2 \varrho_2 r_{12}} \right] - b_1 \left[ \vartheta_{12} (\varrho_1 r_{12} (1 + \beta)) - \frac{1}{2 \varrho_1 r_{12}} \right]}{b_1 \left[ 1 + \frac{1}{2 \varrho_1 r_{12}} \right] - b_2 \left[ \vartheta_{12} (\varrho_1 r_{12} (1 + \beta)) - \frac{1}{2 \varrho_1 r_{12}} \right]} \quad (33)$$

(29)

Halbmessern der Grenzfläche vorliegenden Fall ist die Abhängigkeit von  $\varrho_{21}$  von  $\varrho_{12}$  und im Vergleich hierzu der Grenzfläche größer scheint.

Vorausgehenden Aufgabe Lösung erhält man für (Abb. 16), die nachfolgende werden soll.

Vollkugel vom Halbmesser  $r$  aus dem Stoff 2 besteht. Die freien Oberflächen sind in jedem

der

Oberfläche

noch un-

bestimmt, h. also eine unveränderliche

Man erkennt auch hier ohne weiteres den ähnlichen Baur der Gleichung wie bei früher abgeleiteten Reflexionszahlen. Beim Grenzübergang  $\epsilon_1/\epsilon_2 = \infty$  erhält man wieder die Beziehung für  $q$  an ebenen Flächen.

Damit ist gezeigt, daß die für ebene Aufgaben angestellten Betrachtungen auch auf Kugelprobleme übertragen werden können. Die dort entwickelten Schemata und Erweiterungen ließen sich auch hier durchführen. Darüber hinaus sind die Überlagerung von Kugel- und Planwellen rechtsonne Sonderlösungen möglich. Hierbei ergibt sich aber nichts wesentlich Neues.

**II. Zylinderprobleme.** Die Differentialgleichung der Wärmeleitung lautet in Zylinderkoordinaten, wenn die Temperatur nur eine Funktion der Zeit und des Halbmessers  $r$  ist, wie folgt:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Für quasistationäre Felder ist die Temperatur in jedem Punkt unabhängig von der Zeit veränderlich, so daß man setzen darf

$$T = T(r) e^{i\omega t}$$

Dabei wird  $R(r)$  nur eine Funktion von  $r$ . Es wird daher

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0$$

Setzt man diese Differentialquotienten in die Wärmeleitungsgleichung ein, so ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $R$ :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \Phi^2 R = 0$$

Dabei ist gesetzt

$$\Phi = \sqrt{-i\omega} \quad \left[ \frac{1}{k^2} = -i\omega \right] \quad \text{mit } \omega = \omega e^{i\omega t} = \Phi^2$$

Dies ist eine Besselsche Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung aus zwei Besselschen und Hankelschen Funktionen nullter Ordnung (vom komplexen Argument  $\Phi r = \sqrt{-i\omega} r$ ) zusammengesetzt werden kann. Erstere liefert dabei die Lösung für folgende Grundaufgabe: An der Oberfläche eines unendlich langen Kreiszylinders vom Halbmesser  $r_0$  (Abb. 18) ist die Temperatur harmonisch veränderlich mit der Frequenz  $\omega$  sein. Die Lösung lautet

$$T = J_0(\Phi r) + \frac{J_0(\Phi r_0)}{J_0(\Phi r_0)} e^{-\Phi(r-r_0)}$$

und  $J_0(\Phi r) = J_0\left(\sqrt{-i\omega} r\right)$  ist dabei die genannte komplexe Besselsche Funktion. Sie besteht aus Real- und Imaginärteil, die in den Tabellen von Jahnske-Ernst tabuliert sind. Hierbei ist darauf zu achten, daß  $J_0(-x) = J_0(x)$  und  $H_0(-x) = -H_0(x)$  ist, und daß  $J_0(-x) = J_0(x) = 1$  ist.

Die Gleichung (14) stellt eine Wellenlänge  $\lambda$  auf der Zeit  $t$  dar, was zu erwarten ist und dabei stark abhängt. Die Temperaturverteilung in der Zylinderwand ergibt man für  $r = 0$  zu

$$T_0 = J_0(\Phi r_0) + \frac{J_0(\Phi r_0)}{J_0(\Phi r_0)} = J_0(\Phi r_0)$$

wobei  $q$  die Temperatur der Zylinderoberfläche bedeutet. Die Temperaturverteilung in der Zylinderachse ist also dem Betrag der komplexen Zahl  $J_0(\Phi r_0)$  proportional und fällt um dreißig Phasenwinkel mit der Oberfläche überein.

<sup>1) Berechnungen nach Jahnske-Ernst, Fortschritte der Physik, 2. Aufl., S. 102.</sup>

Die zugehörige Wärmewelle erhält man aus

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = b \sqrt{\omega} A e^{i(\omega t + r - \tau)} J_1(\Phi r_1) / J_0(\Phi r_1)$$

Dabei ist  $J_1$  die Besselsche Funktion erster Ordnung,  $J_1(\Phi r_1) = J_1\left(-\sqrt{\frac{\omega}{a}} r_1 - \tau\right)$  ist konjugiert komplex zu  $J_1\left(-\sqrt{\frac{\omega}{a}} r_1 \sqrt{-1}\right)$  und  $J_1\left(-\sqrt{\frac{\omega}{a}} r_1 \sqrt{-1}\right) = -J_1\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} r_1 \sqrt{-1}\right)$ . Diese Funktion ist in den Funktionentafeln von Jahnke-Emde tabelliert.

Schreibt man an der Oberfläche die konstante, reelle Wärmeübergangszahl  $\alpha_1$  vor, so erhält man die Gastemperatur  $\theta$  in der Umgebung des Zylinders aus der bekannten Beziehung

$$\alpha_1 (\theta - t_1) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_1$$

Damit wird

$$\left(\frac{\theta}{A}\right) = \left[1 + \frac{b \sqrt{\omega}}{\alpha_1} e^{-\tau} \frac{J_1(\Phi r_1)}{J_0(\Phi r_1)}\right] \quad (35)$$

d. h. die Gastemperatur eilt um den Phasenwinkel des komplexen Klammerausdruckes der Temperatur an der Zylinderoberfläche voraus und ist seinem Betrag proportional.

Als zweite Grundaufgabe ergibt sich folgende: In einem allseitig ausgedehnten homogenen Körper sei eine zylindrische Bohrung (Abb. 19) vom Halbmesser  $r_0$  angebracht. An der Innenfläche dieses Körpers soll in jedem Punkt eine Temperaturschwingung  $t = A e^{i(\omega t + \nu)}$  erzwungen werden.

Die Lösung wird in diesem Fall durch die genannte Hankelsche Funktion  $H_0^{(2)}(\Phi r)$  gebildet, die allein bei negativem Imaginärteil des komplexen Argumentes mit wachsendem Betrag gegen Null geht. Die Gleichung des Temperaturfeldes lautet

$$t = A e^{i(\omega t + \nu)} \frac{H_0^{(2)}(\Phi r)}{H_0^{(2)}(\Phi r_0)} \quad (r \geq r_0) \quad (36)$$

zu  $H_0^{(2)}\left(-\sqrt{\frac{\omega}{a}} r \sqrt{-1}\right)$  ist die Funktion  $H_0^{(2)}\left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} r \sqrt{-1}\right)$  konjugiert komplex, und diese ist in den Tafeln von Jahnke-Emde tabelliert, so daß man die Zahlenwerte unmittelbar verwenden kann.

Auch (36) stellt eine wandernde Welle dar, die aber schneller abklingt als je nach (34) und außerdem von innen nach außen läuft. Diese zwei Gleichungen liefern die Grundwellen für symmetrische Zylinderprobleme.

Mit gegen unendlich wachsendem Halbmesser  $r_0$  der Oberfläche gehen beide in die bekannte Gleichung für die Planwelle über.

Im folgenden wird nun gezeigt, daß man mit den vorausgehend definierten Zylindergrundwellen (ähnlich wie bei ebenen Aufgaben) die Lösung für eine Anzahl Zylinderprobleme unmittelbar angeben kann.

<sup>1</sup> Vgl. Gröber, Temperaturverlauf und Wärmeströmung in periodisch erwärmten Körpern. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 300 S. 6f.

<sup>2</sup> Der Nachweis der Unveränderlichkeit der eigentlichen Dämpfung ist für Zylinderwellen noch nicht gelungen.

<sup>3</sup> Siehe hierzu die Gleichungen bei Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 101, 102. Leipzig 1928.

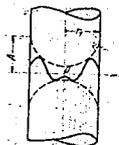


Abb. 18. Zylinder, an dessen Oberfläche  $t = r_0$  hat sinusförmige Temperaturschwingungen erzwungen werden.

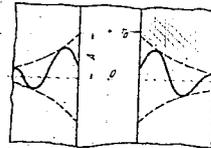


Abb. 19. Zylindrische Bohrung in einem allseitig ausgedehnten Körper, an dessen Innenfläche  $t = A e^{i(\omega t + \nu)}$  harmonische Temperaturschwingungen erzwungen werden.

2.1  
000382

**Aufgabe 7:** Die Wand eines unendlich langen Hohlzylinders bestehe aus zwei konzentrischen Röhren von verschiedenem Werkstoff (Abb. 20). An der freien Innen- und Außenfläche werden harmonische Temperaturschwingungen von gleicher Frequenz  $\omega$  erzwungen, die in allen Punkten der äußeren Oberfläche die gleiche Amplitude  $A_1$  und Phase  $\varphi_1$  besitzen und entsprechend auf der Innenfläche  $A_2$  und  $\varphi_2$ . Das Temperaturfeld ist gesucht.

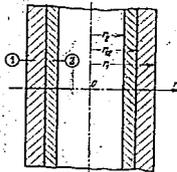


Abb. 20. Hohlzylinder, der aus zwei konzentrischen Schichten von verschiedenem wärmeleitend verbindenden Stoffen besteht; an seinen freien Oberflächen ( $r = r_1$  und  $r = r_2$ ) werden harmonisch veränderliche Temperaturen erzwungen, deren Amplituden, Phasen und Frequenzen innen und außen verschieden sind.

In jedem Stoff setzt sich die resultierende Temperatur aus drei Grundwellen zusammen:

1. aus der von der eigenen Oberfläche eindringenden Welle,
2. aus der an der Grenzfläche reflektierten Welle,
3. aus der vom anderen Stoff kommenden Welle.

Bezeichnet man die Amplitude der von der entsprechenden Oberfläche an der Grenzfläche ankommenden Grundwelle an dieser mit  $T_1$  bzw.  $T_2$  und ihre Phasenwinkel mit  $\epsilon_1$  bzw.  $\epsilon_2$ , sowie die zugehörigen Reflexionszahlen an der Grenzfläche mit  $\varrho_{12}$  bzw.  $\varrho_{21}$ , so lauten die Lösungen

$$t_1 = T_1 e^{i(\omega t + \epsilon_1)} \left[ \frac{J_0(\Phi_1 r)}{J_0(\Phi_1 r_{12})} - \varrho_{12} \frac{H_0^{(2)}(\Phi_1 r)}{H_0^{(2)}(\Phi_1 r_{12})} \right] + T_2 (1 - \varrho_{21}) e^{i(\omega t + \epsilon_2)} \frac{H_0^{(2)}(\Phi_2 r)}{H_0^{(2)}(\Phi_2 r_{12})} \quad (37a)$$

$r_1 \geq r \geq r_{12}$

$$t_2 = T_2 e^{i(\omega t + \epsilon_2)} \left[ \frac{H_0^{(2)}(\Phi_2 r)}{H_0^{(2)}(\Phi_2 r_{12})} + \varrho_{21} \frac{J_0(\Phi_2 r)}{J_0(\Phi_2 r_{12})} \right] + T_1 (1 + \varrho_{12}) e^{i(\omega t + \epsilon_1)} \frac{J_0(\Phi_1 r)}{J_0(\Phi_1 r_{12})} \quad (37b)$$

$r_{12} \geq r \geq r_2$

An der Grenzfläche der beiden Stoffe müssen dabei wieder folgende Bedingungen erfüllt sein

$$t_{12} = t_{21}, \quad \text{oder} \quad -\lambda_1 \left( \frac{\partial t_1}{\partial r} \right)_{r=r_{12}} = -\lambda_2 \left( \frac{\partial t_2}{\partial r} \right)_{r=r_{12}}$$

Zur Berechnung der Reflexionszahlen aus diesen zwei Gleichungen kann man die von den beiden Oberflächen ausgehenden Grundwellen als völlig unabhängig voneinander voraussetzen und erhält

$$\varrho_{12} = \frac{b_1 \begin{bmatrix} -J_1(\Phi_1 r_{12}) \\ J_0(\Phi_1 r_{12}) \\ H_1^{(2)}(\Phi_1 r_{12}) \\ H_0^{(2)}(\Phi_1 r_{12}) \end{bmatrix} - b_2 \begin{bmatrix} -J_1(\Phi_2 r_{12}) \\ J_0(\Phi_2 r_{12}) \\ -J_1(\Phi_2 r_{12}) \\ J_0(\Phi_2 r_{12}) \end{bmatrix}}{b_1 \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(\Phi_1 r_{12}) \\ H_0^{(2)}(\Phi_1 r_{12}) \\ H_1^{(2)}(\Phi_1 r_{12}) \\ H_0^{(2)}(\Phi_1 r_{12}) \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} -J_1(\Phi_2 r_{12}) \\ J_0(\Phi_2 r_{12}) \\ -J_1(\Phi_2 r_{12}) \\ J_0(\Phi_2 r_{12}) \end{bmatrix}} \quad (38a)$$

$$\varrho_{21} = \frac{b_2 \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(\Phi_2 r_{12}) \\ H_0^{(2)}(\Phi_2 r_{12}) \\ H_1^{(2)}(\Phi_2 r_{12}) \\ H_0^{(2)}(\Phi_2 r_{12}) \end{bmatrix} - b_1 \begin{bmatrix} J_1(\Phi_1 r_{12}) \\ J_0(\Phi_1 r_{12}) \\ -J_1(\Phi_1 r_{12}) \\ J_0(\Phi_1 r_{12}) \end{bmatrix}}{b_2 \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(\Phi_2 r_{12}) \\ H_0^{(2)}(\Phi_2 r_{12}) \\ H_1^{(2)}(\Phi_2 r_{12}) \\ H_0^{(2)}(\Phi_2 r_{12}) \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} J_1(\Phi_1 r_{12}) \\ J_0(\Phi_1 r_{12}) \\ -J_1(\Phi_1 r_{12}) \\ J_0(\Phi_1 r_{12}) \end{bmatrix}} \quad (38b)$$

Durch Vertauschen der Stoffwerte und der Zeichen für die Zylinderfunktionen läßt sich jede dieser Reflexionszahlen in die andere überführen.

Beim Grenzübergang  $\Phi r_{12} \rightarrow \infty$  wird

$$\lim_{\Phi r_{12} \rightarrow \infty} \frac{J_1(\Phi r_{12})}{J_0(\Phi r_{12})} = \dots, \quad \lim_{\Phi r_{12} \rightarrow \infty} \frac{H_1^{(2)}(\Phi r_{12})}{H_0^{(2)}(\Phi r_{12})} = \dots + 1$$

Damit gehen dann die Reflexionszahlen, wie zu erwarten ist, in die bekannten Werte der ebenen Aufgabe über.

Für  $r_{12} = 0$  wird auch die Reflexionszahl  $\varrho_{12}$  zu Null.

000321a

Zur Erfüllung der Randbedingungen an der Oberflächen müssen die Amplituden  $T$  und Phasen  $\epsilon$  der Grundwellen noch bestimmt werden. Man berechnet sie am einfachsten in komplexer Form, wobei sich mit den früheren Bezeichnungen folgende Bestimmungsgleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} \text{für } r = r_1: & \quad \mathfrak{I}_1 \left[ \frac{J_0(\Phi_1 r_1)}{J_0(\Phi_1 r_{12})} + \alpha_{12} \frac{H_0^*(\Phi_1 r_1)}{H_0^*(\Phi_1 r_{12})} \right] + \mathfrak{I}_2 \frac{H_0^*(\Phi_1 r_1)}{H_0^*(\Phi_1 r_{12})} (1 - \alpha_{21}) = \mathfrak{A}_1, \\ \text{für } r = r_2: & \quad \mathfrak{I}_2 \left[ \frac{H_0^*(\Phi_2 r_2)}{H_0^*(\Phi_2 r_{12})} + \alpha_{21} \frac{J_0(\Phi_2 r_2)}{J_0(\Phi_2 r_{12})} \right] + \mathfrak{I}_1 \frac{J_0(\Phi_2 r_2)}{J_0(\Phi_2 r_{12})} (1 - \alpha_{12}) = \mathfrak{A}_2. \end{aligned}$$

Hieraus ist  $\mathfrak{I}_1$  und  $\mathfrak{I}_2$  zu berechnen.

Wie bei den ebenen Aufgaben lassen sich auch hier Sonderfälle und Verallgemeinerungen durchführen. Es ergibt sich z. B. für  $r_2 = 0$  die Lösung für den aus zwei Stoffen bestehenden Vollzylinder (Abb. 21) 1. Dabei muß  $T_2$  gleich Null sein, da sich ein endlicher Wert hierfür an der Grenzfläche 1, 2 nur dann ergeben würde, wenn die Temperaturschwingung in der Zylinderachse eine unendlich große Amplitude hätte. Man erhält somit folgende Gleichungen für die Temperaturfelder:

$$t_1 = T e^{i(\omega t + \epsilon)} \left[ \frac{J_0(\Phi_1 r)}{J_0(\Phi_1 r_{12})} + \alpha_{12} \frac{H_0^*(\Phi_1 r)}{H_0^*(\Phi_1 r_{12})} \right] \quad (39a)$$

$(r_1 \geq r \geq r_{12}),$

$$t_2 = T e^{i(\omega t + \epsilon)} (1 + \alpha_{12}) \frac{J_0(\Phi_1 r)}{J_0(\Phi_1 r_{12})} \quad (39b)$$

$(r_{12} \geq r \geq 0).$

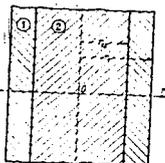


Abb. 21: Vollzylinder besteht aus zwei verschiedenen, säulenförmig verlaufenden Stoffen. Die äußere Oberfläche ist mit 1, die innere mit 2, die Grenzfläche mit  $r_{12}$  bezeichnet.

Die Temperaturverteilung in Stoff 1 ist also wieder durch zwei einander entgegengesetzte Grundwellen bestimmt.

12. Anwendung auf die unmittelbare Messung von periodisch veränderlichen Gastemperaturen. Die zuletzt entwickelten Gleichungen erlauben die Berechnung der Gastemperatur außerhalb eines Zylinders aus dessen Oberflächentemperatur, sofern man Stoff 1 als eine ideale Grenzschicht annehmen darf (Abb. 22). Ihre Dicke, wie auch ihre Stoffeigenschaften müßten dabei unveränderlich sein. Im Gasraum außerhalb derselben soll eine so starke Konvektion vorausgesetzt werden, daß die Temperatur in jedem Punkt von gleicher Größe, Phase und Frequenz ist. Man erhält dann aus (39a) die Gastemperatur  $\theta$ , indem man  $r = r_1$  setzt, zu

$$\theta = T e^{i(\omega t + \epsilon)} \left[ \frac{J_0(\Phi_1 r_1)}{J_0(\Phi_1 r_{12})} + \alpha_{12} \frac{H_0^*(\Phi_1 r_1)}{H_0^*(\Phi_1 r_{12})} \right]$$

und die Oberflächentemperatur  $t_{12}$  am Zylinder mit  $r = r_{12}$  zu

$$t_{12} = T e^{i(\omega t + \epsilon)} (1 + \alpha_{12}).$$

Der Quotient beider wird daher

$$\left( \frac{\theta}{t_{12}} \right) = \frac{1}{1 + \alpha_{12}} \left[ \frac{J_0(\Phi_1 r_1)}{J_0(\Phi_1 r_{12})} + \alpha_{12} \frac{H_0^*(\Phi_1 r_1)}{H_0^*(\Phi_1 r_{12})} \right]. \quad (40)$$

Dies ist eine komplexe Größe, deren absoluter Betrag gleich dem Amplitudenverhältnis der Temperaturen  $\theta$  und  $t_{12}$  ist und deren Argument den Phasenwinkel zwischen beiden darstellt. Man erkennt ohne weiteres, daß für  $r_1 = r_{12}$  also verschwindende Dicke der Grenzschicht dieser Quotient gleich 1 wird, d. h. die Gastemperatur ist gleich der Oberflächentemperatur. Je größer  $r_1$  im Vergleich zu  $r_{12}$

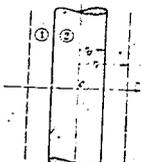


Abb. 22: Zylinder aus Stoff 1 in einem Gasraum, dessen Temperatur harmonisch veränderlich ist. Infolge einer Konvektion ist die Temperatur im Gasraum gleichmäßig und unterscheidet sich nicht von derjenigen der Zylinderwand.

1 Die entsprechende Lösung für Wirbelstromprobleme wurde von J. Fischer, Jahrb. d. drahtl. Telegraph. u. Teleph. 40 (1930) S. 208 abgeleitet.

wird, um so größer wird der absolute Betrag des Temperaturverhältnisses und um so größer wird auch der Phasenwinkel zwischen beiden Temperaturen.

Die experimentelle Bestimmung von Gastemperaturen kann mit Hilfe von Thermoelementen oder Widerstandsdrähten erfolgen. Dabei muß dann aus der tatsächlich gemessenen Temperatur der Lotstelle oder des Meßdrahtes die Gastemperatur ermittelt werden. Aus dem verschiedenen Aufbau von 35 und 40 ist dabei zu ersehen, daß abgesehen von dem Temperaturabfall im Querschnitt des Drahtes auch die Art des Wärmeüberganges von Einfluß auf den Unterschied zwischen der tatsächlichen Gastemperatur und der gemessenen Drahttemperatur ist. Die Annahme einer konstanten reellen Wärmeübergangszahl bei periodisch veränderlichen Temperaturen dürfte hierbei dem physikalischen Vorgang weniger gerecht werden als die einer entsprechenden komplexen Größe. Ihre Ableitung soll an dieser Stelle nicht vorgenommen werden, da der Rechnungsgang völlig dem für ebene Aufgaben entspricht.

Zur Feststellung der Größenordnung des vorstehenden Temperaturverhältnisses kann folgende Rechnung die auch bei anderen Wärmeübergangsproblemen (möglichst) vorgenommen werden. Man ermittelt aus den für stationäre Temperaturfelder bekannten Wärmeübergangszahlen  $\alpha_0$  die Dicke einer idealen Grenzschicht und setzt diesen Wert in obige Beziehung ein. Die Ausgangsbeziehung lautet hierzu

$$\alpha_0 \vartheta - t_{12} = -\lambda_1 \left( \frac{e t_1}{r} \right)_{12}$$

Hierbei sind jetzt  $\vartheta$  und  $t_{12}$  die unveränderlichen Temperaturen des Gases und der Wandoberfläche im stationären Fall;  $\lambda_1$  ist die Wärmeleitzahl der Grenzschicht, und  $t_1$  soll den Temperaturverlauf in dieser angeben. Dieser ist im vorliegenden Fall gegeben durch

$$t_1 = \vartheta \ln r_{12} - t_{12} \ln r_1 - \vartheta - t_{12} \ln r \quad \frac{1}{\ln \frac{r_{12}}{r_1}}$$

Damit wird

$$\left( \frac{e t_1}{r} \right)_{12} = - \frac{1}{r_{12} \ln \frac{r_{12}}{r_1}} (\vartheta - t_{12})$$

so daß man als äußeren Halbmesser der Grenzschicht erhält

$$r_1 = r_{12} e^{-\frac{\lambda_1}{\alpha_0}} = r_{12} e^{-\frac{1}{Nu}}$$

wobei

$$Nu = \frac{\alpha_0 r_{12}}{\lambda_1} = \text{Nußelt'sche Kennzahl.}$$

Mit diesem Wert kann man aus (40) das Amplitudenverhältnis und den Phasenwinkel zwischen Gas- und Oberflächentemperatur bestimmen.

Der hier eingeschlagene Rechnungsgang dürfte mit guter Annäherung immer dann zulässig sein, wenn das Strömungsfeld in der näheren Umgebung des Zylinders auf  $i$  bei den periodischen Temperaturschwankungen des Gases dasselbe ist, wie im stationären Zustand. Bei praktischen Messungen z. B. der augenblicklichen Gastemperatur im Zylinder oder Auspuff von Kraftmaschinen bestehen wesentlich unübersichtlichere Zusammenhänge, als hier vorausgesetzt wurde. Die entwickelten Beziehungen scheinen aber eine erste Grundlage für die theoretische Behandlung einfacher Probleme dieser Art zu bieten.

Die Erweiterung der Aufgaben für Zylindersysteme bietet in Anlehnung an die entsprechenden ebenen Probleme keine besonderen Schwierigkeiten. Es werden daher an dieser Stelle keine Lösungen für weitere Aufgaben abgeleitet.

13. Zusammenfassung. Die vorausgehenden Entwicklungen geben an Hand einfacher Beispiele von ebenen, Kugel- und Zylinderproblemen eine anschauliche Methode zur Bestimmung von Lösungen der Differentialgleichung der Wärmeleitung für

000323

periodisch veränderliche (quasistationäre) Temperaturfelder. Dabei wird ausgehend von bekannten Erscheinungen der Wellenlehre gezeigt, daß man einer bestimmt definierten Temperatur- oder Wärmegrundwelle die Eigenschaften der Interferenz, Reflexion und Brechung zuschreiben kann (für Beugungserscheinungen konnte noch keine einfache Lösung gefunden werden). Dadurch wird es möglich, für einige technisch nicht unbedeutende Aufgaben übersichtliche Lösungen des Temperaturfeldes anzugeben. Die Anschaulichkeit der Methode ermöglicht es aber auch in sehr verwickelten Fällen, die eine exakte Lösung nicht mehr zulassen, noch wenigstens qualitativ richtige Schlüsse über das Verhalten der Temperatur-Wärmewellen zu ziehen. Infolge der Verwendung von komplexen Funktionen zur Darstellung der Vorgänge kann die zahlenmäßige Auswertung in einfachster Weise auf zeichnerischem Wege vorgenommen werden. — Durch Übertragung der gefundenen Beziehungen auf entsprechende Wärmeübergangsprobleme konnten, unter Voraussetzung einer idealen (Prandtschen) Grenzschicht, Zusammenhänge zwischen harmonisch veränderlichen Gas- und Wandtemperaturen abgeleitet werden. Die rechnermäßig einfachste Erfassung des Wärmeüberganges führte dabei auf komplexe Wärmeübergangszahlen.

(Mitteilung aus dem Maschinenlaboratorium der Techn. Hochschule Karlsruhe.)

TITLE PAGE

2. Zur Messung schnell wechselnder Temperaturen in der  
Zylinderwand von Kolbenmaschinen.  
On the measurement of rapidly changing temperatures  
in the cylinderwalls of piston engines.

Francis Nos. 324 - 330

000324

## Zur Messung schnell wechselnder Temperaturen in der Zylinderwand von Kolbenmaschinen

Von HANS PFRIEM, Karlsruhe

(Mitteilung aus dem Maschinenlaboratorium  
der Technischen Hochschule Karlsruhe)

1. Einleitung — 2. Einfluß der Bohrung — 3. Einfluß der Berührungsfäche der  
Thermosstoffpaare — 4. Einfluß des Peltier-Effektes — 5. Vorschlag für einen neuen  
Meßstopfen — 6. Zusammenfassung

**1. Einleitung.** Bei allen Wärmekraftmaschinen verdient der mit dem Arbeitsspiel veränderliche Wärmeübergang vom Arbeitsmittel an die Zylinderwand besondere Beachtung. Neben dem Einblick in thermische Vorgänge erlaubt dieser die Berechnung der Temperaturspannungen im Werkstoff und gibt damit auch Anhaltspunkt über konstruktive Maßnahmen. Die übergehende Wärme wird versuchsstechnisch am einfachsten durch genaues Messen des zeitlichen Temperaturverlaufs an einem bestimmten Punkt der Zylinderwand bestimmt. Hierzu wurden schon mehrmals Thermo-elemente verwendet<sup>1)</sup>, die in die Wand grundsätzlich gemäß Abb. 1 eingebaut wurden.

Die Meßdrähte können dabei unmittelbar in die Zylinderwand eingelötet bzw. genietet werden; sie können aber auch in einem besonderen Meßstopfen untergebracht sein, der seinerseits wiederum in die Wand eingesetzt wird. Das letzte Verfahren hat den Vorzug der einfacheren Herstellung und der Eichfähigkeit der fertigen Meßstelle vor und nach dem Versuch. In beiden Fällen versucht man, die Lötstelle des Thermoelementes möglichst nahe ( $s = 0,5 \text{ mm}$ ) an die gas- bzw. dämpfseitige Oberfläche der Zylinderwand zu bringen, s. Abb. 1. Dies gelingt jedoch mit Rücksicht auf die mechanische

<sup>1)</sup> A. Nübel u. G. Eichelberg in „Wärmedurchgang bei einfachen Körpern und Maschinen“, VDI-Forschungsheft 800, Berlin 1928. — Geor. Sulzer, Hauszeitschrift 1926 Nr. 2 u. Z. VDI Bd. 70 (1926) S. 429. — G. Eiche, Temperaturverteilung und Wärmeübergang bei Kolben von Verbrennungskraftmaschinen, Diss. Karlsruhe 1931 u. Sonderheft Dieselmotoren V, Berlin 1931. — F. Salomon, Wärmefluß durch Kolben und Kolbenring im Dieselmotor, Diss. Zürich 1932 und Forschung Bd. 4 (1933) S. 193.

AMT  
 SAZ

000325

Festigkeit der Meßstelle nicht ganz. Die Thermokräfte können sich nämlich entlang der zylindrischen Berührungsfläche der Lötstelle noch ausgleichen. Man hat daher angenommen, daß mit dieser Meßanordnung die von Verbrennungs- bzw. Dampfdruck auf die Wand übertragenen Temperaturschwingungen in einer Tiefe  $\epsilon$ , der Meßtiefe des Stopfens, d. h. also an der innersten Berührungsstelle der beiden Thermostoffpaare gemessen werden. Beim Auswerten der photographisch aufgenommenen Schwingungen würde dann vorausgesetzt, daß das Temperaturfeld durch den Einbau des Thermoelementes keine wesentlichen Störungen erfahren hatte, also übereinstimmte mit dem der homogenen Wand. Dadurch konnte man mit Hilfe der bekannten Lösung des Wärmeleitungsproblems im einseitig unendlich ausgedehnten Körper<sup>2)</sup> die gemessene Temperaturschwingung auf die Oberfläche extrapolieren und hiermit den Wärmeübergang zwischen Gas und Wand berechnen.

Die dem vorstehend angedeuteten Rechnungsgang zugrunde liegenden Annahmen waren nicht weiter bewiesen, weshalb eine kritische Betrachtung der Thermoelemente unter Berücksichtigung der zeitlich veränderlichen Temperaturen ratsam erschien. Nun sind, ganz abgesehen von den thermoelektrischen Vorgängen unmittelbar an der Lötstelle, allein schon die Wärmeleitungsverhältnisse in der näheren Umgebung der Meßstelle nicht ohne weiteres zu überschauen. Eine völlig exakte Erfassung des sich einstellenden Temperaturfeldes scheint von vornherein aussichtslos.

Um aber die Grenzen der Brauchbarkeit dieses Thermostopfens wenigstens der Größenordnung nach beurteilen zu können, werden die verwickelten Verhältnisse in eine Anzahl Teilprobleme zerlegt. Diese sollen dann einzeln kritisch betrachtet werden, wobei das von mir an anderer Stelle entwickelte Verfahren<sup>3)</sup> die physikalisch anschauliche Grundlage bietet. Dort wurde gezeigt, daß die als Grundwelle definierte Temperatur-(Wärme-)Welle im einseitig unendlich ausgedehnten Körper den bei anderen Wellenvorgängen bekannten Gesetzen der Interferenz, Reflexion, Brechung und Beugung unterliegt. Diese Analogie zu elektrischen oder akustischen Wellen erlaubt die Bildung einer anschaulichen Vorstellung von der Arbeitsweise der Thermoelemente.

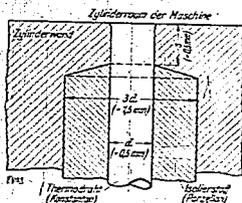


Abb. 1. Bisherige Bauart der Thermolötstelle zum Messen von periodisch veränderlichen Wandtemperaturen

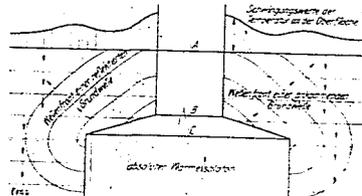


Abb. 2. Reflexion der Temperatur- und Wärmewellen an der erweiterten Bohrung

## 2. Einfluß der Bohrung.

Denkt man sich zunächst den Thermodraht des Meßstopfens wie auch die gesamte Bohrung als völligen Wärmeisoliator, so wird das Temperaturfeld nur durch die (kegelförmige) Erweiterung der Bohrung beeinflusst. Die von der gasseitigen Oberfläche A kommenden, ebenen Grundwellen werden an der in Abb. 2 gezeichneten Kegelfläche vollkommen reflektiert und laufen zurück. Infolge der begrenzten Ausdehnung der Reflexionsfläche werden sie hierbei um die Kanten bei B und C gebogen. Die Schwingungswerten entlang einer reflektierten Wellenfront sind dabei nicht mehr konstant. Das Temperaturfeld wird vor allem infolge der auftretenden Beugungserscheinungen schon so verwickelt, daß es praktisch nicht mehr genau zu berechnen ist. Eine Abschätzung der Größenordnung des zu erwartenden Fehlers wird aber nach der in der erwähnten Arbeit<sup>3)</sup> gegebenen Lösung der Aufgabe 2 ermöglicht. Geht man von einer an der Kante B gemessenen Temperaturschwingung aus und rechnet hieraus einseitig die Temperatur der Oberfläche durch Extrapolation (wie bisher üblich) nach der Beziehung für den einseitig unendlich ausgedehnten Körper, sowie andererseits nach Gl. 13 der genannten Arbeit<sup>3)</sup> (mit  $\alpha_0 = 1$ ), bildet dann

<sup>2)</sup> Vgl. H. Gräber u. S. Erk, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung S. 73, Berlin 1933.

<sup>3)</sup> H. Pfriem, Beitrag zur Theorie der Wärmeleitung bei periodisch veränderlichen (quasistationären) Temperaturfeldern, Diss. Karlsruhe 1934 u. Ing.-Arch. Bd. 6 (1935) Heft 2 S. 97.

000326

den Quotienten beider Ergebnisse und definiert die Abweichung dieses Verhältnisses von 1 als den zu erwartenden Fehler  $f$ , so erhält man hierfür:

$$f = 100 \frac{1 - \frac{2 \pi s}{l} (1+j)}{1 + \frac{2 \pi s}{l} (1+j)} = 100 \left[ \frac{1 - \frac{2 \pi s}{l} (1+j)}{1 + \frac{2 \pi s}{l} (1+j)} \right] \cdot 100$$

Hierin bedeuten  $f$  die Wellenlänge der Temperaturwelle,  $s$  die Meßtiefe des Thermostoffens,  $j = \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda}}$ .

Der Amplitudenfehler ergibt sich damit als absoluter Betrag von  $f$  zu:

$$|f| = 100 \left| \frac{1 - \frac{2 \pi s}{l} (1+j)}{1 + \frac{2 \pi s}{l} (1+j)} \right|$$

Man erkennt, daß  $f$  ausschließlich von  $s/l$ , d. h. vom Verhältnis der Meßtiefe zur Wellenlänge einer Temperatur-Grundwelle abhängig ist. Bei kleinen Werten von  $s/l$  erhält man als Näherungsgleichung für den Amplitudenfehler:

$$f \approx 435 (s/l) - 22,6 (s/l)^2 \%$$

gültig für:  $100 (s/l)^2 \ll 1$ .

Hieraus ergibt sich, daß nur bei Wellenlängen  $l \approx 145 s$  der Amplitudenfehler kleiner als 1% wird. Für stationäre Temperaturfelder ( $l = \infty$ ) verschwindet dieser Fehler ganz. Die bisherige Bauart der Thermolötstelle ist also für sehr langsam veränderliche Temperaturen trotz der weiten Bohrung brauchbar, was mit den Berechnungen von F. Salzmann übereinstimmt.

Die Extremwerte des Amplitudenfehlers ergeben sich für Werte von  $s/l$ , die sich aus der folgenden transzendenten Beziehung berechnen:

$$\lg(2 \pi s/l) + 2 \lg(2 \pi s/l) = 0$$

Hieraus erhält man den größtmöglichen Fehler für  $s/l \approx 2/3$ , zu  $f \approx 114 \%$ . Bei zunehmendem  $s/l$  nähert sich  $f$  mit periodischen, kleinen Schwankungen dem Grenzwert 100%.

Bei der praktischen Ausführung ist nun der die Bohrung ausfüllende Isolierstoff kein absoluter Wärmeisoliator. Dadurch können die an der Kegelfläche ankommenden Wärmewellen auch nicht vollkommen reflektiert werden. Sie dringen vielmehr teilweise in den Isolierstoff ein und werden dabei gebrochen. Nachdem aber die Wärmebelastungszahlen  $q$  von Metallen um etwa zwei Zehnerpotenzen größer sind als die von Isolierstoffen, kann man für die vorliegende Näherungsrechnung stets vollkommen Reflexion annehmen.

Als Beispiel diene eine langsam laufende Viertaktmaschine mit  $n = 200$  U/min. Mit der Kreisfrequenz der Grundschwingung  $\omega = 10,5 s^{-1}$  und der Temperaturleitzahl  $\lambda = 0,13 \text{ cm}^2 s^{-1}$  wird die Grundwellenlänge  $l$  der in Gußeisen sich ausbildenden, unharmonischen Temperaturwelle  $l = 2 \pi \sqrt{2 \lambda / \omega} \approx 1 \text{ cm}$ . Bei einer Meßtiefe von  $s = 0,5 \text{ mm}$  ergibt sich also ein Verhältnis  $s/l = 0,05$  und damit ein Amplitudenfehler von  $f \approx 22 \%$ . Für die Oberwellen der unharmonischen Temperaturverzeichnung erhält man mit steigender Ordnungszahl entsprechend größere Fehler. Neben der dies bedeutet aber, daß die bisher übliche Bauart von Thermolötstellen für die Messung von periodisch veränderlichen Temperaturen in der Zylinderwand von Kolbenmaschinen völlig ungeeignet ist und praktisch nur bei stationären Temperaturfeldern brauchbare Ergebnisse liefert.

**3. Einfluß der Berührungsfäche der Thermostoffpaare:** In den beiden an der Meßstelle parallel laufenden Thermostoffen suchen sich, entsprechend ihren unterschiedlichen Temperaturleitzahlen, zwei verschiedene Wellenlängen auszubilden, wenn in jedem Punkt der Oberfläche  $A$  harmonische Temperaturänderungen gleicher Frequenz, Schwingungsweite und Phase erzwungen werden. Daher würden mit zunehmender Eindringtiefe immer größere Unterschiede in der Phase

<sup>1)</sup> Die Bezeichnung  $j$  (statt  $\beta$ ) wurde gewählt in Übereinstimmung mit der Dissertation des Verfassers (Fußann. 3), der einzelne Gleichungen unmittelbar entnommen sind. Auch wird hierdurch eine Verwechslung mit dem Wärmehalt und der Stromstärke, die durch  $j$  bezeichnet werden, vermieden.

<sup>2)</sup> F. Salzmann, vgl. Fußann. 1. Als Beweis für die fehlerfreie Messung von periodisch veränderlichen Temperaturen können die Entwicklungen von F. Salzmann (wie dieser selbst schon andeutet) jedoch nicht angesehen werden.

<sup>3)</sup> Die Wärmebelastungszahl ist nach meiner früheren Arbeit (s. Fußann. 3) bestimmt durch die Quadratwurzel aus dem Produkt der Wärmeleitzahl, der spezifischen Wärme und dem spezifischen Gewicht des Stoffes sowie der Einheit der Kreisfrequenz der Schwingung; sie hat also die Dimension einer Wärmeübergangszahl.





flächen 1-3 bzw. 2-3 als völlig gleichmäßig angenommen wird<sup>3)</sup>. Zum Erzielen einer ausreichenden Meßgenauigkeit muß man im allgemeinen die stationäre mittlere Thermospannung ausgleichen, so daß nur Meßströme auftreten können, die den periodisch veränderlichen Ober- und Unter-temperaturen entsprechen. Diese Meßströme und Ober- und Unter-temperaturen sind aber bei kleinen Schwingungsweiten einander proportional, so daß man für die Ergiebigkeit der Wärmequellen in der Grenzfläche die Beziehung erhält:

$$q_{12} = P_{12} \epsilon_0 = P_{12} T_0 \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right) e^{j(\omega t + \varphi)}$$

wobei  $P_{12}$  die Proportionalitätszahl für die Stoffpaare 1-3 bzw. 2-3 darstellt.

Damit ergibt sich die Bedingungs-gleichung für die Größe der Reflexionszahl:

$$-\lambda \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\lambda \frac{\partial \epsilon_1}{\partial x} \Big|_{x=0} - q_{12}$$

Hieraus erhält man:

$$\epsilon_1 = \frac{b_1 + \frac{\epsilon - j \frac{4}{\omega}}{1 - \frac{\epsilon}{\omega}} \cdot P_{12}}{b_2 + \frac{\epsilon - j \frac{4}{\omega}}{1 - \frac{\epsilon}{\omega}} \cdot P_{12}}$$

Man erkennt, daß die Reflexionszahl im allgemeinen eine komplexe Größe ist, d. h. die von der Oberfläche ( $x=0$ ) her eindringende Grundwelle wird an der Grenzfläche ( $x=0$ ) mit dem Phasenwinkel der Reflexionszahl zurückgeworfen. Der absolute Betrag von  $\epsilon$  gibt dabei das Verhältnis der Schwingungsweiten der reflektierten zur ankommenden Grundwelle in der Grenzfläche an. Gl. 4 zeigt außerdem, daß der Einfluß der Peltierwärme mit zunehmender Frequenz der Temperaturschwingung verschwindet.

Die Proportionalitätszahl  $P_{12}$  kann man aus dem gesamten Widerstand  $R$  des Meßstromkreises, der in diesem Kreise herrschenden, auf die Temperatureinheit bezogenen Gesamtspannung  $u_{12}$ , dem Peltierbeiwert  $\pi_{12}$  und dem Querschnitt  $F_{12}$  der Lötstelle berechnen. Es ist

$$P_{12} = \frac{\pi_{12} u_{12}}{R F_{12}}$$

Solange der Einfluß der Peltierwärme auf die Temperaturverteilung klein ist, kann man die Reflexionszahl einfacher aus der folgenden Näherungsgleichung berechnen:

$$\epsilon_1 \approx \left| \frac{b_2 - b_1 - 2 \frac{\epsilon - j \frac{4}{\omega}}{1 - \frac{\epsilon}{\omega}} P_{12} \left( \frac{b_1}{b_2} - b_1 \right)}{b_2 + b_1} \right| \quad (6)$$

Daraus ergibt sich, daß man bei den vorgeschlagenen Meßstoffen die Peltierwärme völlig vernachlässigen darf, wenn

$$b_2 - b_1 \gg 2 \frac{\pi_{12} u_{12}}{\omega R F_{12}} \quad (7)$$

Diese Ungleichung kann aber in allen praktischen Fällen weitgehend erfüllt werden, so daß der Peltiereffekt praktisch nie berücksichtigt zu werden braucht. Damit erhält man für  $\epsilon_1$  die einfache Beziehung:

$$\epsilon_1 \approx (b_2 - b_1) / (b_2 + b_1) \quad (8)$$

Beim Wärmeübergang in Kolbenmaschinen ist nun, wie früher schon erwähnt wurde, die an die Wand übergehende Wärmemenge (und nicht die Temperatur) an der Oberfläche als gegeben zu betrachten. Dadurch erhält man nach Gl. 3 dann eine für die Messung günstige, große Temperatur

<sup>3)</sup> Bei ungleicher Stromverteilung wird an den Stellen größerer Stromdichte mehr Wärme verbraucht (bzw. erzeugt), so daß sich hier eine höhere (oder tiefere) Temperatur und dementsprechend eine etwas veränderte Thermospannung einstellt. Diese bewirkt dann eine gleichmäßigere Verteilung des Stromes, so daß die obige Annahme als erste Näherung gerechtfertigt erscheint, sofern die Peltierwärme überhaupt eine Rolle spielt.

000330

Schwingungsweite  $A_0$ , wenn  $\epsilon_1$  möglichst groß ist. Dies ist aber stets der Fall, wenn  $b_3 \gg b_1$  ist, was man durch geeignete Wahl der Werkstoffe immer verwirklichen kann. Dabei ist noch zu beachten, daß die zu Anfang gemachte Voraussetzung stets gleicher Temperaturen vor den Stoffen 1 und 2 erfüllt wird. Dies erreicht man, wenn  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  und damit also nach Gl. 8  $b_1 = b_2$  ist.

Die an der Oberfläche des Deckblechs 3 eindringende Wärme ergibt sich nach Gl. 1 aus der Beziehung:

$$\begin{aligned}
 q_{s,3} &= -\lambda_3 \left( \frac{\partial t_3}{\partial x} \right)_{x=0} = T_0 \epsilon^j \left( \frac{v_1 + v_2 + \frac{v_3}{2}}{2} \right) \left[ b_3 \sqrt{\epsilon_3} e^{g_3 x(t+\beta)} - \epsilon_3 e^{-g_3 x(t+\beta)} \right] \\
 &= A_0 \epsilon^j \left( \frac{v_1 + v_2 + \frac{v_3}{2}}{2} \right) \left[ b_3 + \frac{b_1}{2} \sqrt{\epsilon_3} e^{g_3 x(t+\beta)} - \epsilon_3 e^{-g_3 x(t+\beta)} \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man in einfacher Weise durch Darstellung in der Gaußschen Zahlen ebene graphisch auswerten. Für Werte von  $g_3 s \ll 1$  vereinfacht sie sich noch auf folgende Näherungsgleichung:

$$q_{s,3} \approx A_0 \epsilon^j \left( \frac{v_1 + v_2 + \frac{v_3}{2}}{2} \right) \left[ b_3 \left( \epsilon_3 + \epsilon_3 g_3 \gamma_3 \epsilon^{-g_3 s} \right) \right] \quad (10)$$

Gegenüber der bisherigen Ausführung besitzt der neue Meß-Stoßen rechnerisch gut übersichtbare Verhältnisse, wenn die Wärmelastungszahlen der beiden Thermo-Stoffe gleich sind. Kleine Unterschiede sind übrigens ohne Bedeutung, da die Reflexionszahlen nach Gl. 8 sich nur sehr wenig ändern, wenn das Deckblech eine große Wärmelastungszahl aufweist. Zunächst fällt dabei die eigentliche Meßfläche mit einer Isothermen zusammen. Dadurch ist nach außen nur die Thermokraft der Stoffe 1 und 2 wirksam. Außerdem kann man mit diesem Stoßen viel näher unter der Wandoberfläche messen und erhält damit größere Temperatureauschläge. Gleichzeitig werden die durch die Extrapolation auf die Oberfläche bedingten Fehler geringer. Die Verwendung eines möglichst gut wärmeleitenden Deckbleches auf wesentlich schlechter leitenden Thermostoffen 1 und 2 bietet noch den Vorteil, daß in Stoff 3 praktisch kein großer Temperaturfall eintritt. In Verbindung mit der geringen Dicke des Deckbleches erübrigt sich dadurch unter Umständen sogar die Extrapolation auf die Oberfläche.

Da entlang der Meßfläche kein Temperaturgefälle auftritt, so können auch keine störenden Ausgleichsströme zustande kommen. Nur der Einfluß der endlichen Dicke der isolierenden Oxydschicht zwischen den Stoffen 1 und 2 kann rechnerisch noch nicht erfaßt werden. Infolge der äußerst geringen Dicke dieser Oxydhaut dürfte ihr Einfluß jedoch vernachlässigbar klein sein.

Bei kleinen Unterschieden in den Wärmelastungszahlen der Stoffe 1 und 2 ergeben sich an deren Oberflächen, entsprechend den etwas verschiedenen Reflexionszahlen, auch kleine Unterschiede in den Temperaturamplituden. Diese können sich aber infolge der geringen Dicke des Deckbleches nicht oder doch nur sehr unvollkommen ausgleichen. Außerdem treten dann zwischen den Stoffpaaren 1 und 3 bzw. 2 und 3 starke Thermoströme auf, die (ohne wesentliche Störung des Meßstromes) diese Verschiedenheit der Temperaturamplituden aufrecht zu erhalten suchen. Da nun aber die Thermokräfte der Stoffe 1/3 bzw. 2/3 bekannt sind (oder gemessen werden können), lassen sich auch diese kleinen Abweichungen näherungsweise noch rechnerisch verfolgen.

Mit Rücksicht darauf, daß der Werkstoff der Zylinderwand im allgemeinen andere thermische Eigenschaften als Stoff 1 hat, wird man den Stoßen in seinem oberen Teil zweckmäßig isoliert einbauen, vgl. Abb. 4.

**6. Zusammenfassung.** Auf Grund der bekannten Gesetze für Wellenvorgänge (Interferenz, Reflexion, Brechung und Beugung), die auch für Temperatur- und Wärmewellen volle Gültigkeit haben, werden die Fehler des bisher üblichen Einbaues eines Thermoelementes zur Messung von periodisch veränderlichen Temperaturen in der Zylinderwand von Kolbenmaschinen nachgewiesen. Die Größenordnung der zu erwartenden Amplitudenverzerrung wird an Hand einer Näherungsberechnung angegeben. Diese zeigt, daß die bisherige Bauart der Thermolötstelle praktisch nur bei der Messung von stationären Temperaturen brauchbare Ergebnisse liefert. Aus diesem Grunde ist ein Vorschlag für die Neuauflösung eines zur Aufzeichnung von schnell wechselnden Oberflächen-Temperaturen besser geeigneten Thermooptypes. Mit diesem sollen durch die Klirnung der Verzerrung des zur Aufzeichnung verwendeten Sattengalvanometers Versuche an einem schnelllaufenden Daimler-Benz Lastwagemotor vorgenommen werden. [Rf 810]

TITLE PAGE

3. Zur Theorie von Abkühlungs- und Aufheizungs-Vorgängen.  
On the theory of cooling down and heating up processes.

Frans Nos. 331 - 358

302631

# Zur Theorie von Auskühlungs- und Anheizungs-Vorgängen

Zur Erlangung der Würde eines habilitierten Doktor-Ingenieurs  
von der Technischen Hochschule „Friedrich-Alexander-Universität“ Erlangen

genehmigte

## Habilitationsschrift

Dr.-Ing. Hans Pörsch

zur Habilitation am Februar 1935

---

Druck der Universitätsdruckerei H. Stötz A.G., Würzburg  
1935

Herrn Dr.-Ing. habil. F. Schmidt  
von Verf. überreicht.

ank  
den

Band VII, Heft 3

5  
000332

## Zur Theorie von Auskühlungs- und Anheizungsvorgängen.

Von H. Pfriem, VDI in Berlin-Grünau.

1. Einleitung. Auskühlungs- und Anheizungsvorgänge spielen in der Technik, beispielsweise auch bei Wärmekraftmaschinen aller Art, eine große Rolle. Sie sind einerseits verbunden mit Wärmeverlusten und bedingen andererseits Dehnungen und zusätzliche Spannungen in den Maschinenteilen, die diesen auch dann gefährlich werden können, wenn sie im Beharrungszustand das zulässige Maß nicht überschreiten. Es ist daher zweckmäßig, das zeitveränderliche Temperaturfeld in einzelnen Fällen schon im Voraus zu berechnen, um dann hieraus die notwendigen weiteren Schlüsse zu ziehen. Dafür bedient man sich im allgemeinen der Entwicklung nach Fourier-Reihen, die aber vor allem zu Beginn des Vorganges, infolge der hier schlechten Konvergenz der Reihen, sehr umständliche Zahlenrechnungen erfordern<sup>1</sup>. Nachfolgend soll daher ein Verfahren entwickelt werden, das die bisherige Rechnungsweise gerade

<sup>1</sup> Gröber-Erk, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, 2. Aufl., Berlin 1933 und G. Pöschl, Z. angew. Math. Mech., 12 (1932) S. 280.

In diesem Punkt zweckmäßig ergänzt und darüber hinaus einige neue Gesichtspunkte für die Lösung derartigen Aufgaben enthält. Dabei sind die räumlichen Entwicklungen ausschließlich auf die Berechnung von Temperaturfeldern beschränkt. Es sei aber darauf hingewiesen, daß auf diese Weise auch die Lösungen für alle entsprechenden Vorgänge, die der Differentialgleichung der Wärmeleitung genügen, gefunden werden können. Beispielsweise gilt dies für Diffusionsvorgänge sowie für die Ausbreitung von elektrischen Wirbelströmen usw.

Besüglich der praktischen Verwendbarkeit der nachfolgenden Entwicklungen seien noch kurz einige Anwendungsmöglichkeiten angedeutet. Im Kraftmaschinenbau interessiert, besonders zur Berechnung von Temperaturspannungen, der Vorgang der Aufheizung (Abkühlung) bei einer im ungünstigsten Fall unter Volllast anlaufenden (abgestuften) Maschine. Als Beispiel hierfür dient etwa das Manoverwerk eines Dampfkessels, der wegen Ausfall eines Betriebskessels rasch angeheizt werden muß, oder eine Dampfturbine, die möglichst schnell belastet werden soll bzw. infolge Auslösung eines Schalters plötzlich entlastet wird usw. Dabei treten die größten Zusatzspannungen meist zu Beginn des Vorganges auf. Wie aus den folgenden Entwicklungen hervorgeht, kann man aber zu diesem Zeitpunkt die Wandsärze vielfach noch als unendlich groß annehmen, so daß die abgeleiteten Beziehungen, besonders bei den dann auf wenige Anfangsmomente beschränkten Formeln, eine brauchbare Rechnungsgrundlage bieten. Dabei dürften die wärmlichen Vorgänge beispielsweise für die anlaufende Dampfturbine dem in Aufgabe 9 behandelten Grenzfall am nächsten kommen. Dagegen wird bei dem mit Wasser betriebenen Niederdruckkessel der plötzlich entlasteten Dampfturbine die Aufgabe 7a den wärmlichen Vorgängen besser Rechnung tragen.

Besüglich der Benennung soll festgehalten werden, daß alle einfachen Felder in einem allseitig ins Unendliche ausgedehnten, völlig homogenen Körper als Grundfelder bezeichnet werden. Ferner sollen zur Unterscheidung der verschiedenartigen Quellen die drei allgemein bekannten, durch die Quellpunktionen der Wärmeleitung definierten Quellen (d. h. die Punkte, die Zylinderlinien und die ebene Flächenquelle) als Elementare Quellen bezeichnet werden.

Für ebene Temperaturfelder lautet nun die Differentialgleichung der Wärmeleitung wie folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

Dabei ist

- $r$  = Zeit (h),
- $z$  = Ortsordinate normal zu den Ebenen örtlich konstanter Temperaturen (m),
- $u$  = Übertemperatur ( $^{\circ}\text{C}$ ),
- $\lambda$  =  $\lambda \gamma$  = Temperaturleitmaß des Stoffes ( $\text{m}^2/\text{h}$ ),
- $q$  = Wärmeleitmaß des Stoffes ( $\text{kcal}/\text{m}^2 \text{h}^2$ ),
- $\gamma$  = spez. Wärme des Stoffes ( $\text{kcal}/\text{kg}^{\circ}\text{C}$ ),
- $\gamma$  = spez. Gewicht des Stoffes ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ),
- $\rho$  =  $\lambda \gamma^2 \tau_0$  = Wärmebelastungsmaß des Stoffes für  $\tau_0 = 1 \text{ h}$  ( $\text{kcal}/\text{m}^2 \text{h}^2$ ).

Die Gleichung (1) ist eine lineare, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man kann daher eine bestimmte Lösung stets als Summe von Teilösungen darstellen. Durch geeignete Wahl dieser Teilösungen kann man für besondere Zwecke besonders geeignete Formen der Gesamtlösung erhalten.

Nach der Methode der Quellpunkte<sup>1</sup> kann man nun die Temperatur eines allseitig ausgedehnten, homogenen Körpers zu jedem Zeitpunkt und an jeder Stelle berechnen, sofern das Temperaturfeld am Anfang der Zeitrechnung bekannt ist. Um dieses Verfahren auch auf Körper mit endlichen Abmessungen anwenden zu können, denkt

<sup>1</sup> Gruber-Erk, z. B. O. S. 67 und K. Lachmann, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935) S. 345.

man sich ihr Inneres in bekannter Weise durch wiederholte Spiegelungen an den Oberflächen auf den ganzen Raum übertragen. Man erhält so einen allseitig ausgedehnten gleichförmigen Körper, dessen anfängliches Temperaturfeld sich durch Aneinanderreihung von Einzelfeldern ergibt, die alle gleich (bzw. spiegelbildlich gleich) dem Feld des endlich ausgedehnten Körpers sind. Die Lösung für diesen gedachten, allseitig ausgedehnten Körper ist aber allgemein bekannt<sup>1</sup>. Da nun noch aus Symmetriegründen alle Einzelfelder stets gleich bzw. spiegelbildlich gleich bleiben müssen, so erhält man auf diese Weise auch die Lösung für den gegebenen Körper von endlichen Abmessungen. Es soll nun an Hand einiger einfacher Beispiele gezeigt werden, daß sich hiermit für Temperaturausgleichvorgänge die Lösungen in solchen Formen ergeben, die für Zahlenrechnungen vor allem am Anfang des Vorgangs besonders geeignet sind und damit also die bekannten Darstellungen zweckmäßig ergänzen.

2. Einfache ebene Aufgaben bei Platten von endlicher Dicke und homogenem Stoff. Aufgabe 1: In der Mittelebene  $x = 0$  einer beiderseitig isolierten, unendlich großen, planparallelen Platte von der Dicke  $2s$  soll zur Zeit  $\tau = 0$  plötzlich und einmalig je Flächeneinheit die Wärmemenge  $Q$  [cal/cm<sup>2</sup>] auftreten. Gesucht ist die Temperaturverteilung im Innern dieser Platte für alle Zeiten  $\tau > 0$ .

Zu Beginn der Zeitrechnung wird die Temperatur in der Mittelebene, der Platte theoretisch unendlich groß, weil die endliche Wärmemenge  $Q$  plötzlich in einem unendlich kleinen Raumelement auftritt. Alle anderen Punkte derselben besitzen dabei aber noch die überall gleiche Anfangstemperatur, die weiterhin als Nullpunkt der Temperaturzählung angenommen wird. Man denkt sich nun die Platte mit dieser anfänglichen Temperaturverteilung an ihren beiden Oberflächen so oft gespiegelt, daß der ganze Raum von  $-\infty$  bis  $+\infty$  ausgefüllt ist. Dadurch ergibt sich das Bild eines allseitig ausgedehnten Körpers, der an allen Stellen

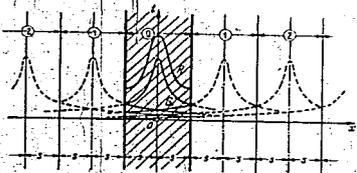


Abb. 1. Aufbau des wirklichen, resultierenden Temperaturfeldes  $K$  aus unendlich vielen Grundfeldern  $G$  von elementaren, röhren Wärmequellen.

$x = 2ns$  ( $n =$  beliebige ganze Zahl im Bereich von  $-\infty$  bis  $+\infty$ ) je eine elementare Wärmequelle besitzt, die zur Zeit  $\tau = 0$  einmalig je Flächeneinheit die Wärmemenge  $Q$  liefert. Die einzelnen durch die Spiegelung entstehenden Felder dieses homogen gedachten Körpers sollen weiterhin mit den Ziffern  $\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots, n \dots$  bezeichnet werden (Abb. 1).

Für eine einzige derartige Wärmequelle im allseitig ausgedehnten Körper liefert nun die Quellfunktion der Wärmeleitung die Lösung. Sie lautet für eine solche Quelle an der Stelle  $x = 2ns$

$$t_n = \frac{Q}{c\gamma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-2ns)^2}{4a\tau}} \quad (2)$$

Infolge der Linearität der Differentialgleichung der Wärmeleitung ergibt sich nun das gesamte Temperaturfeld im vorliegenden Fall als Summe aller Einzelslösungen:

$$t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n = \frac{Q}{c\gamma\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2ns)^2}{4a\tau}} \quad (3)$$

Man erkennt leicht, daß nach dieser Beziehung die Temperatur zur Zeit  $\tau = 0$  in allen Punkten gleich Null ist, mit Ausnahme der Stellen  $x = 2ns$ , wo sie unendlich ist.

<sup>1</sup> Gröber-Erk, a. a. O. S. 65, Gl. (36a).

Außerdem ist

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{Q}{c\gamma l \lambda \pi a r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi s - x}{a r} e^{-\frac{(2n\pi - x)^2}{4a r}}$$

und für  $x = \pm s$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=\pm s} = \frac{Q \pm s}{c\gamma l \lambda \pi a r} \sum_{n=1}^{\infty} (2n \mp 1) e^{-\frac{(2n \mp 1)^2 a r}{4a r}}$$

Da in dieser Summe alle Glieder zweimal, und zwar jeweils mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten, ist ihr Grenzwert stets Null, d. h.

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=\pm s} = 0$$

für alle Werte von  $r$ . Dies bedeutet aber, wie schon aus Symmetriegründen zu erwarten ist, daß durch die Plattenoberflächen  $x = \pm s$  weder Wärme ein- noch austritt, so daß damit die Bedingung der vollkommenen Isolation der Platte erfüllt ist. Bildet man noch  $c\gamma \int dx$  nach (5)<sup>1</sup>, so ergibt sich die zu Beginn der Zeitrechnung von der Quelle gelieferte Wärmemenge  $Q$ . Da somit alle Bedingungen der Aufgabe 1 erfüllt sind, stellt (3) tatsächlich ihre Lösung in Form einer unendlichen Reihe dar. Nachdem nun diese absolut konvergent ist<sup>2</sup>, darf man auch ihre Glieder in anderer Reihenfolge anordnen. Für Zahlenrechnungen ist dabei folgende Form besonders empfehlenswert:

$$t = \frac{Q}{c\gamma l \lambda \pi a r} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4a r}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{-\frac{(2n\pi - x)^2}{4a r}} + e^{-\frac{(2n\pi + x)^2}{4a r}} \right] \right\} \quad (s \geq x \geq -s) \quad (4)$$

Man erkennt hieraus sofort, daß sich diese Lösung für kleine Werte von  $a r$ ,  $s^2$  infolge der dann starken Konvergenz der Reihe praktisch auf das erste Glied beschränkt. Mit fortschreitender Zeit sind je nach dem Grad der gewünschten Genauigkeit aber auch mehr und mehr Glieder unter dem Summenzeichen zu berücksichtigen. Damit steht diese Form der Lösung, wie schon früher angedeutet wurde, im Gegensatz zu Entwicklungen nach Fourierreihen, die bekanntlich bei Wärmeausgleichsvorgängen zu Beginn der Zeitrechnung meist sehr schlechte Konvergenz aufweisen.

<sup>1</sup> Die Lösung dieses Integrals führt auf die Gaußsche Fehlerfunktion, vgl. S. 175. dieser Arbeit.

<sup>2</sup> Konvergenzbeweis zu (3):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N e^{-\frac{(2n\pi - x)^2}{4a r}} = ?$$

Dabei ist  $N$  eine ganze Zahl. Bricht man diese Reihe vor dem  $N$ ten Glied ab, so wird der damit begangene Fehler:

$$\epsilon = \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\frac{(2n\pi - x)^2}{4a r}} < \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\frac{(2N\pi - x)^2}{4a r}}$$

Diese Ungleichung gilt, solange  $(2N\pi - x)^2 > 1$  ist. Da nun die letzte Summe eine geometrische Reihe darstellt, erhält man also

$$\epsilon < 2 \frac{e^{-\frac{(2N\pi - x)^2}{4a r}}}{1 - e^{-\frac{(2N\pi - x)^2}{4a r}}}$$

Da man hiernach  $N$  stets so wählen kann, daß  $\epsilon$  mit Sicherheit unter jeder beliebig vorgegebenen Grenze bleibt, so ist damit zunächst gezeigt, daß diese Reihe für alle Zeitpunkte  $t < \frac{(2N\pi - x)^2}{4a r}$  absolut konvergent ist. Für größere Werte der Zeit ergibt sich die absolute Konvergenz dieser Reihe aus den Entwicklungen im Abschnitt 2.

Wie später noch näher ausgeführt wird (vgl. Abschnitt 4), kann man sich hier das resultierende, wirkliche Temperaturfeld auch dadurch entstanden denken, daß das zunächst sich ausbildende Grundfeld der elementaren Flächenquelle, ähnlich wie die Grundfelder von rein periodischen Vorgängen<sup>1)</sup> zwischen den vollkommen isolierten Plattenoberflächen ( $x = \pm z$ ) immer wieder vollkommen reflektiert wird. Dadurch ergibt sich für die theoretische Behandlung derartigen Aufgaben ganz ähnliche, physikalisch anschauliche Vorstellungen wie bei rein periodischen Vorgängen.

**Aufgabe 2:** In einer unendlich großen, plattenparallelen Platte von der Dicke  $2z$  bestehe zur Zeit  $t = 0$  eine beliebige Temperaturverteilung  $\varphi_0 = F_0(x)$ . Gesucht ist die Gestalt des Temperaturfeldes in Abhängigkeit von der Zeit, wenn für alle Werte  $t \geq 0$  an den Oberflächen keine Wärme mehr ein- oder austritt.

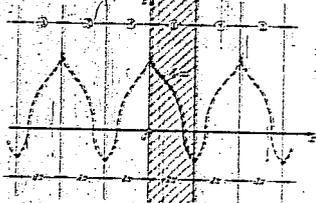


Abb. 1. Anfangliche Temperaturverteilung in einem zweiseitig abseitig ungesättigten, homogenen Körper, die durch verdrängte Bewegung des ursprünglichen Temperaturfeldes  $F_0(x)$  an der Platte in deren Oberflächen entstanden ist.

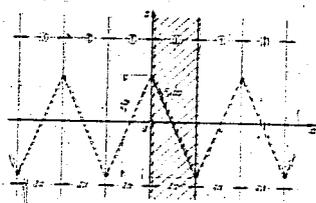


Abb. 2. Anfangliche Temperaturverteilung in einem zweiseitig abseitig ungesättigten, homogenen Körper bei unendlicher inneren Temperatur an der Platte.

Dunkel man sich wieder das Innere der Platte spiegelbildlich zu den Oberflächen auf den ganzen Raum ausgedehnt, so erhält man einen abseitig ungesättigten, homogenen Körper mit einer anfänglichen Temperaturverteilung nach Abb. 1. Die Einzelglieder sind hierbei wieder mit ganzen Zahlen von  $-\infty$  bis  $+\infty$  bezeichnet.

Die Lösung für abseitig ungesättigte Körper bei gegebener anfänglicher Temperaturverteilung  $F(x)$  lautet bekanntlich<sup>2)</sup>

$$s = \frac{c}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (1) \quad x, \xi \geq 0$$

Dabei ist  $\xi$  die Integrationsveränderliche.

Man wird nun hier die Integration jeweils über die verschiedenen Einzelglieder ausführen und die erhaltenen Einzelwerte summieren. Auf diese Weise ergibt sich die Gleichung für das gesamte Temperaturfeld in der Platte zu

$$s = \frac{c}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi \quad (2) \quad x, \xi \geq 0$$

Dabei ist  $F_n(\xi)$  die anfängliche Temperaturverteilung im  $n$ -ten Feldabschnitt. Ein einfaches Beispiel für die Berechnung eines solchen Feldes bietet die folgende Aufgabe

<sup>1)</sup> Vgl. H. Pfaff, Beitrag zur Theorie der Wärmeleitung bei periodisch veränderlichen (quasi-stationären) Temperaturfeldern, Ing.-Arch. 6 (1935) S. 97 und Dissertation T. H. Karlsruhe 1934.

<sup>2)</sup> Ableitung siehe: Geubler-Eck, a. a. O. S. 69.

Aufgabe 3: In einer unendlich großen, planparallelen Platte von der Dicke  $2s$  bestehe zunächst ein stationäres Temperaturgefälle  $(-t_0/s)$  (s. Abb. 2a). Zur Zeit  $\tau = 0$  soll nun plötzlich die Zu- bzw. Abfuhr der Wärme an den beiden Oberflächen völlig aufhören. Gesucht ist die sich dann ausbildende Gestalt des Temperaturfeldes in Abhängigkeit von der Zeit.

Die Lösung ergibt sich nach (5), wenn man für die anfängliche Temperaturverteilung im  $n$ ten Feld die nach Abb. 2a einfach zu ermittelnde Beziehung setzt

$$F_n(\xi) = (-1)^n t_0 \left[ 2n + 1 - \frac{\xi}{s} \right].$$

Man erhält dann als Lösung der Aufgabe 3

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{4a\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\xi-2ns}^{\xi+(2n+1)s} (-1)^n \left[ 2n + 1 - \frac{\xi}{s} \right] e^{-\frac{\xi-\xi'}{4a\tau}} d\xi'$$

oder

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{4a\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left[ 2n + 1 - \frac{\xi}{s} \right] \left\{ \Phi \left[ \frac{(2n+1)s - \xi}{\sqrt{4a\tau}} \right] - \Phi \left[ \frac{2ns - \xi}{\sqrt{4a\tau}} \right] \right\} + \frac{t_0}{\sqrt{4a\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left\{ e^{-\frac{(2n+1)s - \xi}{4a\tau}} - e^{-\frac{(2n+1)s}{4a\tau}} \right\} \quad (2s \geq \xi \geq 0).$$

Dabei bedeutet  $\Phi(\dots)$  das Gaußsche Fehlerintegral<sup>1)</sup>. Die erste dieser beiden Reihen ist wegen  $n\Phi(n)$  nur bedingt konvergent, weshalb sie weder gliedweise differenziert (integriert), noch beliebig umgruppiert werden darf. Für praktische Berechnungen wird sie daher zunächst in zwei absolut konvergente Summen verwandelt<sup>2)</sup>:

<sup>1)</sup> Vgl. Jahke-Emde, Funktionentafeln S. 97. 2. Aufl., Leipzig 1933.

<sup>2)</sup> Konvergenzbeweis für

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left[ (2n+1)s \pm \xi \right] \left\{ 1 - \Phi \left[ \frac{(2n+1)s \pm \xi}{\sqrt{4a\tau}} \right] \right\}.$$

Bricht man diese Reihe wieder vor dem  $N$ ten Glied ab, so wird der Fehler

$$\epsilon = \sum_{n=N}^{\infty} \left[ (2n+1)s \pm \xi \right] \left\{ 1 - \Phi \left[ \frac{(2n+1)s \pm \xi}{\sqrt{4a\tau}} \right] \right\}.$$

Für große Werte des Argumentes des Gaußschen Fehlerintegrals, also für

$$y = \frac{(2n+1)s \pm \xi}{\sqrt{4a\tau}} > 1,$$

ist über nach Jahke-Emde (1933) S. 98

$$1 - \Phi(y) = \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi} y} \left[ 1 - \frac{1}{2y^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2y^4)^2} - \dots \right].$$

Damit wird

$$\epsilon \approx \sum_{n=N}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)s \pm \xi}{4a\tau}} \sqrt{\frac{4a\tau}{\pi}}.$$

Dadurch ist also  $\epsilon$  auf die S. 173 schon besprochene Form des Fehlers zurückgeführt und so der Beweis der absoluten Konvergenz dieser Reihe für  $\sqrt{4a\tau} > \frac{(2N+1)s \pm \xi}{2}$  geliefert. Für größere Werte der Zeit kann der Beweis wieder nach Abschnitt 1. geführt werden. Alle auf S. 176 sonst noch vorkommenden Summen von unendlich vielen Gliedern lassen sich ohne Schwierigkeiten auf diese Weise als absolut konvergent nachweisen. Ganz entsprechend gilt dies auch für Gl. (10) S. 178.

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right]
 \end{aligned}$$

Dabei sind die Klammerausdrücke  $\cos \dots$  an Stelle dieser Werte zu einsetzen. Durch Umkehrung und Zusammenziehen gleichartige Summanden erhält man dann folgende wiederum absolut konvergente, unendliche Reihe

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right]
 \end{aligned}$$

Man erkennt an diesem Ausdruck ohne weiteres, daß die zweite Anfangsbedingung erfüllt ist. Außerdem ist ersichtlich, daß die unendliche Reihe für kleine Werte von  $\epsilon/\lambda$  sehr rasch konvergiert und mit zunehmender Zerbrechlichkeit konvergieren aufhört. Das Temperaturgefälle ergibt sich zu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \sin \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \sin \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right]$$

Hieraus ist zu ersehen, daß einwärts durch die linke Plattenoberfläche,  $x = 0$  für  $x' = 0$  keine Wärme mehr eindringt und auch andererseits an der rechten Oberfläche  $x = \epsilon$  keine Wärme mehr austritt. Die Gleichung (6) ist also wiederum die Lösung der Aufgabe 5. Sie führt aber auch zur Lösung für die vertikale Einstrahlung des stationären Temperaturgefälles, wenn alle Punkte der Platte anfangs die Temperatur Null besitzen und an der Oberfläche zu allen Zeiten  $t$  die gleiche unzeitänderliche Wärmemenge  $Q_0$  bzw. abgeführt werden. Dann enthält die Integration der Temperaturgleichung auch in von der stationären Fallzustand aus kann man die Anfangsbedingung ohne Schwierigkeiten erfüllen. Man erhält dann als Lösung

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \cos \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right]
 \end{aligned}$$

Das Temperaturgefälle ergibt sich hieraus zu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon}} \left[ \sin \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x \right) - \sin \left( \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \epsilon} x' \right) \right]$$

Für diesen Sonderfall Gleichungen ist zu ersehen, daß wiederum alle für die nur keine Einstrahlung eines stationären Temperaturgefälles in der Platte gebildeten Randbedingungen erfüllt sind.

Bestimmt man sich auf die Betrachtung einer Hälfte der Platte von Aufgabe 5, so behält die Lösung (6) ihre Gültigkeit, wenn man jetzt als zweite Oberflächenbedingung für  $x = s$  an allen Zeiten die Oberflächentemperatur Null vorschreibt. Man hat somit die exakte Lösung für die Auskühlung einer Wand aus dem stationären Zustand (bzw. nach (8) ihre Aufheizung zum stationären Zustand), wenn eine Oberfläche auf unveränderlicher Temperatur gehalten wird. Hierfür hat man dabei den Verlauf der Temperatur an einer Stelle  $x = x_0$  innerhalb der Wand, so findet man, daß diese sich praktisch erst geraume Zeit nach dem Eintritte der Störung an der Oberfläche  $x = 0$  langsam zu ändern beginnt. Es tritt erst dann eine merkliche Änderung auf, wenn

$$\frac{x_0}{\sqrt{a\tau}} \approx 2 \text{ ist, also für}$$

$$\tau \approx \frac{x_0^2}{4a}$$

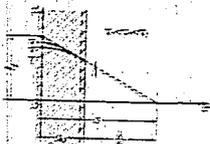


Abb. 1. Auskühlung einer ebenen Wand an abwechselnd ändernder Temperaturverteilung bei konstantem relativen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  an der Oberfläche.

(Z. B. ergibt sich für eine Backsteinwand von  $s = 3$  m Dicke und  $a = 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  in einer Tiefe  $x_0 = 0,5$  m erst nach  $\approx 7$  Stunden eine meßbare Änderung der Temperatur.) Bis zum Eintritte dieses Zeitpunktes bleibt die Temperatur in allen Punkten  $x > x_0$  praktisch unverändert wie zu Anfang des Zeitraumes erhalten. Man kann dann aber innerhalb dieses Zeitraumes auch ohne Schwierigkeiten den Wärmeübergang an einer Wand von der Dicke  $s$ , bezugsnehmend durch Einführung der „relativen Wärmeübergangszahl“  $\alpha_0$  z. B. Es ergibt sich dann für die Aufkühlung dieser ebenen Wand aus dem stationären Zustand ein Erweichung entsprechend der Abb. 5. Für den Zeitraum  $\tau < \frac{x_0^2}{4a}$  beschränken sich außerdem die Gleichungen (6) und (8) praktisch auf die Gültigkeit vor dem Summenzeichen. Man erhält also dann für den Temperaturverlauf an der Oberfläche  $x = 0$  die sehr einfachen Bezeichnungen,

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x_0}{\sqrt{a\tau}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) \quad \text{für die auskühlende Wand,}$$

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x_0}{\sqrt{a\tau}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) \quad \text{für die aufheizende Wand,}$$

wobei  $\alpha_0 = \alpha \cdot 2s$  ist ( $\alpha$  = Wärmeübergangszahl).

Bei Überschreitung der Zeit  $\tau = \frac{x_0^2}{4a}$  gehen diese einfachen Zusammenhänge nicht mehr. Nach Esser und Erischer kann man dann aber den Temperaturverlauf als „freie Temperaturbewegung“ mit praktischer ausreichender Genauigkeit sehr einfach berechnen. Die vorstehend abgeleiteten Beziehungen liefern, als eine Ergänzung zu der für die Praxis sehr wertvollen Arbeit der genannten Verfassers für den Zeitraum vor der freien Temperaturbewegung.

Aufgabe 12: Eine unendlich große ebene Platte von der Dicke  $2s$  besitzt in allen Punkten für  $\tau < 0$  die gleiche Oberflächentemperatur  $T_0$ . Für alle Zeiten  $\tau > 0$  sollen auf ihre beiden Oberflächen die unveränderliche Oberflächentemperatur Null aufweisen. Gesucht ist der Temperaturverlauf im Innern der Platte.

Die Temperaturfeld in der Platte könnte ohne Schwierigkeiten auch wieder nach (5) berechnet werden, wobei  $T_0$  ( $T_0 = -T_0$ ) zu setzen wäre. Es soll nun aber zur Abwechslung ein anderer Weg eingeschlagen werden. Differenzieren oder integrieren man die Differentialgleichung (5) nach einer der beiden unabhängigen Veränderlichen. Es entsteht immer wieder eine Differentialgleichung von genau gleicher Form  $u$  bezug auf die differenzierte bzw. integrierte Veränderliche. Folgt man

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{du}{dt}$$

Größe  $u$  =  $T - T_0$  oder  $T_0 - T$ , Bestimmung der Aufheizung und Auskühlung ebener und zylindrischer Wände. Berlin 1929.

dieser Reihen, die die Summanden enthält, die Reihe

Anfangsbedingung eine Werte von  $\tau$  Konvergenz

an der Oberfläche  $x = 0$ , für die rechte Oberfläche

bleibt dann als Lösung

lich alle für die zeitliche Platte gebildet

man durch Differentiation oder Integration einer bekannten Lösung stets wieder eine neue Lösung. Von der Lösung der Aufgabe 3 ist nun bekannt, daß der Differentialquotient nach  $x$  zu Beginn der Zeitrechnung in allen Punkten der Platte den gleichen Wert  $(-6/s)$  besitzt. Außerdem ist aber an den Plattenoberflächen für alle Zeiten  $t > 0$  dieser Differentialquotient stets gleich Null. Demnach erfüllt also die Funktion nach (7) die in Aufgabe 4 vorgeschriebene zeitliche und örtliche Randbedingung, wenn man anstatt  $(-6/s)$  den Wert  $T_0$  setzt. Daher lautet die Lösung der Aufgabe 3

$$t = T_0 \left[ \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \Phi \left( \frac{2ns - x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) - \Phi \left( \frac{2ns + x}{\sqrt{4\alpha t}} \right) \right\} \right] \quad (10)$$

Das Temperaturgefälle wird dabei

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{T_0}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \left[ e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ e^{-\frac{(2ns-x)^2}{4\alpha t}} + e^{-\frac{(2ns+x)^2}{4\alpha t}} \right\} \right] \quad (11)$$

Die Ähnlichkeit dieser Beziehung (11) mit (4) ist ganz auffällig. Ersetzt man  $T_0$  durch  $(Q/Fs)$ , so bleibt als einziger Unterschied der Faktor  $(-1)^n$ . Tatsächlich liefert auch diese Funktion die Lösung für den gegenüber Aufgabe 1 abgeänderten Fall, daß die Plattenoberflächen  $x = \pm s$  nicht isoliert sind, sondern immer auf der Übertemperatur Null gehalten werden. Damit ist der physikalische Zusammenhang zwischen diesen äußerlich ähnlichen Funktionen gegeben und man erkennt, daß sich durch ein- oder mehrfache Integration (Differentiation) der leicht zu bestimmenden Lösung einer auf die elementare Quellfunktion führenden Aufgabe, technisch interessante Lösungen von Wärmeausgleichsvorgängen ergeben. Nachfolgend wird daher jeweils zunächst die entsprechende Lösung für die Quellfunktion gesucht.

Zuvor soll jedoch noch ein Näherungsverfahren abgeleitet werden, mit dessen Hilfe es möglich ist, die vorausgehenden unendlichen Reihen mit vorgeschriebener Genauigkeit auch für beliebig große Zeiten durch eine endliche Anzahl von Gliedern zu ersetzen.

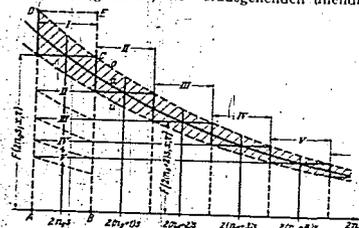


Abb. 1. Veranschaulichung des Näherungsverfahrens und der Fehlerabschätzung für die Berechnung von schlecht konvergenzen Reihen mit unendlich vielen Gliedern.

**3. Näherungsverfahren zur Berechnung von schlecht konvergenzen Reihen mit unendlich vielen Gliedern.**

Für praktische Bedürfnisse ist, besonders mit Rücksicht auf die begrenzten Anforderungen an die Genauigkeit infolge ungenügender Kenntnis der Stoffeigenschaften, eine bequeme Näherungsrechnung stets einer umständlichen, exakten Lösung vorzuziehen. Das nachfolgend entwickelte Verfahren ist gewissermaßen eine Umkehrung

der bekannten, graphischen Integrationsmethode, bei der eine stetige Kurve eine flächengleiche Treppenfunktion ersetzt wird. Es ist immer dann mit besonderem Vorteil anwendbar, wenn die Krümmung der Ausgleichskurve  $a$  (vgl. Abb. 4) innerhalb eines Ersatzintervalls (z. B. von  $2n_0s$  bis  $2(n_0+1)s$ ) gering ist. Man zerlegt zunächst die anzunähernde unendliche Reihe in eine Summe von endlich vielen Gliedern und in eine Restsumme, also z. B.

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(2ns; x, t) = \sum_{n=1}^{n_0} F(2ns; x, t) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} F(2ns; x, t)$$

Denkt man sich nun die einzelnen Glieder der Restsumme als Ordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit  $2ns$  als unabhängiger Veränderlicher auf-

getragen, die Endpunkte dieser Strecken zunächst durch einen stufenförmigen Linienzug und dann noch durch eine stetige Kurve  $\alpha$  verbunden, so ergibt sich Abb. 4. Die Fläche unter dem treppenförmigen Linienzug, welche bei geeigneter Wahl der Maßstäbe die Restsumme darstellt und diejenige unter der Ausgleichskurve können nun praktisch einander gleichgesetzt werden, also:

$$\sum_{k=1}^n F(2\pi s; x, y) \approx \int_{x_0}^x F(2\pi s; x, y) d(2\pi s).$$

Hiermit wird die ursprüngliche Summe näherungsweise durch eine endliche Anzahl von Gliedern wie folgt ersetzt:

$$\sum_{k=1}^n F(2\pi s; x, y) \approx \sum_{k=1}^{n-1} F(2\pi k)(x, y) + \frac{1}{2} F(2\pi n; x, y) d(2\pi s). \quad (12)$$

Diese Näherungslösung kann nun durch geeignete Wahl von  $n$ , allen Ansprüchen an die Genauigkeit angepaßt werden. Als Anhaltspunkt für die Wahl von  $n$  kann eine bei numerischen Integrationsverfahren übliche Abschätzung des größtmöglichen Absolutfehlers dienen. Danach ist dieser durch die Größe der schraffierten Fläche zwischen der oberen (a) und unteren (b) Begrenzungskurve (Abb. 4) bedingt. Somit ist der wärdliche Fehler  $f$  stets kleiner als der folgende Ausdruck:

$$f < \frac{1}{2\pi} \left| \int_{2\pi(n-1)}^x F(2\pi s; x, y) d(2\pi s) - \int_{2\pi(n-1)}^x F(2\pi(n-1); x, y) d(2\pi s) \right|. \quad (13)$$

Als einfaches Beispiel dieser Art soll folgende Summe durch eine endliche Anzahl von Gliedern angenähert werden:

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{2\pi k s}{4\pi s^2}}}{14\pi s^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-\frac{2\pi k s}{4\pi s^2}}}{14\pi s^2} + R.$$

Die Restsumme  $R$  wird dabei

$$R = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi k s}{4\pi s^2}}}{14\pi s^2} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi(n-1)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi s}{4\pi s^2}}}{14\pi s^2} d(2\pi s)$$

oder

$$R \approx \frac{1}{4\pi} \left[ 1 - \phi \left[ \frac{(2\pi n - 1)s - x}{14\pi s^2} \right] \right].$$

Damit kann man dann (4) folgendermaßen schreiben:

$$= \frac{Q}{4\pi s^2} \left[ \frac{x s}{14\pi s^2} \left[ e^{-\frac{x}{4\pi s}} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( e^{-\frac{2\pi k s}{4\pi s^2}} - e^{-\frac{2\pi(k-1)s}{4\pi s^2}} \right) \right] + \left( 2 - \phi \left[ \frac{(2\pi n - 1)s - x}{14\pi s^2} \right] - \phi \left[ \frac{(2\pi n - 3)s - x}{14\pi s^2} \right] \right) \right]. \quad (14)$$

Der Fehler wird dabei nach (13)

$$f < \frac{Q}{4\pi s^2} \left[ \phi \left[ \frac{(2\pi n - 1)s - x}{14\pi s^2} \right] - \phi \left[ \frac{(2\pi n - 3)s - x}{14\pi s^2} \right] - \phi \left[ \frac{(2\pi n - 1)s - x}{14\pi s^2} \right] - \phi \left[ \frac{(2\pi n - 3)s - x}{14\pi s^2} \right] \right]. \quad (15)$$

Man erkennt hieraus, daß der Absolutfehler bei Verwendung der Näherungsgleichung (14) für  $s \rightarrow 0$  und  $x \rightarrow \infty$  völlig verschwindet, d. h., daß diese Gleichung in beiden Grenzfällen absolut richtige Werte liefert. Man erhält damit als Endtemperatur der Platte

$$t_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q}{2\pi c \gamma}.$$

000342

Dieses Ergebnis stimmt mit der Temperatur überein, die sich berechnen läßt, wenn man sich die gesamte zugeführte Wärmemenge gleichmäßig über das ganze Volumen der isolierten Platte verteilt denkt.

Die nach (11) festgelegte obere Fehlergrenze ist in den meisten Fällen nur außerordentlich zu berechnen, so daß praktisch eine weitere Näherung zweckmäßig erscheint. Nun ist aber die diese Fehlergrenze darstellende schraffierte Fläche zwischen den Grenzcurven  $\sigma$  und  $\alpha$  (die aus der Ausgleichcurve  $a$  durch Verschieben parallel der  $2n$ -Achse um das Stück  $+1$  bzw.  $-1$  hervorgeht, s. Abb. 2) gleich der trapezförmigen Fläche  $ABCD$ , wie sich durch Verschiebung der unterhalb der oberen Grenzcurve  $\sigma$  liegenden bogentrapezförmigen, schraffierten Flächenstücke  $II, III, IV$  von Streifenbreite um ganze Vielfache der Strecke  $2s$  nach links nachweisen läßt. Diese trapezförmige Fläche ist dabei ihrerseits immer kleiner als das sie umschließende Rechteck  $ABED$ . Damit ist dann auch, der durch die Näherungsrechnung bedingte Fehler  $f$  in allen Fällen stets kleiner als das letzte noch berücksichtigte Glied  $u_{n-1}$  der abgebrochenen Reihe, d. h. also:

$$f < F/2(n_0 - 1) \cdot x, y \quad (12a)$$

Für das zuvor berechnete Beispiel erhält man damit

$$f < \frac{0}{(2 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 0.1)} = \frac{0.0001}{1.4} = 0.0000714$$

Auch hieraus ist zu erkennen, daß der Fehler für  $x = \infty$  und  $y = 0$  verschwindend klein wird; es prüft daher mindestens ein Großwert der Schranke vorhanden sein, dessen Lage man durch Ableitung nach  $x$  findet. Für die letzte Bemerkung ergibt sich so als Bedingungs-gleichung für  $x_n$

$$\left[ \frac{1}{2} - \frac{2(n_0 - 1)x + s^2}{4s^2 n} \right] - \left[ \frac{1}{2} - \frac{2(n_0 - 1)x - s^2}{4s^2 n} \right] = \frac{1}{n}$$

Beispielweise erhält man hieraus für die Plattenmitte  $x = 0$

$$-1 + \frac{(n_0 - 1)^2 s^2}{4s^2 n} = 0 \quad \text{und daraus} \quad n_0 = 2n_0 - 1$$

Damit wird also der größtmögliche Fehler  $f_{\max}$  für die Plattenmitte

$$f_{\max} < 1 \cdot \frac{1}{n_0 - 1} = \frac{1}{n_0 - 1} = \frac{1}{2n_0 - 1}$$

Daraus ist zu erkennen, daß der größte Fehler für die Plattenmitte (wobei  $n_0 = 2$  immer noch kleiner als 1 ist) und durch geeignete Wahl von  $n_0$  auf jeden beliebigen Bruchteil von 1 beschränkt werden kann. Dabei ist noch zu beachten, daß den wirkliche Fehler im allgemeinen nur ein geringer Bruchteil der hier berechneten oberen Fehlergrenze ist. Daher wird man in den meisten vorkommenden Fällen bei Anwendung dieser Näherungsrechnung schon mit  $n_0 = 2$ , meistens aber mit  $n_0 = 4$  eine praktisch ausreichende Genauigkeit erzielen.

Für alternierende Reihen ist dieses Verfahren zunächst nicht verwendbar, weil man jedoch die gegebene, absolut konvergente Summe in zwei Reihen mit nur positiven bzw. nur negativen Gliedern, so kann man die Näherungsrechnung auf jede der beiden Reihen getrennt anwenden. Es wird dann das Resultat

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n F/2(n_0 - 1) \cdot x, y = \left[ -1 + \sum_{n=1}^{\infty} F/2(2n - n_0 - 1) \cdot x, y \right] + \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F/2(2n - n_0 + 1) \cdot x, y \right] \quad (12b)$$

Da beim Ersatz dieser Summen die Abweichungen vom richtigen Wert für beide Reihen stets gleiches Vorzeichen besitzen, ergibt sich als Fehlergrenze für die alternierende Reihe die Differenz der Abweichungen, d. h.

$$f < F/2(n_0 - 2) \cdot x, y = F/2(n_0 - 1) \cdot x, y \quad (12c)$$

Die Durchrechnung von Beispielen zeigt, daß auch hierbei im allgemeinen der Fehler für  $\tau = 0$ , sowie für  $\tau = \infty$  verschwindet und zwischen diesen beiden Grenzen einen Großwert aufweist. Da sich hierbei jedoch nichts wesentlich Neues ergibt, soll auf deren Ausführung verzichtet werden.

Nachdem die praktische Durchführung dieser Fehlerabschätzung viel zu weite Grenzen liefert, ist es oft zweckmäßiger, die Größe des wirklichen Fehlers nach der für die vorgeschriebenen Randbedingungen erreichten Genauigkeit zu beurteilen.

**4. Verwickeltere diese Aufgaben bei geschichteten Stoffen.** Wie in Abschnitt 2 gezeigt wurde, können die technisch wichtigen Aufgaben von ebenen Anheißungs- und Auskühlungsvorgängen aus entsprechenden Lösungen der elementaren Quellfunktion der Wärmeleitung durch ein- oder mehrfache Integration (Differenziation), leicht entwickelt werden. Die folgenden Ausführungen gehen daher immer von einer entsprechenden Lösung der Quellfunktion aus.

**Aufgabe 5:** Ein allseitig ausgeglichener Körper beruhe aus zwei verschiedenen Stoffen (1) und (2), die sich in einer Ebene so berühren, daß kein Wärmeübergangswiderstand besteht. Innerhalb des Stoffes (1) soll in einer Ebene im Abstand  $z$  parallel zur Grenzfläche plötzlich je Flächeneinheit derselben die Warmemenge  $Q$  zugeführt werden. Der Temperaturverlauf in beiden Stoffen ist gesucht.

Aus früheren Betrachtungen ist bekannt, daß die elementare Quellfunktion der Wärmeleitung in völlig gleichförmigen, allseitig ausgeglichenen Stoffen die Lösung für eine plötzlich in einer Ebene auftretenden

Wärmemenge ist. In der vorliegenden Aufgabe ist aber der Körper nur in den Punkten außerhalb der Grenzfläche homogen, während sich in dieser selbst die Stoffeigenschaften sprunghaft ändern. Die Wärme kann daher nicht mehr wie im homogenen Stoff symmetrisch zur Wärmequelle nach beiden Seiten abgeleitet werden, sondern muß vor der Grenzfläche z. B. gestaut werden. Diese Stauung könnte man unter Umständen auch als eine teilweise Reflexion des Grundfeldes der elementaren Flächenquelle auffassen, sofern man sich das Grundfeld



Abb. 5. Teilweise Reflexion des Grundfeldes  $Q$  einer unendlich kleinen Wärmequelle  $Q$  an der ebenen Grenzfläche  $z = 0$  zweier mit ihrer Wärmeübergangswiderstand vernachlässigt werden kann. Die obere Schicht besteht aus verdrängtem Stoff.

in jedem Zeitpunkt aus einer Summe von unendlich vielen, abklingenden harmonischen Temperaturschwingungen (seinem Frequenzspektrum) zusammengesetzt denkt. Nach einer früheren Arbeit des Verfassers<sup>1</sup> werden geeignet definierte quasistationäre Temperatur- und Wärmegrundwellen an ebenen Grenzflächen mit einer nur von den Wärmebelastungszahlen der angrenzenden Stoffe abhängigen Reflexionszahl teilweise zurückgeworfen. Man kann daher vermuten, daß auch im vorliegenden Fall das Grundfeld der elementaren Flächenquelle an der Grenzfläche in ähnlicher Weise teilweise reflektiert wird. Einer derartigen Reflexion muß hier aber auch eine unvollkommene Spiegeldung der in Stoff (1) wirklich vorhandenen Quellfläche entsprechen. Setzt man daher die Ergiebigkeit dieses Spiegelbildes der Quellfläche zunächst willkürlich gleich dem  $n$ -fachen der wirklichen Quelle und legt man den Koordinatenursprung in die Grenzfläche so, müßte sich dann das Temperaturfeld in Stoff (1) aus dem Grundfeld der wirklichen Quelle  $Q$  und dem ihres Spiegelbildes  $S$  (Abb. 5) zusammensetzen, also durch folgende Gleichung ausdrücken lassen:

$$T = \frac{Q}{\sqrt{4\pi a^2 \rho_1 c_1}} \left[ e^{-\frac{z^2}{4a^2}} + n e^{-\frac{(z-a)^2}{4a^2}} \right] \quad (z \geq 0). \quad (10)$$

<sup>1</sup> H. Pflüger, z. A. O.

000044

Der zeitliche Temperaturverlauf in der Grenzfläche  $x=0$  würde sich dann ergeben zu

$$t_{00} = \frac{Q_0(1 - \epsilon_2) e^{-\frac{x}{2\lambda_2}}}{2\lambda_2 \pi \tau}$$

Für Stoff (2) ist dies aber eine Temperaturänderung, die sich noch einstellen würde, wenn bei völlig gleichförmigem Stoff an einer Stelle  $x = -\lambda_2$  keine Quelle  $Q_0$  von (1) zu bestimmender Ergiebigkeit  $Q_0$  vorhanden wäre. Ergiebigkeit für Stoff (2) ist das Temperaturfeld in Stoff (2) müßte dann folgender Gestalt entsprechen

$$t_2 = \frac{Q_0}{2\lambda_2 \pi \tau} e^{-\frac{x}{2\lambda_2}}$$

Für  $x=0$  ergibt sich daraus

$$t_{20} = \frac{Q_0}{2\lambda_2 \pi \tau} e^{-\frac{x}{2\lambda_2}}$$

Da nun in der Grenzfläche nach Voraussetzung kein Temperatursprung auftreten soll, erhält man aus der Bedingung  $t_{10} = t_{20}$  die Beziehungen

$$k_1 = \epsilon_2 \lambda_2 \quad \text{und} \quad Q_1 = Q_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (1 - \epsilon_2)$$

Somit lautet die Gleichung für das Temperaturfeld in Stoff (1)

$$t_1 = \frac{Q_0(1 - \epsilon_2)}{2\lambda_1 \pi \tau} e^{-\frac{x}{2\lambda_1}} + \left( \frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_2} \right) e^{-\frac{x}{2\lambda_2}} \quad (18)$$

Damit nun (18) und (19) tatsächlich die Lösungen der Aufgabe sind, muß außerdem noch die von links in die Grenzfläche eindringende Wärme gleich der nach rechts weitergehenden Wärme sein, d. h. also, es muß sein

$$-k_1 \left( \frac{\partial t_1}{\partial x} \right)_0 = -k_2 \left( \frac{\partial t_2}{\partial x} \right)_0$$

Es ist aber

$$\left( \frac{\partial t_1}{\partial x} \right)_0 = \frac{Q_0(1 - \epsilon_2)}{2\lambda_1 \pi \tau} - \left( \frac{1}{2\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_2} \right) e^{-\frac{x}{2\lambda_2}} \quad \text{für } x=0$$

$$\left( \frac{\partial t_2}{\partial x} \right)_0 = \frac{Q_0}{2\lambda_2 \pi \tau} e^{-\frac{x}{2\lambda_2}} \quad \text{für } x=0$$

Setzt man diese Temperaturgefälle mit  $x=0$  in die vorstehende Wärmeübergangsbedingung ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{\lambda_1} (1 - \epsilon_2) = \frac{\epsilon_2}{\lambda_2} (1 - \epsilon_2)$$

oder wegen  $\epsilon = \lambda / \lambda_1$

$$\epsilon_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (20)$$

$\epsilon$  ist die zunächst als Verhältniszahl der Quellenergiebigkeiten eingeführte Größe, die ist eine Funktion des Wärmebelastungsgrades der beiden Stoffe abhängige Konstante. Sie gibt an, in welcher Stärke die wirkliche Wärmequelle an der Grenzfläche gespiegelt wird. Dabei ist sie in gleicher Weise zu berechnen wie die für periodisch veränderliche Temperaturfelder bekannte Reflexionszahl. Mit der schon angedeuteten Vorstellung, daß sich die Temperaturfelder dieser Ausgleichswegänge jeweils aus einem Spektrum von abklingenden Wärmewellen zusammensetzen, deren Resultierende in jedem Augenblick die wirklichen Temperaturverteilungen darstellen, kann man an der Auffassung einer teilweisen Reflexion dieser Wärmewellen an der Grenzfläche festhalten und so auch die Berechnung Reflexionszahl für die Größe  $\epsilon_2$  beibehalten. Dabei kann  $\epsilon_2$  Werte von  $-1$  bis  $+1$  annehmen. Positive Reflexionszahlen entsprechen dann eine Wärmestausung an der Grenzfläche, verbunden mit einer Temperatur-

<sup>1</sup> Vgl. H. Phisik, 2, 20

Erklärung: negative Werte von  $t_{21}$  bedeuten verstärkte Wärmestrahlung durch die Grenzfläche in Verbindung mit einer Temperaturerhöhung gegenüber dem entsprechenden Verlauf in homogenem Stoff. Keine Reflexion ergibt sich für  $\epsilon_2 = \epsilon_1$  unabhängig davon, ob große Unterschiede in den Temperatur- oder Wärmestromdichten der beiden Stoffe bestehen.

Nachfolgend soll auch die dem Integral der vorstehenden Lösung entsprechende Aufgabe kurz behandelt werden.

Aufgabe 6: Im gleichen Körper wie in Aufgabe 5 soll die Temperatur zu Beginn der Zeitrechnung  $t = 0$  von  $x = -\infty$  bis  $x = +\infty$  die entsprechende Größe  $-T$  und von  $x = -s$  bis  $x = +s$  die Größe  $+T$  besitzen. Gesucht ist die Gestalt des Temperaturfeldes zu allen späteren Zeiten.

Von der Lösung der vorstehenden Aufgabe ist bekannt, daß sie zur Zeit  $t = 0$  an allen Punkten  $x = -s$  den Wert Null ergibt, für  $x = -s$  aber den Wert  $\alpha$  liefert. Die gleichen Anfangsbedingungen sind aber in der vorstehenden Aufgabe für den Wärmestrom  $q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}$  zu fordern, so daß man die Lösungen hierfür jeweils die gleichen Funktionen verwenden kann. Es ist also

$$t_1 = \frac{C}{\sqrt{4\pi k_2 t}} \left[ e^{-\frac{x+\alpha t}{\sqrt{4k_2 t}}} + e^{-\frac{x-\alpha t}{\sqrt{4k_2 t}}} \right] = -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \quad (x \leq 0)$$

$$t_2 = \frac{C(x+\alpha t)}{\sqrt{4\pi k_2 t}} e^{-\frac{x+\alpha t}{\sqrt{4k_2 t}}} = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \quad (x \geq 0)$$

wobei  $C$  eine Konstante bedeutet. Die Reflexionszahl wird sich hierbei im allgemeinen von derjenigen der Aufgabe 5 unterscheiden und ist daher vorläufig mit  $t_{21}$  bezeichnet worden. Die Wärmeübergangsbedingung an der Grenzfläche ist dabei wieder erfüllt, wenn  $t = s$  gilt.

Die Temperaturfelder erhält man aus den vorstehenden Beziehungen durch Integration nach  $x$ :

$$t_1 = \frac{C}{\sqrt{4\pi k_2}} \left[ \Phi \left( \frac{x+\alpha t}{\sqrt{4k_2 t}} \right) - t_{21} \Phi \left( \frac{x-\alpha t}{\sqrt{4k_2 t}} \right) \right] + C_1$$

$$t_2 = \frac{C}{\sqrt{4\pi k_2}} \left[ \frac{\alpha}{k_2} \Phi \left( \frac{x+\alpha t}{\sqrt{4k_2 t}} \right) \right] + C_2$$

mit  $C_1$  und  $C_2$  als Integrationskonstanten. Zu Beginn der Zeitrechnung  $t = 0$  soll nun auch Voraussetzung für

$$x < -s: t_1 = -T = -\frac{C}{\sqrt{4\pi k_2}} \left[ 1 + t_{21} \right] + C_1$$

$$0 \leq x < -s: t_1 = -T = \frac{C}{\sqrt{4\pi k_2}} \left[ 1 - t_{21} \right] + C_1$$

$$x \geq 0: t_2 = -T = \frac{C}{\sqrt{4\pi k_2}} \left[ 1 + t_{21} \right] \frac{\alpha}{k_2} + C_2$$

schon. Hieraus ergibt sich

$$C = 0 \sqrt{4\pi k_2} \quad C_1 = t_{21} T \quad C_2 = T \left[ 1 - \frac{k_2}{\alpha} \left( 1 + t_{21} \right) \right]$$

Außerdem muß in jedem Ausgedrück  $x > 0$  an der Grenzfläche  $x = 0$   $t_{21} = t_{12}$  sein. Hieraus ergibt sich

$$t_{21} = \frac{k_2 - \alpha}{k_2 + \alpha} = -t_{12}$$

Denn lautet dann die Lösung der Aufgabe 6

$$t_1 = T \left[ \Phi \left( \frac{x+\alpha t}{\sqrt{4k_2 t}} \right) - t_{21} \Phi \left( \frac{x-\alpha t}{\sqrt{4k_2 t}} \right) \right] - t_{21} T \quad (x \leq 0) \quad (21)$$

$$t_2 = T \left[ 1 + t_{21} \Phi \left( \frac{x+\alpha t}{\sqrt{4k_2 t}} \right) \right] - t_{21} T \quad (x \geq 0) \quad (22)$$

**Aufgabe 7.** An beiden Seiten einer plattparallelen Platte vom Stoff (1) und von der Dicke  $2s$  schließen sich unendlich ausgedehnte Körper vom Stoff (2) an, s. Abb. 6. Die Temperatur soll zunächst in allen Punkten dieses zusammengesetzten Körpers gleich sein. In der Mittelebene der Platte wird nun plötzlich zur Zeit  $\tau = 0$  die Wärmemenge  $Q$  einmalig zugeführt. Gesucht ist das sich dann ausbildende Temperaturfeld.



Abb. 6. Resultierendes Temperaturfeld einer ebenen Platte, deren Wärmepuls in einem punktförmigen Körper.

Nach Lösung der zwei vorausgehenden Aufgaben ist bekannt, daß Grundfelder von Wärmeausgleichsvorgängen an den ebenen Grenzflächen zweier Stoffe teilweise reflektiert werden. Der an einer Grenzfläche zurückgeworfene Anteil wird aber im vorliegenden Fall jeweils an der gegenüberliegenden Grenzfläche wiederum teilweise reflektiert usw. Auf diese Weise setzt sich das resultierende Temperaturfeld in beiden Stoffen aus einer unendlich großen Zahl von Partikularintegralen zusammen. Legt man nun den Ursprung des Koordinatensystems in die Mittelebene der Platte, so findet man für die Temperaturfelder die Lösungen

$$t_1 = \frac{Q}{b_1 \sqrt{4\pi\tau}} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4\tau}} + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_{12}^n \left[ e^{-\frac{(2n-1)s+x)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(2n-1)s-x)^2}{4\tau}} \right] \right\} \quad (s \geq x \geq -s) \quad 24$$

$$t_2 = \frac{Q(1 \pm \varrho_{12})}{b_2 \sqrt{4\pi\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_{12}^n e^{-\frac{(2n+1)s \pm x)^2}{4\tau}} \quad (x \leq s) \quad 25$$

wobei wieder  $h = s \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$  ist.

Dabei gelten in der zweiten Gleichung im Exponenten der Exponentialfunktion die oberen Vorzeichen für  $x \leq -s$ , die unteren Vorzeichen für  $x \geq -s$ .

Für  $\varrho_{12} = 0$  wird die Gleichung 24) geht in die Lösung der Aufgabe 1 über. Dabei kann man wie bei periodischen Temperaturfeldern<sup>1)</sup> zwei Fälle unterscheiden:

1.  $\varrho_{12} = 0$ ,  $\varrho_{21} \neq 0$ , d. h. Stoff (2) ist ein absoluter Wärmeisulator. Dann wird  $t_2 = 0$ . Dies entspricht dem Grenzfall der technischen Wärmeisolierung mit festen Stoffen.

2.  $\varrho_{21} = 0$ ,  $\varrho_{12} > 0$ . Hierfür wird

$$t_2 = \frac{2Q}{b_2 \sqrt{4\pi\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)s)^2}{4\tau}}$$

d. h. Stoff (2) macht die Temperaturänderungen der Plattenoberflächen in seiner ganzen Ausdehnung gleichmäßig mit, ohne das Temperaturfeld in Stoff (1) zu stören. Es entspricht dies technisch dem Grenzfall einer Wärmeisolierung mit einem Gas unter mäßigem Vakuum.

Besitzen die beiden Stoffe gleiche Wärmebelastungszahlen  $b_1 = b_2$ , so wird  $\varrho_{12} = 0$ ; d. h. es tritt keine Reflexion ein. Die Lösungen beschränken sich dabei jeweils auf die ersten Glieder der Gleichungen (24) und (25).

Wenn  $b_2$  sehr groß gegenüber  $b_1$  wird, erhält man im Grenzfall  $\varrho_{12} = 1$ . Man findet dann die Lösungen

$$t_1 = \frac{Q}{b_1 \sqrt{4\pi\tau}} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4\tau}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ e^{-\frac{(2n-1)s+x)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(2n-1)s-x)^2}{4\tau}} \right] \right\} \quad (s \geq x \geq -s)$$

$$t_2 = 0.$$

<sup>1)</sup> H. Pfriem, a. a. O.

Dies entspricht, technisch, einer sehr großen Wärmeübergangszahl an den Plattenoberflächen, so daß deren Obertemperatur stets gleich Null ist.

Setzt man voraus, daß die Funktionen nach (24) und (25) nicht die Temperatur, sondern den Verlauf des Wärmestroms angeben, so erhält man durch Integration nach  $x$  das Temperaturfeld für die folgende Aufgabe.

Aufgabe 8. Im gleichen Körper wie bei Aufgabe 7 soll zu Anfang der Zeitrechnung  $t = 0$  die Temperatur in allen Punkten  $x < 0$  gleich  $-T$  sein, in allen Punkten  $x > 0$  aber  $+T$ . Gesucht ist das Temperaturfeld für alle Zeiten  $t > 0$ .

Nach (24) und (25) erhält man für den Wärmestrom

$$q_1 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{C}{14 a^2 \tau} \left[ \frac{x}{2 a \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \left[ e^{-\frac{2 n x + a \tau}{4 a^2 \tau}} + e^{-\frac{2 n x - a \tau}{4 a^2 \tau}} \right] \right]$$

$$q_2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{C(1 - \cos \frac{a}{2})}{14 a^2 \tau} \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{-\frac{2 n x + a \tau}{4 a^2 \tau}}$$

Die Konstante  $C$  ist noch zu bestimmende unveränderliche Größe. Durch die Übernahme dieser Funktionen sind die Wärmeübergangsbedingungen an den beiden Grenzflächen schon erfüllt. Die Gleichungen des Temperaturfeldes erhält man dann durch Integration nach  $x$  zu

$$T_1 = \frac{C}{2 \lambda} \left[ \Phi \left( \frac{x}{14 a^2 \tau} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \left[ \Phi \left( \frac{2 n x + a \tau}{14 a^2 \tau} \right) - \Phi \left( \frac{2 n x - a \tau}{14 a^2 \tau} \right) \right] \right] - C_1$$

$$T_2 = \frac{C(1 - \cos \frac{a}{2})}{2 \lambda} \left[ \frac{x}{2 a} + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \Phi \left[ \frac{x - (2 n - 1) a}{14 a^2 \tau} \right] \right] - C_2$$

Zu Beginn der Zeitrechnung  $t = 0$  soll nun die Temperatur in allen Punkten  $x > 0$  gleich  $T$  sein, d. h. also

$$T = \frac{C}{2 \lambda} - C_1$$

und

$$T = \frac{C(1 - \cos \frac{a}{2})}{2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} e_n + C_2 = \frac{C}{2 \lambda} - C_2$$

Außerdem muß für  $x = 0$  in allen Punkten  $x < 0$  die Temperatur  $t = -T$  sein; daher ergibt sich

$$-T = -\frac{C}{2 \lambda} - C_1$$

und

$$-T = -\frac{C(1 - \cos \frac{a}{2})}{2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} e_n - C_2 = -\frac{C}{2 \lambda} - C_2$$

Daraus erhält man

$$C = 2 T \lambda$$

und

$$C_1 = C_2 = 0$$

Die Lösungen der Aufgabe 8 lauten dann

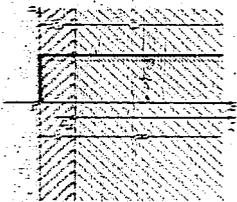
$$T_1 = T \Phi \left( \frac{x}{14 a^2 \tau} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \left[ \Phi \left( \frac{2 n x + a \tau}{14 a^2 \tau} \right) - \Phi \left( \frac{2 n x - a \tau}{14 a^2 \tau} \right) \right] \quad (x \leq 0) \quad (26)$$

$$T_2 = T \left[ 1 - \cos \frac{a}{2} \right] \sum_{n=1}^{\infty} e_n \Phi \left[ \frac{x - (2 n - 1) a}{14 a^2 \tau} \right] \quad (x > 0) \quad (27)$$

300 300 1170  
1170

Zu bei gehen in der letzten Gleichung die oberen Vorzeichen, welche für alle Punkte  $x = 0$  sind, die ungenau für  $x = 0$ . Man überzeugt sich leicht, dass die hier zu berechnenden Temperaturen für Grenzflächen  $x = 0$  immer über dem Maximum mit jenen nach (27).

Wie aus (26) unmittelbar hervorgeht, ist die Oberflächentemperatur an der Stelle  $x = 0$  zu allen Zeiten gleich Null. Die Gleichungen (26) und (27) bilden daher auch die Lösung für eine Aufgabe von der folgenden Form.



Aufgabe 1a. Auf die ebenen Oberfläche eines massig unendlich ausgedehnten Körpers von Stoff  $\sigma$  ist eine planparallele Platte von Stoff  $\tau$  und von der Dicke  $2a$  aufgeschoben. Die Temperatur soll zunächst in allen Punkten dieses unendlich ausgedehnten Körpers gleich  $T_0$  sein. Zur Zeit  $t = 0$  wird diese ebenen Oberfläche  $x = 0$  plötzlich auf die Oberflächentemperatur Null gebracht und diese dann dauernd aufrechterhalten.

Je nachdem man für  $\tau$  einen positiven oder negativen Wert wählte, liefert diese die Gleichungen (26) und (27) die Lösungen für die Abkühlung oder Erwärmung dieses Körpers.

Das obige Diagramm zeigt einen Körper, dessen Oberfläche an der Stelle  $x = 0$  auf die Temperatur Null gebracht wird. Die Dicke des Körpers ist  $2a$ . Die Temperaturverteilung im Inneren des Körpers wird durch die Gleichungen (26) und (27) beschrieben.

Betrachtet man nun die vorgegebene planparallele Platte als die rechte Seite des Körpers, so kann man durch eine endliche Wärmeübergangszahl an der Oberfläche des Körpers  $\tau$  die obige Abkühlung bzw. Aufwärmung herbeiführen. Diese wird die Wirkung der Wärmeübergangszahl der Grenzfläche bei dem vorgegebenen Wert  $T_0$  sein.

Man wählt in diesem Falle für die Wärmeübergangszahl  $h$  den Wert  $h = \frac{k}{2a}$ , wobei  $k$  die Wärmeleitfähigkeit des Körpers  $\tau$  ist.

$$T = T_0 + \frac{2a}{\sqrt{\pi k \tau}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2} \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda$$

Man kann jedoch vielfach die Wärmeübergangszahl für den entsprechenden stationären Vorgang und kann daraus die Dicke der gedachten Grenzfläche  $2a = \frac{k}{h}$  bestimmen. Dann muss man diesen Wert an (27) einsetzen und man erhält für den Temperaturverlauf bei der Abkühlung bzw. Erwärmung von Stoff  $\sigma$  die folgende Gleichung:

$$T = T_0 + \frac{2a}{\sqrt{\pi k \tau}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2} \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda$$

Es soll hiermit eine Skizze in einer früheren Arbeit des Verfassers (vgl. Fußnote 1) zu dieser Arbeit, welcher die Wärmeübergangszahl  $h$  für den stationären Vorgang und kann daraus die Dicke der gedachten Grenzfläche  $2a = \frac{k}{h}$  bestimmen. Dann muss man diesen Wert an (27) einsetzen und man erhält für den Temperaturverlauf bei der Abkühlung bzw. Erwärmung von Stoff  $\sigma$  die folgende Gleichung:

Bei dem üblichen Newtonschen Ansatz für den Wärmeübergang an einer Oberfläche  $q = h(T_0 - T_s)$  wird die Wärmeübergangszahl der Grenzfläche bei Anwendung des unendlich ausgedehnten Körpers nicht infachwendig veränderlich.

22  
23  
24

wobei  $\xi = r - s$  der Abstand eines Punktes im Inneren des Stoffes (2) von dessen Oberfläche ist (Abb. 2). Zur zahlenmäßigen Auswertung zerlegt man diese Reihe zweckmäßig wie folgt:

$$u = T_0 - 2u_1 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 D \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_2} \frac{h_2}{\lambda_2} \xi - z}{\sqrt{\lambda_2^2 + \sigma_n^2}} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 D \left[ \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_2} \frac{h_2}{\lambda_2} \xi - z}{\sqrt{\lambda_2^2 + \sigma_n^2}} \right] \quad (19)$$

Wählt man nun  $\sigma_n$  so, daß

$$(2n-1) \sqrt{\lambda_2} \frac{h_2}{\lambda_2} \xi - z = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_2^2 + \sigma_n^2} \quad (20)$$

ist, so wird in der zweiten Summe das Gaußsche Fehlerintegral mit einem Fehler von weniger als 1% gleich 1. Die Summe selbst geht dadurch in eine geometrische Reihe über, und man erhält in Stelle der unendlich vielen Glieder die folgende endliche Reihe als Lösung:

$$u = T_0 - 2u_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 D \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_2} \frac{h_2}{\lambda_2} \xi - z}{\sqrt{\lambda_2^2 + \sigma_n^2}} - \sigma_n^2 D \quad (21)$$

Die Bedingung (20) liefert dabei vor allem am Anfang der Zeitrechnung kleine Werte von  $\sigma_n$ , so daß dann auch die verbleibende endliche Reihe nur aus wenigen Gliedern besteht. Einfach noch für beliebig spätere Zeiten eine einfache Möglichkeit für die Berechnung des Temperaturverlaufs zu erhalten, kann man entweder nach dem früher schon entwickelten Verfahren eine Näherungslösung ableiten, oder aber auch die bekannten Fourier-Entwicklungen weiter verwenden. Nachfolgend wird jedoch hierauf nicht eingegangen; dafür soll vielmehr eine neue Lösung für eine andere Anfangsbedingung in der Grenzschicht abgeleitet werden.

**Aufgabe 3.** Im Gegensatz zur Anfangsbedingung in der zuletzt entwickelten Lösung soll die Grenzschicht (Stoff (1) zu Beginn der Zeitrechnung  $\tau = 0$ ) die Ober-temperatur Null besitzen, während alle Punkte vom Stoff (2) die Ober-temperatur  $T_0$  aufweisen. Die freie Oberfläche der Grenzschicht ( $x = 0$ ) soll dabei stets auf der Ober-temperatur Null gehalten werden. Gesucht ist die zeitlich veränderliche Temperaturverteilung.

In beiden Stoffen muß sich auch in diesem Fall der Wärmestrom wieder nach der Quellfunktion berechnen lassen, wobei die Quellfläche mit der Grenzfläche  $x = 0$  zusammenfällt. Die Oberfläche  $x = 0$  ist dabei für  $q = -\lambda$  als vollkommen spiegelnd anzusehen. Man erhält dann:

$$q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{C_1 \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1^2 e^{-\sigma_1^2 \tau} \left[ \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2} - \sigma_1^2 \tau}{\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2}} - \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2} - \sigma_1^2 \tau}{\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2}} \right] \quad (22)$$

$$q = -\frac{C_1 \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1^2 e^{-\sigma_1^2 \tau} \left[ \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2} - \sigma_1^2 \tau}{\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2}} - \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2} - \sigma_1^2 \tau}{\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2}} \right] \quad (23)$$

$C_1$  und  $C_2$  sind dabei noch zu bestimmte, unveränderliche Größen. Durch Integration nach  $x$  ergibt sich

$$u_1 = \frac{C_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1^2 D \left[ \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2} - \sigma_1^2 \tau}{\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2}} - \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2} - \sigma_1^2 \tau}{\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma_1^2}} \right] \quad (24)$$

$$u_2 = \frac{C_2}{\sqrt{\lambda_2^2 + \sigma_2^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_2^2 D \left[ \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_2^2 + \sigma_2^2} - \sigma_2^2 \tau}{\sqrt{\lambda_2^2 + \sigma_2^2}} - \frac{(2n-1) \sqrt{\lambda_2^2 + \sigma_2^2} - \sigma_2^2 \tau}{\sqrt{\lambda_2^2 + \sigma_2^2}} \right] \quad (25)$$

000350

188

Die Integrationskonstanten, werden hier wieder beide gleich Null und sind daher weggelassen worden. Mit Hilfe der zeitlichen Anfangsbedingung erhält man  $C_2 = T(t - \varrho_{21})$  und die Wärmeübergangsbedingung an der Grenzfläche  $x = s$  liefert

$$C_1 = C_2 \frac{b_1}{b_2} = T(1 + \varrho_{21})$$

Damit erhält man als endgültige Lösungen der Aufgabe 9

$$t_1 = \frac{T(t + \varrho_{21})}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_{1n}^2 \left[ \Phi \left[ \frac{(2n+1)s + x}{\sqrt{4a_1 t}} \right] - \Phi \left[ \frac{(2n+1)s - x}{\sqrt{4a_1 t}} \right] \right] \quad (0 \leq x \leq s), \quad (31)$$

$$t_2 = \frac{T(t - \varrho_{21})}{2} \left[ \Phi \left[ \frac{x - s}{\sqrt{4a_2 t}} \right] + (1 + \varrho_{21}) \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_{1n}^2 \Phi \left[ \frac{(2n+1)s}{\sqrt{4a_2 t}} - \frac{x + s}{\sqrt{4a_2 t}} \right] \right] \quad (x \geq s). \quad (32)$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit (26) und (27), so findet man wesentliche Unterschiede für  $x \geq s$  vor allem am Anfang der Zeitrechnung. Dies bedeutet aber, daß man unter Umständen (bei kleinen Wärmeübergangszahlen und großer Wärmekapazität der Grenzschicht) für derartige Aufgaben den Anfangszustand der Grenzschicht tatsächlich berücksichtigen muß. Man findet beispielsweise für das Verhältnis der Temperaturen in der Grenzfläche  $1/2$ , also für  $x = s$  nach (27) und (32) den Wert

$$\frac{t_{20}(27)}{t_{20}(32)} = \frac{2}{1 + \varrho_{21}}$$

Daraus ergibt sich ohne weiteres, daß der Anfangszustand der Grenzschicht immer dann vernachlässigbar ist, wenn Metallkörper durch technische Gase bei nicht zu hohen Drücken (bis etwa 10 at) abgekühlt (oder erwärmt) werden, da hierbei die Reflexionszahl  $\varrho_{21}$  praktisch gleich 1 wird; bei Abkühlung durch Wasser können aber unter Umständen schon Fehler von mehr als 10% auftreten. Bei den entsprechenden Vorgängen an schlechten Wärmeleitern muß dagegen der Anfangszustand der Grenzschicht in allen Fällen berücksichtigt werden, da hierbei  $\varrho_{21}$  stets wesentlich kleiner als 1 ist und unter Umständen auch negativ werden kann.

Ersetzt man in (32) wiederum die unbekannte Grenzschichtdicke  $s$  durch  $\lambda_1/\alpha_0$ , so ergibt sich eine der Gleichung (28) entsprechende Lösung. Diese kann dann wie jene für Zahlenrechnungen noch leicht durch bequemere Näherungslösungen ersetzt werden.

Aufgabe 10. Im gleichen Körper wie bei den Aufgaben 7 und 8 ist die Oberflächentemperatur aller Punkte zunächst gleich Null. Zu Beginn der Zeitrechnung soll dann plötzlich im ganzen Stoff (1) je Raumeinheit die Wärmemenge  $Q/b_1$  zugeführt werden. Diese soll dann nur durch Wärmeleitung in den angrenzenden Stoff (2) übergehen. Gesucht ist die zeitlich veränderliche Form des Temperaturfeldes.

Diese Aufgabe wäre beispielsweise von Bedeutung zur Berechnung des Anteils der reinen Wärmeleitung bei der Abkühlung von Gasen zwischen zwei ebenen Wänden, wenn jene etwa durch Verbrennung zur Zeit  $\tau = 0$  plötzlich eine höhere Temperatur als die Wände annehmen.

Denkt man sich den Stoff (1) stetig mit elementaren Wärmequellen ausgefüllt, so wird jede von diesen für sich allein ein Temperaturfeld erzeugen, das nach den vorausgehenden Betrachtungen ohne Schwierigkeiten berechnet werden kann. Da aber die Differentialgleichung der Wärmeleitung linear ist, muß die Summe aller dieser Einzelfelder die gesuchte Lösung darstellen. Die Gleichung des Temperaturfeldes für eine solche Elementarquelle an der Stelle  $x = \xi$  lautet aber in Stoff (1)

$$t_1(\xi) = \frac{Q(\xi)}{b_1 \sqrt{4\pi\tau}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1\tau}} + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_{1n}^2 n^{-1} \left[ e^{-\frac{(2n\xi - 1)(x-\xi - s)^2}{4a_1\tau}} + e^{-\frac{(2n\xi - 1)(x-\xi + s)^2}{4a_1\tau}} \right] \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_{1n}^2 n \left[ e^{-\frac{(2n\xi + \xi - s)^2}{4a_1\tau}} + e^{-\frac{(2n\xi + \xi + s)^2}{4a_1\tau}} \right] \quad (-s \leq x \leq +s).$$

009351

Eine entsprechende Lösung  $t_2(\xi)$  findet man auch für Stoff (2). Dabei kann die Erzeugigkeit  $Q(\xi)$  einer derartigen Elementarquelle im allgemeinsten Fall (wie schon angedeutet) noch eine Funktion ihrer Lage sein. Nachdem nun die Elementarquellen in Stoff (1) stetig verteilt sind, geht die Summe aller ihrer Einzelslösungen in ein Integral nach  $\xi$  über, so daß sich für die resultierenden Temperaturfelder die folgenden Beziehungen ergeben:

$$t_1 = \frac{1}{2s} \int_{-s}^x t_1(\xi) d\xi \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{1}{2s} \int_x^{+s} t_2(\xi) d\xi.$$

In der vorliegenden Aufgabe soll die Wärme gleichmäßig verteilt im Stoff (1) zugeführt werden. Es muß daher  $Q(\xi) = Q_0 = \text{konst.}$  sein. Damit kann die Integration durchgeführt werden, und man findet so als Lösung der Aufgabe 10

$$t_1 = \frac{Q_0(1 - e_{21})}{2s a_1 \gamma} \sum_{n=0}^{\infty} e_{21}^n \left[ \Phi \left[ \frac{(2n+1)s+x}{14 a_1 \tau} \right] - \Phi \left[ \frac{(2n-1)s-x}{14 a_1 \tau} \right] \right] \quad (-s \leq \xi \leq +s), \quad (33)$$

$$t_2 = \frac{Q_0(1 - e_{21})}{2s a_1 \gamma} \left[ \Phi \left[ \frac{x-s}{14 a_1 \tau} \right] + (1 - e_{21}) \sum_{n=0}^{\infty} e_{21}^n \Phi \left[ \frac{x-s+2(n+1)s}{14 a_1 \tau} \right] \right] \quad (x \geq +s). \quad (34)$$

Für  $x \leq -s$  wird das Temperaturfeld spiegelbildlich gleich dem nach (34).

**Aufgabe 11.** Ein einseitig unendlich ausgedehnter Körper vom Stoff (2) besitzt zur Zeit  $t=0$  in allen Punkten die gleiche Oberflächentemperatur  $T$ . Die anschließende (laminare) Grenzschicht vom Stoff (1) und von der Dicke  $s$  soll anfänglich linearen Temperaturabfall von  $T$  an der Grenzfläche  $x=s$  nach Null für  $x=0$  aufweisen (Abb. 8). Wie ändert sich das Temperaturfeld mit der Zeit, wenn an der Stelle  $x=0$  stets die Oberflächentemperatur Null aufrechterhalten wird?

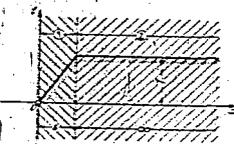


Abb. 8. Anfangliche, lineare Temperaturverteilung in einer planparallelen Schicht (1), die sich von dem unendlich ausgedehnten Stoff (2) aus der anfänglich gleiches Temperatur  $T$  befindet und als ideale Grenzschicht einer richtig erhaltenden Flüssigkeit anzufassen werden kann.

Nach Lösung der Aufgabe 10 findet man aus (33) den Wärmestrom für Aufgabe 11 zu

$$q_1 = -\lambda_1 C (1 - e_{21}) \sum_{n=0}^{\infty} e_{21}^n \left[ \Phi \left[ \frac{(2n+1)s+x}{14 a_1 \tau} \right] - \Phi \left[ \frac{(2n-1)s-x}{14 a_1 \tau} \right] \right] \quad (0 \leq x \leq s),$$

$$q_2 = \left[ -\lambda_2 C (1 - e_{21}) - \Phi \left[ \frac{x-s}{14 a_1 \tau} \right] + (1 - e_{21}) \sum_{n=0}^{\infty} e_{21}^n \Phi \left[ \frac{x-s+2(n+1)s}{14 a_1 \tau} \right] \right] \quad (x \geq +s).$$

Hiemit erhält man durch Integration nach  $x$  und Einsetzen der Randbedingungen wieder die Gleichungen der Temperaturfelder

$$t_1 = \frac{T(1 - e_{21})}{2s} \sum_{n=0}^{\infty} e_{21}^n \left[ (2n+1)s - x \right] \Phi \left[ \frac{(2n+1)s+x}{14 a_1 \tau} \right] - \left[ (2n-1)s - x \right] \Phi \left[ \frac{(2n-1)s-x}{14 a_1 \tau} \right] + \left[ \frac{14 a_1 \tau}{x} \right] e^{-\frac{x^2 - 2x(2n+1)s}{14 a_1 \tau}} - e^{-\frac{x^2 - 2x(2n-1)s}{14 a_1 \tau}} \quad (0 \leq x \leq s), \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 t_2 = & \frac{T}{2s} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 + \varrho_{21}) \left[ - (x-s) \Phi \left[ \frac{x-s}{\sqrt{4a_2t}} \right] - \sqrt{\frac{4a_2t}{\pi}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a_2t}} + \right. \\
 & + (1 - \varrho_{21}) \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_{21}^n \left[ \left( x-s + 2(n+1)s \right) \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \Phi \left[ \frac{x-s + 2(n+1)s}{\sqrt{4a_2t}} \right] + \right. \\
 & \left. \left. + \sqrt{\frac{4a_2t}{\pi}} e^{-\frac{(x-s + 2(n+1)s)^2}{4a_2t}} \right] \right] \quad (x \geq s).
 \end{aligned}$$

Man kann leicht zeigen, daß damit alle vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt sind und daher (35) und (36) die Lösung der Aufgabe 11 darstellen. An Stelle der unbekannteren Grenzschichtdicke kann dabei wieder  $s = \lambda_1/\alpha_0$  gesetzt werden. Auf diese Weise ergibt sich eine dritte Beziehung für die Berechnung des Abkühlungs- bzw. Anheizungsvorganges eines einseitig unendlich ausgedehnten Körpers (2), an dessen ebener Oberfläche eine Grenzschicht von endlicher Dicke und damit endlicher Wärmekapazität den Wärmeaustausch behindert. Die zahlenmäßige Auswertung der beiden letzten Gleichungen kann wiederum durch bequeme Näherungsrechnungen erleichtert werden, wobei man für genügend kleine Werte der Zeit eine der Beziehung (36) entsprechende erste Näherung erhält, wenn man beachtet, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \varrho_{21}^n = \frac{\varrho_{21}}{(1 - \varrho_{21})^2}$$

ist.

Ein einfaches Beispiel für die praktische Anwendung dieser Entwicklungen bietet neben den eingangs schon angedeuteten Fällen bei Wärmekraftmaschinen auch der Erwärmungsvorgang von elektrischen Maschinen. Dieser unterscheidet sich von dem der sonstigen Kraftmaschinen dadurch, daß die Wärme unmittelbar im Metall erzeugt wird (Ummagnetisierungsverluste und Stromwärme). Dabei kann man sich in erster Näherung die Wärmequellen als gleichmäßigen Belag unmittelbar an der Oberfläche von Stator (oder Rotor) vorstellen und am Anfang der Zeitrechnung in weiterer Näherung die Krümmung der Oberfläche vernachlässigen<sup>1</sup>. Man findet somit eine ebene Aufgabe, die wie folgt lautet:

Aufgabe 11a. Vor einem einseitig unendlich ausgedehnten Körper vom Stoff (2) befindet sich eine (laminare) Grenzschicht vom Stoff (1) der Dicke  $s$ . Alle Punkte von beiden Stoffen besitzen zunächst die Übertemperatur Null. Vom Beginn der Zeitrechnung an soll in der Grenzfläche  $1/2$  je Zeit- und Flächeneinheit eine bestimmte Wärmemenge erzeugt werden, während die freie Oberfläche der Grenzschicht ( $x=0$ ) stets auf der Übertemperatur Null gehalten wird. Gesucht ist der zeitliche Temperaturverlauf.

Obwohl diese Aufgabe scheinbar sehr verschieden von der vorausgehenden ist, findet man doch ihre Lösung durch einfache Subtraktion der Gleichungen (35) und (36) von denen des stationären Endzustandes. Es ergibt sich also

$$t_1 = T \frac{x}{s} - t_1 \quad (35) \quad (0 \leq x \leq s), \quad (37)$$

$$t_2 = T - t_2 \quad (36) \quad (x \geq s). \quad (38)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt sind und damit die beiden vorstehenden Gleichungen tatsächlich die Lösungen der Aufgabe 11a darstellen.

<sup>1</sup> Vgl. Rothe-Ollendorf-Pohlhausen, Funktionentheorie S. 136. Berlin 1931.

Bei den bisher behandelten Aufgaben waren stets die Quellflächen parallel zu den Grenzflächen der betrachteten Körper. Nun sind aber auch schräg zu ebenen Grenzflächen liegende ebene Quellflächen denkbar, weshalb nachfolgend diese Verhältnisse an dem einfachsten Beispiel dieser Art betrachtet werden sollen.

**Aufgabe 12.** Ein alleseitig ausgedehnter Körper bestehe aus zwei verschiedenen, in sich homogenen Stoffen (1) und (2), die sich in einer Ebene ohne Wärmeübergangswiderstand berühren. In Stoff (1) soll nun eine ebene, elementare Quellfläche von bekannter Ergiebigkeit unter dem Winkel  $\alpha_1$  zur Normalen der Grenzfläche in großer Entfernung von der betrachteten Stelle auftreten. Diese soll in Stoff (2) so ergänzt werden, daß hier ein Temperaturfeld wie unter dem Einfluß einer ebenen Elementarquelle in einem völlig gleichförmigen Körper entsteht.

Ein rechtwinkliges Achsenkreuz soll so gelegt werden, daß eine Koordinate ( $y$ ) senkrecht zur Grenzfläche steht, während die andere ( $x$ ) gleichzeitig in dieser und in einer Isothermen im Abstand  $x_0 \cos \alpha_1$  von der Quellfläche liegt. Dadurch ergibt sich eine ebene Aufgabe mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  (Abb. 9). Zur bequemeren Ableitung der Lösung soll vorläufig noch ein Koordinatensystem  $x^*$ ,  $y^*$  derart angeordnet werden, daß die  $y^*$ -Achse in einer Isothermen des ankommenden Grundfeldes liegt und die  $x^*$ -Achse senkrecht zu dieser steht. Die Gleichung für das Grundfeld der Quelle lautet dann

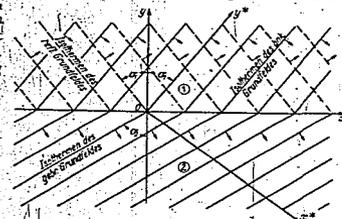


Abb. 9. Darstellung der Erscheinung der Brechung im einfachsten Fall des Wärmeausgleiches bei schräg zur Grenzfläche zweier Stoffe in großer Entfernung ( $y=0, x=-x_0$ ) liegenden Wärmequellen.

$$t = \frac{Q}{c\gamma} \frac{e^{-\frac{(x^* + x_0 \cos \alpha_1)^2}{4\pi a^2 t}}}{\sqrt{4\pi a^2 t}}$$

Das ( $x^*$ ,  $y^*$ )-System geht nun durch Drehung um den Winkel  $\alpha_1$  in das ( $x$ ,  $y$ )-System über. Die Transformationsgleichung lautet dabei

$$x^* = x \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1$$

Beachtet man noch, daß sich entsprechend den vorausgehenden Aufgaben an der Grenzfläche zweier Stoffe stets eine teilweise Reflexion des Feldes ergibt, so müßte sich das Temperaturfeld in Stoff (1) durch folgende Gleichung darstellen lassen:

$$t_1 = \frac{Q}{b_1 \sqrt{4\pi a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{[(x+x_0) \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1]^2}{4a^2 t}} + Q e^{-\frac{[(x+x_0) \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1]^2}{4a^2 t}} \right\} \quad (y \geq 0) \quad (39)$$

Das Temperaturfeld in Stoff (2) soll dann nach Voraussetzung durch eine Elementarquelle bedingt sein, deren Ebene unter dem noch zu bestimmenden Winkel  $\alpha_2$  gegen eine Normale zur Grenzfläche geneigt ist:

$$t_2 = \frac{Q_2}{b_2 \sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{[(x+x_0) \cos \alpha_2 - y \sin \alpha_2]^2}{4a^2 t}} \quad (y \leq 0) \quad (40)$$

Die Übergangsbedingungen an der Grenzfläche  $y=0$  lauten dabei

$$t_{10} = t_{20} \quad \text{und} \quad \lambda_1 \left( \frac{\partial t_1}{\partial y} \right)_0 = -\lambda_2 \left( \frac{\partial t_2}{\partial y} \right)_0$$

Aus der ersten ergibt sich zunächst:

$$\cos \alpha_2 = \cos \alpha_1 \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \quad (41)$$

Dies bedeutet, daß die Schräglagen der beiden Quellflächen zur Normalen der Grenzfläche in den Stoffen (1) und (2) durch das Snelliussche Brechungsgesetz bestimmt

000354

sind. Für die Ergiebigkeit der Quelle in Stoff  $\rho$  findet man außerdem

$$Q_0 = Q_1 + \rho \frac{dV}{dt}$$

Die zweite Übergangsbedingung liefert schließlich noch in Verbindung mit 41. die Größe der Reflexionszahl

$$r = \frac{h_2 \sin \alpha_2 - h_1 \sin \alpha_1}{h_2 \sin \alpha_2 + h_1 \sin \alpha_1} = \frac{h_2 \cos \alpha_2 - h_1 \cos \alpha_1}{h_2 \cos \alpha_2 + h_1 \cos \alpha_1}$$

Es zeigt sich also, daß ein Temperaturfeld der vorgeschriebenen Art überhaupt möglich ist, da sich die Reflexionszahl  $r$  als unveränderliche Größe ergibt. Vergleicht man dieses Ergebnis mit der entsprechenden, in der früheren Arbeit des Verfassers entwickelten Beziehung für periodische Temperaturfelder, so findet man die gleiche Abhängigkeit. Man kann daher auch in gleicher Weise die entsprechenden Sonderfälle unterscheiden, wobei jedoch zu beachten ist, daß einem konstantem Wert der Reflexionszahl im vorliegenden Fall offenbar keine physikalische Bedeutung zukommt.

Überblickt man die bisherigen Aufgaben, so darf man wohl sagen, daß die Behandlung der Grundfelder von Ausgleichsvorgängen nach dem entsprechenden Gesetze für Wellenvorgänge auf äußerst anschauliche Weise zur Lösung von recht verschiedenen ebenen Aufgaben führt. Dabei ist die Zahl der hierdurch ersetzbaren Probleme des weitest nicht erschöpft. Es sei in diesem Zusammenhang nur noch an Körper erinnert, die aus mehreren parallelen Schichten bestehen. Wenn sich auch die Lösung derselben nicht unmittelbar in geschlossener Form darstellen läßt, so gestattet die Zusammenfassung der unendlich vielen reflektierten Grundfelder zu einem endlichen resultierenden Feld sich, wie bei periodischen Vorgängen möglich ist, so kann doch stets der Temperaturverlauf zu Beginn des Ausgleichsvorganges mit geringster Mühe genau berechnet werden, da man demzufolge der guten Konvergenz der Reihen nur wenige Anfangsglieder berücksichtigen muß.

Nach dem zusammenfassenden Ergebnisse dieses Verfahrens bei ebenen Aufgaben ist man leicht geneigt, dasselbe auch auf Kugel- und Zylinderprobleme zu übertragen. Die Auffassung, daß von ebenerigen Quellen ein ganzes Spektrum von abstrahierten Wellen ausgeht, zeigt jedoch in Verbindung mit den Ergebnissen bei rein periodischen Vorgängen, daß dies nicht möglich ist. Die Reflexionszahl ergab sich bei ebenerigen Punkten ihrer Kreisfrequenz; demnach müßte man bei dem entsprechenden Ausgleichsvorgängen eine zeitlich veränderliche Reflexionszahl erwarten, da die einzelnen Anteile des Frequenzspektrums entsprechend ihrer verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu verschiedenen Zeiten an der Grenzfläche zur Wirkung kommen. Bei veränderlicher Reflexionszahl wird aber im allgemeinen der Differentialgleichung der Wärmeleitung nicht mehr erfüllt sein. Trotzdem man diese einfachen Vorstellungen bei Zylinder- und Kugelproblemen nicht mehr für wünschenswert erachtet Lösungen liefern, sollen doch im folgenden noch einige Grundfelder kurz entwickelt werden, da diese in vielen Fällen noch wenigstens zur näherungsweise Beurteilung von praktischen Aufgaben Verwendung finden können. Außerdem können dabei auch einige der Beugung entsprechende Erscheinungen kurz angedeutet werden.

5. Grundfelder für Wärmeströme von Kugel- und Zylinderkern, sowie ebene Quellen von endlichen Abmessungen. Allgemein bekannt sind, neben der Quasikugel die Wärmeleitung für ebene Aufgaben, noch die Funktionen für die elementare Zylinderkern und die Punktquelle. Die erste lautet in Zylinderkoordinaten (Radialweite  $r$ )

$$u = \frac{Q_0}{4\pi k r} \left( 1 - \frac{r^2}{4kt} \right)$$

1. H. Pöppel, z. Z. O.

2. Vgl. H. Pöppel, z. Z. O. S. 126ff. der Gesammten 1897, 33, 1945 und 351.

wobei  $w$  die Wärmemenge ist, die je Längeneinheit der Achse  $r=0$  zur Zeit  $t=0$  plötzlich zugeführt wird. Die Gleichung der elementaren Punktpole lautet in Kugelkoordinaten (Radiusvektor  $R$ )

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\kappa}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial w}{\partial R} \right)$$

wobei  $w$  die zur Zeit  $t=0$  plötzlich im Punkt  $R=0$  zugeführte Wärmemenge ist.

Neben diesen beiden Funktionen ist zunächst die Kugeloberflächequelle von Bedeutung. Es soll darunter eine Wärmequelle von der Art verstanden werden, daß eine bestimmte Wärmemenge  $W$  zur Zeit  $t=0$  plötzlich gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche verteilt in einem abgegrenzten gleichförmigen Körper zuströmt. Die Differentialgleichung der Wärmeleitung lautet hierbei in Kugelkoordinaten bei Kugelsymmetrie

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\kappa}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial w}{\partial R} \right)$$

sie besitzt also die gleiche Form wie für ebene Probleme, wenn man an Stelle der Temperatur das Produkt  $Rw$  setzt. Demnach entsprechend müssen alle Funktionen für ebene Aufgabe auch Lösungen für Kugelprobleme darstellen, wenn dabei  $r$  durch  $Rw$  ersetzt wird. Dies bedeutet aber, daß unter diesen Umständen auch die Gleichung für die ebene Elementarquelle eine Kugelösung ist. Man wird daher vermuten, daß die Gleichung einer Kugeloberfläche durch folgende Funktion dargestellt wird:

$$Rw = \frac{W}{4\pi R_0^2} \left[ \frac{R^2 - R_0^2}{2R} + \frac{R_0^2}{2R} \right] \quad (46)$$

Dabei ist  $R_0$  der Halbmesser der Kugeloberfläche. Die Größe  $W$  im Nenner dieser Funktion wurde zunächst aus Dimensionsgründen hinzugefügt; sie liefert mit  $R=R_0$  die Größe der Quellfläche (Kugeloberfläche). Man erkennt, daß für  $t=0$ , also für den Beginn der Zeitrechnung überall im Raum die gleiche Übertemperatur Null herrscht mit Ausnahme aller Punkte der Kugeloberfläche vom Halbmesser  $R=R_0$ . Die Übertemperatur des Koordinatenursprunges  $M$  findet man dabei durch Auswertung des sich ergebenden unbestimmten Ausdrucks (46) zu

$$w = \frac{W}{4\pi R_0^2} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \left[ \frac{R^2 - R_0^2}{2} + \frac{R_0^2}{2} \right] = \frac{W}{4\pi R_0^2} \frac{R_0^2}{2R} \quad (47)$$

Diese ist demnach für  $t > 0$  stets endlich; sie erreicht ihren Höchstwert für  $t=0$   $\frac{2}{3} W$  von der Größe

$$w_{max} = \frac{W}{3} \frac{R_0^2}{R_0^2} = \frac{W}{3}$$

Diese Höchsttemperatur des Mittelpunktes der Kugeloberfläche ist also unabhängig von der Wärme- und Temperaturleitfähigkeit des Stoffes. (Die Temperaturleitfähigkeit lediglich den Zeitpunkt  $t_0$  des Auftretens der Höchsttemperatur, da  $t_0 = R_0^2/\kappa$  ist. Neben diesen Eigenschaften muß schließlich die Kugeloberfläche noch die beiden Grundfälle der elementaren ebenen Quelle und der Punktpole umfassen. Bei stets wachsendem Halbmesser der Quellfläche erhält man mit  $\frac{R_0}{2} = 0$  und  $R_0 - R = r$  schließlich aus (45)

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} w = \frac{W}{4\pi R_0^2} \frac{R_0^2}{2R} = \frac{W}{8\pi R^2}$$

900356

104

Außerdem findet man nach (46) bei verschwindendem Halbmesser  $R_0$  der Quellfläche die Gleichung der elementaren Kugelpunktquelle

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} t = \frac{W}{4\pi R c \gamma \sqrt{4\pi a \tau}} \lim_{R_0 \rightarrow 0} \frac{1}{R_0} \left[ e^{-\frac{(R_0 - R)^2}{4a\tau}} - e^{-\frac{(R_0 + R)^2}{4a\tau}} \right] = \frac{W}{c \gamma \sqrt{4\pi a \tau}} e^{-\frac{R^2}{4a\tau}}$$

Nachdem also die Funktion nach (46) ihrer Herkunft nach die Differentialgleichung der Wärmeleitung befriedigt und außerdem alle von ihr geforderten Grenzbedingungen erfüllt sind, muß diese tatsächlich die gesuchte Kugelflächenquelle darstellen. Eine Integration von (46) nach  $R_0$  liefert damit die Kugelschalen- bzw. Kugelraumquelle, d. h. also die Lösung für symmetrisch angeordnete räumliche Quellgebiete in der Form von Kugelschalen bzw. Vollkugeln, deren Ergiebigkeiten im allgemeinen noch Funktionen des Ortsvektors sein können. Denkt man sich ferner konzentrische Kugelflächenquellen von gleichem Halbmesser  $R_0$  und sehr kleiner Wärmeergiebigkeit zeitlich nacheinander zur Wirkung kommend, so findet man die Lösung für eine Kugelflächenquelle von zeitlich stetiger Ergiebigkeit durch Integration von (46) nach der Zeit. Entsprechend kann man damit auch die Lösung für Kugelschalen- bzw. Raumquellen von zeitlich stetiger Ergiebigkeit entwickeln.

Außer diesen Kugelquellen dürften nun vor allem auch Wärmequellen in Form von rechtwinklig begrenzten Körpern von endlichen Abmessungen Bedeutung besitzen. Man findet dabei wieder allgemein die gewünschten Quellen durch Summierung von elementaren Punktquellen entlang einer Linie, Fläche oder über einen vorgegebenen Raum bzw. eine vorgegebene Zeit. Beispielsweise ergibt sich eine räumliche Wärmequelle in Form eines Quaders von den Kantenlängen  $2x_0$ ,  $2y_0$  und  $2z_0$  nach folgender Beziehung:

$$t = \frac{1}{c \gamma \sqrt{4\pi a \tau}} \int_{-z_0}^{+z_0} \int_{-y_0}^{+y_0} \int_{-x_0}^{+x_0} W(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a\tau}} d\xi d\eta d\zeta.$$

Im Fall einer völlig gleichförmigen Ergiebigkeit aller Raumelemente des Quaders wird  $W(\xi, \eta, \zeta) = W_0 = \text{konst.}$  und damit

$$t = \frac{W_0}{64 x_0 y_0 z_0 c \gamma} \left[ \Phi\left(\frac{x+x_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) \right] \left[ \Phi\left(\frac{y+y_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) \right] \left[ \Phi\left(\frac{z+z_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{z-z_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) \right]. \quad (48)$$

Man erkennt daraus ohne weiteres, daß für  $\tau = 0$  die Übertemperatur aller Punkte des Raumes außerhalb des Quaders mit den Kanten  $2x_0$ ,  $2y_0$  und  $2z_0$  zu Null wird und damit also die Anfangsbedingung erfüllt ist. Diese Lösung bietet dabei ein erstes Beispiel für die bekannte, der Beugung bei Wellenvorgängen entsprechende Erscheinung, daß die zunächst senkrecht aus den Oberflächen des Quaders austretenden Wärmeflußlinien in Richtung seiner Diagonalebenen abgelenkt werden.

Die dem Quader entsprechenden Flächen- bzw. Linienquellen erhält man leicht aus (48), indem man beispielsweise  $z_0$  bzw.  $x_0$  und  $z_0$  gleich Null setzt. Als Beispiel ist die Linienquelle für eine Strecke von der Länge  $2y_0$ . Die Gleichung ihres Temperaturfeldes findet man aus (48) zu

$$t = \frac{W_0}{c \gamma 4 y_0} e^{-\frac{x^2 + z^2}{4a\tau}} \left[ \Phi\left(\frac{y+y_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) \right]. \quad (49)$$

Mit  $y_0 \rightarrow \infty$  und  $x^2 + z^2 = r^2$  geht diese Beziehung in die bekannte, elementare Zylinder-Linienquelle (44) über. Aus (49) ergibt sich weiterhin in Zylinderkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$  und  $\varphi$  das Temperaturfeld für eine Zylinder-Mantelquelle von der endlichen Länge

003357

2  $y_0$  und dem Halbmesser  $r_0$ , indem man  $x^2 + z^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi$  setzt und (49) dann nach  $\varphi$  integriert. Es wird daher

$$t = \frac{\phi\left(\frac{r-r_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) - \phi\left(\frac{r+r_0}{\sqrt{4a\tau}}\right)}{c\gamma 16\sqrt{r_0\pi a\tau}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} W(\varphi) e^{-\frac{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi}{4a\tau}} d\varphi,$$

Bei einer von  $\varphi$  unabhängigen Quellenergieigkeit wird  $W(\varphi) = W_0 = \text{konst.}$  Damit lautet also die Gleichung für das Temperaturfeld einer Zylinder-Mantelquelle von überall gleicher Ergiebigkeit und der Länge  $2y_0$

$$t = \frac{W_0 e^{-\frac{r^2+r_0^2}{4a\tau}}}{4\gamma_0 c\gamma 4\pi a\tau} \left[ \phi\left(\frac{r-r_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) - \phi\left(\frac{r+r_0}{\sqrt{4a\tau}}\right) \right] I_0\left(j \frac{r r_0}{2a\tau}\right). \quad (50)$$

Dabei ist  $I_0(j r r_0 / 2a\tau)$  die Besselsche Zylinderfunktion nullter Ordnung von rein imaginärem Argument ( $j = \sqrt{-1}$ ). Für  $y_0 = 0$  ergibt sich hiermit schließlich nach dem Temperaturfeld einer Kreislinienquelle in Zylinderkoordinaten zu

$$t = \frac{W_0 e^{-\frac{r^2+r_0^2}{4a\tau}}}{c\gamma 4\pi a\tau} I_0\left(j \frac{r r_0}{2a\tau}\right). \quad (51)$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man auch unmittelbar durch Summierung von gleichen elementaren Punktquellen, die stetig auf einem Kreise angeordnet sind. Mit  $r_0 = 0$  geht auch (51) wieder in die Gleichung einer elementaren Punktquelle über, da  $r^2 + z^2 = r^2$  und außerdem  $I_0(0) = 1$  ist. Läßt man aber  $r_0$  gegen Unendlich gehen, so wird

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} I_0\left(j \frac{r r_0}{2a\tau}\right) = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{r r_0}{2a\tau}}}{\sqrt{2\pi \frac{r r_0}{2a\tau}}}$$

Damit geht (51) über in

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} t = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{W_0 e^{-\frac{(r-r_0)^2 + z^2}{4a\tau}}}{c\gamma 2\pi \sqrt{r r_0} 4\pi a\tau}$$

Setzt man hierin noch  $r_0 = r = x$ ,  $W_0 2\pi r_0 = \alpha$  und  $x^2 + z^2 = r^2 = r_0^2$ , so geht der Grenzwert dieses Ausdruckes, wie zu erwarten war, in die bekannte Gleichung der elementaren Zylinder-Linienquelle über.

Setzt man schließlich noch in (50)  $W_0 2y_0 = \alpha$  und läßt  $y_0$  gegen unendlich gehen, so ergibt sich die Gleichung der für Zylinderprobleme besonders wichtigen Zylinder-mantelquelle von unendlicher Länge

$$t = \frac{\alpha e^{-\frac{r^2+r_0^2}{4a\tau}}}{c\gamma 4\pi a\tau} I_0\left(j \frac{r r_0}{2a\tau}\right). \quad (52)$$

Diese liefert als Grenzfälle einerseits für  $r_0 = 0$  die Gleichung der elementaren Zylinder-Linienquelle und mit  $r_0 = \infty$  die Gleichung der elementaren ebenen Flächenquelle. Um noch zu erkennen, daß auch die zeitliche Anfangsbedingung erfüllt ist, bildet man den Grenzwert von (52) für  $\tau \rightarrow 0$ . Man findet dafür

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} t = \frac{\alpha}{c\gamma} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{r^2+r_0^2}{4a\tau}}}{1 + \sqrt{r r_0} 4\pi a\tau}$$

Man erhält also am Anfang der Zeitrechnung mit Ausnahme der Quellfläche  $r = r_0$  in allen Punkten des Raumes die Übertemperatur Null. Das Temperaturfeld in der naheren Umgebung der Quellfläche ist überdies, wie danach zu ersehen ist, für genügend kleine Werte der Zeit nahezu gleich dem Feld in der Umgebung einer ebenen Elementarquelle.

000358

106

Pfeifer: Zur Theorie von Auskühlungs- und Anheißvorgängen. Ingersheim

Auch aus den zuletzt entwickelten Gleichungen für die Grundfelder der verschiedensten Quellen kann man durch Integration die entsprechenden Flächen- oder Raumquellen bzw. Quellen von zeitlich stetiger Ergiebigkeit entwickeln. Es soll aber an dieser Stelle hierauf nicht mehr eingegangen werden.

6. Zusammenfassung. Nach der Methode der Quellpunkte werden zunächst an Hand einfacher Beispiele neuartige Lösungen für Temperatursgleichungsvorgänge in ebenen, gleichförmigen Platten von endlicher Dicke in Form von unendlichen Reihen entwickelt. Diese weisen im Gegensatz zu der bisher üblichen Darstellung, der Entwicklung nach Fourierreihen, zu Beginn des Ausgleichsvorganges sehr gute Konvergenz auf; dafür wird diese aber mit fortschreitender Zeit immer ungünstiger. Beide Lösungsformen ergänzen sich also gegenseitig und können daher zweckmäßig nebeneinander verwendet werden. Um aber auch die hier gefundenen Lösungen für beliebig späte Zeitpunkte verwendbar zu machen, wurde ein einfaches Verfahren zur Entwicklung von praktischen Näherungslösungen für schlecht konvergente, unendliche Reihen abgeleitet. Dieses liefert dabei am Anfang des Vorganges sowie für genügend große Werte der Zeit sehr genaue Ergebnisse und ergibt für mittlere Zeitpunkte ein beliebig klein zu haltendes Größtwert des Fehlers. Weiterhin werden dann exakte Lösungen für Körper entwickelt, die aus planparallelen Schichten bestehen. Für ebene Grenzfläche zweier Stoffe teilweise reflektiert werden. Die Reflexionszahl ergibt sich dabei nach dem gleichen Gesetz wie für periodisch veränderliche Vorgänge. Die Ergebnisse dieser Betrachtungen werden auch auf den Wärmeübergang angewendet. Dabei zeigt sich, daß für die vorliegenden nichtstationären Vorgänge auch das anfängliche Temperaturfeld in der Grenzschicht von Bedeutung sein kann. Schließlich werden noch die Gleichungen der Grundfelder für eine Reihe von Wärmequellen der verschiedensten Formen entwickelt, so z. B. für die Kugel- und Zylinderflächenquelle (diese dabei für endliche und unendliche Zylinderlänge), die Raumquelle in Form eines Quaders und die Kreis-Linienquelle<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Weitere, bisher nicht in Fußnoten angeführte Literaturstellen über nichtstationäre Wärmeströmungen:

A. Schack, Mitt. 105 der Wärmerstelle des Vereins der Eisenhüttenleute 1927.  
Wietz, Gesundh.-Ing. 75 (1935) S. 663.

(Mitteilung aus dem Maschinenlaboratorium der Techn. Hochschule Karlsruhe)

(Eingegangen am 23. März 1939.)

TITLE PAGE

4. Zur Messung veränderlicher Temperaturen von Gasen  
und Flüssigkeiten.  
On the measurement of rapidly changing temperatures  
of gases and liquids.

Frames Nos. 359 - 366

Der Vorstand des Maschinenlaboratoriums der Technischen Hochschule Karlsruhe, Herr Professor Dr.-Ing. E. Plank VDI, feierte am 6. März seinen 50. Geburtstag. Wir bringen aus diesem Anlaß die nachfolgende Arbeit.

## Zur Messung veränderlicher Temperaturen von Gasen und Flüssigkeiten \*)

Von HANS PRIEM VDI

(Mitteilung aus dem Maschinenlaboratorium der Technischen Hochschule Karlsruhe)

Die richtige Messung schnell veränderlicher Temperaturen ist oft durch die thermische Trägheit der Meßgeräte behindert. Es werden daher einfache Verfahren zur maßtechnischen Erfassung derselben entwickelt und die Grenzen ihres Anwendungsbereiches untersucht. Schließlich wird auch an Hand von Versuchen an einem Luftverdichter ihre praktische Brauchbarkeit gezeigt.

### I. Theorie für die Messung schnell veränderlicher Temperaturen mit dünnen Drähten

Bei vielen technisch-physikalischen Vorgängen treten veränderliche Temperaturen und Drücke auf. Zu ihrer meßtechnisch richtigen Erfassung sind bekanntlich eine Reihe von Schwierigkeiten zu überwinden, die meist in der Trägheit von empfindlichen Meßgeräten bzw. in der Unempfindlichkeit von trägheitsfreien Geräten begründet sind. Bei Temperaturmessungen bildet oft auch noch die thermische Trägheit der Meßgeräte (Quecksilberthermometer bzw. Widerstandsthermometer oder Thermoelemente) ein Hindernis für die Brauchbarkeit der Versuchsanordnung. Zwar ist es theoretisch stets möglich, durch Verwendung von entsprechend dünnen Drähten praktisch trägheitslos arbeitende Thermometer zu bauen. Diese genügen dann aber vielfach nicht mehr den Anforderungen, die an ihre mechanische Festigkeit gestellt werden müssen. Um aber nach bisherigen Arbeiten an diesem Gebiete <sup>1)</sup> die Zuverlässigkeit von derartigen Messungen beurteilen zu können, ist die äußerst umständliche und zeitraubende harmonische Analyse der aufgenommenen Temperaturkurven erforderlich. Doch selbst dann ist eine richtige Entscheidung in allen jenen praktisch sehr häufig vorkommenden Fällen nicht möglich, in denen die Wärmeübergangszahl infolge eines zeitlich stark veränderlichen Mengenstromes großen Schwankungen unterworfen ist (z. B. bei der Messung der Abspufftemperaturen von Verbrennungskraftmaschinen), da die Nachprüfrechnungen praktisch nur mit unveränderlichen Wärmeübergangszahlen durchgeführt werden können. In der vorliegenden Arbeit wird daher ein Verfahren entwickelt, auf Grund dessen es möglich ist, derartige Messungen auch bei unbekanntem, beliebigem zeitlichen Verlauf der Wärmeübergangszahl am Meßdraht zunächst auf ihre Zuverlässigkeit zu prüfen und nötigenfalls die richtige Gastemperatur dann auf rechnerischem oder zeichnerischem Wege aus der gemessenen Drahttemperatur zu bestimmen.

Die Theorie des Verfahrens wird dabei zunächst auf Drähte beschränkt, deren Durchmesser sehr klein ist im Vergleich zur Leiterlänge. Dadurch kann vorläufig vom Einfluß der Drahtenden abgesehen werden. Außerdem wird vorausgesetzt, daß der für den Meßdraht verwendete Werkstoff eine große Temperaturleitfähigkeit besitzt und daher zwischen Drahtachse und -oberfläche kein merklicher Temperaturunterschied möglich ist <sup>2)</sup>. Damit wird in jedem Augenblicke die vom Gas an den Meßdraht übergehende Wärme einschließlich der im Draht erzeugten Jouleschen Wärme zu dessen Erwärmung und zur Deckung seiner Strahlungsverluste verwendet. Mit den Bezeichnungen

- 1) Zeit [h].
- 2) Ober Temperatur des Gases (oder der Flüssigkeit) über die mittlere Temperatur der umgebenden Wände [°C] <sup>3)</sup>.
- 3) Ober Temperatur des Meßdrahtes.
- 4) Wärmeübergangszahl am Meßdraht [kcal/m<sup>2</sup> h °C].
- 5) Wärmeübergangszahl durch Strahlung [kcal/m<sup>2</sup> h °C].
- 6) Halbmesser bzw. Hälfte Länge des Meßdrahtes [m].
- 7) spezifische Wärme des Drahtwerkstoffes [kcal/kg °C].
- 8) spezifisches Gewicht des Drahtwerkstoffes [kg/m<sup>3</sup>].
- 9) Heizleistung durch Joulesche Wärme, bezogen auf die Einheit der Drahtoberfläche [kcal/m<sup>2</sup> h].

\*) Über den Inhalt dieses Aufsatzes wurde auf der Tagung des „Ausschusses für Wärmeforschung“ des VDI am 7. Oktober 1935 in Kassel auszugswise berichtet.

1) A. Petersen, VDI-Forschungsheft 135, Berlin 1913.

2) H. Gröber in VDI-Forschungsheft 300, S. 7, Berlin 1928.

3) Die Zulässigkeit dieser Annahmen für die meisten praktischen Fälle wird später (S. 89) nachgewiesen.

4) An Stelle von Ober Temperatur wird nachfolgend kurzweg nur von der Temperatur des Gases oder Drahtes gesprochen.

lässt die Differentialgleichung für die Temperatur des Meßdrahtes

$$\frac{r_0 c_0 \gamma_0}{2\pi} \frac{dt}{dx} = \left(1 - \frac{c_0}{c}\right) \frac{q}{c} = \phi \quad (1)$$

Die Einfachheit dieser Gleichung ist nur scheinbar, da die auftretenden Beiwerte im allgemeinen zeitlich veränderlich sind  $\phi$ . Nun wird man aber vielfach die Oberflächentemperatur  $t_0$  des Drahtes einwandfrei in Abhängigkeit von der Zeit messen können. In Sonderfällen wird man aber die Veränderlichkeit der Wärmeübergangszahl  $c$  kennen. Damit sind dann alle Größen der linken Seite von Gl. I bekannt, so daß man die gesuchte Gastemperatur  $\theta$  unmittelbar aus der gemessenen Drahttemperatur  $t$  berechnen kann. Da die Wärmeentwicklung  $q$  des Meßstromes meist verschwindend klein ist, erhält man also  $\theta$  aus der Drahttemperatur  $t$ , indem man diese punktweise um den Strahlungsanteil  $\frac{c_0 t_0}{c}$  und um das thermische Verzögerungsglied  $\frac{r_0 c_0 \gamma_0}{2\pi c} \frac{dt}{dx}$  vergrößert. Die Änderung der Drahttemperatur nach der Zeit,  $dt/dx$ , erhält man dabei als Tangente in jedem Punkte der aufzunehmenden Temperaturkurve. Der Beiwert  $r_0 c_0 \gamma_0 / 2\pi$  hat dabei die Dimensionen einer Zeit und soll künftig als Verzögerzeit des Meßdrahtes mit  $\tau$  bezeichnet werden. Man erkennt, daß alle Berichtigungsglieder um so kleiner sind, je größer die anzusehliche Wärmeübergangszahl  $c$  ist.

In allen jenen Fällen, in denen die Wärme bei unbekannter Strömung übertragen wird, ist aber stets auch die Wärmeübergangszahl  $c$  unbekannt. Man kann jedoch auch hierbei den zeitlichen Verlauf der Temperatur des Meßdrahtes meist richtig ermitteln. In einem ersten Versuch wird dabei im allgemeinen die Heizwirkung des Meßstromes klein sein. Heißt man dann aber in einem zweiten Versuch die Meßstrecke zusätzlich mit Gleich- oder Wechselstrom so stark, daß das dritte Korrekturglied  $q/c$  in Gl. I von ähnlicher Größenordnung wird wie die beiden anderen, so kann der dabei gemessene zeitliche Verlauf der Drahttemperatur nur in solchen Punkten mit dem des ersten Versuches übereinstimmen, für die alle Berichtigungsglieder vernachlässigbar klein sind. Damit ist aber zunächst eine mechanisch einfache Möglichkeit zur Prüfung der Zuverlässigkeit derartiger Versuchsanordnungen gegeben. Überdies wird man aber aus einem bei beiden Versuchen abweichenden Verlauf der Drahttemperatur noch auf die richtige Gastemperatur schließen können.

Die Größe der nötigen Zusatzheizung  $Jq$  ergibt sich aus dem ersten Versuch. Unterscheidet man beide Versuche durch die Zeiger 1 und 2, so findet man für einen besonders wichtigen Punkt des Diagrammes bzw. für entsprechende Mittelwerte (im folgenden durch den Zeiger  $\theta$  bezeichnet) die Größenordnung einer möglichst geringen veränderlichen Zusatzheizung aus der Bedingung:

$$Jq \approx \frac{1}{2} r_0 c_0 \gamma_0 \frac{d^2 t_0}{dx^2} + [c_0 t_0] \quad (2)$$

Unabhängig von dieser Beziehung gilt Gl. I unverändert für beide Versuche 1 und 2. Beachtet man ferner noch, daß durch die zusätzliche Heizung das Strömungsbild in der Umgebung des Meßdrahtes und damit auch die zeitlich veränderliche Wärmeübergangszahl  $c$  praktisch nicht beeinflußt<sup>1)</sup> werden, so findet man den Anzeigefehler  $F$  des Meßgerätes zu:

$$F = \theta - t_0 = (t_2 - t_1) \frac{\frac{1}{2} r_0 c_0 \gamma_0 \frac{d^2 t_0}{dx^2} + c_0 t_0 - q}{(t_2 - t_1) - \frac{1}{2} r_0 c_0 \gamma_0 \frac{d^2 t_0}{dx^2} + c_0 t_0 - c_0 t_1 - c_0 t_2} \quad (3)$$

Außerdem erhält man für die Wärmeübergangszahl am Meßdraht:

$$c = \frac{q - \tau}{t_2 - t_1} - \frac{r_0 c_0 \gamma_0}{2(t_2 - t_1)} \frac{d^2(t_2 - t_1)}{dx^2} - \frac{c_0 t_2 - c_0 t_1}{t_2 - t_1} \quad (4)$$

Gleichung 3 bestätigt die vorangehende Behauptung, daß ein unmerklicher Temperaturunterschied  $(t_2 - t_1)$  einer verschwindenden Fehlmessung  $(\theta - t_0)$  entspricht, da der Quotient für jede von Null verschiedene Zusatzheizung stets eine endliche Größe besitzt. Für die Genauigkeit dieser Feststellung ist insofern der Meßgenauigkeit von  $(t_2 - t_1)$  vor allem die Größe der gewählten Zusatzheizung  $Jq = q - q_0$  maßgebend. Die Genauigkeit der Wärmeübergangszahl nach Gl. 4 ist durch die gleichen Größen beschränkt.

Bei Messungen mit Widerstandsthermometern und Anwendung von Gleichstrom für die Zusatzheizung wird man zweckmäßig den Heizstrom zugleich als Meßstrom verwenden. Die Gleichstromheizung von Thermoelementen dagegen wird praktisch sehr erschwert durch den Spannungs-

<sup>1)</sup> Setzt man voraus, daß die Beiwerte in Gl. I und außerdem auch  $\theta$  und  $q$  reine Funktionen der Zeit sind, so kann man Gl. I auch in folgender Form schreiben:

$$dt \frac{dt}{dx} + P(t) = Q(t),$$

wobei  $P(t)$  und  $Q(t)$  nur Funktionen der Zeit sind. Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung ersten Grades ist bekannt. Nachdem aber  $P$  und  $Q$  stets unbekannte Funktionen sind, kann man praktisch mit dieser mathematischen Lösung wenig anfangen.

<sup>2)</sup> Das Strömungsbild kann nur insofern etwas verändert sein, als sich infolge der beim zweiten Versuch unter Umständen höheren Temperatur des Meßdrahtes die Zähigkeit in der Grenzschicht des umgebenden Gases bzw. der Flüssigkeit geändert hat.

000361

abfall des Heizstromes und durch den Peltier-Effekt. Beide Schwierigkeiten lassen sich jedoch durch Heizung mit hochfrequentem Wechselstrom umgehen, dessen Herstellung beim heutigen Stand der Radietechnik ohne Schwierigkeiten möglich ist. Der Heizstrom wird dabei zweckmäßig über einen Blockkondensator zugeleitet, während der eigentliche Meßstromkreis durch eine Hochfrequenz-Drosselspule für den Heiz-Wechselstrom gesperrt wird. Dabei ist allgemein eine Hochleitung von Thermokroizen zweckmäßig, da hier die Anpassung der Zusatzheizung an die unterschiedlichen spezifischen Widerstände der Drahtwerkstoffe und an etwa verschiedene Drahtdurchmesser der Thermosäpfe an leicht möglich ist.

Die vorstehenden Überlegungen sind in erster Linie auf periodisch veränderliche Vorgänge anwendbar; bei welchen also beide Messungen nacheinander mit der gleichen Meßstrecke ausgeführt werden können. In allen Fällen, die eine gleichzeitige Messung erfordern, müssen entweder zwei gleichartige Meßstrecken vorgesehen werden (wobei die erste ohne, die zweite mit Zusatzheizung arbeitet), oder aber man verwendet zwei verschiedenartige Meßstrecken. Diese können z. B. durch ungleiche Drahtstärken oder auch durch verschiedene Werkstoffe verwirklicht werden. Dabei können sich auch für beide Meßstrecken verschiedene Wärmeübergangszahlen einstellen. Nun ist aber bei erzwingender Strömung die Nußeltische Kennzahl  $Nu$  eine Funktion von  $Re$ , die innerhalb eines begrenzten Bereiches durch ein einfaches Potenzgesetz dargestellt werden kann<sup>2)</sup>.

Die Wärmeübergangszahlen an zwei Drähten von etwas verschiedenen Durchmessern (Zeiger 1 und 2) im gleichen Gasstrom verhalten sich daher zueinander wie:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{0.8} \quad (5)$$

wobei  $n$  eine dimensionslose Konstante ist<sup>3)</sup>. Dieses Verhältnis ist also für gegebene Drahtstärken eine unveränderliche Größe. Der Verlauf der Temperaturen beider Drähte wird dabei aber etwas verschieden sein. Nach Gl. 1 erhält man mit Gl. 5 den Anzeigefehler  $F$  des dünnen Drahtes:

$$F = \theta - t_1 = \frac{t_2 - t_1 k^{1/2} r_1 \gamma_1 d_1/d r + \alpha_{s1} t_1 - q_1}{(r_1/r_2)^{0.8} [1/2 r_2 \gamma_2 d_2/d r + \alpha_{s2} t_2 - q_2] - [1/2 r_1 \gamma_1 d_1/d r + \alpha_{s1} t_1 - q_1]} \quad (6)$$

Da nun die Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  der beiden Meßstrecken unmittelbar aufgezeichnet werden können, sind in Gl. 6 alle Größen der rechten Seite bekannt. Man kann also damit den Anzeigefehler  $F = (\theta - t_1)$  des dünnen Drahtes unmittelbar berechnen. Praktisch wird man nach Möglichkeit statt  $t_1$  bei völlig unbekanntem Wärmeübergangsverhältnis eine Nachprüfung der Meßergebnisse. Außerdem kann man durch entsprechende Auswahl der Meßdrähte mit einem derartigen Versuch auch die veränderliche Wärmeübergangszahl bestimmen und damit etwa weitere Schlüsse z. B. auf die Gasgeschwindigkeit ziehen<sup>4)</sup>. Für die Wärmeübergangszahl gilt:

$$\alpha_1 = (r_1/r_2)^{0.8} [1/2 r_2 \gamma_2 d_2/d r + \alpha_{s2} t_2 - q_2] - [1/2 r_1 \gamma_1 d_1/d r + \alpha_{s1} t_1 - q_1] / (t_1 - t_2) \quad (7)$$

Bei der praktischen Ausführung der Messungen kann man entweder mit Drähten von gleichem Durchmesser, aber verschiedenen Werkstoffen, oder gleichen Werkstoffen und verschiedener Drahtdicke arbeiten. Im ersten Fall wie in Gl. 6, daß sich damit auch die Kenntnis des Exponenten  $n$  ergibt. Für alle anderen Fälle dürfte die Arbeiten von J. Utzamer<sup>5)</sup> die nötigen Unterlagen für die Größe von  $n$  liefern.

Für  $\alpha = \alpha_0 = \text{konst.}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_0$  konst und  $q = 0$  vereinfacht sich Gl. 1 auf folgende Form:

$$\alpha_0 d/d r + (1 + \alpha_0) t = \theta \quad (8)$$

wobei  $\alpha_0 = r_0 \alpha_0 \gamma_0 / 2 \alpha_0$  und  $\alpha_0 = \alpha_{s0} / \alpha_0$  ist. Für harmonisch veränderliche Gastemperaturen kann man die Lösung von Gl. 8 leicht angeben. Man findet dann für das Verhältnis der Schwingungswellen<sup>6)</sup>:

$$\theta_0 / t_0 = 1 + \alpha_0 + j \omega \tau_0 \quad (9)$$

$\theta_0$  = Schwingungswerte der harmonisch veränderlichen Gastemperatur [°C].

$t_0$  = Schwingungswerte der Drahttemperatur [°C].

$\omega$  = Kreisfrequenz der Temperaturschwingung [s<sup>-1</sup>].

$j = \sqrt{-1}$ .

<sup>1)</sup> Dieses Gesetz gilt zunächst nur für stationäre Wärmeübertragung, d. h. also auch nur für stationäre Strömungszustand. Infolge der geringen Dicke der Meßdrähte dürfte sich aber in deren Umgebung der stationäre Strömungszustand stets ausnahmslos einstellen. Unter Voraussetzung der Richtigkeit dieser Annahme, die im nächsten Schritt schon mehrfach gemacht wurde (vgl. Fußnote 7), gelten dann die Gesetze des stationären Wärmeüberganges in jedem Zeitpunkt auch für nichtstationäre Strömungen.

<sup>2)</sup> Über die Größe dieser Konstanten bei Kreuzstrom vergleiche J. Utzamer, Die Messung der Strömungsgeschwindigkeit im Zylinder eines Luftkompressors, Diss. T. H. München 1932; ders. Forsch. Ing.-Wes. Bd. 3 (1932) S. 94; Bd. 4 (1933) S. 121.

<sup>3)</sup> Von allen Wurzeln in komplexer Form auftretenden Gleichungen ist stets nur der Real- oder Imaginärteil für sich allein als physikalisch vorstellbar anzusehen.

000362

Den gleichen Wert für diesen Quotienten erhält man bei fehlender Strahlung ( $\delta_0 = 0$ ) durch Vereinfachung der von Gröber<sup>2)</sup> durchgeführten Berechnungen, wenn man voraussetzt, daß

$$\omega r_0^2 / 4 a_0 \ll 1 \quad (10)$$

ist.  $a_0$  bedeutet die Temperaturleitzahl des Drahtwerkstoffes [m<sup>2</sup>/s]. Auch die vom Verfasser unter Berücksichtigung einer laminaren Grenzschicht an anderer Stelle<sup>3)</sup> abgeleitete Beziehung für dieses

Temperatur-Verhältnis geht in dieselbe Form über, wenn  $(\omega r_0^2 / 4 a_0) e^{j\omega t} \ll 1$  ist.

Herbei bedeutet  $a_0$  die Temperaturleitzahl und  $\lambda_0$  die Wärmeleitzahl der Grenzschicht. Gl. 9 läßt sich in sehr anschaulicher Weise in der Gaußschen Zahlenebene darstellen. Auf diese Weise ist es möglich, alle in der genannten Arbeit von Gröber gezeichneten Zahlen- und Kurventafeln im Gültigkeitsbereich der Ungleichung 10 mit Hilfe zu bestätigen.

**II. Nachweis der Zulässigkeit der vorgenommenen Vereinfachungen**

Bei allen bisherigen Entwicklungen war vor allem vorausgesetzt, daß im Drahtquerschnitt keine stoffenden Temperaturunterschiede auftreten. Die zeitlichen Temperaturänderungen in den einzelnen Punkten im Innern des Drahtes werden nun stets von seiner Oberfläche her aufgezwungen. Betrachtet man daher zunächst ein Draht, dessen Oberflächentemperatur in allen Punkten gleichmäßig harmonisch veränderlich ist, so ergibt sich, bei Zylinderkoordinaten die Temperatur in einem beliebigen Punkt im Innern des Drahtes nach der Beziehung

$$t_r = T e^{j\omega t} J_0(\Phi_0 r) / J_0(\Phi_0 r_0) \quad r \leq r_0$$

Es bedeuten

- $r$  die Ortskoordinate des Zylindersystems [m],
- $T$  die Schwingungsweite der Temperatur an der Drahtoberfläche [°C],
- $\Phi_0$  den Phasenwinkel der Oberflächenschwingung zur Zeit  $t = 0$ ,
- $\Phi_0 = \sqrt{j\omega / a_0}$  [m<sup>-1</sup>],
- $J_0$  die Besselsche Zylinderfunktion nullter Ordnung.

In den von der Oberfläche am weitesten entfernten Punkten der Achse  $r = 0$ , wird dabei die Temperatur  $t_A$  die größten Abweichungen gegenüber derjenigen der Oberfläche aufweisen. Es ist aber:

$$t_A = \frac{T}{J_0(\Phi_0 r_0)} e^{j\omega t}$$

Mit der Oberflächentemperatur  $t_0 = T e^{j\omega t}$  ergibt sich dann  $t_0 / t_A = J_0(\Phi_0 r_0)$ . Dieser Quotient soll nach Voraussetzung möglichst wenig von 1 abweichen, was aber praktisch stets dann der Fall ist, wenn die Ungleichung 10 erfüllt ist.

Ändert sich die Temperatur der Drahtoberfläche völlig gleichförmig in der Zeiteinheit um den Betrag  $dt_0/dt = \delta_0 = \text{konst.}$ , so wird stets die Temperatur der Achse verschieden von der Oberflächentemperatur sein. Für einen beliebigen Punkt im Innern des Drahtes erhält man dabei die Beziehung:

$$t_r = \delta_0 r^2 / 4 a_0 + \delta_0 t + \text{konst.}$$

Damit ergibt sich der Temperaturunterschied zwischen Draht-Oberfläche und -Achse zu:

$$t_0 - t_A = \delta_0 r_0^2 / 4 a_0$$

Dieser Temperaturunterschied soll stets innerhalb der zulässigen Fehlergrenze von  $f$  [°C] liegen, d. h. also, es soll sein:  $\delta_0 r_0^2 / 4 a_0 \leq f$ . Ändert sich nun die Oberflächentemperatur des Drahtes mit der Zeit ungleichförmig, so wird sich bei ihrer größten Änderungsgeschwindigkeit  $[dt_0/dt]_{\text{max}}$  ein Temperaturunterschied gegenüber der Achse einstellen, der immer kleiner ist als jener für konstante Änderungsgeschwindigkeit  $\delta_0$ . Man erhält somit neben der Ungleichung 10 als Bedingung für die Zulässigkeit der vorausgehenden Entwicklungen und damit auch als Grenze für die Brauchbarkeit der Differential-Gleichung 1:

$$\frac{r_0^2}{4 a_0} [d(t_0/dt)]_{\text{max}} \leq f \quad (11)$$

Die Oberflächentemperatur  $t_0$  kann dabei immer durch die gemessene, mittlere Drahttemperatur  $t$  ersetzt werden. Damit erledigt sich dann die zeitraubende harmonische Analyse des aufgenommenen Temperaturverlaufes. Praktisch ist nun die Vorschrift 11 fast stets erfüllt<sup>4)</sup>. Beispielsweise kann man bei Abgastemperatur-Messungen an einer Verbrennungs-Kraftmaschine einen Fehler von

<sup>1)</sup> H. Pfrjem, Ing.-Arch. Bd. 6 (1935) S. 126 Gl. 40.  
<sup>2)</sup> Bei Thermoelementen sind dabei stets die Eigenschaften des den größten Wert für  $r_0^2 / 4 a_0$  ergebenden Thermostoffes einzusetzen.

$f = 1^\circ\text{C}$  ohne weiteres zulassen. Verwendet man etwa Platindraht von  $1/10$  mm Dmr., so dürfte eine  $\approx 20\%$  Temperaturänderung von  $(d t_0/d t)_{\text{max}} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{C/s}$  auftreten, ohne daß die Messung hierdurch merklich gefälscht würde.

Schwieriger als bei der vorangehenden Frage ist die Entscheidung über den Einfluß der endlichen Meßdrahtlänge. Praktisch kann man (z. B. bei Verlüftung der Enden der Meßstrecke mit wesentlich dickeren Drähten) meist voraussetzen, daß die Drähtenden eine nur wenig veränderte mittlere Temperatur aufweisen. Daher werden die verschiedenen Drahtquerschnitte den Temperaturänderungen des Gases um so weniger folgen, je näher sie an den Einspannstellen liegen. Für die folgenden Entwicklungen soll deren Temperatur als völlig unveränderlich und als Nullpunkt der Temperaturskala angenommen werden. Infolge des sehr kleinen Temperaturgefälles im Querschnitt des Meßdrahtes kann man sich dabei die Wärmeübertragung durch das umgehende Gas auch ersetzt denken durch innerhalb des Drahtes stetig verteilte Wärmequellen, deren Ergiebigkeit jener von Gas übergehenden Wärme entspricht. Dadurch darf man diesen Betrachtungen die allgemeine Differentialgleichung der Wärmeleitung zugrunde legen.

Die Wärme-Ergiebigkeit  $W$  des Quellensfeldes, die hier zeitlich und örtlich veränderlich ist, ergibt sich bei Vernachlässigung der Wärmestrahlung aus der übergehenden Wärme zu

$$W = 2(\vartheta - t_2) a/r_0,$$

die Differentialgleichung lautet daher mit der Verzugszeit  $z$ :

$$\partial^2 \vartheta / \partial x^2 = a_0 \partial^2 t_2 / \partial x^2 + (\vartheta - t_2) / z \quad (12).$$

$x$  = Koordinate in Richtung der Drahtachse [cm],

$t_2$  = Drahttemperatur als Funktion des Ortes und der Zeit [ $^\circ\text{C}$ ].

Beschränkt man die Betrachtung wieder auf harmonisch veränderliche Gastemperaturen bei unveränderlichen Wärmeübergangszahlen  $a_0$ , so findet man mit der Abkürzung:

$$r = \sqrt{\frac{2 a_0}{r_0 a_0}} (1 + f \theta_0 z_0)$$

die Lösung der Differentialgleichung (12):

$$t_x = t_0 \left( 1 - \frac{\text{Cof } r x}{\text{Cof } r l_0} \right) e^{j \omega t} \quad (13).$$

Theoretisch wird nun die Temperatur  $t_x$  in der Mitte der Meßstrecke ( $x=0$ ) unter dem Einfluß der Drahtenden stets kleiner als für unendlich lange Drähte. Man findet:

$$t_x = t_0 (1 - 1/\text{Cof } r l_0) e^{j \omega t} \quad (14).$$

In Wirklichkeit unterscheidet sich diese jedoch von jener des unendlich langen Drahtes praktisch nicht mehr, wenn das Argument des Hyperbolicus genügend groß ist. Man erhält nun z. B. eine Abweichung der Schwingungswerten von weniger als  $1/2\%$ , wenn  $l_0 \sqrt{2 r_0 a_0} \approx 6$  ist. Dies bedeutet aber, daß bei Messungen mit Thermoelementen die endliche Länge der Meßstrecke stets dann unberücksichtigt bleiben darf, wenn:

$$l_0 r_0 \approx 6 \sqrt{2 a_0 r_0 a_0} \quad (15).$$

Bei praktischen Versuchen ergibt sich die kleinste Wärmeübergangszahl für freie Konvektion aus der bekannten Beziehung  $Nu = a_0 d_0 / \lambda = 0,435$ . Damit wird dann für Thermoelemente der Endeneinfluß immer vernachlässigbar, wenn  $l_0 r_0 \approx 6 \sqrt{0,435 \lambda}$  ist.  $\lambda$  ist dabei die Wärmeleitfähigkeit des dem Meßdraht umgebenden Gases (bzw. der Flüssigkeit). Unter sehr ungünstigen Bedingungen erhält man so  $l_0 r_0 \approx 1000$ ; dieses Verhältnis dürfte aber in den meisten meßtechnischen Fällen noch ausführbar sein. Damit ist also bei der Messung mit Thermoelementen der Endeneinfluß stets auszuschalten.

Wesentlich ungünstiger sind die Bedingungen bei Widerstandsthermometern. Infolge der Eigenart dieser Messung kann man nur einen Mittelwert der Temperatur über die ganze Drahtlänge erhalten. Mit der Annahme, daß der Widerstandsbeiwert des Drahtwerkstoffes für den in Frage kommenden Meßbereich noch als temperaturunabhängig angesehen werden darf, ergibt sich bei Messung mit Widerstandsthermometern ein meßbarer Mittelwert  $t_m$  der Drahttemperatur:

$$t_m = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} t_x dx = t_0 \left( 1 - \frac{\text{Sg } r l_0}{r l_0} \right) e^{j \omega t} \quad (16).$$

Für Werte  $l_0 \sqrt{2 a_0 r_0 a_0} \approx 3$  wird mit einem Fehler von weniger als  $1/2\%$   $t_m r l_0 \approx 1$ . Man erhält daher für alle praktischen Fälle:

$$t_m \approx t_0 (1 - 1/r l_0) e^{j \omega t} \quad (17).$$

003364

Hieraus ergibt man, daß erst für Werte  $\theta \geq 200$  der Einfluß der Dehnenden völlig vernachlässigt wird. Da nun für Widerstandsthermometer schon mit Rücksicht auf die Engigkeit des Rohres möglichst lange Drähte verwendet, wird man auch diese Vorschrift in vielen praktischen Fällen nicht getreuen können. Besonders zu beachten ist hierbei, daß der Einfluß der Drahtlänge nur zum geringen Prozentsatz der Temperaturschwankung kleiner wird. Daher kann bei der Nachrechnung dieses Einflusses diese auf die Gesamtschwankung des gemessenen Temperaturverlaufes beschrankt werden, so daß auch hier die unvollständigste harmonische Analyse zutrifft.

Nachdem mit den vorstehenden Überlegungen die untergeordnete Bedeutung der axialen Wärmestrahlung nachgewiesen ist, bleibt noch zu zeigen, daß die berechneten Formeln auch bei Berücksichtigung der Wärmestrahlung ihre Gültigkeit behalten. Die Strahlungsverluste sind etwa der vierten Potenz der absoluten Oberflächentemperatur proportional und kann somit für die hohen Temperaturen nur eine Verringerung des Temperaturwertes in der Drahtmitte bewirken. Mit Annäherung an die Drahtenden wird ihr Einfluß infolge der abnehmenden Oberflächentemperatur gegenüber dem zunehmenden Wärmeführungsvermögen sehr zurück. Die Drahtspannungen können daher bei stark strahlender Oberfläche die Temperatur der Drahtmitte nur noch weniger beeinflussen, als nach Gl. 16 bzw. 17 berechnet werden kann.

**III. Messung veränderlicher Temperaturen mit Quecksilber-Thermometern**

Eine der wichtigsten Fragen bei der Messung von veränderlichen Temperaturen besteht vor allem die Frage nach der Zuverlässigkeit der Angaben bzw. nach den Grenzen des Anwendungsbereiches eines Thermometers. Dabei dürfte mit Rücksicht auf möglichst kleine Anzeigerfehler stets nur eine unmittelbare Erfassung der Quecksilbersäule des Thermometers zur Verfügung dessen Temperatur bestimmt werden soll, in Betracht kommen. Die Temperaturempfindlichkeit des Quecksilbers durch die hier vorkommenden, langsamen Temperaturveränderungen als so weit annehmen werden, daß keine unzulässigen Temperaturmessungen infolge der Quecksilberlangsamkeit auftreten können. Im Gegensatz zu einem flüssigen Metall ist es aber die Wärmeleitfähigkeit bzw. Abgabe derselben nach durch den Wärmewiderstand der umgebenden, meist sehr dünnen Glaswand behindert. Dieser kann aber in Verbindung mit der an die äußere Glasoberfläche bestehenden Wärmehaaremszahl zu einer Wärmedurchdringungszahl (z. B. Glas-Quecksilber) zusammengefaßt werden. Berücksichtigt man außerdem noch näherungsweise die Wärmekapazität des Glaswandstückes, dann entspricht dem Ausdruck zum Gehalt der Quecksilbersäule so ergibt die Wärmeleitfähigkeit für die Temperatur derselben eine der Gl. 8 genau entsprechende Beziehung.

Die früher angesprochenen Berechnungen können daher ohne Schwierigkeiten übertragen werden, wobei eine zusätzliche Kröpfung in einfacher Weise durch Einbau eines abgekühlten isolierten Heizspirale in die Quecksilbersäule des Thermometers zu erreichen wäre. Messungen dieser Art sind aber sehr selten und lassen sich zudem stets vermeiden durch Verwendung von Widerstands- oder Thermoelementen aus dünnen Drähten.

**IV. Praktische Messungen an einem Luftverdichter**

Die thermodynamischen Vorgänge im Zylinder eines Kolbenverdichters kann man auch Messung der Probenomet, bestimmt auf Anzeigetemperatur der Luft im Endzustand, höchsten Druck, Dichtungsdruck etc. übersehen, wenn man außerdem auch die Lufttemperatur am Ende des Ausschubes kennt. Ein solches Thermometer, das des einfachen Einbaues wegen immer dem Druckventil angebracht ist, würde sicher ein zu niedriges mittleres Temperatur für angesaugten Luft im Zylinderkopf des Verdichters anzeigen. Es muß daher die rechte Temperatur mit Hilfe eines chemisch möglichst feuchtheitstrennen Widerstands- oder Thermo-Elementes gemessen werden. Da man aber die Luftgeschwindigkeit hinter dem Druckventil eines Verdichters sehr große Werte annehmen kann, muß man mit Rücksicht auf die mechanische Festigkeit verhältnismäßig kleine Drähte verwenden, so daß die vorerwähnte Widergabe der Lufttemperaturen wieder in Frage gestellt ist. Nachdem man außerdem die Größe der Luftgeschwindigkeit und damit auch für die Wärmehaaremszahl an dem einbaubaren Temperaturmeßort keine sicheren Angaben machen kann, ergibt sich zwangsläufig die Notwendigkeit einer Korrekturmessung.

Die Versuche<sup>1)</sup> wurden an einem stehenden Luftverdichter der Gesellschaft Maschinenbau A-G. vorgenommen. 225 mm. Durchmesser, 150 mm. Hub, 5% schräglicher Bauart. Der Verdichter besitzt umgebenen Plattenventile und wird von einem mit Riemen verknüpfte Elektromotor angetrieben. Das Widerstandsthermometer wird mit Platindräht, zuerst von 0,025 mm, und dann von 0,05 mm Durchmesser angefüllt. Nachdem aber beide Elemente schon nach kurzer Betriebszeit durch Drahtbruch

<sup>1)</sup> Die Messungen wurden in dankenswerter Weise von Herrn Dipl.-Ing. J. W. Schmitt für die Chemisch-techn. Hochschule Karlsruhe vorbereitet und gemeinsam mit ihm ausgeführt.

unbrauchbar wurden, mußte endgültig Platindraht von 0,1 mm. Dmr. verwendet werden. Dieser wurde in einer Länge von etwa 600 mm nach Art der älteren Metallfadn-Glühlampen auf einen Hüfter aufgewickelt und entsprechend Abb. 1 in den wassergekühlten Zylinderkopf des Verdichters eingebaut. Bei der ursprünglichen einfachen Ausführung des Widerstandselementes, das in zwei aufeinanderfolgenden Versuchen mit schwächer und starker Heizung betrieben wurde, zeigte sich daß der Verdichter nicht rein periodisch arbeitet. Es ergaben sich vielmehr abhängig vom Gegenstück Schwankungen der mittleren Temperatur der erzeugten Druckluft, die periodisch etwa 4 bis 8 Umdrehungen des Verdichters umfaßten. Um daher eindeutig zueinandergehörende Temperaturstandselemente nebeneinander auszuführen, wurden schließlich zwei gleiche Widerstandselemente mit Hilfe zweier Siemens-Oszillographenschleifen, Bauart V, deren Dämpfung durch Verwendung einer geeigneten Öl Mischung auf kleinste Verzerrung eingestellt war, photographisch aufzeichnet. Eine dritte Schleife zeichnete außerdem noch eine sinusförmige Zeitmarke von 50 Hz (Netzstrom) und darübergelagert die Markierung des oberen Totpunktes des Verdichters, Abb. 2.

Da die Oszillographenschleifen nur die Schwankungen des Meßstromes aufzeichnen sollen, wurde dessen Gleichstromanteil mit einer Schaltung nach Abb. 3 kompensiert. Aus der Größe der Batteriespannungen in Verbindung mit den bekannten Schaltungswiderständen, den Eichkurven der Schleifen und den aufgenommenen Diagrammen lassen sich zunächst die vorläufigen Widerstände der Widerstandselemente berechnen. Nach Gl. 3 kann man dann den Anzeigerfehler des schwach geheizten Widerstandselementes und damit auch die wirkliche Lufttemperatur berechnen. Schließlich findet man nach Gl. 4 auch

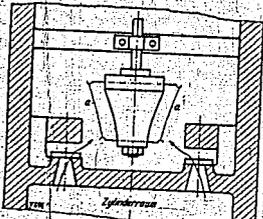


Abb. 1 (links): Einbau des Widerstandselementes in den Zylinderkopf eines Verdichters

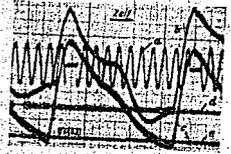


Abb. 2

Abb. 2. Temperatur-Zeit-Diagramm zweier gleich, aber verschieden stark geheizter Widerstandselemente, die im Zylinderkopf eines Kolbenverdichters eingebaut waren (282 U/min, 2,1 at Gegenruck)

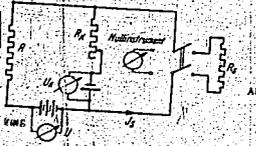


Abb. 3

Abb. 3. Schaltbild zur Aufzeichnung der Widerstandsänderungen der Platindrähte unter dem Einfluß der Temperatur schwankungen der vorbelastenden Druckluft

- $R$  Widerstand eines Elementes
- $U$  Heizspannung
- $K$  Kompensationsspannung
- $I_s$  Schleifenstrom
- $R_s$  Widerstand des Schleifenzweiges
- $R_k$  Kompensationswiderstand

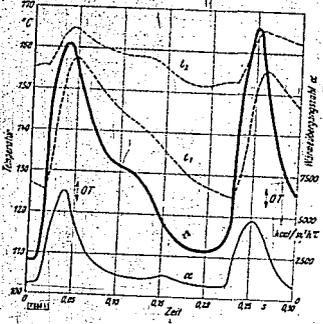


Abb. 4 (rechts): Umgezeichnetes Temperatur-Zeit-Diagramm der Widerstandselemente  $I_1$  und  $I_2$  mit dem zehnerfach ermittelten wirklichen Temperaturverlauf  $\theta$  der erzeugten Druckluft und veränderliche Wärmeübergangszahl  $\alpha$  am Meßdraht während eines Spieles des Verdichters.

000366

nach dem zeitlichen Verlauf der Wärmebergangszahl  $e$  am Meßdraht während eines Spüßens des Verdichters, Abb. 1.

Die Zahlenwerte dieser Berechnungen erheben sich daraus, daß nach Gl. II bei der größten vorläufigen Temperaturänderung von  $41^{\circ}\text{C}$  bis  $1599^{\circ}\text{C}$  im Durchschnitt des Meßdrahtes ein Temperaturunterschied von weniger als  $1^{\circ}\text{C}$  bei einer gesamten Temperaturveränderung von mehr als  $20^{\circ}$  auftritt. Das für den Einfluß der veränderlichen Dralleiten maßgebende Verhältnis  $l_0$  ist im vorliegenden Fall 0,96 bei einer kritischen Wärmebergangszahl am Meßdraht von  $e = 600 \text{ kcal/m}^2 \cdot \text{C}$ . Nach Gl. II findet man ferner, daß die Schwankungswerte der Grenzstromung durch die Dralleiten schon in diesem ungunstigen Fall nur weniger als 2% verändert sind. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß durch die Aufhängung der Feindröhre an Halbkugeln aus 0,5 mm Stahlrohr die Temperatur der Meßdrähte nicht wesentlich beeinflusst wird. Diese Annahme erscheint praktisch als sehr wahrscheinlich, nachdem einerseits die Stahlhülzen infolge ihrer geringen Dicke noch ziemlich weitgehend die Schwankungen der Lufttemperatur abmildern und andererseits sich die benachbarten Dralleiten hinsichtlich ihrer Länge einer Linie befinden, die ebenfalls noch sehr kurz ist im Vergleich zur gesamten Länge des Meßdrahtes. Nimmt man aber trotzdem an, daß die Meßdrähte an den Stahlhülzen eine unmerkliche zeitliche Temperaturerhöhung, so ergibt sich  $1/4 e = 150$  und nach Gl. II im ungünstigsten Fall ein Fehler von nur rd. 5%.

#### V. Zusammenfassung

Durch mühsamer Vereinfachung der verwickelten Vorgänge bei der Messung von veränderlichen Gas- oder Flüssigkeitstemperaturen mit Thermoelementen und Widerstandsberührern werden allmählich zunehmend Bedingungen für die Messung von schnell veränderlichen Temperaturen mit dünnen Dralleiten entwickelt. An Hand dieser Beispiele wurde dann gezeigt, daß bei völlig unbekanntem Wärmebergangsverhältnis durch sorgfältige Hebung der Meßdrähte mit Gleich- oder Wechselstrom die Möglichkeit einer einfachen Nachprüfung der Richtigkeit der Meßergebnisse besteht. Fehlerhafte Angaben infolge zu großer thermischer Trägheit der Meßdrähte können dadurch auch teilweise verbessert werden, und außerdem besteht die Möglichkeit der punktwisen Ermittlung der zeitlich beliebiger veränderlichen Wärmebergangszahl am Meßdraht. Die gleichen Meßtechniken erheben sich auch bei Verwendung von zwei verschiedenen Meßdrähten. Besonders zu beachten ist dabei, daß keinerlei Einschränkungen bezüglich der Größe und Veränderlichkeit der Wärmebergangszahlen am Meßdraht gemacht werden. Durch weitere Vereinfachung des Ausmeßsystems wird der Anschluß an bisher bekannte Arbeiten auf diesem Gebiete gegeben. Im nächsten Abschnitt werden die einzeln gemachten Vereinfachungen einer kritischen Betrachtung unterworfen. Dabei wird gezeigt, daß diese praktisch für die meisten messtechnisch vorzunehmenden Fälle zulässig sind. Die Beziehungen können auch auf Quecksilberthermometer angedeutet werden; mit Rücksicht auf eine gedrängte Darstellung wird dies jedoch nur angedeutet. Zur Veranschaulichung der Theorie werden dann zwei Messungen angeführt, die mit Hilfe rascher veränderlicher starker pulsierender Widerstandsberührer im Zylinderkopf eines Hochdruckverdichters vorgenommen wurden. Aus dem gleichzeitig aufgenommenen Temperatur-Zeit-Diagramm des heißen Widerstandsberührers wurde der wirkliche Verlauf der Temperatur für einen bestimmten Druckwert berechnet. Gleichzeitig wurde auch die Veränderlichkeit der Wärmebergangszahl am Meßdraht während eines Spüßens des Verdichters in Abhängigkeit von der Zeit ermittelt. [RF 687]

TITLE PAGE

5. Probleme zur periodischen Waermeuebertragung mit Bezug  
auf Kolbenmaschinen.  
Problems of periodic heat transfer with reference  
to piston engines.

Frame Nos. 367 - 380

## Probleme der periodischen Wärmeübertragung mit Bezug auf Kolbenmaschinen<sup>1)</sup>

Von H. PRIEM VDI, Berlin

Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof

Für die stationäre Wärmeübertragung hat sich die Einführung der Wärmeübergangszahlen zur Darstellung der mathematischen Gesetze sehr gut bewährt. Findet aber in dem Heizmedium, wie z. B. in Kolbenmaschinen, ein schneller Temperaturwechsel statt, dann entsprechen die gleichzeitig auftretenden Gas- und Zylinderwandtemperaturen infolge der Zeit, die die Wärme zum Übergang vom Gas an die Wand braucht, nicht mehr einander. Die Gas- und Zylinderwandtemperaturen sind zeitlich gegeneinander verschoben, so daß ein mathematischer Ansatz wie bei der stationären Wärmeübertragung nicht mehr zureichend ist. Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit besteht nun darin einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten zu finden und Wärmeübergangszahlen zu definieren, die die Phasenverschiebung zwischen Gas- und Wandtemperaturen berücksichtigen.

### I. Einleitung

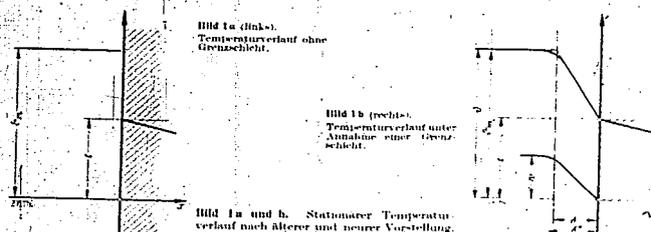
Die Fragen der Wärmeübertragung von Flüssigkeiten oder Gasen an feste Wände können bei stationären Temperaturfeldern — abgesehen von Überschallströmungen — heute als grundsätzlich geklärt gelten, wenn auch für viele praktisch wichtige Fälle bisher noch keine zahlenmäßigen Unterlagen verfügbar sind. Bekanntlich definierte man schon zu einer Zeit, wo man die physikalischen Vorgänge des Wärmeüberganges noch nicht voll überschauen konnte, die sogenannte „Wärmeübergangszahl“ — früher „äußere Wärmeleitfähigkeit“ — durch die nach Newton benannte Beziehung

$$Q = \alpha F (\vartheta_g - \vartheta_w)$$

worin bedeuten

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| $Q$ [kcal/h]                         | die in der Zeiteinheit übergehende Wärmemenge,                  |
| $\alpha$ [(kcal/m <sup>2</sup> h°C)] | die Wärmeübergangszahl,   |
| $F$ [m <sup>2</sup> ]                | die wärmeaustauschende Oberfläche,                              |
| $\vartheta_g$ [°C]                   | den Mittelwert der Temperatur des Gases (bzw. der Flüssigkeit), |
| $\vartheta_w$ [°C]                   | die Temperatur der Wandoberfläche.                              |

<sup>1)</sup> Herrn Dr.-Ing. H. Barth, Berlin, sage ich für die anregende Beratung meinen besten Dank.



Diese Wärmeübergangszahl  $\alpha$  gibt erfahrungsgemäß eine praktische ausreichende Beschreibung der stationären Wärmeübertragung; sie wurde auch aus praktischen Erwägungen beibehalten, obwohl man sehr bald die Unhaltbarkeit der früher zugrunde liegenden Anschauung — daß eine Stoffkonstante sei und die Temperatur sich an der Oberfläche sprunghaft ändere (s. Bild 1 a) — erkannt hatte.

Die anschauliche, physikalische Deutung der Wärmeübergangszahl wurde durch die Theorie von einer Grenzschicht der Strömung ermöglicht. Diese besagt, daß innerhalb einer dünnen Schicht von Gas (bzw. Flüssigkeit) in unmittelbarer Nähe der Wandoberfläche die Geschwindigkeit  $w$  mit stetigem Übergang auf den Wert Null abfällt (siehe Bild 1 b). Diese Grenzschicht ist durch die Zähigkeit des Strömungsmittels und das „Haften“ eines äußerst dünnen Flüssigkeit-filmes unmittelbar an der Wandoberfläche bedingt. In dieser Grenzschicht findet außerdem auch ein stetiger Übergang von der Temperatur des Strömungsmittels auf die der Wandoberfläche statt. Den hierbei auftretenden starken Abfall der Temperatur erklärt man dadurch, daß in der Übergangszone — infolge ihres besonderen Strömungszustandes — die Wärme vorwiegend nur durch Wärmeleitung übertragen wird. Unter der Wirkung des an der Wandoberfläche haftenden Flüssigkeit-filmes wird die Turbulenz der Hauptströmung in der Grenzschicht mit Annäherung an die Wand immer mehr geschwächt, so daß sich in unmittelbarer Wandnähe schließlich der laminare Strömungszustand einstellt. Wenn dabei auch vielfach keine scharfe Grenze zwischen diesen beiden Strömungsformen besteht, so hat sich trotzdem die Vorstellung einer Grenzschicht von bestimmter Dicke in Theorie und Praxis als brauchbar erwiesen.

Die physikalisch anschauliche Definition der Wärmeübergangszahl auf Grund einer solchen idealen Grenzschicht, d. h. auf Grund der Vorstellung einer reinen Wärmeleitung in ihr, lautet deshalb  $\alpha = \lambda/\delta$ . Für die Theorie und die praktische Messtechnik auf dem Gebiet der Wärmeübertragung ergibt sich damit die besondere Aufgabe, die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und die Dicke  $\delta$  dieser idealen Grenzschicht zu bestimmen.

Im Gegensatz zur stationären Wärmeübertragung sind die physikalischen Vorgänge beim nichtstationären Wärmeübergang — insbesondere in Kolbenmaschinen — praktisch und theoretisch wenig geklärt. Die Auswertung der spärlichen bisher vorliegenden Messungen wird stets in enger Anlehnung an die üblichen Anschauungen von der stationären Wärmeübertragung durchgeführt, obwohl man nicht erwarten darf, daß die Aussage über einen einfachen stationären Vorgang sich in unverständlicher Form dazu eignet, einen verwickelteren nichtstationären zu beschreiben.

Zur Prüfung dieses bisher üblichen Vorgehens ist es zweckmäßig, auf die den Vorgang der Wärmeübertragung beschreibende Differentialgleichung zurückzugreifen.

## II. Die Differentialgleichung der Wärmeübertragung, ihre Lösung für den stationären Wärmeübergang und ihre Form für einfache periodische Vorgänge

Zur besseren Übersicht sollen nachfolgend nur ebene Temperaturfelder betrachtet werden, wie sie praktisch mit guter Näherung in nicht zu dicken Grenzschichten stets vorkommen. Die Differentialgleichung der Wärmeübertragung durch Leitung und Konvektion in einem mit räumlich verteilten Wärmequellen durchsetzten Gas- (bzw. Flüssigkeits-) Raum lautet <sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Eine dreidimensionale Ableitung der Gl. 2 findet man z. B. in H. Götter und S. Bet, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, Berlin 1933, S. 148. In Gl. 2 sind die durch Druckänderungen und Reibungswirkungen bedingten Wärmestromungen in der Funktion  $W(x, y)$  mit sonstigen Wärmequellen (z. B. chemischer Reaktionswärme) zusammengefaßt.

$$c_p \gamma \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u(x, \tau) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - W(x, \tau) \quad (2)$$

Darin ist

- $\theta$  [°C], die örtlich und zeitlich veränderliche Gasttemperatur.
- $x$  [m], die Ortskoordinate in Richtung des Wärmestromes.
- $\tau$  [h], die Zeit.
- $u$  [m/h], die Geschwindigkeit der Gasteilchen in Richtung des Wärmestromes.
- $\Gamma$  [(x,  $\tau$ )] [kcal m<sup>2</sup>h], die Ergiebigkeit von etwa vorhandenen Wärmequellen (z. B. Verdichtungs-, Reibungs-, Verbrennungswärme) je Raum- und Zeiteinheit.
- $c_p$  [kcal/kg°C], die spez. Wärme des Gases bei unveränderlichem Druck.
- $\gamma$  [kg/m<sup>3</sup>], die Wichte des Gases.
- $\lambda$  [kcal/mh°C], die Wärmeleitfähigkeit des Gases.

Die Stoffkonstanten können dabei noch beliebige Abhängigkeiten aufweisen.

Diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung beschreibt also auch bei beliebiger Übergangszone zwischen Gaskern und Wandoberfläche die nichtstationäre Wärmeübertragung in ihr. Dabei ist in  $u(x, \tau)$  auch die Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Wärmestromes der im allgemeinen räumlich und zeitlich stark veränderlichen, turbulenten Wirbelbewegung der Gasteilchen enthalten. Für gasdurchlässige Begrenzungswände und stationäre Vorgänge muß dabei der Mengenstrom  $\gamma u$  an beliebiger Stelle im Gasraum eine Funktion sein, deren Mittelwert über genügend lange Zeiten Null ist, da sonst die Gleichverteilung der Gasteilchen gestört würde. Der Mittelwert der Geschwindigkeit der Gasteilchen ist aber beispielsweise stets nach der Wand gerichtet, wenn diese kälter ist als das Gas, da dann die Gasteilchen abgekühlt werden, also mit höherer Wichte und entsprechend kleinerer Geschwindigkeit von der Wand zurückkommen. Die Wirkung der Turbulenz auf die Wärmeübertragung kann man daher für stationäre Felder auch durch einen geeignet definierten Mittelwert der Geschwindigkeit  $u(x, \tau)$  erfassen. Dieser ist nur nach Ortsabhängigkeit und soll daher nachfolgend mit  $u(x)$  bezeichnet werden.

Für stationäre Temperaturfelder, die frei von Wärmequellen sind, wird  $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0$  und  $W(x, \tau) = 0$ . Damit findet man nach Gl. 2 die folgende Differentialgleichung:

$$c_p \gamma u(x) \frac{d\theta}{dx} + \lambda \frac{d^2 \theta}{dx^2} = 0 \quad (3)$$

Diese Gleichung ist für  $\theta$  eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten, die mit  $dQ_1 = F d\left(\lambda \frac{d\theta}{dx}\right)$  in der nachstehenden Differentialform äußerlich eine gewisse Ähnlichkeit mit Gl. 1 aufweist:

$$dQ_1 = [c_p \gamma u(x)] F dx$$

Die Gl. 3 besagt, daß für quellfreie stationäre Temperaturfelder die Summe der örtlichen Änderungen der durch Konvektion und Wärmeleitung bedingten Anteile des Wärmestromes Null ist. Damit ergibt sich auch für ortsveränderliche Stoffwerte zunächst:

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{d\theta}{dx} \right) dx = \int_a^b \frac{d}{dx} (u \theta) dx$$

Man findet so für den stationären, nur durch Wärmeleitung bestimmten Anteil des Wärmestromes  $q_2(x)$  in der Übergangszone vor der Wandoberfläche

$$-q_2(x) = \lambda \frac{d\theta}{dx} = C_1 e^{\frac{1}{\alpha} x} \quad (3a)$$

wobei  $C_1$  die Integrationskonstante und  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Da unmittelbar an der Wandoberfläche  $x = 0$  (s. Bild 1 b) die Konvektion Null ist, ergibt sich  $C_1 = -Q F$ , d. h. also gleich dem Wärmestrom an der Wandoberfläche.

Die Beschreibung  
halten, obwohl  
Stoffkonstante  
ant hat.  
eh die Theorie  
flümen Schicht  
ndigkeit  $\alpha$  mit  
urch die Zähig-  
es unmittelbar  
tiger Übergang  
ei auftretenden  
- infolge ihres  
ng über  
die  
gesch  
inst  
best  
and

einer solchen  
lautet deshalb  
neübertragung  
dieser idealen  
orgänge beim  
h und theoret  
wird stets in  
gung durch  
hären Vorgang  
s beschreiben  
Vorgang der

**e. Lösung  
einfache**

htet werden.  
ommen. Die  
mit räumlich  
Grundgesetz  
unwirkungen  
aktionslinie)

300370

Der konvektiv bedingte Anteil des Wärmestromes  $q_1(x)$  ergibt sich entsprechend zu

$$q_1(x) = \int_0^x c_p \rho \omega(z) dz = \dots \quad (3)$$

Die Größe der Integrationskonstanten  $C_1$  findet man wieder aus der physikalischen Forderung, daß an der Wandoberfläche  $x = 0$  der konvektive Anteil des Wärmestromes Null sein muß, zu  $C_1 = Q/F$ . Damit wird dann — wie zu erwarten ist — der gesamte stationäre Wärmestrom  $q$  an jeder Stelle der Übergangzone:

$$q = q_1(x) - q_2(x) = Q/F = \text{konst}$$

Aus Gl. 3a findet man schließlich durch nochmalige Integration in den Grenzen von  $x$  bis 0 die Gleichung des Temperaturfeldes:

$$t = \dots \quad (4)$$

Ein bestimmter Wert der Gastemperatur  $t = t_0$  ergibt sich nun an einer Stelle  $x = x_0$  (Bild 1b), so daß man nach Gl. 4 erhält:

$$Q = \dots \quad (4a)$$

Der Vergleich dieser Beziehung mit Gl. 1 liefert so die Wärmeübergangszahl in der Form:

$$\alpha = \dots \quad (4b)$$

Aus Gl. 4b erkennt man, daß die Wärmeübergangszahl im wesentlichen durch strömungstechnische Vorgänge in der Übergangzone bedingt und bei deren Kenntnis berechenbar ist.

Für den Sonderfall einer idealen, rein laminaren Grenzschicht von der Dicke  $\delta$  ist  $\alpha = \lambda/\delta$  im Bereich  $0 < x < \delta$  gleich Null; nach Gl. 4b erhält man also mit  $\delta^2 = \nu x$  für die Wärmeübergangszahl bei unveränderlicher Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  den bekannten Wert

$$\alpha = \dots$$

Die vorausgehenden Betrachtungen zeigen also, daß die bisher übliche Beschreibung der stationären Wärmeübertragung mit Hilfe einer Wärmeübergangszahl auch für eine turbulente Übergangzone (Grenzschicht) bei von Wärmequellen freier Temperaturfeldern physikalisch durchaus vertretbar ist. Die Beziehung Gl. 4b zeigt allerdings auch, daß die so definierte Wärmeübergangszahl nur eine Umgehung der verwickelten thermisch und vor allem strömungstechnisch bedingten Vorgänge innerhalb dieser Übergangzone darstellt.

Für nicht-stationäre Temperaturfelder, die frei von Konvektionsströmen und Wärmequellen sind, erhält man nach Gl. 2 die bekannte Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$$

<sup>1)</sup> Die praktisch stets noch auftretende Heizungs-wärme in der Übergangzone kann bei diesen Betrachtungen in den meisten Fällen als verschwindend klein im Vergleich zur überhöhlen Wärmestromes angesehen werden. (Man nehme hierzu vor allem Überschallströmungen.)

Der Einfluß der in der Strömungsgrenzschicht erzeugten Heizungs-wärme läßt sich bei stationären Wärmeübertragungen überschlägig noch wie folgt erfassen. Wegen der Ähnlichkeit von Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldern könnte man in der Übergangzone unmittelbar vor der Wand in erster Näherung für die erzeugte Heizungs-wärme dem Temperaturgradienten (bzw. einer entsprechenden Funktion desselben) verhältnismäßig setzen. Die Differentialgleichung kann dann noch in gleicher Weise wie oben integriert werden.

Diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung beschreibt die zeitliche Entwicklung der periodischen Wärmeübertragung durch eine von Wärmequellen freie, unimittlere Grenzschicht. Eine Gegenüberstellung von Gl. 3 zeigt, daß für die zeitliche Abhängigkeit des Vorganges in dieser Weise berücksichtigt sein kann. Daraus ergibt sich, daß selbst diese einfache, schon sehr abstrakte Vorgang der periodischen Wärmeübertragung nicht ohne weiteres durch eine Gleichung von der Form der Gl. 3 physikalisch richtig wiedergegeben werden kann.

Die Vorgänge bei der periodischen Wärmeübertragung in Verbrennungskraftmaschinen liegen besonders verwickelt. In ihrer mehrheitlich einfachen Fülle der dimensionalen Wärmeübertragung sind in sich nicht überwindliche Wege überlagert. Alle Versuche zur Erläuterung des inneren periodischen Wärmeübertrages liegen daher solange weiter Abwärts auf eine physikalisch anschauliche und weniger komplexe als die Gleichungen für die Bestimmung der eindringenden Fülle noch unklar sind. Damit ergibt sich die Möglichkeit eines Zugriffs in diese Vorgänge und außerdem auch die der Übertragung auf andere Fälle. Wohl kann man mit geeigneten Maßzahlen für bestimmte Sonderfälle und unter bestimmten Annahmen an technischen Arbeitsstoffen Ergebnisse gewinnen. Diese sind aber schließlich wertlos für eine allgemeine Erläuterung der Vorgänge zu sein. Ein andererseits grundlegendes Verständnis für die Zusammenhänge dieser Vorgänge ist notwendig. Diese ist zu gewinnen durch die Erläuterung dieser Vorgänge auch nicht ohne weiteres möglich.

Zur physikalisch richtigen Erläuterung der dimensionalen Wärmeübertragung -- insbesondere der periodischen periodischen Wärmeübertragung im Hinblick auf die Zusammenhänge -- werden -- vornehmlich -- zunächst die einfachsten periodischen Vorgänge dieser Art zu untersuchen.

III. Grundfälle der periodischen Wärmeübertragung

1. Allgemeines. In den vorliegenden Betrachtungen soll zunächst der Versuch gemacht werden, die auf Gl. 3 zurückzuführende, vereinfachte Darstellung von der Wärmeübertragung -- die praktisch sehr stark eingeschränkt ist und sich technisch auch als vereinfacht erweisen hat -- mit möglichst geringem den physikalischen Anforderungen aber gerade periodischer Erläuterung auch für andere zwei periodische Vorgänge heranzuführen zu versuchen. In welchem Umfang diese vereinfachte Form der Wärmeübertragung auch zur Beschreibung der technisch vorkommenden, unter periodischen Vorgängen im Maschinenbau heranzuführen ist, können erst künftige Versuche entscheiden. Zur Erläuterung dieses Zieles soll jetzt versucht werden, die in Maschinen vorkommenden Sonderfälle der periodischen Wärmeübertragung -- nämlich Grenzschicht -- besonders voneinander zu trennen und an veranschaulichende Beispiele zu entwickeln. Zur klaren Erläuterung der Zusammenhänge der periodischen Wärmeübertragung wird zunächst von zwei überlagerten, separaten Arten der Beschleunigung ausgegangen.

Besonders wird sich um die am stärksten vereinfachten Vorgänge, so wie die partielle Differentialgleichung 3 mit dem üblichen Lösungsweg, Problem um einer Zeit- und einer Zeitfunktion, zum Beispiel um Zeitpunkte in eine physikalische Interpretation zweier Zeitpunkte von abwechselnder Form über.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -k u$$

Es sei nun  $u = A \sin(\omega t - kx)$  die allgemeine Lösung für  $u = 0$  und  $u = 1$  die in  $x = 0$  vorgegebene Randbedingung ist.

Es sei nun  $u = A \sin(\omega t - kx)$  die allgemeine Lösung für  $u = 0$  und  $u = 1$  die in  $x = 0$  vorgegebene Randbedingung ist.

Die Differentialgleichung 3 beschreibt die zeitliche Abhängigkeit der Wärmeübertragung in einem Temperaturbereich nach Größe und Phase und kann als Ausgangspunkt für eine Beschreibung in einem Grenzschichtbereich dienen. In dieser Form der Differentialgleichung wird die zeitliche Abhängigkeit der periodischen Wärmeübertragung nicht mehr unmittelbar in Erscheinung treten, da die physikalisch richtige Darstellung durch eine Beziehung von der Form der Gl. 3 wieder in den Bereich der Möglichkeiten gelangt.

2. Wärmeübertragung bei stationärer Strömung und periodischer Temperatur der Strömungsquelle. a) Die Wärmeübertragungszahl nach Nusselt ist  $Nu = \frac{h \cdot d}{\lambda}$ . Es wird stationäre Strömung in einem vierseitigen Rohr unter Druck mit thermischer Zylinderströmung des Fluids angenommen sein, während seine Oberflächentemperatur über der mittleren Wärmeflussrichtung am Rohrwand konstant durch periodisch veränderlich ist, daß die Zeitmessung nach  $t$  wird.

Man nimmt sich als Strömungsweg  $u = u_0 \sin(\omega t - kx)$  an. Die allgemeinen Werte, sowie die allgemeine Darstellung nach der Gleichung, gibt.

800372

Infolge der Anstößung einer Strömungsgrenzschicht mit endlicher Temperaturleitfähigkeit wird die vom Gaskern an die Wand übergebene Wärme in Form einer Wärmequelle einer bestimmten Zeit zum Davirlaufen dieser Grenzschicht erzwingen. Der Wärmeübergang in die Wandoberfläche muß also zeitlich hinter der Gaskernperatur bereden. Da nun die an die Wand übergebene Wärme deren Temperatur beeinflusst, ergibt sich, daß auch die periodische Änderung der Oberflächen-temperatur des Rohres zeitlich hinter derjenigen des Gaskernes bereden. Diese zeitlichen Verschiebungen müssen um so stärker in Erscheinung treten, je höher die Frequenz der erzwungenen Temperaturschwängung und je dicker die wirksame Grenzschicht ist. Im allgemeinen wird so die Temperatur des Gaskernes auf die der Wand innerhalb einer Zeitperiode — die im wesentlichen mit der Strömungsperiode zusammenfällt — in Form einer stark gedämpften Welle stetig übergeben, wie dies in den Bildern 2a bis 2d anschaulich dargestellt ist.

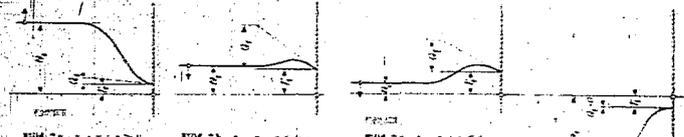


Bild 2a bis 2d. Anschauliches der Temperaturverläufe in einer Grenzschicht für periodische Temperaturänderungen des Gaskernes bei unterschiedlichen Zeitpunkten  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$ . Im anschließende Wärmestrom an der Wandoberfläche ist unter  $q$  genau entgegengesetzt. Kasten als Strömungsbildung die dem zeitveränderlichen Temperaturverlauf an der Wandoberfläche mit der höchsten Grenze zugeordnet dem langsamsten und tiefsten Temperaturverlauf.

Wenn man nun die bisherige Definition der Wärmeübergangszahl durch Analogiekoerente nach Gl. 1 beibehält, so ergibt sich offenbar folgendes:

1. Die Wärmeübergangszahl ist während einer Periode zeitlich stark veränderlich und schwankt unermesslich zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$ ; sie nimmt also auch negative Werte an und ändert sich sprunghaft.
2. die Wärmeübergangszahl als Zeitfunktion geht nicht stetig in den Wert für die stationäre Wärmeübergangszahl über; sie hat bei noch so langer Periode grundsätzlich immer zwei Unendlichkeiten.

Bei dem periodischen Temperaturfeld noch zusätzlich ein stationäres oder aperiodisches Feld überlagert, so ergibt sich ferner:

3. der zeitliche Verlauf der Wärmeübergangszahl ist wesentlich von der Größe des überlagerten stationären oder aperiodischen Anteiles der übergebene Wärme abhängig; Voraussetzung der Unendlichkeiten stellen sich.

Obwohl geratig definierte Wärmeübergangszahlen in jedem besonderen Fall eine sinnvolle Zuordnung zwischen Wärmestrom und Temperaturunterschied noch zulassen — also mathematisch einwandfreie Zusammenhänge liefern — muß man sie aus physikalischen Gründen ablehnen.

Wenn im folgenden trotzdem versucht wird, den Begriff der Wärmeübergangszahl in etwas veränderter Form auch für periodische Vorgänge beizubehalten, so geschieht dies vor allem aus Gründen der Zweckmäßigkeit: die Wärmeübergangszahl sagt zwar gar nichts über den Temperaturverlauf innerhalb der Übergangszone aus; sie liefert aber den Zusammenhang zwischen dem Wärmestrom und dem ihn verursachenden, gesamten Temperaturunterschied. Die Wärmeübergangszahl setzt also an Stelle der stetigen Übergangszone eine physikalisch begründete Wärmeübergangsfähigkeit bzw. einen Wärme-widerstand<sup>1)</sup>. Es ist dabei ohne Zweifel gut, diesen anschaulichen — auch in Analogie zur Elektrotechnik stehenden — physikalischen Begriff auch für periodische Vorgänge mit seinen Vorzügen zu erhalten. Die Erfahrung muß erst zeigen, ob er — insbesondere bei den sehr verwickelten Vorgängen in Kältemaschinen — die notwendige Anpassungsfähigkeit besitzt. Im anderen Falle bleibt zunächst nichts weiter übrig, als auf die den Vorgang beherrschenden Differentialgleichungen und ihre Randbedingungen zurückzugreifen. Dann muß allerdings unter Verzicht auf jede Vorstellung von einer Wärmeübergangszahl (bzw. einem Wärme-widerstand zwischen Gaskern und Wand-oberfläche)

1) Vgl. z. B. DVL-Bericht Nr. 897 (1952).  
 \*) Bei Wärmeübergangszahlen handelt es sich fast immer um Analogie, die in Richtung des Wärme-stromes hin zu verhalten, so daß der Begriff des Wärme-widerstandes dem Verhältnissen besser angepaßt wäre, obwohl sich diese also mit dem Begriff der Wärmeübergangszahl besser beschreiben lassen, wenn es in dieser Stelle nicht verboten, den seit langer Zeit eingeführten Begriff der Wärmeübergangszahl zu verlassen.

der Wärmestrom mit erheblichem Aufwand aus dem Temperaturgradienten an der Wandoberfläche bestimmt werden.

Die Erläuterung des Begriffs der Wärmeübergangszahl auf harmonische Vorgänge. Die folgenden Betrachtungen sollen dazu anleiten, daß eine Wärmequelle zum Durchlaufen einer Grenzschicht von rotierender Dicke und Temperaturfähigkeit eine gewisse Zeit erfordert. Die in einem bestimmten Augenblicke an der Wand übertragene Wärmemenge ist, die entsprechende Temperaturgradient an der Wandoberfläche ist dann also die mittlere Forder eines zeitlich veränderlichen Wärmestromes nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem im gleichen Augenblicke bestehenden Temperaturunterschied zwischen Gasen und Wandoberfläche stehen. Der physikalische Begriff einer Wärmeübergangszahl in der für stationäre Vorgänge üblichen Definition nach Gl. 1  $q = \alpha (t_w - t_g)$  wird also zunächst sinnlos, wenn man als bestimmenden Größen  $q$  und  $t_w - t_g$  so einsetzt, wie sie gerade zu gewissen Zeitpunkten bestehen. Will man trotzdem die ausgedrückte Vorstellung einer Wärmeübergangszahl nach obiger Definition festhalten, so kann dies am besten in der Form geschehen, daß man den augenblicklichen Wärmestrom  $Q$  an der Wandoberfläche im Verhältnis setzt zu dem im Mittelwert — nämlich durch Steigerung des Temperaturgefälles in unmittelbarem Zusammenhang — verursachendem, aber zu einem früheren Zeitpunkt wirksam gewesenem Temperaturunterschied zwischen Gasraum und Wandoberfläche.

Die Bestimmung dieses Zeitpunktes bzw. die des wirksam gewesenem entsprechenden Temperaturunterschiedes ist zunächst nicht möglich, da dieser noch von der Form des zeitlichen Temperaturverlaufes wesentlich abhängt. Um daher wenigstens Einblick in die Verhältnisse zu bekommen, beschränken wir uns vorläufig auf die einfachsten Formen von periodischen Vorgängen, auf harmonische Schwingungen von bestimmter Frequenz.

Für die nun folgenden Betrachtungen soll wieder der mit dem vorigen Abschnitt eingeführte Grundfall einer stationären Rohrströmung bei harmonisch veränderlicher Gastemperatur zum Beispiel zur Sprache kommen. Die Strömungsgeschwindigkeit an der Rohrinnenoberfläche kann dabei konstant sein. Die der Differentialgl. 6 genügenden Lösungen für die Grenzschicht liefern dann die Schwingerweite und Phasenlage der gesuchten Wärmeschwingung  $Q_w$  an der Wandoberfläche und des Temperaturunterschiedes  $\Delta t$  zwischen Gasen und Wandoberfläche. Beide Schwingungen sollen nun harmonisch veränderlich sein und gehen so Gl. 10 in der Form  $Q_w = Q_0 \cos(\omega t - \epsilon_1)$  bzw.  $\Delta t = \Delta t_0 \cos(\omega t - \epsilon_2)$  über.

- 1. Die harmonisch veränderliche Wärmeschwingung an der Wandoberfläche je Flächeneinheit.
- 2. Die Schwingungsweite bzw. die Phasenlage der Wärmeschwingung.
- 3. Der harmonisch veränderliche Unterschied zwischen den Temperaturverläufen des Gasraumes und der Wandoberfläche.
- 4. Die Schwingungsweite bzw. die Phasenlage dieses Temperaturunterschiedes.

Definiert man nun im Gegensatz zur bisherigen Betrachtungsweise als Wärmeübergangszahl für rein harmonisch mit der Kreisfrequenz  $\omega$  veränderliche Übertemperaturen das Verhältnis der augenblicklichen übertragenden Wärmemenge zu einem wirklichen Temperaturunterschied, der eine bestimmte Zeit zuvor zwischen Gas und Wand bestanden hätte und wesentlich bestimmend für die Größe dieses augenblicklichen Wärmestromes ist, so erhält man die nachstehende Beziehung:

$$\alpha = \frac{Q_w}{\Delta t_0 \cos(\omega t - \epsilon_2 - \epsilon_1)} = \frac{Q_0}{\Delta t_0} \frac{\cos(\omega t - \epsilon_1)}{\cos(\omega t - \epsilon_2 - \epsilon_1)}$$

Dabei ist  $t$  der zunächst noch unbekanntes Zeitunterschied zwischen dem wirksam gewesenem Temperaturunterschied (Gas Wand) und dem durch ihn bestimmten augenblicklichen Wärmestrom an der Wandoberfläche.

Ein willkürlicher Wert von  $t$  liefert gegenüber den Betrachtungen im vorangehenden Abschnitt nichts Neues; die so berechnete Wärmeübergangszahl würde wieder zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  sprunghaft schwanken. Nur ein ganz bestimmter Wert von  $t$  liefert hiervon eine Ausnahme. Wählt man

- a) Den anderen, nämlich Definitionen auf ständiger Grundlage soll in einer späteren Arbeit bewiesen werden.
- b) Die stationäre Wärmeübertragung nimmt hierbei durchaus keine besondere Stellung ein, da sie sich zu  $\alpha$  bei Fourier-Einstellungen verhalten als Glied mit der Kreisfrequenz „Null“ darstellen läßt.
- c) Für die Berechnung kann man auch die physikalisch gleichwertige Beziehung zwischen  $Q_w$  und  $\Delta t$  ansetzen, an durch Gleichsetzen von Argumenten der Kreisfunktionen, die sich um einen Vielfachen von  $2\pi$  unterscheiden, an die Bestimmung  $\omega t - \epsilon_2 - \epsilon_1 = 2\pi n$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  führen. Die mathematische Vieldeutigkeit des Zeitunterschiedes ist aber physikalisch bedeutungslos, da man an Stelle eines bestimmten Phasenwinkels der Winkel  $\epsilon_2 - \epsilon_1 + 2\pi n$  mit  $n$  ein größeres Winkel wählen kann, ohne die mathematischen Ergebnisse zu ändern. Darüber hinaus ist die auch physikalisch bedeutungslose alle Wärmeschwingungswerte kann man die Winkelwerte auf den  $2\pi n$  Teil ihres Anfangswertes zurückführen und infolge dieser großen Deutlichkeit für alle technischen Anwendungen zum ...



mit unveränderlichen Größen — Strecken und Winkeln (den Schwingungsweite und Phasenwinkeln der verschiedenen Schwingungen) — vorzunehmen sind. Die Mathematik zeigt, daß alle mathematischen Operationen mit diesen Drehstrecken so vorgenommen werden müssen wie mit Vektoren einer Ebene, d. h. also z. B. die Summe (bzw. Differenz) zweier Drehstrecken ist geometrisch zu bilden usw. Infolge dieser Vektoreigenschaften werden derartige Drehstrecken auch als Zeitvektoren bezeichnet.

Betrachtet man nun den Temperaturunterschied  $\tau$ , zwischen Gaskern und Wandoberfläche, so ist dieser — als Unterschied zweier harmonischer Schwingungen von verschiedenen Schwingungsweiten und Phasen, aber gleicher Frequenz — durch seine im kennzeichnende Schwingungsweite und Phase in einem solchen Drehstreckenbild als geometrische Differenz  $\tau$  von  $\theta$  und  $T$  (s. Bild 3) bestimmt.

Untersucht man z. B. das Temperaturfeld innerhalb der Grenzschicht, so kann dies namentlich an Hand eines derartigen Drehstreckenbildes geschehen: Je näher eine betrachtete Stelle der Grenzschicht an der inneren Rohroberfläche liegt, um so kleiner ist dort die Schwingungsweite der Gaskern- und um so größer ist der Phasenunterschied gegenüber der Temperatur-schwingung des Gaskerns. Die beiden, jeweils die harmonische Schwingung in einem bestimmten Punkt der Grenzschicht kennzeichnenden Größen — Schwingungsweite und Phasenwinkel — kann man für die verschiedenen Stellen der Grenzschicht in eine Ebene, von dem allen Drehstrecken gemeinsamen Drehpunkt 0 der Projektionsachse  $\tau = 0$  ausgehend, nebeneinander eintragen.



Bild 3. Zeitliche Bestimmung des zeitlichen Temperaturunterschiedes zwischen Gas- und Wandoberfläche durch Projektion der geometrischen Differenz der entsprechenden Drehstrecken.



Bild 4. Drehstreckenbild für ein harmonisch veränderliches Temperaturfeld in einer Grenzschicht.  $\tau$  Abstand von der Wand,  $\Delta$  Dicke der Grenzschicht;  $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4$ .

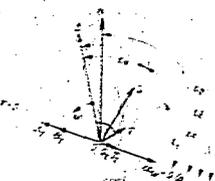


Bild 5. Zeitliche Bestimmung des Wärmestromdichtes und Phasenverschiebung bei harmonisch veränderlicher Wärmeübertragung.

Es ergibt sich auf diese Weise das Drehstreckenbild in Form eines fächerartigen Büschels von verschiedenen langen Strecken (s. Bild 4), deren Projektionen bei gleichförmiger Drehung mit der Kreisfrequenz der Temperatur-schwingung im Gaskern in jedem Augenblick zusammengehörige Werte der Temperaturen an den verschiedenen Stellen der Grenzschicht und der Wandoberfläche liefern. Damit ist auch das gesamte, zeitlich harmonisch veränderliche Temperaturfeld innerhalb der Grenzschicht anschaulich und einfach dargestellt. Ganz entsprechend kann auf diese Weise das Temperaturfeld innerhalb der Wand perspektivisch werden.

Bei periodischen Gastemperaturen von beliebiger zeitlicher Abhängigkeit kann für jede, mit Hilfe einer Fourieranalyse bestimmte Oberschwingung ein solches Drehstreckenbild gezeichnet werden. Die Summe aller jeweils zusammengehörigen Projektionen liefert dann die in jedem Punkt bestehende Augenblickswerte der unharmonischen Temperaturschwingung<sup>1)</sup>.

Ganz ähnlich gilt dies auch für den Wärmestrom in der Grenzschicht, der ja praktisch dem Temperaturgradienten an jeder Stelle verhältnismäßig ist. Hierbei ist die harmonisch veränderliche Wärmeschwingung in jedem Punkt der Grenzschicht durch Schwingungsweite und Phasenwinkel gegenüber der Temperaturschwingung im Gaskern eindeutig bestimmt. Auch die in die Wandoberfläche eindringende Wärmemenge ist somit unveränderbar durch Schwingungsweite und Phasenwinkel gegeben. Sie soll hier, als durch Versuche bekannt angenommen werden und kann dabei in einem Drehstreckenbild zu den gemessenen Temperaturen der Gas- und der Wandoberfläche (Bild 5) eingetragen werden. Nach Ermittlung der geometrischen Differenz  $\theta$  von  $\theta$  und  $T$  liefert die Projektionen in Bild 5 einzeichnetet vier Strecken bei gleichförmiger Drehung um den gemeinsamen Endpunkt in jedem Augenblick zusammengehörige Werte der Gaskern- und Wandtemperatur  $\tau$  (Unterschied und die an die Wandoberfläche übergehende Wärmemenge. Die Wärmeübertragungs-

<sup>1)</sup> Für die praktische Bestimmung derartiger Temperaturfelder ist es zweckmäßiger, wenn man sich die Drehstrecken festhalten denkt und die Projektionsachse  $\tau = 0$  in entgegen gesetzter Richtung mit der Kreisfrequenz um den Drehpunkt 0 umläßt (s. Bild 4).

ergibt sich dabei wie früher als Quotient aus den im Drehstreckenbild abgreifbaren Schwingungsweiten des Wärmestromes und des Temperaturunterschiedes (Verhältnis der Strecken), der zugehörige Phasenwinkel stellt sich ferner als geometrischer Winkel zwischen den Drehstrecken der übergelassenen Wärmemenge und des Temperaturunterschiedes dar. Beide Größen zusammen ( $s, \lambda$ ) bestimmen die Abhängigkeit zwischen Wärmeübergang und Temperaturunterschied bei harmonisch veränderlichen Temperaturschwingungen im Gaskern.

Die Wärmeübergangszahl  $s$ , ist in diesem Drehstreckenbild zunächst nicht unmittelbar zu erkennen. Man kann sie aber als zeitunabhängige, unveränderliche Größe in Form einer fest mit der Projektionsachse  $\tau = 0$  verbundenen Strecke vom gemeinsamen Anfangspunkt der Drehstrecken aus in einem beliebig gewählten Maßstab darstellen. Dabei sei nochmals besonders betont, daß die so in das Diagramm eingezeichnete Wärmeübergangszahl  $s$ , mit der Projektionsachse  $\tau = 0$  unlosbar verbunden ist und am Umlauf der Drehstrecken  $\Theta, T, J$  und  $Q$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  nicht teilnimmt. Alle auf der Projektionsachse  $\tau = 0$  in einem beliebigen Augenblick vom gemeinsamen Anfangspunkt  $0$  aus abgreifbaren Strecken  $\Theta, T, J, Q$ , und  $s$ , stellen dann jeweils zusammengehörige Augenblickswerte dieses Vorganges dar mit der Kreisfrequenz  $\omega$  rein harmonisch veränderlichen Wärmeübertragung dar.

Im folgenden werden nun noch die Vereinfachungen gezeigt, die sich für die Berechnung ergeben, wenn man das Drehstreckenbild in die Gaußsche Zahlenebene überträgt und dadurch zur komplexen Darstellung übergeht. Es wird jedoch ausdrücklich hervorgehoben, daß dieser Übergang physikalisch keine neuen Gesichtspunkte bringt und lediglich den Sinn hat, den erforderlichen Rechnungen die einfachste Form zu geben.

d) Vereinfachte Berechnung durch komplexe Schreibweise. Man denke sich das Drehstreckenbild in die Gaußsche Zahlenebene derart übertragen, daß der gemeinsame Drehpunkt aller Strecken mit dem Ursprung der Ebene zusammenfällt. Als später noch zu erweisenden Gründen soll dabei zunächst die noch willkürliche Lage der Projektionsachse  $\tau = 0$  so festgelegt werden, daß diese mit der positiven Achse der reellen Zahlen den Phasenwinkel  $\lambda$ , einschließt, Bild 6. Die frühere, reelle Darstellung der Zusammenhänge nimmt dann die nachstehende komplexe Form<sup>12)</sup> an — was durch den Zeiger  $e$  auch äußerlich gekennzeichnet wird —, sofern die Phasenwinkel der Drehstrecken jetzt von der Achse der reellen Zahlen aus gerechnet werden<sup>13)</sup>. Es ergibt sich so:

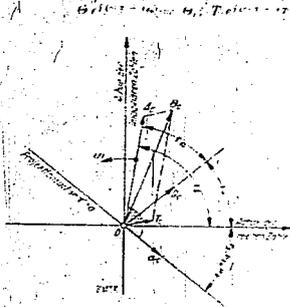


Bild 6. Übertragung des Drehstreckenbildes in die Gaußsche Zahlenebene.

Die komplexe Wärmeübergangszahl  $s$ , ist eine von der Zeit unabhängige feste Größe, die in Übereinstimmung mit Gl. 9b den Betrag hat:

Bildet man jetzt den Quotienten aus dem komplexen Wärmestrom und der komplexen Temperaturdifferenz so folgt:

Der Vergleich dieses Ergebnisses mit Gl. 9b und 11 zeigt<sup>12)</sup>:

daraus folgt

d. h. es ergibt sich der Quotient wieder als komplexe Größe, die man zweckmäßig als die „komplexe Wärmeübergangszahl“  $s$ , bezeichnet, so daß in formaler Übereinstimmung mit der Gleichung für stationären Wärmeübergang die Beziehung gilt:

$$Q = s \cdot (T_0 - T_1) \cdot e^{i\omega t} \quad (12)$$

Hierbei ist

$$s = s_0 \cdot e^{i\lambda} \quad (13, a, b, c)$$

<sup>12)</sup> Kurze Einführung in die komplexe Schreibweise z. B. von H. G. Müller, Behandlung von Schwingungsaufgaben mit komplexen Amplituden und mit Vektoren, Leipzig 1937.

<sup>13)</sup> Wegen der verschiedenen Bezeichnungen  $\theta_0, \theta_1, \dots$  vgl. a. Fußnote 11. Es ist  $\theta_0 = \theta_1 + \lambda; \theta_2 = \theta_3 + \lambda; \dots; \theta_{n-1} = \theta_n + \lambda; \theta_n = \theta_{n+1} + \lambda; \dots$  so daß  $\theta_0 - \theta_1 = \lambda; \theta_1 - \theta_2 = \lambda; \dots; \theta_{n-1} - \theta_n = \lambda; \theta_n - \theta_{n+1} = \lambda; \dots$

000877

und, in der Ganzebenen Zahlenebene dargestellt, mit der reellen Zahlenachse den Winkel  $\epsilon = \epsilon_0 - \epsilon_1$  einschließt<sup>16)</sup>. Die beiden Bestimmungsglieder  $\epsilon_0$  und  $\epsilon_1$  treten als kennzeichnendes Wertepaar in der komplexen Schreibweise

$$\epsilon = \epsilon_0 - \epsilon_1$$

unmittelbar selbst in Erscheinung. Bei Darstellung dieser komplexen Wärmeübergangszahl in der komplexen Zahlenebene muß also die im früheren Drehstreckenbild zunächst wirkliche Lage der Projektionsachse — wie vorausgehend schon angegeben — so festgelegt werden, daß sie mit der positiven Achse der reellen Zahlen den Winkel  $\epsilon_0$  einschließt. Alle zusammengehörigen Auswertebewerte  $\theta_0, T_0, Q_0, Q_1$  und  $\epsilon_0$  erscheinen dann in jedem Augenblick als Strecken (Projektionen von  $\theta_0, T_0, Q_0, Q_1$  und  $\epsilon_0$ ) auf der Projektionsachse  $r = 0$  und können unmittelbar als reelle Größen abgegriffen werden.

Die komplexe Berechnung und Darstellung der Wärmeübertragung bei periodischen Vorgängen bietet also neben einer wesentlichen Vereinfachung der Rechenarbeit vor allem noch den Vorteil, daß formal die bisherige Schreibweise der Gesetze des Wärmeübergangs unverändert beibehalten werden kann.

Nichtharmonische Temperaturschwingungen in turbulenten Gaskern können nun durch Fourier-Analyse auf harmonische Schwingungen zurückgeführt werden. Für jede derartige harmonische Temperaturschwingung ergibt sich dabei ein lauzeres Zahlenpaar als Wärmeübergangszahl, wobei Oberschwingungen von Temperatur und Wärme der gleichen Ordnungszahl einander zuzurechnen sind. Da aber in einem bestimmten Fall die Dicke der Grenzschicht für alle Oberschwingungen gleich ist, können diese Wärmeübergangszahlen für verschiedene Frequenzen nicht voneinander unabhängig sein<sup>17)</sup>.

Bei dem hier vorliegenden Problem der periodischen Wärmeübertragung treten also ganz ähnliche Erscheinungen auf, wie sie in der Elektrotechnik bei Wechselströmen vorkommen. Wie dort für den elektrischen Strom und die Spannung, so lassen sich hier diese Schwierigkeiten der Berechnung auch für Wärmestrom und Temperatur in dem einfachen thermischen Fall durch Verwendung von Drehstrecken und der komplexen Schreibweise beheben<sup>18)</sup>.

3. Wärmeübertragung bei periodischer Strömung und unveränderlicher Temperatur der Strömungsmittel. — Als weiterer einfacher Fall einer nichtstationären Wärmeübertragung soll die Wärmeübertragung bei periodischer Strömung in einem gekühlten (bzw. geheizten) Rohr und unveränderlichen Gastemperaturen angeführt werden. Die Periodizität der Strömung wird sich vor allem auf die Grenzschichtdicke auswirken. Eine einfache Übertragung der üblichen Vorstellungen von der Wärmeübergangszahl für stationäre Vorgänge ist hier von vornherein unmöglich, da der Temperaturunterschied — von kleinen Größen höherer Ordnung abgesehen — zwar praktisch unveränderlich ist, die Wärmeübergangszahl selbst aber sich sehr stark mit der Zeit ändern kann. Versucht man trotzdem z. B. durch Definition einer scharf ausgeprägten Grenzschicht von zeitlich veränderlicher Dicke den Begriff der Wärmeübergangszahl zu erhalten, so kann diese als Quotient aus der wirklich an die Wand übergehenden Wärmemenge und dem augenblicklich zugehörigen Temperaturunterschied zwischen Gaskern und Wandoberfläche keine (etwa zur Grenzschichtdicke resp.  $\delta$ ) einfache Größe sein. Infolge der endlichen Wärmekapazität der jeweiligen Grenzschicht wird z. B. in den Zeitpunkten einer Vergrößerung der Grenzschichtdicke mehr Wärme an die Wand übergeben als in dem, der augenblicklichen Grenzschichtdicke entsprechenden, stationären Fall (vgl. Bild 7). Bei zunehmender Dicke der Grenzschicht wird nämlich der für den wirklichen Wärmeübergang maßgebende Temperaturgradient unmittelbar an der Wandoberfläche vermehrt der endlichen Wärmekapazität des Gases noch zunehmen. Er wird also zeitlich stets hinter dem Schwankungen in der Dicke der Grenzschicht bleiben, d. h. augenblickliche, an die Wand übergehende Wärmemenge ist bedingt durch eine zeitlich vorausliegende, wirksame Dicke der Grenzschicht.

Die für stationären Wärmeübergang definierte Wärmeübergangszahl  $\alpha = \lambda/\delta$  wird also auch hier sinnlos, wenn man ihr die im betrachteten Augenblick jeweils bestehende Schichtdicke  $\delta$  zugrunde

<sup>16)</sup> Der Quotient

$$\frac{\theta_0 - \theta_1}{T_0 - T_1} = \frac{Q_0 - Q_1}{T_0 - T_1}$$

bestimmt durch  $\epsilon_0$  die Richtung, in der die Projektionsachse liegen muß; wenn alle Auswertebewerte periodisch sind, Größenunterschied der Wärmeübergangszahl durch Projektion auf eine gemeinsame Achse dargestellt werden können. Bei Beachtung dieser Zusammenhänge kann trotzdem die tabellarische Berechnung von Auswertebewerten aus Real- oder Imaginärteil erfolgen.

<sup>17)</sup> Entsprechendes Vorgehen für die so erweiterte Begriffsbestimmung der Wärmeübergangszahl für periodische Vorgänge sind enthalten im H. Pfriem, Beitrag zur Theorie der Wärmeleitung bei periodisch veränderlichen Temperaturfeldern, Ing.-Arch., Bd. 6 (1933) S. 107.

... Schwingungswerten  
... der Drehstrecken aus  
... bestimmt  
... harmonisch veränder  
... nicht unmittelbar zu  
... einer fest mit der  
... Drehstrecken aus  
... betont, daß die so in  
...  $r = 0$  unmittelbar  
... nicht teil  
... gemeinsamen An  
... jeweils zusammen  
... harmonisch veränder

... Berechnung ergeben  
... durch zur komplexen  
... Übergang physikalisch  
... Rechenregeln die

... Man denke sich die  
... unendliche Drehpunkt  
... erhaltenden Gründen  
... festgelegt werden, daß  
... Bild 6. Die frühere  
... Formel an — was  
... nicht sich

... mit Gl. 9b und 11

... wieder als komplexe  
... komplexe Wärme  
... da  $\delta$  in formaler Über  
... stationären Wärme

$$\alpha = \lambda/\delta \quad (12)$$

$$\alpha_0 = \lambda/\delta_0 \quad (13a, b, c)$$

... feste Größe, die in

... zweise von Schwang  
... Da  $\delta$   
...  $\delta_0 - \delta_1 = \delta$

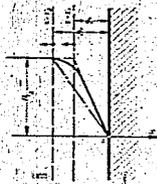


Bild 7 (links). Augenblicksbild des Temperaturfeldes und der Grenzschicht bei wachsender Dicke der letzteren und unveränderlicher Gaskern-Temperatur.

Die zu den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  gehörigen stationären idealisierten Temperaturfelder sind gestrichelt (Maßstaben  $t_1 > t_2$ ).

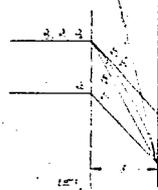


Bild 8 (rechts). Einfluß einer plötzlichen Verdichtung auf das Temperaturfeld in einer Grenzschicht von unveränderlicher Dicke  $\delta$  und damit auf den Wärmeübergang.

Augenblicksbilder  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  und  $\theta_4$  zu verschiedenen Zeiten  $t_1, t_2, t_3, t_4$ .

legt. Aber auch hier kann man die eingebürgerte Vorstellung einer Wärmeübergangszahl beibehalten, wenn man den zeitlichen Ablauf dieses Vorganges berücksichtigt, indem man die für den Temperaturgradienten an der Wandoberfläche verantwortliche, zeitlich frühere Grenzschichtdicke in die Rechnung einführt.

Bei rein harmonischen Änderungen der Dicke der Grenzschicht lassen sich diese Vorgänge wieder — wie oben schon für harmonische Temperaturschwankungen dargestellt — durch den Betrag und Phasenwinkel der Schwingung anschaulich erfassen. Hierbei werden voraussichtlich die Abweichungen gegenüber dem stationären Wärmeübergang bei einer bestimmten Frequenz am größten werden. Nichtharmonische Schwingungen können durch Fourier-Analysen auf harmonische zurückgeführt werden.

Die Vereinigung dieser beiden, oben dargestellten grundlegenden Sonderfälle der periodischen Wärmeübertragung führt schon zu einer technischen Anwendung, nämlich dem Wärmeübergang im Abgasrohr einer Verbrennungskraftmaschine. Hierbei ergeben sich sowohl sehr starke Schwankungen in der Strömungsgeschwindigkeit wie auch in der Temperatur der Abgase. Außerdem sind den periodischen Vorgängen noch die den Zeitmittelwerten der Temperatur und der Grenzschichtdicke entsprechenden stationären Vorgänge überlagert.

4. Wärmeübertragung bei Verbrennung unter unveränderlichem Druck. Als weiteres, grundlegendes Beispiel für nichtstationäre Wärmeübertragung diene die Verbrennung eines ruhenden Gasgemisches vor einer Wand bei unveränderlichem Gasdruck. (Dieser Vorgang ist zwar für sich allein betrachtet nicht periodisch; er tritt aber in Verbrennungskraftmaschinen periodisch auf.) Auch hierbei kann man keine einfache Wärmeübergangszahl wie bei einem stationären Wärmestrom definieren. Von der Stelle der Zündung ausgehend, wird sich eine Flammenfront ausbilden, die von einer Temperaturwelle begleitet wird. Bei Annäherung dieser Temperaturwelle an die Wand erhöht sich der Temperaturgradient an ihrer Oberfläche für kurze Zeit und verursacht dadurch einen starken Wärmestrom an die Wand. Diesen hat beispielsweise auch Nußelt<sup>10)</sup> schon bei seinen Bombenversuchen beobachtet und durch die anfängliche Zeitabhängigkeit der Wärmeübergangszahl berücksichtigt. Die Flamme dürfte dabei vermutlich infolge der stark abkühlenden Wirkung der Wandoberfläche schon in einem endlichen Abstand von dieser zum Verlöschen kommen. Eigene, mit vereinfachten Annahmen durchgeführte, vorläufige Berechnungen in dieser Richtung stützen in Verbindung mit im Schrifttum schon veröffentlichten Versuchen an Bomben und Verbrennungskraftmaschinen diese Vermutung. Ob dabei durch das Eindringen der Flammenfront in die Strömungsgrenzschicht diese selbst erhalten bleibt oder zerstört wird und nach der Verbrennung wieder von der Wand ausgehend, rückwärts aufgelaut werden muß, konnte noch nicht geklärt werden. Die absolute Größe des Abstandes zwischen Wand und Flammenfront bei ihrem Verlöschen ist jedenfalls sehr von der Größe der Zündgeschwindigkeit abhängig. Der Größtwert des Wärmestromes wird wiederum durch die Größe dieses Abstandes wesentlich beeinflußt.

5. Wärmeübertragung durch Druckänderung. Eine wichtige Frage bei der Erfassung der zeitveränderlichen Wärmeübertragung im Zylinder von Brennkraftmaschinen ist der Einfluß der Verdichtung bzw. Ausdehnung. Im Kompressor kommt diese Erscheinung technisch am einfachsten vor. Durch die Verdichtung wird in allen Raumelementen des Gases eine Wärmemenge erzeugt, die wesentlich von der Höhe des Verdichtungsverhältnisses abhängt. Dabei ist besonders zu beachten, daß diese Verdichtungswärme auch in der Grenzschicht des Gases, also vor allem auch unmittelbar an der Wandoberfläche, auftritt. Unter dem Einfluß der Wand (Temperaturgradient an der Oberfläche) wird diese Wärme aus den ihr unmittelbar vorgelagerten Gasschichten sofort abgeführt. Es kann sich allein hierdurch ein recht erheblicher Wärmeübergang ergeben, wie beispielsweise auch schon die

<sup>10)</sup> H. Nußelt, Der Wärmeübergang in der Gasmassine, Z. VDI Bd. 53 (1914) S. 361.

Bombenversuche von Nußelt<sup>16)</sup> gezeigt haben. Verdichtet man, von einer gegebenen stationären Temperaturverteilung ausgehend (s. Bild 8, Kurve  $\theta_1$ ), plötzlich auf einen höheren Druck, so erhöht sich infolge der überall gleichen Verdichtung die Temperatur gleichzeitig an allen Stellen des Gasraumes — also auch in der Grenzschicht — sprunghaft um einen bestimmten Betrag (Kurve  $\theta_2$ ). Die Temperatur der Wand wird sich jedoch infolge ihrer größeren Wärmekapazität nur unwesentlich ändern. Daher gleicht sich das neue Temperaturfeld  $\theta_2$  in der Grenzschicht allmählich über den Verlauf  $\theta_3$  dem stationären Endzustand  $\theta_4$  an. Aus dieser Betrachtung geht klar hervor, daß der Temperaturgradient an der Wandoberfläche, auch bei der Verdichtung mit endlicher Geschwindigkeit, in jedem Augenblick größer ist als das der augenblicklichen Gaskerntemperatur zugehörige, stationäre Temperaturgefälle  $\theta_4$ , in der Grenzschicht; entsprechend dem größeren Temperaturgradienten geht also infolge der Verdichtung auch eine größere Wärmemenge an die Wand über.

Neben diesen Überlegungen ist noch folgendes zu beachten. Jede Verdichtung von Gasen in einem beliebig geformten Raum ist innerhalb der Grenzschicht stets mit einem Mengenstrom senkrecht zu dem betrachteten Element der Wandoberfläche verbunden, der infolge des Energieinhaltes der Gasteilchen gleichzeitig auch einen entsprechenden Wärmestrom darstellt. Betrachtet man nun diesen konvektiven Wärmestrom, der durch eine zur Wandoberfläche in bestimmtem Abstande parallel verlaufenden Beobachtungsfläche innerhalb der Grenzschicht hindurchtritt, so erkennt man bei einem aufeinander folgenden stationären Temperaturgefälle zur Wand folgendes: Während der Verdichtung treten Gasströme in Gebieten mit höheren Temperaturen durch die Beobachtungsfläche in Richtung zur Wand nach Gebieten mit tieferen Temperaturen. Hier geben sie ihre Wärme teilweise ab und gehen so bei einer nun folgenden Ausdehnung des Gases mit entsprechend tieferer Temperatur durch die Beobachtungsfläche nach den Gebieten mit höheren Temperaturen zurück, um dort wieder Wärme aufzunehmen. Bei periodischen Druckänderungen wiederholt sich nun dieses Spiel mit der Frequenz der Druckschwankungen, d. h. also, es geht bei jeder Periode konvektiv mehr Wärme in der Richtung vom Gaskern zur Wand als in umgekehrter Richtung. Dies bedeutet aber, daß bei periodischer Verdichtung infolge des damit verbundenen periodischen Mengenstromes ein einseitig gerichteter, konvektiver Wärmestrom durch die Beobachtungsfläche hindurch auftritt. Da nun die Lage dieser Beobachtungsfläche innerhalb der Grenzschicht gleichgültig ist und außerdem der Zeitmittelwert der Temperatur des Gases zwischen ihr und der Wandoberfläche unverändert bleibt, ergibt sich daraus, daß die an die Wand übergehende Wärmemenge um diesen einseitig gerichteten, konvektiven Wärmestrom gegenüber der dem mittleren stationären Temperaturgefälle entsprechenden Wärmemenge vergrößert sein muß. Es stellt sich somit als Folge einer rein periodischen Verdichtung eines Gases an einer Wandoberfläche nicht nur ein rein periodischer Wärmestrom ein; vielmehr tritt darüber hinaus noch ein einseitig gerichteter Wärmestrom auf. Dieser muß durch eine entsprechende Verlustarbeit gedeckt werden, die bei wärmeleitenden Wänden des Gasraumes zur Aufrechterhaltung der periodischen Verdichtung notwendig ist.

In erster Linie müssen also die Vorgänge in der Grenzschicht zur Erfassung der thermischen Wechselwirkungen zwischen Wand und Arbeitsmedium in schnelllaufenden Kollbenmaschinen genauer untersucht werden. Ihr Einfluß tritt praktisch um so mehr in Erscheinung, je schneller der Druckanstieg in der Maschine erfolgt. Dies gilt vor allem für die während der Verbrennung auftretende rasche Drucksteigerung insbesondere bei klopfender Verbrennung. Der Wärmeübergang kann dadurch schon, bevor die Flamme zur Wand erreicht hat, sehr stark ansteigen und infolge von Druckschwankungen im Verbrennungsraum noch nach der Verbrennung sehr groß bleiben<sup>17)</sup>.

#### IV. Überlagerung der Grundfälle

In der Verbrennungskraftmaschine sind die hier dargestellten vier Grundfälle der periodischen Wärmeübertragung gleichzeitig neben und füreinander vertreten, so daß die ganzen Erscheinungen äußerst verwickelt und unübersichtlich werden. Dazu kommen noch von außen eingeleitete Einschwingvorgänge beim Anfahren bzw. Lastwechsel und ferrier ungewollte Schwankungen infolge von Unregelmäßigkeiten in der Brennstoffzufuhr, Zündung usw., die die ganzen Verhältnisse jedenfalls nicht durchsichtiger machen. Wie die vorangehenden Betrachtungen zeigen, ist aber eine Klärung dieser Zusammenhänge mit der bisherigen Auffassung von der Wärmeübertragung bei stationären Temperaturfeldern nicht zu erwarten, da der Einfluß der Zeit nicht berücksichtigt wird. Mit der hier für periodische Vorgänge vorgeschlagenen Wärmeübergangszahl kann man aber wenigstens für rein periodische Vorgänge, den Begriff der Wärmeübergangszahl auch formal erhalten. Über die Einwirkung des für periodische Vorgänge erweiterten Begriffes der Wärmeübergangszahl zur erfolgreichen Beschreibung und Vorabrechnung der Wärmeübertragung in Kollbenmaschinen, insbesondere der

<sup>17)</sup> Eine mathematische Behandlung des Wärmeüberganges bei periodischer Verdichtung und kleinem Druckverhältnis ist in Vorbereitung.

Verbrennungskraftmaschine, kann nur durch experimentelle Untersuchungen entschieden werden. Die Meßverfahren hierzu müssen größtenteils erst noch entwickelt werden, da hohe Anforderungen an die Genauigkeit gestellt werden.

Es kann über angesichts der außerordentlichen Schwierigkeiten keinem Zweifel unterliegen, daß bei Auswertung bisheriger Meßergebnisse und erst recht bei der Planung neuer Versuche eine wohl-begründete Arbeitshypothese über den zeitlichen Vorgang der Wärmeübertragung — wie sie hier versucht wird — notwendig ist. Deshalb ist es erforderlich, neben den dringlichsten Messungen des Wärmeüberganges an der ausgeführten Maschine auch grundlegende Untersuchungen über die periodische Wärmeübertragung in den hier hervorgehobenen vier Grundfällen in Angriff zu nehmen.

Das Ziel solcher Untersuchungen ist die Beherrschung der Wärmebeanspruchung in Brennkraftmaschinen zum Zwecke der Leistungssteigerung z. B. durch höhere Überlastbarkeit des Motors (Start von Flugzeugen) oder Verringerung der am Zylinder abzuführenden Wärmemengen (Höhenflug). Die Wahrscheinlichkeit einer Beherrschung des Wärmeüberganges in der Maschine ist aber jedenfalls solange gering, als über die inneren Vorgänge, insbesondere über den Einfluß der Einzelscheinungen, noch Unklarheiten bestehen. Die bisherigen Versuche, diese Vorgänge in Motoren im einzelnen, vor allem von der Strömungsseite her zu erfassen, geben sicher äußerst wertvolle Aufschlüsse, dürften aber zur vollen Klärung der Erscheinungen nicht ausreichen und bedürfen der Ergänzung durch grundlegende Versuche und durch Ausbau unserer Anschauung von nichtstationären Wärmeübergang.

In Verbindung mit geeigneten theoretischen Betrachtungen ist es vielleicht möglich, durch genügend zuverlässige Messungen des Wärmeüberganges auch ummittelbar an der ausgeführten Maschine eine technisch vorläufig ausreichende Klärung der Verhältnisse zu erzwingen. Dazu ist vor allem erforderlich, die bisherigen Meßverfahren zu vervollkommen. Nach einem Vorschlage des Verfassers wurde daher ein Widerstandselement zur störungsfreien Messung von schnellveränderlichen Oberflächentemperaturen von A. Meier<sup>19)</sup> im Maschinenlaboratorium der T. H. Karlsruhe entwickelt. Auch die Druck- und Temperaturmessung an beliebiger Stelle innerhalb des Gasraumes bedarf noch der Verbesserung<sup>20) 21)</sup>.

## V. Zusammenfassung

Der periodische Wärmeübergang in Verbrennungskraftmaschinen und die nichtstationäre Wärmeübertragung allgemein sind wenig erforschte Gebiete. Die vorstehenden Betrachtungen zeigen, daß der für stationäre Wärmeübertragung eingeführte Begriff der Wärmeübergangszahl die hierbei auftretenden Verhältnisse nur unbefriedigend wiedergeben kann. Da die Verhältnisse bei der periodischen Wärmeübertragung in Verbrennungskraftmaschinen äußerst verwickelt sind, werden sie auf vier einfachere Grundfälle zurückgeführt und diese einzeln näher betrachtet.

Ein im wärmeisolierten Rohr stationär strömendes Gas soll am Rohranfang eine periodisch veränderliche Temperatur aufweisen. Unter Berücksichtigung des zeitlichen Verlaufs der Wärmeübertragung innerhalb einer Übergangzone zwischen Gaskernströmung und Wandoberfläche wird eine den harmonischen Temperaturänderungen angepaßte Wärmeübergangszahl vorgeschlagen, die durch zwei Größen — Betrag und Phase — vollständig bestimmt ist. Entsprechende Überlegungen gelten auch für den zweiten Grundfall der periodischen Wärmeübertragung, nämlich einer periodischen Rohrströmung bei unveränderlicher Gaskern-Temperatur. Als weitere Grundfälle des nichtstationären Wärmeüberganges werden in Anlehnung an die Vorgänge in Verbrennungsmotoren die Einflüsse der Verbrennung bei unveränderlichem Druck und die von Druckänderungen näher betrachtet.

Die Überlagerung der vier Grundfälle liefert die periodische Wärmeübertragung in der Verbrennungskraftmaschine. Ihre allgemeine theoretische Erfassung ist wegen der Veränderlichkeit der Stoffeigenschaften eines Gases mit Druck und Temperatur zunächst nicht möglich. Die größenordnungsmäßige Erfassung der Einzelnflüsse kann aber zur Klärung der äußerst verwickelten Verhältnisse im Zylinder eines Motors beitragen und wird dadurch vielleicht auch wirksame, äußere Eingriffe — mit dem Ziel der Wärmekentlastung des Zylinders — ermöglichen.

Um dies zu erreichen, sind noch umfangreiche theoretische und versuchstechnische Arbeiten erforderlich. Die Erfassung der Vorgänge durch den Versuch hat insbesondere die Weiterentwicklung von geeigneten Meßverfahren zur Voraussetzung. [RF 957]

<sup>18)</sup> S. S. 41 dieses Heftes.

<sup>19)</sup> v. H. Pflüem, Zur Messung schnell wechselnder Temperaturen in der Zylinderwand von Kolbenmaschinen, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 6 (1935) S. 195.

<sup>20)</sup> K. Hug, Messung und Berechnung von Kolbentemperaturen in Dieselmotoren, Mitt. Inst. Thermodynamik u. Verbrennungsmotoren n. 4, E. T. H. Zurich 1937; s. a. Z. VDI Bd. 81 (1937) S. 1477.

<sup>21)</sup> E. Böning, Ausstrahlung des Verbrennungsraumes schmelzender Diesel- und Ottomotoren, Z. VDI Bd. 81 (1937) S. 805; Dtsch. Kraftfahrtforsch. H. 4 (1938) S. 25; s. a. Aufsatz von L. Herle S. 15 dieses Heftes.

TITLE PAGE

6. Der Einfluss der Kolbenbeschleunigung auf die  
Verdichtung von Gasen.  
The effect of piston acceleration on the compression  
of gas.

Frame Nos. 381 - 393

Herrn Prof. Dr. F. F. Schmidt

# Forschung

auf dem Gebiete des Ingenieurwesens

Leitung: Prof. Dr.-Ing. Ernst Schmidt VDI, Braunschweig

Herausgeber: Verein deutscher Ingenieure im NSBDT. und sein wissenschaftlicher Beirat

Überreicht vom Verfasser.

*Inst. W.*

Band 13

Berlin, Mai/Juni 1942

Nr. 3

Sonderabdruck

Der Einfluß der Kolbenbeschleunigung  
auf die Verdichtung von Gasen

Von H. FRIEM VDI, Berlin



**VDI-VERLAG GMBH, BERLIN NW 7**

## Der Einfluß der Kolbenbeschleunigung auf die Verdichtung von Gasen \*)

Von H. PFRIEM VDI, Berlin

Aus der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für motorische Arbeitsverfahren und Thermodynamik

Unter dem Einfluß der mit der Drehzahl wachsenden Kolbenbeschleunigung entstehen als Folge der Massenträgheit des Gases im Zylinder einer Kolbenmaschine Druckunterschiede, die an Hand einer einfachen Näherungsrechnung mit praktisch ausreichender Zuverlässigkeit bestimmt werden. Die Genauigkeit des entwickelten Verfahrens zur Berechnung von ebenen ungedämpften Druckwellen großer Schwingungszahl in begrenzten Gasräumen von zeitveränderlicher Größe kann beliebig gesteigert werden. Die mechanische Übermittlung der bei klopfendem Betrieb im Motorzylinder auftretenden Gas-schwingungen wird vorbereitet.

### I. Einführung

In thermodynamischen Rechnungen wird fast immer eine genügend kleine Geschwindigkeit für die Änderung aller Zustandsgrößen eines Stoffes vorausgesetzt, so daß man das betrachtete System praktisch in jedem Augenblick als im statischen Gleichgewicht befindlich ansehen darf. Dies gilt auch für die Berechnung der meisten motorischen Arbeitsverfahren, insbesondere bei allen Kolbenmaschinen. Zur wirtschaftlich guten Ausnutzung dieser Maschinen erfolgt jedoch die Verdichtung und Ausdehnung des Arbeitsmittels stets in einer endlichen Zeit, die zudem im Laufe der Entwicklung immer kleineren Werten zustrebt. Es ergibt sich daher von selbst die Frage, wann diese rechnerischen Voraussetzungen mit den praktischen Vorgängen nicht mehr übereinstimmen, d. h. also unter welchen Umständen man Abweichungen zwischen Versuch und Rechnung erwarten muß.

Die endliche Dauer des Arbeitsprozesses einer Kolbenmaschine kann sich in mehrfacher Hinsicht bemerkbar machen; erinnert sei nur an den Einfluß auf die Verbrennung im Motorzylinder. In der vorliegenden Arbeit soll jedoch nur der Einfluß der Zeit auf die Verdichtung bzw. Ausdehnung idealer Gase betrachtet werden. Bei näherer Überlegung zeigt sich, daß diese Frage eine Beantwortung in zwei verschiedenen Richtungen erfordert, die durch die Stichworte Massenwirkungen und Dämpfungswirkungen gekennzeichnet sind; von diesen sind neben der Zähigkeit, der Wärmeleitfähigkeit und der Dämpfung in Verdichtungsstößen vor allem auch die besonderen Einflüsse des molekularen Aufbaus der Gase zu beachten.

Die Massenwirkungen können mit den Gesetzen der Thermodynamik bzw. Gasdynamik erfaßt werden. Infolge endlicher Kolbenbeschleunigung entstehen dadurch im Zylinder Druckunterschiede, die sich den in der Thermodynamik der Kreisprozesse rechnerisch verwendeten Mittelwerten des zeitveränderlichen Druckes im Zylinder überlagern. Hierdurch ergeben sich vom Idealprozeß abweichende Gasdrücke auf den Kolben, die jedoch unmittelbar keine Änderung der bei der Verdichtung (bzw. Ausdehnung) aufzuwendenden (bzw. gewinnbaren) Arbeit zur Folge haben können.

Von den Dämpfungswirkungen können die Einflüsse der endlichen Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit eines Gases sowie die Stoßdämpfung theoretisch noch an Hand der klassischen Gasdynamik verfolgt werden. Die besonderen molekularen bedingten Einflüsse können damit jedoch nicht mehr erfaßt werden, da sie durch die besonderen Eigenschaften der kleinsten Teilchen, der Moleküle, des Arbeitsmittels verursacht werden; sie können nur mit Hilfe der kinetischen Gastheorie erklärt und berechnet werden. Physikalisch dürften sie im wesentlichen durch eine begrenzte Schnelligkeit für die gegenseitige Umwandlung der im Molekül gespeicherten kinetischen Energien, — also der auf drei Freiheitsgrade verteilten Translations-, der Rotations- und der Schwingungsenergie im Molekül — erklärlich sein.

Alle diese Abweichungen können durch einfache Indizierung der Maschine in der bisher üblichen Form mit einer Meßstelle an irgendeinem Punkt der Zylinderwand nicht festgestellt werden.

Im Schrifttum wurde schon mehrfach der Versuch gemacht, den Einfluß der endlichen Geschwindigkeit der Verdichtung bzw. Ausdehnung von Gasen rechnerisch zu erfassen; dies geschah vielfach auf Grund gaskinetischer Überlegungen. Frühere Arbeiten<sup>1)</sup> ergaben selbst bei Vernachlässigung

\*) Einreichung am 16. April 1941.

1) E. Fahl, Zustandsänderungen idealer Gase mit endlicher Geschwindigkeit, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 4 (1932) S. 31-37.

M. Paul, über die Abhängigkeit der Entropievermehrung quasidiabatischer Arbeitsprozesse, Ann. Phys. Bd. 29 (1937) S. 173-188.

E. Justi u. M. Koller, Wirkungsgradverschlechterung von Wärmekraftmaschinen infolge hoher Kollisionsgeschwindigkeit, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 9 (1938) S. 242-251 und S. 310.

der genannten Dämpfungswirkungen einen großen Einfluß der endlichen Geschwindigkeit der Verdichtung bzw. Ausdehnung auf den Gasdruck in der Weise, daß ein verhältnismäßig sehr großer Verlust an mechanischer Energie eintreten sollte. Ein derartiger Verlust kann nach den bisher vorliegenden technischen Versuchen in dieser Größe jedoch keinesfalls entstehen.

Neuere Arbeiten auf diesem Gebiet liefern dagegen unter den gleichen Voraussetzungen theoretisch keine Verluste an mechanischer Energie. Mit Hilfe der kinetischen Gastheorie durchgeführte Entwicklungen<sup>1)</sup> ergeben bei Vernachlässigung der Zähigkeit des Gases keine Unterschiede zwischen den nach der klassischen Gasdynamik berechenbaren Gasdrücken auf eine bewegte Wand und den gaskinetisch bestimmbareren Werten. An Hand der klassischen Gasdynamik durchgeführte Überlegungen<sup>2)</sup> zeigen andererseits, daß die widersprechenden Ergebnisse in früheren Arbeiten<sup>3)</sup> offenbar auf die ungenügende Beachtung der Randbedingungen zurückzuführen sind.

Eine obere Grenze für die rein molekulare bedingte Dämpfung ist bei höherer Verdichtung anscheinend durch die bekannten Eigenschaften des Verdichtungsstoßes in Gasen oder Dämpfen gegeben. Dabei steht für die Verdichtung des Gases um einen endlichen Drucksprung nur eine äußerst kurze Zeit zur Verfügung<sup>4)</sup>. Von den Eigenschaften des Verdichtungsstoßes ausgehend, wurde im Schrifttum<sup>5)</sup> auch schon versucht, die Zustandsänderungen idealer Gase mit endlicher Geschwindigkeit zu berechnen. Jedoch auch dieser Versuch dürfte den wahren Verhältnissen in Kolbenmaschinen nicht gerecht werden, da er vor allem eine ruckweise Beschleunigung des Kolbens zur Voraussetzung hat. Die molekularen Vorgänge sind anscheinend bei den meisten technischen Anwendungen bedeutungslos.

Nachstehend soll nun ein einfaches Näherungsverfahren entwickelt werden, nach dem der Einfluß der Massenträgheit auf die Ausbildung verlustfreier ebener Druckwellen in Gasräumen von zeitveränderlicher Größe berechenbar ist. Die Genauigkeit dieses Verfahrens kann beliebig gesteigert werden. Seine praktische Anwendung soll hier für den Fall der endlichen Geschwindigkeit bei der Verdichtung (bzw. Ausdehnung) idealer Gase in Kolbenmaschinen durchgeföhrt werden. Der Weg zur Entwicklung dieses Berechnungsverfahrens ist dabei kurz folgender:

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre liefert in Verbindung mit der Zustandsgleichung idealer Gase für jedes im Zylinder befindliche Gasteilchen — wenn dessen Wärmeleitfähigkeit, Strahlung und Zähigkeit vernachlässigt wird und keine wesentliche Wirbelung vorhanden ist — die bekannte Gleichung der verlustfreien Adiabate in Abhängigkeit vom Druck und spezifischem Volumen des Teilchens. Die Vernachlässigung der stets endlichen Wärmeleitfähigkeit des Gases ist im Hinblick auf das zu erwartende geringe Temperaturgefälle im Gasraum ohne weiteres zulässig. Außerdem wird aber auch der Wärmeaustausch mit den Zylinderwänden nicht berücksichtigt, was praktisch zwar nicht mehr zulässig, aber theoretisch als idealer Grenzfall von Bedeutung ist. (Der andere theoretische Grenzfall einer isothermen Verdichtung der Gasteilchen wird, kurz angedeutet.) Die Beschreibung der Bewegung der Gasteilchen unter dem Einfluß des hin- und hergehenden Kolbens erfolgt dann unter Vernachlässigung der Zähigkeit des Gases und für fehlende Wirbelung im Gasraum an Hand der Eulerschen Bewegungsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung für Gase. Die vernachlässigte Wirkung der Zähigkeit ist dabei im Hinblick auf die geringen Relativbewegungen der Gasteilchen von völlig untergeordneter Bedeutung, dagegen für die Wechselwirkungen zwischen Gas und Zylinderwand ebenfalls nur als Idealzustand gerechtfertigt. Die Beschränkung auf Gasräume mit geringer Wirbelung ist für die hier zu untersuchende Einwirkung der endlichen Verdichtungszeit auf die Zustände des Gases im Zylinder praktisch nicht so wesentlich und kann überdies technisch auch meist gut verwirklicht werden.

## II. Theoretische Grundlagen

1. Grundgleichungen. Die sich im Zylinder einer Kolbenmaschine abspielenden Vorgänge müssen dem Satz von der Erhaltung der Energie genügen, und zwar sowohl der Zylinderinhalt als Ganzes, als auch jedes einzelne Gasteilchen. Betrachtet man zur Vereinfachung der Rechnungen nur ideale Gase von verschwindender Wärmeleitfähigkeit, so können die einzelnen Gasteilchen keine Wärme austauschen. Setzt man auch die Begrenzungsfläche des Zylindertraumes als wärmedicht voraus, so gilt für jedes beliebige Gasteilchen<sup>6)</sup> im Zylindertraum der erste Hauptsatz der Wärme-

<sup>1)</sup> W. u. G. Müller, Die gaskinetischen Vorgänge in einem Expansionszylinder, Ann. Phys. (3) Bd. 20 (1923) S. 202/219 (über noch weitere Schrifttumsangaben).

<sup>2)</sup> H. Priem, Zur Frage des Gasdruckes auf bewegte Wände, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 13 (1912) H. 2, S. 76/81.

<sup>3)</sup> Vgl. hierzu beispielsweise H. Becker, Stoßwelle und Detonation, Z. Phys. Bd. 8 (1922) S. 221/262.

<sup>4)</sup> O. Eckelberg, Zustandsänderungen idealer Gase mit endlicher Geschwindigkeit, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 5 (1924) S. 127/129.

<sup>5)</sup> Als Gasteilchen soll dabei jeweils eine sehr kleine Gasmenge angenommen werden, die aber noch eine ausreichend große Zahl von Molekülen enthält, so daß die phänomenologische Betrachtungsweise der Thermodynamik gültig bleibt.

lehre beispielsweise in folgender Form:

$$c_v dT + A P dr = 0 \quad (1)$$

Dabei bedeuten:

- $T$  [°K] die absolute Temperatur,  
 $P$  [kg/m<sup>2</sup>] den absoluten Druck,  
 $v$  [m<sup>3</sup>/kg] das spezifische Volumen und  
 $c_v$  [kcal/kg°K] die spezifische Wärme des Gases im betrachteten Gasteilchen bei unverändertem Raum;  
 $A$  [kcal/mkg] das mechanische Wärmeäquivalent.

Außerdem muß für jedes Gasteilchen auch die Zustandsgleichung vollkommener Gase gelten.

$$Pv = RT \quad (2)$$

wenn  $R$  [m<sup>2</sup>/K] die technische Gaskonstante des Gases im betrachteten Teilchen darstellt.

Der Bewegungszustand eines Gasteilchens im Zylinder wird durch das Kräftespiel an seiner Hülle beschrieben. Dabei soll zur Vereinfachung der Darstellung die Zähigkeit des Gases ganz vernachlässigt werden. Beschränkt man die Untersuchungen noch auf Zylinderräume mit ebenem Deckel und Kolbenboden und vernachlässigt außerdem den unwesentlichen Einfluß von geringen Wirbelbewegungen des Gases im Zylinder ganz, so können sich die Gasteilchen bei Bewegungen des Kolbens



Bild 1. Idealisierter Zylinder einer Kolbenmaschine mit periodisch bewegtem Kolben.

nur in Richtung der Zylinderachse; also auf geraden parallelen Bahnen bewegen (s. Bild 1). Dieser Bewegungszustand kann durch ebene Koordinaten beschrieben werden und muß daher der nachstehenden Eulerschen Differentialgleichung<sup>5)</sup> genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{L \cdot a}{dr} \quad (3)$$

Darin bedeuten:

- $u$  [m/s] die Eigengeschwindigkeit und  
 $x$  [m] die Ortskoordinate des betrachteten Gasteilchens,  
 $t$  [s] die Zeit,  
 $g$  [m/s<sup>2</sup>] die Erdbeschleunigung.

Schließlich muß auch noch zur Wahrung der Stetigkeit der Bewegungen und Zustände im Gasraum die Kontinuitätsbedingung<sup>6)</sup> erfüllt sein.

$$\frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Dv}{Dt} \quad (4)$$

Diese Gleichungen 1 bis 4 beschreiben also mit den Anfangsbedingungen und den Randbedingungen an den gasseitigen Oberflächen des Zylinderdeckels ( $u = 0$ ) und des Kolbenbodens ( $u = u_p$ , wenn  $u_p$  die Geschwindigkeit des Kolbens ist) eindeutig die Zustände des im Zylinder eingeschlossenen Gases unter dem Einfluß des sich bewegenden Kolbens. Es müssen daher auch die infolge der endlichen Beschleunigungen auftretenden Druckunterschiede im Gasraum dadurch erfaßt werden.

2. Umformung der Differentialgleichungen. In den vorstehenden Beziehungen wurden zunächst ohne besonderen Hinweis zwei verschiedene Betrachtungsweisen verwendet. Die Gl. 1 und 2 beziehen sich nämlich zunächst auf Gasteilchen, also auf bestimmte Massenpunkte, dagegen die Gl. 3 und 4 auf die Vorgänge in Raumpunkten. Die letzte Betrachtungsweise ist im allgemeinen für Strömungsvorgänge gebräuchlicher. Es zeigt sich aber, daß für das vorliegende ebene Problem die Beschreibung in Massenpunktkoordinaten wesentliche Vorteile bietet. Daher sollen auch die Gl. 3 und 4 entsprechend umgeformt werden.

Infolge der Betrachtung eines ganz bestimmten Gasteilchens besteht dabei nur noch eine Änderung seiner Geschwindigkeit mit der Zeit, so daß also die vereinfachte Schreibweise der vorstehenden Differentialgl. 3 und 4 durch Zusammenziehen der konvektiven und lokalen Beschleunigung zur substantiellen — entsprechend dem jeweils zweiten Gleichheitszeichen — nicht mehr nur formaler Natur ist. Es besteht daher nur noch die Aufgabe, die Raumpunktkoordinate  $x$  in eine Massenpunktkoordinate umzuwandeln.

Eine Massenpunktkoordinate stellt sozusagen die Numerierung der einzelnen hintereinander liegenden Gasteilchen dar; jedes Teilchen behält dabei seine einmal festgelegte Massenpunktkoordinate für die Dauer des gesamten Vorganges stets unverändert bei. Ihre einmalige Festsetzung ist an sich willkürlich und kann beispielsweise auch durch die Raumpunktkoordinate im Ruhezustand des ganzen Systems erfolgen. Kennzeichnet man diesen Ruhezustand durch den Zeiger 0, so muß

<sup>5)</sup> Vgl. z. B. Hütte I 26. Aufl., Berlin 1931, S. 359 bis 366.

also für die Dicke einer ebenen Gasschicht längs einer isothermen Fläche je Einheit derselben auf Grund des Satzes von der Erhaltung der Masse die folgende Beziehung gelten:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{v} \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{v}{v_0} \quad (5)$$

wenn  $z$  [m] die Massenpunktkoordinate eines Gasteilchens ist, die durch die Raumpunktkoordinate desselben Gasteilchens in seinem Ruhezustand definiert ist.

Unter Voraussetzung dieser Gl. 5 kann man nun die beiden Differentialgl. 3 und 4 ohne Schwierigkeiten auch in Massenpunktkoordinaten anschreiben und findet so zunächst die Eulersche Differentialgleichung für ebene Probleme in Massenpunktkoordinaten:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -g v_0 \frac{\partial P}{\partial z} \quad (6)$$

und entsprechend die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

In dieser Darstellung ergeben sich also an Stelle der verwickelten Differentialgl. 3 und 4 zwei einfachere Beziehungen. Eliminiert man daraus noch die Geschwindigkeit  $v$  durch entsprechende Differentiation, so findet man die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -g v_0 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \quad (8)$$

Eliminiert man schließlich in den Gl. 1 und 2 noch die Temperatur  $T$ , so findet man nach Integration und einfachen Umformungen die bekannte Gleichung der verlustfreien adiabatischen Zustandsänderung eines Gases:

$$P v^\gamma = P_0 v_0^\gamma \quad (9)$$

wenn  $\gamma = c_p/c_v$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen des Gases darstellt<sup>1)</sup>. Für polytropische Zustandsänderungen aller Gasteilchen mit dem gleichen polytropischen Exponenten  $n$  tritt dieser in der vorstehenden Gl. 9 an Stelle von  $\gamma$ ; darin kann ferner das Produkt  $P_0 v_0^\gamma$  im allgemeinen noch eine Funktion von  $z$  sein. Für Flüssigkeiten gilt an Stelle von Gl. 9 die Beziehung:  $P_0 - P = C v$ , wobei  $C$  eine unveränderliche Größe ist; damit wird Gl. 8 für  $P$  (oder  $v$ ) linear.

2. Allgemeine Schlussfolgerungen. Die beiden Gl. 8 und 9 beschreiben mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen eindeutig die Zustandsänderungen aller Gasteilchen in einem Raum von zeitveränderlicher Größe, sofern die Zustandsfelder eben und verlustfrei sind. Sie beschreiben also neben den Zustandsänderungen im Zylinder einer Kolbenmaschine auch alle ebenen Druckfelder in einem idealen Gas bei Veranschaulichung jeglicher Dämpfungsursachen<sup>2)</sup> in Massenpunktkoordinaten. Der Übergang zu Raumpunktkoordinaten ist bei einem in Massenpunktkoordinaten bekannten Zustandsfeld durch die Differentialgl. 5 sehr einfach möglich. Gelingt dabei die Eliminierung der Koordinate  $z$  nicht, so findet man danach zumindest eine eindeutige Parameterdarstellung in Raumpunktkoordinaten mit  $z$  als Parameter.

Beschränkt man sich insbesondere auf die Verhältnisse im Zylinder von Kolbenmaschinen, so ergeben sich nach den bisherigen Entwicklungen noch die folgenden Überlegungen. Obwohl infolge der Massenträgheit des verdichteten Gases bei endlicher Beschleunigung an der Kolbenoberfläche andere Gaskräfte als bei Verdichtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit wirken, können Verluste an mechanischer Energie unmittelbar nicht auftreten, da die Zustandsänderungen jedes einzelnen Gasteilchens im Zylinder nach Gl. 9 stets verlustfrei adiabatisch erfolgen. Auch bei einer verhältnismäßig sehr hohen Kolbenbeschleunigung müssen daher die Zustandsänderungen des Gases umkehrbar erfolgen, wenn man die Wärmeübertragung und Zähigkeit des Gases vernachlässigt. Dies ist — wie sich später noch genauer ergibt — dadurch zu erklären, daß die Trägheitswirkungen des Gases zur Kolbenbeschleunigung verhältnismäßig sind; daher ergeben sich während eines jeden Hubes am Kolben stets positive und negative Druckunterschiede gegenüber dem statischen Mittelwert derart, daß sich ihre Wirkungen auf seine Leistungsabgabe gegenseitig vollkommen aufheben.

Es gibt also auch bei stetiger Verdichtung oder Ausdehnung mit sehr hoher Geschwindigkeit keine von der sogenannten "statischen" Adiabaten abweichende "dynamische" Adiabate<sup>3)</sup>, wenn man von molekularen Vorgängen absieht. Trotzdem können aber bei den praktischen Arbeitsverfahren

<sup>1)</sup> Da für die vorliegenden Betrachtungen molekularer Vorgänge unter kinetischer Hinsicht  $\gamma = c_p/c_v$  unabhängig von der Geschwindigkeit der Verdichtung ist, ist die Ableitung der spezifischen Wärmen mit der Geschwindigkeit von der Verdichtung verleihe Erscheinung der "Schalldispersion" (ital. *dispersione del suono*) in H. G. Keller, Ann. Phys., Bd. 11 (1931) S. 161, 76 und 77, 80; deutsch: Z. techn. Phys., Bd. 10 (1930) S. 486-92, hier weitere Schrifttum.)

<sup>2)</sup> Vgl. hierzu auch F. S. D'Almeida, *Atmosfera nella propagazione di onde acustiche di grande ampiezza*, Atti Congresso Id. I (1935) S. 230-31 und H. Pflüger, Die ebene ungedämpfte Übertragung ungedämpfter ebener Gaswellen großer Schwingungszahl, Akust. Z. Bd. 7 (1942) H. 2 S. 56-65, hier noch weitere Schrifttumsangaben.

300385

als unmittelbare Folge der Masseströmung des Gases Verluste an mechanischer Energie dadurch entstehen, daß beispielsweise infolge größerer Temperaturunterschiede eine Erhöhung der Wärmeübertragung infolge größerer Relativgeschwindigkeiten eine Erhöhung der Reibungs- und Drosselverluste eintritt. In den folgenden Betrachtungen sollen jedoch diese sekundären Wirkungen der Masseströmung des Gases nicht berücksichtigt werden.

Eine allgemeine Lösung der nichtlinearen Gl. 8 und 9 ist nicht ohne weiteres möglich. Nachstehend wird daher ein einfaches Näherungsverfahren entwickelt, das in seiner ersten Stufe schon zur Ermittlung der größten Druckunterschiede im Zylinderraum von Kolbenmaschinen geeignet ist.

III. Näherungsverfahren für Zwangsschwingungen eines Gases

1. Vereinfachte Verzweigungs- und Differentialgleichung. Die Zustandsänderungen eines Gasteilchens im betrachteten Raum können jeweils als Summen aus zwei Funktionen ausgedrückt werden, von denen die eine nur zeitveränderliche Mittelwerte und die andere nur örtlich und zeitlich veränderliche Unterdrücke im Gasraum darstellt; dadurch ergeben sich noch keinerlei Einschränkungen. Es soll also beispielsweise der Druck in einem Gasteilchen dargestellt werden durch:

P(z, t) = P\_m(t) + ΔP(z, t) (10a)

Entsprechend kann man auch für das spezifische Volumen setzen:

v(z, t) = v\_m(t) + Δv(z, t) (10b)

Dann geht dann die Differentialgl. 8 in die nachstehende Form über:

∂²P\_m/∂t² + P\_m'' = -g v\_m'' - ΔP'' (11)

Diese Differentialgleichung beschreibt in Verbindung mit den Gl. 9, 10a und 10b sich vollkommen erfüllt die gleichen Verhältnisse wie die Gl. 8 und 9. Definiert man nun v\_m als den jeweiligen räumlichen Mittelwert des spezifischen Volumens aller Gasteilchen im Zylinderraum, so wird im allgemeinen bei Kolbenmaschinen

∂²v\_m/∂t² < ∂²v/∂t² (11a)

Vernachlässigt man daher ∂²v/∂t² in Gl. 11 ganz, so ergibt sich in erster Näherung für die Berechnung von ΔP die nachstehende einfache Differentialgleichung:

∂²ΔP/∂t² + ΔP'' = -g ∂²v\_m/∂t² (11b)

Nachdem das mittlere spezifische Volumen v\_m des Gases im Zylinderraum einer Kolbenmaschine bei beschleunigten Verläufen infolge des durch praktisch unveränderlichen Gasinhalt im jeweiligen Zylinderraum verhältnismäßig ist, kann also die zeitliche Abhängigkeit von v\_m an jeder Maschine leicht angegeben werden. Damit bestehen dann keine Schwierigkeiten mehr, die Druckunterschiede im Gasraum nach Gl. 11b zu berechnen.

Zur Bestimmung des spezifischen Volumens aus dem so in erster Näherung bekannten Druckfeld setzt man die Gl. 10a und 10b in Gl. 9 ein und erhält zunächst:

(P\_m + ΔP)(v\_m + Δv) = P\_m v\_m (1 + ΔP/P\_m) (1 + Δv/v\_m) = P\_m v\_m

P\_m v\_m'' = P\_m v\_m'' (12)

Es ergibt sich damit an Hand der vorausgehenden Gleichung unmittelbar an Stelle von (11a) die exakte Beziehung:

Δv/v\_m = (1 + ΔP/P\_m)'' - Δv'' (12a)

Entwickelt man nach einer binomischen Reihe, so erhält man:

Δv/v\_m = -1/2 \* (ΔP/P\_m)'' + 1/2 \* (ΔP/P\_m)''² - 1/6 \* (ΔP/P\_m)''³ + 1/24 \* (ΔP/P\_m)''⁴ (12b)

Diese Reihe ist für Werte von ΔP/P\_m < 1 absolut konvergent. Für genügend kleine Werte von ΔP/P\_m findet man daher in erster Näherung:

Δv/v\_m ≈ -1/2 \* (ΔP/P\_m)'' (12c)

Dabei ist vorausgesetzt, daß

1/2 \* (ΔP/P\_m)'' (1 - 1/2 \* (ΔP/P\_m)''²) < 1 (12d)

ist. Damit können nun auch alle übrigen Zustände des Gases im Zylinder einfach berechnet werden.

Nachstehend sollen auf diese Weise die Gaszustände in einem rein harmonisch veränderlichen Gasraum in erster Näherung berechnet werden.

2. Der harmonisch veränderliche Gasraum. Vernachlässigt man zunächst den Einfluß der endlichen Schubstangenlänge einer normalen Kolbenmaschine, so erhält man bei quasistationärem Betrieb eine rein harmonische Abhängigkeit des mittleren spezifischen Volumens  $v_m$  von der Zeit; es wird also beispielsweise:

$$v_m = v_0 (1 - \delta \sin \omega t) \quad (13)$$

- $\delta < 1$  eine durch die Maschinenabmessungen gegebene unveränderliche Größe [siehe z. B. aus dem bei Verbrennungskraftmaschinen gültigen Verdichtungsverhältnis  $\epsilon$  für die Grundschwingung des Kurbeltriebs berechenbar nach der Beziehung  $\delta = (1 - \epsilon) / (1 + \epsilon)$ ];
- $\omega$  [1/s] die Kreisfrequenz der harmonischen Schwingung;
- $v_0$  [m<sup>3</sup>/kg] den Zeitmittelwert des spezifischen Volumens  $v_m$ .

Dabei ist der zunächst willkürliche Bezugspunkt für die Ruhelage der Gasstellen mit  $v_m = v_0$  durch  $\omega t = 0$  festgelegt.

Entsprechend Gl. 13 erhält man für den Weg  $x_K$  des Kolbens:

$$x_K = l_0 (1 - \delta \sin \omega t) \quad (13a)$$

wenn  $l_0$  [m] eine unveränderliche Größe ist, die durch die Abmessungen des Triebwerkes vorgegeben ist.

Legt man den Nullpunkt der Koordinate  $z$  in die gasseitige Oberfläche des ruhenden Zylinderdeckels, so ergibt sich aus den verschiedenen Festlegungen über die Ruhelage der Gasstellen ferner, daß  $z = l_0$  die Massenpunktkoordinate der unmittelbar an der Kolbenoberfläche anliegenden Gasstellen ist, s. Bild 1.

Nach Gl. 13 erhält man nun:

$$-\frac{dx_K}{dt} = v_0 \delta \omega^2 \sin \omega t \quad (13b)$$

Die Geschwindigkeit  $v_K$  des Kolbens findet man aus Gl. 13a zu:

$$v_K = \frac{dx_K}{dt} = l_0 \delta \omega \cos \omega t = v_{K0} \cos \omega t \quad (13c)$$

wenn  $v_{K0}$  [m/s] der Großwert der Kolbenbeschwindigkeit ist. Nach Gl. 11b erhält man mit Gl. 13b:

$$jP = \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \sin \omega t + \delta f(t) + l_0 g(t) \quad (14)$$

wobei  $f(t)$  und  $l_0 g(t)$  zwei zunächst noch willkürliche Funktionen der Zeit sind.

Entsprechend der Voraussetzung, daß  $jP$  in erster Linie nur Druckunterschiede darstellen soll, kann man  $l_0 g(t) = 0$  setzen, ohne dadurch die Lösung zu beschränken. In Wirklichkeit stellt  $l_0 g(t)$  eine kleine Korrekturgröße dar, die infolge der Vernachlässigung bei den vorstehenden Entwicklungen anzubringen wäre. Da sie aber dem Betrag nach gegenüber  $P_m(t)$  verschwindet, kann sie auch für die erste Näherung vollkommen vernachlässigt werden; die später entwickelte Verbesserung dieses Näherungsverfahrens wird dies bestätigen.

Nach Gl. 6 findet man mit Gl. 14 für die Geschwindigkeit der Gasstellen die Beziehung:

$$v = \delta \delta_0 \cos \omega t - g_0 \int f(t) dt + g(z) \quad (15)$$

wenn  $z(z)$  eine zunächst noch willkürliche Funktion von  $z$  ist.

An der gasseitigen Oberfläche des ruhenden Zylinderdeckels  $z = 0$  muß nun  $v = 0$  sein; d. h. aber:

$$f(t) = 0 \quad \text{und} \quad g(0) = 0$$

Für die Kolbenoberfläche  $z = l_0 = \text{konst.}$  wird andererseits  $v = v_K$  nach (13c); setzt man diese Bedingung in Gl. 15 ein, so findet man  $g(l_0) = 0$ . Setzt man schließlich noch Gl. 15 in Gl. 7 ein, so ergibt sich damit schließlich  $g(z) = 0$ .

Für den mittleren Druckverlauf im Gasraum erhält man allgemein nach den Gl. 12 u. 13:

$$P_m = P_0 \left( \frac{v_m}{v_0} \right)^{\gamma} = \frac{P_0}{(1 - \delta \sin \omega t)^{\gamma}} \quad (16)$$

Damit ergibt sich der Druckverlauf  $P$  in einem beliebigen Gasstellen:

$$P = P_m + jP = \frac{P_0}{(1 - \delta \sin \omega t)^{\gamma}} + \frac{\delta \rho v^2}{2 \rho v_0} \sin \omega t \quad (16a)$$

Nach Gl. 12c findet man schließlich noch für die örtliche Abhängigkeit des spezifischen Volumens die Beziehung:

$$\frac{1}{v} = \frac{-1}{P_m} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{-\delta \rho v^2}{2 \rho v_0} \sin \omega t = \frac{-\delta \rho v^2}{2 \rho v_0} \sin \omega t (1 - \delta \sin \omega t)^{\gamma} \quad (17)$$

Damit sind die Zustandsgrößen aller Gasteilchen berechenbar. Zunächst ist aber noch der Nachweis für die Zulässigkeit der vorgenannten Vereinfachungen zu führen.

3. Beschränkung der Zulässigkeit der vereinfachten Berechnung. Zur Vereinfachung des Rechnungsganges wurden zwei wesentliche Voraussetzungen gemacht, deren beschränkte Zulässigkeit für die hier in Frage kommenden Verhältnisse kurz gezeigt werden soll. Zunächst war vorausgesetzt, daß für völlig beliebige Werte von  $\varepsilon$  und  $\tau$  nach Gl. 12d stets  $(1/P/P_0)^2 \ll 1$  und damit nach Gl. 12c auch  $(1/r/r_0)^2 \ll 1$  ist. Die zuletzt entwickelte Gl. 17 erlaubt unmittelbar die Nachprüfung dieser Bedingungen; der Größtwert dieses Ausdruckes ergibt sich für  $\omega r = \pi/2$  und  $\varepsilon = 1_0$  zu:

$$\left(\frac{1/r}{r_0}\right)^2 = \left[ \frac{\omega^2 \varepsilon^2 \delta (1 + \delta^2)^2}{2g \pi R T_0} \right]^2 \approx 2 \left( \frac{u_{k0}}{a_0} \right)^4 \ll 1 \quad (17a)$$

wobei bedeutet:

$u_{k0}$  [m/s], die größte Kolbengeschwindigkeit nach Gl. 13c und  
 $a_0$  [m/s], die Schallgeschwindigkeit des Gases im Ruhezustand.

Da praktisch  $u_{k0} \leq 30$  m/s und  $a_0 \geq 300$  m/s ist, erkennt man, daß diese Voraussetzung für die Zulässigkeit der Vereinfachungen bei Kolbenmaschinen immer erfüllt ist. Selbst bei der Verdichtung von Kältemitteln, für die  $u_{k0}$  auch noch kleinere Werte aufweisen kann, ist diese Voraussetzung für die Gültigkeit der Rechnung praktisch stets erfüllt.

Als weitere Bedingung war vorausgesetzt, daß für beliebige Werte von  $\varepsilon$  und  $\tau$  stets auch  $|\varepsilon \cdot 1/r \cdot \delta r^2| \ll |dr_0/d\varepsilon^2|$  ist. Nach Gl. 17, in Verbindung mit Gl. 13, findet man zunächst:

$$-1/r \cdot \left( \frac{\delta \omega^2 \varepsilon^2}{2 a_0^2} \right) = \sin \omega r [1 + \delta \sin \omega r]^{\varepsilon+1} \quad (17b)$$

Diese Funktion ist in Bild 2 in ihrer Abhängigkeit von  $\omega r$  für  $\varepsilon = 1,4$  und verschiedene Werte von  $\delta$  anschaulich dargestellt. Nach Gl. 17b wird zunächst:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon \cdot 1/r}{2 \tau} \left( \frac{\delta \omega^2 \varepsilon^2}{2 a_0^2} \right) &= (\varepsilon + 1) (1 + \delta \sin \omega r)^{\varepsilon} \delta \frac{\sin 2 \omega r}{2} + \cos \omega r (1 + \delta \sin \omega r)^{\varepsilon+1} \\ &= (1 + \delta \sin \omega r)^{\varepsilon} \left[ \frac{\varepsilon + 1}{2} \delta \sin 2 \omega r + \cos \omega r \right] \quad (17c) \end{aligned}$$

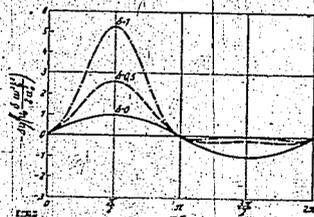


Bild 2. Veranschaulichung der Funktion  $-1/r \cdot \left( \frac{\delta \omega^2 \varepsilon^2}{2 a_0^2} \right)$  nach Gl. 17b in Abhängigkeit von  $\omega r$  für  $\varepsilon = 1,4$  und verschiedene Werte von  $\delta$ .

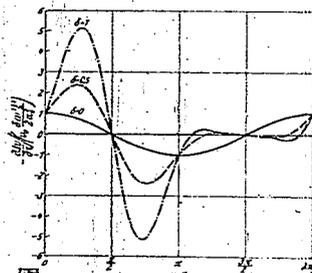


Bild 3. Veranschaulichung der Funktion  $-\frac{\varepsilon \cdot 1/r}{2 \tau} \left( \frac{\delta \omega^2 \varepsilon^2}{2 a_0^2} \right)$  gemäß Gl. 17c in Abhängigkeit von  $\omega r$  für  $\varepsilon = 1,4$  und verschiedene Werte von  $\delta$ .

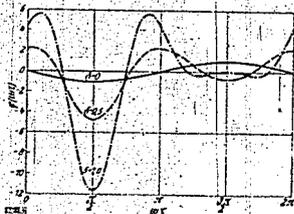


Bild 4 (link4). Veranschaulichung der Funktion  $q$  (zu r) nach Gl. 18a in Abhängigkeit von  $\omega r$  für  $\varepsilon = 1,4$  und verschiedene Werte von  $\delta$ .

400388

Diese Funktion ist in Bild 3 ebenfalls, in ihrer Abhängigkeit von  $\omega\tau$  für  $\kappa = 1,4$  und verschiedene Werte von  $\delta$  veranschaulicht. Schließlich findet man damit noch:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \omega^2} = \frac{1}{2} \frac{\delta \omega^2}{\sigma_0^2} \varphi(\omega\tau) \quad (18)$$

wenn ist:

$$\varphi(\omega\tau) = (1 + \delta \sin \omega\tau)^{\kappa-1} \left[ (\kappa + 1) \delta \cos^2 \omega\tau [2 + (\kappa + 2) \delta \sin \omega\tau] - \sin \omega\tau (1 + \delta \sin \omega\tau) [1 + (1 + \delta) \sin \omega\tau] \right] \quad (18a)$$

Die Funktion  $\varphi(\omega\tau)$  ist in Bild 4 für  $\kappa = 1,4$  und verschiedene Werte von  $\delta$  dargestellt.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit Gl. 13b, so erkennt man, daß die Voraussetzung nur für  $\xi = 0$  zu allen Zeitpunkten erfüllt ist; für Werte von  $\xi \neq 0$  insbesondere für  $\xi = l_0$  ist sie praktisch nur für Zeitpunkte  $\omega\tau \approx m\pi/2$  erfüllt, wenn  $m$  eine beliebige ganze Zahl ist, da für  $\omega\tau \approx m\pi$  die zweite Ableitung von  $v_x$  sehr klein bzw. null wird. Dies bedeutet also, daß die auf Grund der vorstehenden einfachen Entwicklungen berechenbaren Druckunterschiede innerhalb des Zylinder-raumes zunächst nur in der Umgebung ihrer Größtwerte annähernd richtig sind.

Man findet mit  $\omega\tau = m\pi/2$  und  $\xi = l_0$  aus dem Vergleich der Gl. 18 und 13b praktisch als Kriterium für die Zuverlässigkeit der Größtwerte des Unterschiedes der Zustandsgrößen des Gases im Zylinderraum:

$$\frac{\omega^2 P}{2\sigma_0} (1 + \delta)^{\kappa} (2 + \delta) \approx 4 \left( \frac{u_{K0}}{a_0} \right)^2 \ll 1 \quad (18b)$$

Daraus ist zu ersehen, daß die auf Grund der vorstehenden Entwicklungen berechenbaren Größtwerte der Unterschiede aller Zustände des Gases im Zylinder für die Verhältnisse bei heute üblichen Kolbenmaschinen noch gut brauchbar sind. Dagegen ist die Zuverlässigkeit des gesamten Zustandsverlaufes im Zylinderraum zunächst noch in Frage gestellt.

Bei polytropischer Verdichtung des Gases ist an Stelle von  $\kappa$  in allen vorstehenden Gleichungen der entsprechende polytropische Exponent  $n$  und daher für rein isotherme Zustandsänderungen  $n = 1$  zu setzen.

Nachstehend sollen die bisherigen Ergebnisse näher betrachtet und zu ihrer Veranschaulichung noch kurz einige Zahlenwerte berechnet werden.

4. **Schlußfolgerungen und Rechenbeispiele.** Nach den vorstehenden Entwicklungen ergeben sich die größten Druckunterschiede innerhalb des Zylinder-raumes einer Kolbenmaschine für  $\omega\tau = m\pi/2$  (d. h. also für die Totpunkte der Kolbenbewegung zwischen Gasstellen an den Oberflächen des Zylinderdeckels und des Kolbenbodens). Man findet dafür nach Gl. 16a

$$\Delta P_M = \pm \frac{\delta \omega^2 l_0^2}{2 g v_0} = \pm \frac{\kappa P_0}{2 \delta} \left( \frac{u_{K0}}{a_0} \right)^2 \approx \pm \kappa \left( \frac{u_{K0}}{a_0} \right)^2 P_0 \quad (19)$$

wenn bedeuten:

- $\Delta P_M$  [kg/m<sup>2</sup>] die Größtwerte des Druckunterschiedes im Zylinder-raum einer Kolbenmaschine,
- $P_0$  [kg/m<sup>2</sup>] den Mittelwert des absoluten Gasdruckes im Zylinder, wenn sich der Kolben im äußeren (bzw. unteren) Totpunkt befindet und
- $a_0$  [m/s] den Mittelwert der Schallgeschwindigkeit des Gases im Zylinder, wenn sich der Kolben im äußeren (bzw. unteren) Totpunkt befindet.

Das positive Vorzeichen deutet hierbei den Überdruck am Kolbenboden gegenüber dem mittleren Druck  $P_0$  im äußeren (bzw. unteren) Totpunkt der Maschine an, während das negative Vorzeichen den entsprechenden Unterdruck im inneren (bzw. oberen) Totpunkt der Maschine liefert.

Die Druckunterschiede im Zylinder schwanken also von einem Totpunkt der Maschine zum anderen jeweils zwischen zwei Extremwerten. Wird nun wie beim praktischen Arbeitsprozeß in Gaskolbenverdichtern gegen Ende des Verdichtungs-hubes ein Teil des Gases durch Ventile in die Nebeklebung geschoben, so kann dabei ein Teil der in diesen Druckschwankungen gespeicherten mechanischen Energie beispielsweise durch Drosselung in den Ventilen vernichtet werden. Bei praktisch verlustfreien Massenwirkung des Gases im Zylinder doch auch zu mechanischen Verlusten führen. Diese können allgemein nicht angegeben werden; sie müssen vielmehr aus den genauen Druckfeld im Zylinder berechnet werden.

Die Beschränkung dieser Berechnungen auf rein harmonische Kolbenbewegungen bedeutet praktisch keine wesentliche Einschränkung für die Verwendbarkeit der Ergebnisse. Infolge der linearen Zusammenhänge bei kleinen Druckunterschieden im Zylinder kann man auch für jede beliebige unharmonische Bewegung des Kolbens, die in Form einer Fourierreihe vorgegeben bzw. entwickelbar ist, danach zu jedem Glied dieser Reihe die Druckunterschiede im Zylinder

aber nach der Nachweis  
Veranschaulichung des Rech-  
beschränkte Zulässigkeit  
sich war vorausgesetzt  
und damit nach Gl. 12c  
die Nachprüfung dieser  
und  $\xi = l_0$  zu:  
(17b)

diese Voraussetzung für  
ist. Selbst bei der Ver-  
kann, ist diese Voraus-  
von  $\xi$  und  $z$  stets auch  
man zunächst:  
(17b)

entsprechende Werte von  $\delta$   
 $\delta \sin \omega\tau = 1$   
(17c)



Abbildung der Funktion  $\varphi(\omega\tau)$  nach Gl. 18a für  $\kappa = 1,4$  und verschiedene Werte von  $\delta$ .

Abbildung der Funktion  $\varphi(\omega\tau)$  nach Gl. 18a für  $\kappa = 1,4$  und verschiedene Werte von  $\delta$ .

berechnen. Die Summe der so gefundenen Teilergebnisse liefert dann unmittelbar die Druckunterschiede für den unharmonisch bewegten Kolben. Auf diese Weise können ohne Schwierigkeiten auch die Einblase von Oberschwingungen ermittelt werden.

Das hier entwickelte Verfahren ist aber auch auf aperiodisch bewegte Kolben übertragbar, so daß also beispielsweise danach auch die Unterschiede in den Zustandsgrößen des Gases bei Versuchseinrichtungen ermittelt werden können, die zur Bestimmung der Zündzeigenschaften von Brennstoffen mit ruckartig bewegten Kolben arbeiten<sup>19)</sup>. Hierbei können u. U. auch Eigenschwingungen des Gases im Zylinderraum auftreten; die mit den Erscheinungen bei klopfendem Betrieb einer Kraftmaschine später noch kurz behandelt werden.

Um eine Vorstellung über die bei normalen Kolbenmaschinen im Zylinder vorkommenden Druckunterschiede zu vermitteln, sollen zunächst noch einige Zahlenwerte berechnet werden.

Für einen Kolbenverdichter mit einer maximalen Kolbengeschwindigkeit von  $u_{KB} = 10$  m/s, der atmosphärische Luft ( $\kappa = 1.4$ ;  $a_0 = 350$  m/s) ansaugt, ergibt sich nach Gl. 19 ein größter Druckunterschied in den Totpunkten der Maschine von etwa  $\Delta P_M = \pm 10.6$  kg/m<sup>2</sup>, das ist also etwa 0,1% des absoluten Gasdruckes im Saugstutzen.

Arbeitet ein Kolbenverdichter mit  $u_{KB} = 10$  m/s an einer Kohlensäure-Kälteanlage bei  $-50^\circ$  C Verdampfungstemperatur entsprechend einem Druck im Saugstutzen von etwa 7 ata, so stellt sich nach Gl. 19 im Zylinder (entsprechend  $\kappa = 1.3$  und  $a_0 = 230$  m/s) ein größter Druckunterschied in den Totpunkten der Maschine von  $\Delta P_M = 170$  kg/m<sup>2</sup> oder etwa 0,25% des Druckes im Saugstutzen ein.

Rechnet man bei künftigen Rennmotoren für Flugzeuge mit einer maximalen Kolbengeschwindigkeit von 30 m/s, beim Flug im Winter in einiger Höhe mit einer Schallgeschwindigkeit der Luft von etwa 300 m/s, so wäre also nach Gl. 19 der maximale Druckunterschied im Zylinder etwa 1,4% des Außendruckes.

Die bei normalen Kolbenmaschinen als Folge der endlichen Kolbenbeschleunigung im Zylinderraum auftretenden größten Druckunterschiede sind also praktisch meist vernachlässigbar.

Nächstehend wird noch kurz ein Verfahren entwickelt, nach dem auch die genauere Berechnung der Zustandsfelder bei größeren Druckunterschieden im Gasraum möglich ist.

#### IV. Verfahren zur genaueren Ermittlung des Druckverlaufes

Nachdem mit den vorstehenden Entwicklungen zunächst eine grobe Näherung für die Zustandsfelder des Gases im Zylinder bestimmt wurde, ist es naheliegend, diese zur Entwicklung einer verbesserten Näherungslösung zu verwenden. Man setzt zu diesem Zweck die nach den vorstehenden Verfahren gefundene Abhängigkeit für die Unterschiede  $\Delta \epsilon$  des spezifischen Volumens — also beispielsweise Gl. 17 — in die exakte Differentialgl. 11 ein und findet so durch zweimalige Integration nach  $\xi$  eine verbesserte Näherung für  $\Delta P$ ; diese liefert dann nach Gl. 12a bzw. 12b eine neue Näherungslösung für  $\Delta \epsilon$ . Durch wiederholtes Einsetzen der auf diese Weise verbesserten Lösungen in die Differentialgl. 11 ergeben sich schließlich beliebig genaue Lösungen. Praktisch dürfte dabei meist schon die zweite Näherung vollkommen ausreichen. Aber auch für große Druckunterschiede im Gasraum kann auf diese Weise eine allmählich genauer werdende Näherungslösung für den wirklichen Druckverlauf gefunden werden.

Nächstehend soll dieses Verfahren am Beispiel einer rein harmonischen Kolbenbewegung bei kleinen Druckunterschieden im Gasraum noch kurz zur Entwicklung einer zweiten Näherungslösung angewendet werden.

1. Der harmonisch veränderliche Gasraum. Setzt man nach den vorstehenden Überlegungen die nach Gl. 17 bekannte erste Näherung für die Unterschiede  $\Delta \epsilon$  des spezifischen Volumens in die Differentialgl. 11 ein, so ergibt sich in Verbindung mit den Gl. 13, 18 und 18a zunächst die folgende Beziehung zur Berechnung des verbesserten Druckfeldes im Zylinderraum für eine rein harmonische Kolbenbewegung:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \omega^2}{\partial \tau^2} \left[ \sin \omega \tau + \frac{\omega^2}{2 a_0^2} \left( \xi^2 - \frac{L^2}{4} \right) \varphi(\omega \tau) \right] \dots \dots \dots (20)$$

wobei  $\Delta \epsilon$  zur einfachen Anpassung der Randbedingungen noch additiv um eine reine Funktion der Zeit erweitert ist, deren Absolutbeträge stets sehr klein gegenüber  $\epsilon_0$  sind; nach einfachen Überlegungen ist dies in Übereinstimmung mit den Ausführungen zu Gl. 14 durchaus statthaft, ohne daß sich hierdurch eine Beschränkung ergibt.

Durch zweimalige partielle Integration nach  $\xi$  erhält man daraus unter Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$\Delta P = \frac{\xi^2 \partial \omega^2}{2 \partial \tau^2} \left[ \sin \omega \tau + \frac{\omega^2}{12 a_0^2} \left( \xi^2 - 2 \frac{L^2}{3} \right) \varphi(\omega \tau) \right] + \xi f_1(\tau) + f_0(\tau) \dots \dots \dots (21)$$

<sup>19)</sup> Vgl. z. B. W. Jost, Explosions- und Verbrennungsvorgänge in Gasen, Berlin 1939, S. 32, 45.

000390

$f_0(\tau)$  kann hier bei wieder gleich null gesetzt werden, da  $\Delta P$  nur örtliche Druckunterschiede im Gasraum anzugeben braucht.

Für die zugehörige Eigenschwindigkeit der Gasteilchen findet man nach Gl. 6 die Beziehung:

$$u = \xi \frac{d\xi}{d\tau} \left[ \cos \omega \tau - \frac{\omega^2}{3 \alpha_0^2} (\xi^2 - \tau^2) \int \tau(\omega \tau) d(\omega \tau) \right] - g v_0 \int f(\tau) d\tau + g(z) \quad (22)$$

Hieraus erkennt man, daß die Randbedingungen für die Gasteilchen  $\xi = 0$  und  $\xi = l_0$  erfüllt sind, wenn die zunächst willkürliche Funktion  $f(\tau) = 0$  und ferner in Verbindung mit Gl. 7 auch  $g(z) = 0$  ist.

Mit Gl. 21 ergibt sich schließlich aus Gl. 12c die nachstehende Beziehung für die Unterschiede des spezifischen Volumens im Gasraum:

$$\frac{dV}{V_0} = - \frac{P_0}{P_0} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\omega \xi^2}{\alpha_0} \left[ \sin \omega \tau + \frac{\omega^2 (\xi^2 - \frac{2}{3} \tau^2)}{12 \alpha_0^2} \tau(\omega \tau) \right] \right] \quad (23)$$

Damit sind alle Zustände der Gasteilchen im Zylinder bei harmonischer Kolbenbewegung genauer berechenbar; insbesondere kann auch an Hand der gegenüber der früheren Lösung neu hinzugekommenen Glieder die Genauigkeit der ersten Näherung bestimmt werden.

Bei größeren Druckunterschieden im Gasraum müssen mit fortschreitender Verbesserung der Lösung an Stelle der einfachen Gl. 12c auch Glieder höherer Ordnung von Gl. 12b berücksichtigt werden. Die Rechnung wird dadurch zwar umständlicher, ist aber grundsätzlich stets möglich. Die Genauigkeit kann jeweils aus der Größe der vernachlässigten Glieder abgeschätzt werden.

Nächstehend sollen nun die früher entwickelten ersten Näherungslösungen noch mit den vorstehenden verglichen werden.

2. Vergleich der Näherungslösungen und allgemeinen Beträchtungen. Aus Gl. 18a bzw. Bild 4 ergibt sich zunächst, daß stets  $|\tau(\omega \tau)| < 12$  ist; demnach ist das neu hinzugekommene Korrekturglied in Gl. 21 im Vergleich zu Gl. 14 für praktische Verhältnisse stets sehr klein gegenüber 1. Dies bedeutet also, daß das Druckfeld nach Gl. 14 bzw. Gl. 16a für die heute üblichen Kolbenmaschinen schon eine praktisch meist ausreichende Lösung darstellt. Die genauere Lösung nach Gl. 21 liefert in den beiden Totpunkten der Maschine im Gegensatz zu Gl. 19 etwas verminderte Größtwerte des Druckunterschiedes im Gasraum.

Eine Gegenüberstellung der Gl. 22 und 15 sowie der Gl. 17 und 23 führt zu ganz entsprechenden Schlußfolgerungen.

Allgemein ergibt sich aus den vorstehenden Entwicklungen über die weitere Verbesserung der Lösungen durch wiederholtes Einsetzen der jeweils gefundenen Näherung in die Differentialgl. 11, daß dadurch eine Entwicklung der genauen Lösung nach steigenden Potenzen von  $(\xi \omega / \alpha_0)^2$  bzw.  $(u_0 / c_0)^2$  erfolgt<sup>1)</sup>.

Eine Verbesserung der ersten Näherungslösung kann bei großen Schwingungswerten auch durch unmittelbare Verwendung der exakten Gl. 12a an Stelle der Reihenentwicklung nach Gl. 12b erreicht werden. Zur gleichzeitigen Erfassung von etwa angeregten Eigenschwingungen des Gases soll nachstehend noch ein weiterer Weg zur Entwicklung geeigneter Lösungen kurz angeleitet werden.

### V. Die Berechnung von Eigenschwingungen im Gasraum

1. Vereinfachende Voraussetzungen und Differentialgleichung. Zur Bestimmung des zeitlich und örtlich veränderlichen Zustandsverlaufes im Gasraum bei Eigenschwingungen der Gase, die auch unabhängig von der Kolbenbewegung auftreten können, soll nun noch ein weiteres Näherungsverfahren zur Lösung der beiden Gl. 8 und 9 entwickelt werden. Zu diesem Zweck sollen zunächst wieder die Gl. 10a und 10b gelten; bei vorläufiger Vernachlässigung von kleinen Gliedern zweiter und höherer Ordnung gilt dann auch wieder die Gl. 12c. Setzt man diese unmittelbar in Gl. 11 ein, so findet man die nachstehende Beziehung für die Berechnung einer ersten Näherung von  $\Delta r$ :

$$\frac{\partial^2 \Delta r}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \Delta r}{\partial z^2} = g \times v_0 \frac{P_0(\tau)}{P_0} \frac{\partial^2 \Delta r}{\partial \tau^2} \quad (24)$$

Dies ist aber für  $\Delta r$  eine partielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zeitveränderlichem Koeffizienten  $P_0(\tau)/P_0$ ; bei genügend kleinen Druckschwängungen, die der Ungleichung 12d

1) Über exakte Lösungen dieses Problems vgl.: B. Riemann, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen in endlicher Schwingungswelt, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Bd. 18 (1860); Gesammelte Werke 2. Aufl., Göttingen 1892, S. 43/65. — K. Beckerl, Theorie ebener Schwingungen von Zylindern, und Kugelwellen in reibungsfreien Gasen und Flüssigkeiten, ebenda, Bd. 89 (1941) S. 169/202; ders., Über die Ausbreitung von Zylindern, und Kugelwellen in reibungsfreien Gasen und ebenda, Bd. 39 (1941) S. 357/372; ders., Ebene Wellen in idealen Gasen mit Reibung und Wärmeleitung, ebenda, Bd. 40 (1941) S. 207/48. — H. Priem, Zur gegenseitigen Überlagerung ungedämpfter ebener Gaswellen großer Schwingungswerte, Akust. Z. Bd. 7 (1942) H. 2, S. 55/65.

zuzuziehen, beschränkt sie alle möglichen anderen Druckfelder in einem Gasraum mit technisch ausmachender Genauigkeit.

Durch einfache Umformungen ergibt sich aus Gl. 24 mit Hilfe der Gl. 22 unmittelbar die folgende Form:

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{d\eta}{dt} = a^2 \left( \frac{\eta}{r_0} - \frac{d\eta}{dt} \right) \quad (24a)$$

Gegenüber der früheren Differentialgl. 11b heißt für die vorstehende lineare partielle Differentialgleichung nur die Beschränkung auch Gl. 19d, d. h. praktisch, daß  $(\frac{d\eta}{dt})^2 \ll 1$  sein muß. Sie beschränkt daher bei genügend kleinen Druckunterschieden,  $\Delta P$  im Gasraum nicht nur die durch die Änderung des mittleren spezifischen Volumens  $\tau$  bewirkten erzwungenen Schwingungen im Gasraum, sondern auch Eigenbewegungen des Gases, die nicht unmittelbar durch die Kolbenbewegung verursacht sind. Diese Differentialgl. 24a beschränkt insbesondere auch die experimentell schon vielfach untersuchten Gasoschwingungen in einem längeren Rohr, die durch einen mit Beständigkeit periodisch bewegten Kolben erzwungen werden<sup>2)</sup>; sie ist dabei nicht nur auf vollkommen stetige Wägen beschränkt, sondern auch zur Beschreibung der soeben Wellenlänge zwischen zwei Verdichtungsstellen<sup>2)</sup> geeignet. In weiterer Näherung kann dabei infolge des verhältnismäßig kleinen Kolbendruckes besonders für höhere Frequenzen auch  $\tau_0 = \tau$  konst. angenommen werden.

Für  $\tau_0 = \tau = \tau_0$  konst. geht die Gl. 24a formal in die aus der Akustik bekannte Differentialgleichung für diaphragmenartige Schallfelder über. Sie unterscheidet sich jedoch inhaltlich wesentlich von der üblichen Wellengleichung, da diese der Zustandsgleichung eines Baumgaskörpers beschränkt, während es nach Gl. 24a in Messungspunktkoordinaten geschieht wird. Dadurch werden vor allem die Eigenbewegungen der Gasteilchen, also in dem Differentialgl. 3 und 4 die Fehler der kinematischen Beschreibung nicht berücksichtigt. Gegenüber der akustischen Form der Wellengleichung in Baumgaskoordinaten bietet sie eine größere Genauigkeit an. Der Übergang zu den geläufigeren Baumgaskoordinaten bietet im Hinblick der einfachen Differentialgl. 3 keine Schwierigkeiten. In jedem Fall ist dabei mindestens eine einfache Parameterübertragung des gesamten Zustandsbildes mit  $\tau$  als Parameter möglich.

2. Die allgemeine Lösung der periodische Vorgänge. Eine allgemeine Lösung der linearen Differentialgl. 24a kann in bekannter Weise als eine unendliche Reihe von Gliedern, die Funktionen von einem Funktionen, der Zeit  $t$  und der Teilchenkoordinaten  $z$  sind, in folgender Form dargestellt werden:

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t) \phi_n(z) - \tau_0 \eta_0 \quad (25)$$

wenn  $\psi_n(t)$  bzw.  $\phi_n(z)$  noch zu bestimmende Funktionen der Zeit  $t$  bzw. der Koordinate  $z$  des Gasteilchens sind und  $n$  eine beliebige ganze Zahl darstellt. Man findet damit durch Einsetzen in die Differentialgl. 24a zur Bestimmung der Funktionen  $\psi_n(t)$  und  $\phi_n(z)$  die beiden nachstehenden einfachen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^{-2} \psi = 0 \quad (26)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{d\tau}{dz} \phi = 0 \quad (27)$$

wenn  $\tau_0$  eine zunächst noch willkürliche unveränderliche Größe ist. Eine partielle Lösung der linearen Differentialgl. 27 kann ohne weiteres angegeben werden:

$$\phi_n(z) = Z_1 e^{-\frac{z}{\tau_0}} \quad (28)$$

wobei  $Z_1$  eine unveränderliche Größe darstellt und  $\gamma = 1$  die Einheit für imaginäre Zahlen ist.

Die Lösung der ebenfalls linearen Differentialgl. 26 ist gegeben durch die zeitliche Veränderung des Koeffizienten wesentlich erschwert, sie stellt für periodische Vorgänge eine Hürde

<sup>2)</sup> Ernst Schmidt, Schwingungen großer Amplitude in Baugasräumen, Z. NLD Bd. 29 (1910), S. 471 ff. Mitteilung der deutschen Akademie der Naturwissenschaften, Leipzig, München und Berlin 1910; S. 216 ff. E. Kappeler, Schwingungen großer Amplitude, Vgl. Forsch. Bd. 276, Berlin 1920; A. Müller, Ausbreitung der Verdichtungsstellen bei Luftschwingungen in einer Röhre, Z. NLD, Bd. 21, Prag 1908; E. Lehmann, Resonanzerscheinungen in Baugasräumen, Z. NLD, Forsch. Bd. 28, Berlin 1919, S. 617.

<sup>3)</sup> Vgl. hierzu G. Zuercher, Zur Theorie ebener Druckwellen, Ann. d. Phys., Bd. 4, 1901, S. 222-24.

Differentialgleichung dar<sup>14)</sup>. Zu ihrer Lösung entwickelt man nach Hill die vorgegebene periodische Funktion  $[r_0/r_0(t)]^{n+1}$  in eine Fourier-Reihe, also

$$\left[ \frac{r_0}{r_0(t)} \right]^{n+1} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} C_r e^{ir\omega t}$$

wenn  $\omega [1/\rho]$  die Kreisfrequenz der Grundschwingung,  $C_r$  die noch zu bestimmenden Koeffizienten der Fourier-Reihe sind und  $r$  die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft. Die Lösung der Differentialgl. 26 läßt sich dann ebenfalls in Form einer unendlichen Reihe darstellen:

$$y_r(t) = e^{i\omega t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{ik\omega t} \quad (20)$$

wenn  $r$  und  $D_k$  geeignet bestimmte, unveränderliche Größen sind und  $k$  die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft. Zur Berechnung von  $r$  und  $D_k$  setzt man die Lösung nach Gl. 20 in die Differentialgl. 26 ein und findet als Bedingungsgleichung:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (r+k\omega)^2 D_k e^{ik\omega t} - \left( \frac{r_0}{l} \right)^2 \sum_{r=-\infty}^{+\infty} C_r e^{ir\omega t} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{ik\omega t} = 0$$

Hieraus ergibt sich ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen zur Bestimmung der Größen  $D_k$ , wenn  $r$  bekannt ist. Nach Hill findet man die Größe  $r$  — die auch als charakteristischer Exponent bezeichnet wird — noch dadurch, daß man die unendliche, von  $r$  abhängige Determinantengleichung dieses linearen Gleichungssystems gleich null setzt.

Setzt man in der vorstehenden Gleichung zur Vereinfachung der Schreibweise

$$C_k \left( \frac{r_0}{l} \right)^2 = \lambda \quad \text{und} \quad \left( \frac{r_0}{l} \right)^2 = \gamma \quad (30)$$

so ergibt sich eine Gleichung für die Berechnung der Koeffizienten  $D_k$  aus dem Vergleich aller Glieder mit derselben Frequenz in der Form:

$$D_k [(r+k\omega)^2 - \lambda] - \gamma \sum_{r=-\infty}^{+\infty} D_{k-r} C_{k-r} = 0 \quad (31)$$

Das Zeichen \* soll andeuten, daß in der unendlichen Summe das Glied  $r=0$  wegzulassen ist.

Da für jeden Koeffizienten  $D_k$  eine solche Gleichung besteht, ergibt sich dann das System von unendlich vielen linearen Gleichungen für die Berechnung dieser Koeffizienten. Damit dieses System eine Lösung besitzt, muß seine Determinante verschwinden; hieraus ergibt sich die Bedingung zur Berechnung von  $r$ . Diese Determinante lautet aber, wenn man jeweils ihre  $k$ -te Zeile durch  $(r+k\omega)^2 - \lambda$  dividiert:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\gamma C_1}{(r+2\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_2}{(r+\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_3}{(r-\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_4}{(r-2\omega)^2 - \lambda} \\ \frac{\gamma C_1}{(r+\omega)^2 - \lambda} & 1 & \frac{\gamma C_2}{(r-\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_3}{(r-\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_4}{(r-\omega)^2 - \lambda} \\ \frac{\gamma C_2}{r^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_1}{(r-\omega)^2 - \lambda} & 1 & \frac{\gamma C_2}{(r-\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_3}{(r-\omega)^2 - \lambda} \\ \frac{\gamma C_3}{(r-\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_2}{(r-\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_1}{(r-\omega)^2 - \lambda} & 1 & \frac{\gamma C_2}{(r-\omega)^2 - \lambda} \\ \frac{\gamma C_4}{(r-2\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_3}{(r-2\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_2}{(r-2\omega)^2 - \lambda} & \frac{\gamma C_1}{(r-2\omega)^2 - \lambda} & 1 \end{vmatrix} = \Delta(r) = 0 \quad (32)$$

Man kann nun zeigen<sup>15)</sup>, daß die Berechnung dieser Determinante auf die einer einfacheren  $\Delta(\alpha)$  zurückgeführt werden kann, die aus  $\Delta(r)$  mit  $r=0$  hervorgeht, wobei dann gilt:

$$\sin^2(\alpha r) = \Delta(\alpha) \sin^2(\alpha \sqrt{\lambda}) \quad (33)$$

Danach kann also zunächst der charakteristische Exponent  $r$  berechnet werden. Hieran anschließend sind dann die Koeffizienten  $D_k$  aus dem System der linearen Gl. 31 zu bestimmen. Damit ist dann eine Hilfsfunktion  $y_r(t)$  als Lösung der Differentialgl. 26 bestimmt. Die allgemeine Lösung

<sup>14)</sup> G. H. Hill, On the part of the motion of the lunar perigee, Acta Mathematica, Stockholm, Berlin und Paris, Bd. 8 (1886) 1/34; M. J. O. Stieltjes, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 1 Lamé'sche, Mathematische und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Berlin 1932, s. hierüber auch Forsch. Ing.-Wiss. Bd. 12 (1941) S. 211 ff.

<sup>15)</sup> E. T. Whittaker u. G. N. Watson, A course of modern analysis 4. Aufl., Cambridge 1927, S. 415/16.

der partiellen Differenzial 22a findet man schließlich auf Grund ihrer Linearität die Summe aus unendlich vielen Produkten  $P, \rho$ , entsprechend Gl. 23.

Für praktische Verhältnisse können die unendlichen Reihen stets durch eine endliche Zahl von Gliedern dargestellt werden, so daß die Entwicklungen dafür meist noch übersichtlich sind.

Aus einer entsprechend Gl. 25 bestimmten Lösung der Differenzial 22a kann man um nach Gl. 12c auch das zeitlich und örtlich veränderliche Druckfeld im betrachteten Gasraum und damit die Zustandsgrößen des Gases berechnen. Auf diese Weise ist es möglich, die Gasbewegungen im Zylinder einer idealisierten Verbrennungsmaschine, die bei abgesehenem Betriebspunkt beschleunigt und Bremsbewegung der Kolbenbewegung mechanisch zu verfolgen, selbst ihre Schwingspannen entsprechend der Gl. 12d noch genauer klein sind. Da nach Gl. 12c die Schwingspannen  $\Delta P$  zum jeweiligen momentanen Mittelwert  $P_m$  des Gasdruckes verhältnismäßig sein dürften und die großen Gasbewegungen stets in der Umgebung des oberen (unteren) Totpunktes der Maschine — also bei höchsten Gasdruck  $P_m$  — auftreten, erhält die Genauigkeit der so gewonnenen Lösung für praktische Verhältnisse auch bei stärkeren Abgängen aus. Grundsätzlich besteht aber auch die Möglichkeit, durch Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung in Gl. 12b nach dem vorausgehenden Verfahren die Rechenumstände wesentlich zu erleichtern. Dabei ist es im allgemeinen zweckmäßiger, an Stelle der Gl. 12a eine mit Gl. 12a ganz entsprechend ableitbare ähnliche Reihe zu verwenden, in der  $\Delta P/P_m$  nach wachsendem Potenzen von  $\Delta P_m$  entwickelt ist.

## VI. Zusammenfassung

Auf Grund eines einfachen Näherungsverfahrens ist es möglich, den Einfluß der endlichen Kolbenbeschleunigung auf die Verdichtung von Gasen rechnerisch leicht zu verfolgen. Die hierdurch im Gasraum auftretenden Druckschwankungen wachsen bei harmonischer Kolbenbewegung in erster Näherung mit dem Quadrat der Verdrängung, der großen Kolbenbeschleunigungen zur Schallgeschwindigkeit des verdichteten Gases und sind bei dem heute üblichen Geschwindigkeitsverhältnis noch vernachlässigbar klein (Gl. 19). Die Genauigkeit des Rechenverfahrens kann für größere Druckschwankungen im Gasraum beliebig verbessert werden. Späte Wellenentwicklung ermöglicht auch die theoretische Behandlung von Druckschwankungen, die in einem begrenzten Gasraum nicht unmittelbar durch Kolbenbewegungen verursacht sind. Dadurch wird auch die rechnerische Verfolgung der Abgaskolbenbewegungen bei Verbrennungsmotoren erleichtert. (ZfP 1183)

Dr. Ing. u. Dr. A. Köhling, Dynamische Verträge des Rheinländer Vertriebsring, Forsch. Ing.-Wes. Bd. 11, 1941(1) S. 200/2.

TITLE PAGE

V. Papers from the Institute for liquid fuels and lubricants  
research at Strasbourg (evacuated to Oberlangenstadt,  
Bavaria).

1. List of papers received by Mr. Reichel, U. S. Nav.  
Tec. Miss. Europe.

Frame Nos. 394 - 397

Abschrift/Abschrift

01394

Institut für Treib- und Schmierstoffe.  
Institutsleitung

Schloss Oberlangenfeldt  
den 28.5.1945

Folgende Arbeiten wurden am 28. Mai 1945 übergeben:

- 1) Untersuchungen über Aussehen und Gestalt von Brennerflammen.  
(Dr. Behrens)
- 2) Die Raumbeanspruchung von Flüssigkeitsgemischen (Dr. Harms)
- 3) Ein Verfahren zur Bestimmung von adsorbierten "Besetzungszahlen" adsorbierter Moleküle aus Flüssigkeitsgemischen an Gefinerten Metalloberflächen (Dr. Harms)
- 4) Experimentelle Beiträge zum Abbrandverhalten von Pulvern  
(H. Teichmann, F. Frensdorf, A. Diehlberg)
- 5) Gerät zur Messung der Reibungskräfte im trockenen Zustand und im Zustand der Grenzschmierung (Dr. Harms, Dr. Erbacher)
- 6) Arbeiten auf dem Gebiet der Schmiermittel (Dr. Harms, Dr. Erbacher)
- 7) Untersuchungen über Klopfende Verbrennung (Dr. Hübner)
- 8) Selbsterregung von Flammenschwingungen und Detonationswellen in Rohrströmen (Dr. Behrens)
- 9) Turbulente Flammenfortpflanzung in Rohrströmen (Dr. Behrens)
- 10) Zur Reaktionskinetischen Auswertung von Verbrennungsgeschwindigkeiten (Dr. Behrens)

Received by Reichel (Signature)  
USN Nav Sec. Liaison Europe

Abschrift/Abschrift!

00095

Dr. H. Rögener

Oberlangenstadt, 10. Juli 1945

Habilitationsarbeit  
Untersuchungen über klopfende Verbrennung.

Ausgangspunkt:

Der Ausgangspunkt der Arbeit war die Theorie, dass die klopfende Verbrennung im Otto-Motor in der Selbstzündung eines Teiles des Kraftstoff-Luftgemisches im Zylinder besteht.

Aufgabe:

Daraus ergab sich die Aufgabe, die Selbstzündung adiabatisch verdichteter Kohlenwasserstoff-Luftgemische zu untersuchen.

Messverfahren und Messverordnung:

Das Gasgemisch wird in einem Zylinder durch einen Kolben rasch verdichtet, der Druckverlauf während der Verdichtung, der anschließenden Zündverzögerzeit und der Selbstzündung gemessen. Hierfür wurde eine grundsätzlich bekannte Versuchsanordnung weiter entwickelt und dadurch die erforderliche Messgenauigkeit erreicht.

Ergebnisse:

Die Messungen ergeben, dass die Selbstzündung in mehreren Stufen abläuft bis zum vollständigen Umsatz. Die Zündverzögerzeit ist abhängig von Temperatur, Druck, Kohlenwasserstoff-Luftverhältnis und chemischer Struktur des Kohlenwasserstoffs wurde bestimmt. Die Ergebnisse lassen sich zu einem wesentlichen Teil in ein allgemeines reaktionskinetisches Schema einordnen. Die Ergebnisse gestatten eine befriedigende Übertragung auf die Verhältnisse im Motor.

Der Vergleich mit den umfangreichen Versuchsergebnissen über Selbstzündung, die nach anderen Methoden gewonnen wurden, lässt die Gültigkeit der in der vorliegenden Arbeit aufgestellten Regeln und Gesetzmäßigkeiten auch für die Mehrzahl dieser Untersuchungen erkennen. Die reaktionskinetische Sichtung des gesamten Materials wird dadurch wesentlich vereinfacht.

Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchungen  
über Verbrennungsvorgänge.

von Dr. habil. H. Behrens

- 1) "Aussehen und Gestalt von Brennerflammen" (von philosop. Fakultät der Universität Marburg angenommene Habilitationsarbeit)

Es wurde gefunden, dass der in Brennstoffgemisch vorhandene überschüssige Kohlenwasserstoff in der Brennszone zu Russ und Wasserstoff crackt und die hochmolekularen Rußteilchen durch Thermoeffusion infolge des hohen Temperaturgradienten der Brennszone an der inneren Seite des Brenneckels zur Flammspitze emigrieren (ausgenommen Acetylen als Brennstoff). Magerere Wasserstoffgemische zeigen eine Auflösung des Brenneckels in Flammenzügen auf dem Prittbrenner eine Auflösung der Brennerfläche in einzelne Brennpunkte. Überfettete Kohlenwasserstoffflammen zeigen infolge Bildung von Wasserstoff bei der Cracking eine periodische Differenzierung der Brennerfläche (Flammwellen). Die Ergebnisse wurden kurz referiert in der Mitteilung in den "Naturwissenschaften" in dem letzten erschienen Heft.

- 2) "Stand der Kinetischen Theorie der Flammenverbrennung"

Zusammenfassung der von Semenov und Mitarbeitern entwickelten Theorie der Flammenfortpflanzung; Gesichtspunkte für die Entwicklung der Theorie auf überfettete Flammen auf Grundlage der in 1) gefundenen Crack- und Diffusionsvorgänge.

- 3) "Selbsterregung von Flammenschwingungen in Rohrstrahlen"

Die Selbsterregung von Flammenschwingungen geht parallel zum Auftreten einer Flammenstörung (vgl. 1). Bedeutung und Mechanismus des Zustandekommens einer negativen Charakteristik in Flammen als rücktreibende, elastische Kraft bei Flammenschwingungen wurde als Brennerflächenpannung gefunden, das ist eine Flammflächenpannung zwischen zwei Gasphasen verschiedener Temperatur, deren Existenz infolge Abweichungen vom idealen Verhalten der Gasphasen angenommen werden muss.

- 4) "Turbulente Flammenfortpflanzung an Rohrstrahlen"

Experimentelle und theoretische Untersuchungen von Treacher und Mechanismus der übernormalen Flammgeschwindigkeiten in Rohrstrahlen durch turbulente Auflösung der Flammenfläche.

- 5) "Zur Kinetischen Auswertung von Flammgeschwindigkeiten"

Eine kinetische Auswertung von Flammgeschwindigkeiten lässt sich qualitativ durch eine sinnvolle graphische Auftragung der Geschwindigkeiten gegen überschüssige Molzahlen der Komponenten vornehmen. Im Falle der CO-Verbrennung konnte in Übereinstimmung mit russischen Untersuchungen die Reaktion als von nullter Ordnung bezüglich des CO nachgewiesen werden.

Noch nicht abgeschlossene Arbeiten:

6) "Zur Kinetik von Diffusionsflammen".

Auf Grund von Schattenaufnahmen konnte nachgewiesen werden, dass bei Diffusionsflammen auf der Seite des reinen Kohlenwasserstoffes stets infolge vorwiegend thermischer Einwirkung eine Cracking-Verkohlung eintritt. Zur Verbrennung gelangt also effektiv im wesentlichen ein Gemisch von Kohle (Russ) und Wasserstoff, wodurch die Kinetik der Verbrennung grundsätzlich anders als bei vorgemischten Flammen (Bunsenbrennerflamme) und der Kohlenstaubverbrennung ähnlich wird.

7) "Grenzflächenspannung von Gasen und deren Bedeutung für Verbrennungsvorgänge".

Quantitative Behandlung der Grenzflächenspannung von Gasen. Infolge-Abweichungen vom idealen Verhalten auf Grund der van der Waals'schen Theorie realer Gase; Zusammenhang mit den bei turbulenter Flammenfortpflanzung (vgl. 4) beobachteten Erscheinungen.

8) "Verbrennungsvorgänge und die Theorie irreversibler Vorgänge".

Die Formulierung eines Extremalprinzips für Verbrennungsvorgänge (maximale Geschwindigkeit), wie es von Semenov angegeben oder neuerdings von Jost im Zusammenhang mit den Ergebnissen des Verfassers über Brennflächenauflösung vorgeschlagen wurde, ist streng genommen nicht berechtigt. Eine ähnliche Sachlage liegt vor bei dem bereits in der Literatur diskutierten Steenbeck'schen Minimalprinzip für Gasentladungen, dessen heuristischer Wert erwiesen ist, ohne dass es strenge Gültigkeit beanspruchen darf. Es ist zu vermuten, dass auch bei irreversiblen Vorgängen sonstiger Art (Phasendiffusion) sich heuristische Extremalregeln in analoger Weise aufstellen lassen. Die Brennflächenauflösung lässt sich als ein Beispiel für Phaseninstabilität und einen irreversiblen Vorgang exakt behandeln.

TITLE PAGE

2. Letter of Dr. H. Behrens to Dr. G. von Elbe, FIAT, U.S.

Frame Nos. 398 - 400

Dr. H. B e h r e n s  
Unterlangenstadt  
über Lichtenfels (13a)

000598

Unterlangenstadt, den 17. Oktober 1945.

Herrn

Dr. G. von E l b e , Civ.  
Liq. Fuels and Lubr.,  
F I A T , U.S. Army

Sehr geehrter Herr Doktor!

Ich bedauere sehr, dass ich bei Ihrem Besuch am 20.9.1945 im Institut f. Treib- u. Schmierstoffe in Oberlangenstadt verreist war und Ihnen nicht über meine Arbeiten berichten konnte. Anbei übersende ich Ihnen die von mir verfassten Arbeiten, die der Nav. Techn. Com. noch nicht abgeliefert sind, weil sie bei der damaligen Übergabe der Institutsarbeiten noch nicht abgeschlossen waren.

1. Zur Struktur und Verbrennungskinetik von Diffusionsflammen.
2. Der Enskog'sche Extremalsatz als Grundlage einer phänomenologischen Kinetik und seine Anwendung auf Flammen und Gasentladungen.
3. Stand der kinetischen Theorie der Flammenverbrennung.

Wie ich von meinem Kollegen erfuhr, besteht die Absicht, die Arbeiten zu übersetzen und zu veröffentlichen. Ich möchte dazu bemerken, dass der theoretische Teil meiner Habilitationsarbeit durch meine späteren Arbeiten zum Teil überholt ist und wesentlicher Änderungen bedarf, die vor der Drucklegung vorzunehmen wären. Auch die übrigen drei früher abgelieferten Arbeiten bedürfen kleinerer Korrekturen, die in den Druckfahnen angebracht werden könnten. Nach Vornahme der notwendigen Änderungen bilden die sieben Arbeiten ein logisch ziemlich abgeschlossenes Ganzes; ich hatte zwar vor, noch eine Arbeit über die Brennflächenspannung einzureichen, aber die Zeitumstände erlauben es mir nicht, zur Zeit diese Arbeit fertigzustellen. Eine kurze Übersicht über die Arbeiten in logisch sinnvoller Reihenfolge füge ich zur Orientierung bei.

Mit ergebendem Gruss

H. Behrens

4 Anlagen.

Zusammenstellung der Arbeiten über Verbrennerströmung

von Dr. habil. E. E. H. R. E. N. S.

1. "Aussehen und Gestalt von Brennerflammen"

(von philosph. Fakultät der Universität Marburg angenommene Habilitationsarbeit).

Es wurde gefunden, dass der in Brennstoffgemisch vorhandene überschüssige Kohlenwasserstoff in der Brennzone zu Russ und Wasserstoff crackt und die hochmolekularen Bausteine durch Thermodiffusion infolge des hohen Temperaturgradienten der Brennkammer an der inneren Seite des Brennkegels zur Flammspitze wandern (ausgenommen Acetylen als Brennstoff).

Reine Wasserstoffgemische zeigen eine Auflösung des Brennkegels in Flammenfäden, auf den Priltbrenner eine Auflösung der Brennfäche in einzelne Brennpunkte. Überfettete Kohlenwasserstoffflammen zeigen infolge Bildung von Wasserstoff bei der Cracking eine periodische Differenzierung der Brennfäche (Flammenfärbung). Die Ergebnisse wurden kurz referiert in zwei Mitteilungen in den "Naturwissenschaften" in dem letzten erschienenen Heft.

2. "Zur Kinetik von Diffusionsflammen"

Auf Grund von Schattenschraufnahmen konnte nachgewiesen werden, dass bei Diffusionsflammen auf der Seite des reinen Kohlenwasserstoffs stets infolge vorwiegend thermischer Einwirkung eine Cracking des Brennstoffes eintritt. Zur Verbrennung gelangt also effektiv in wesentlichen ein Gemisch von Kohle (Russ) und Wasserstoff, wodurch die Kinetik der Verbrennung grundsätzlich anders als bei vorgebrachten Flammen (Sensenbrennerflamme) und der Kohlenstaubverbrennung ähnlich wird.

3. "Selbsterregung von Flammenschwingungen in Rohrstrecken"

Die Selbsterregung von Flammenschwingungen geht parallel dem Auftreten einer Flammenstörung (vergl. 1). Ursache und Mechanismus des Zustandekommens einer negativen Charakteristik in Flammen. Als rücktreibende, elastische Kraft bei Flammenschwingungen wurde die Brennfächenspannung gefunden, das ist eine Grenzflächenspannung zwischen zwei Gasphasen verschiedener Temperatur, deren Existenz infolge Abweichungen vom idealen Verhalten der Gasphasen angenommen werden muss.

4. "Turbulente Flammenfortpflanzung in Rohrstrecken"

Experimentelle und theoretische Untersuchungen von Ursachen und Mechanismus der übernormalen Flammengeschwindigkeiten in Rohrstrecken durch turbulente Auflösung der Flammenfäche.

5. "Zur kinetischen Auswertung von Flammgeschwindigkeiten".

Eine kinetische Auswertung von Flammgeschwindigkeiten lässt sich qualitativ durch eine sinnvolle graphische Auftragung der Geschwindigkeiten gegen Überschüssige Molschalen der Komponenten vornehmen. Im Falle der CO-Verbrennung konnte in Übereinstimmung mit russischen Untersuchungen die Reaktion als von nullter Ordnung bezüglich des CO nachgewiesen werden.

6. "Der Enskog'sche Extremsatz als Grundlage einer phänomenologischen Kinetik und seine Anwendung auf Flammen und Gasentladungen".

Ein von Enskog aus der Boltzmann'schen Fundamentalgleichung der Gaskinetik gefolgter Extremsatz der schnellsten Entropievermehrung wird als ein allgemeines Extremalprinzip für alle stationären Zustände begründet. Das Auftreten von Labilitätserscheinungen wird geschildert und die Labilitätsbedingungen werden mathematisch formuliert. An Hand der Erscheinungen an Flammen und Gasentladungen wird gezeigt, wie von verschiedenen Seiten das Extremalprinzip für spezielle stationäre Zustände formuliert worden war. Das Extremalprinzip wird als eine Folge der Erhaltungssätze erkannt und ist in den üblichen, die stationären Zustände beschreibenden Differentialgleichungen implicite enthalten. Praktisch einfach und bedeutungsvoll wird die Anwendung des Extremalprinzips bei Annahme von genäherten Modellverteilungen für den stationären Zustand mit einem freien Parameter, dessen Wert dann durch Lösung einer einfachen Extremalaufgabe bestimmt werden kann.

7. "Stand der kinetischen Theorie der Flammenverbrennung".

Zusammenfassung der von Semenov und Mitarbeitern entwickelten Theorie der Flammenfortpflanzung; Gesichtspunkte für die Erweiterung der Theorie auf überfettete Flammen auf Grundlage der in 1) gefundenen Crack- und Diffusionsvorgänge.

TITLE PAGE

3. Der Enskog'sche Extreimalsatz als Grundlage einer  
phänomenologischen Kinetik und seine Anwendung auf  
Flammen und Gasentladungen, by H. Behrens.

The Enskog principle as the basis of a phenomeno-  
logical kinetics and its application to flames  
and electric gas discharges, by H. Behrens.

Frame Nos. 401 - 416

Der Enskog'sche Extreimalsatz als Grundlage einer phänomenologischen Kinetik und seine Anwendung auf Flammen und Gasentladungen.

1. Sinn und Wesen einer phänomenologischen Kinetik.

Das Lehrgebäude der Physik lässt sich grob-schematisch aufteilen in die phänomenologische Theorie, die die Materie als Kontinuum behandelt, und in die Atomistik; Beispiele für die phänomenologische Behandlung bilden die Elastizitätstheorie, Thermodynamik und Elektrodynamik, denen die Gittertheorie, statistische Mechanik und Elektronentheorie als atomistische Theorien gegenüber stehen. Der Aussagenbereich der letzteren ist in Folge des Umfanges der eingehenden Voraussetzungen bezüglich des Aufbaues der Materie weitgehender als der der auf empirischen Gesetzen beruhenden phänomenologischen Theorien; dafür ist ihre Anwendung wesentlich komplizierter und in vielen Fällen wegen der Beschränktheit unseres Wissens auch nicht durchführbar. Damit hängt es zusammen, dass die Technik sich wesentlich auf die phänomenologischen Theorien stützt, während die heutige wissenschaftliche Forschung sich vornehmlich der Atomistik und damit der Erforschung der in die Phänomenologie eingehenden stoffspezifischen Größen widmet.

Die Thermodynamik als Lehre vom Gleichgewicht und dessen reversiblen Änderungen umfasst zum Teil das Lehrgebäude der statistischen Mechanik, nämlich soweit als die thermodynamisch definierte Entropie den Extremaleigenschaften der Boltzmann'schen H-Funktion entspricht. Der Aussagenbereich sowohl der H-Funktion, wie der gesamten Kinetik ist in sofern weitergehend als auch grundsätzlich nichtgleichgewichtszustände und irreversible Vorgänge der exakten Behandlung zugänglich sind.

Wir wollen jetzt die Frage aufwerfen, ob nicht eine phänomenologische Theorie der Kinetik irreversibler Vorgänge möglich ist, die sich zur Gesamtkinetik analog verhält wie die Thermodynamik zur statistischen Mechanik bei Gleichgewichtszuständen. Man müsste versuchen, lediglich eine Extremaleigenschaft der Kinetik aufzufinden und der Theorie zu Grunde zu legen. Es ist weitgehend unbeachtet geblieben und widerspricht vereinzelt gegenteiligen Behauptungen, dass es tatsächlich einen Extreimalsatz für irreversible Vorgänge gibt: es ist der Satz der schnellsten Entropievermehrung, der 1917 von Enskog<sup>1)</sup> in seiner bekannten Dissertation aufgestellt wurde.

1) Vergl. D. Enskog, Z.f. Phys. 54, (1929) 498

000492

Alle phänomenologischen Theorien der Physik sind aus der Erfahrung heraus entwickelt worden, unabhängig von den zumeist später einsetzenden atomistischen Theorien. Man möchte nun annehmen, dass die Erfahrung nicht mit kinetischen Erscheinungen bekannt geworden ist, die unabhängig von der Atomistik zu einer empirischen Auffindung des Extremsatzes und einer entsprechenden phänomenologischen Kinetik geführt hätten. Umgekehrt lag es dann offenbar auch ziemlich fern, auf Grund der Existenz des genannten Satzes eine solche zu entwickeln. Es soll jedoch in dieser Arbeit gezeigt werden, dass ohne Kenntnis der Enskog'schen Arbeiten aus der gesetzmässigen Erscheinungen von zwei stationären Vorgängen, der Flammenfortpflanzung und den Gasentladungen, auf die Existenz eines Extremsatzes geschlossen wurde.

2. Negative Charakteristik, Selbstverstärkung und Extremsatzprinzip.

Enskog hat seinen Extremsatz nur für Gase aus der Boltzmann'schen Fundamentalgleichung abgeleitet, und es erhebt sich die Frage, ob es zu einem allgemeinen Extremsatz erweitert werden kann und somit generell gültig ist. Die Sachlage ist hier ähnlich wie bei der Thermodiffusion, deren Existenz Enskog erstmalig auch nur für einatomige Gase aus der Fundamentalgleichung gefolgert hat und deren allgemeinere Verbreitung auch bei molekularen kondensierten Stoffen nachgewiesen wurde. Vom Standpunkt der statistischen Mechanik ist das speziellere Problem des stationären Zustandes irreversibler Vorgänge von P. und Th. Ehrenfest klar formuliert worden<sup>1)</sup>, ohne dass bisher ausser vereinzelten Ansätzen<sup>2)</sup> eine allgemeine Lösung gegeben werden konnte. Auch wir wollen uns auf das speziellere Problem stationärer Zustände beschränken und zunächst untersuchen, ob wir durch allgemeine Stabilitätsüberlegungen unter gewissen Voraussetzungen zur Extremsatzcharakteristik gelangen.

Unabhängig von gaskinetischen atomistischen Überlegungen hat man in der Physik der Gasentladungen versucht, auf Grund der bekannten negativen Charakteristik die Existenz eines Extremsatzes für Entladungen zu erweisen. Ein Vorgang mit negativer Charakteristik kann in zweierlei Weise dynamisch stabilisiert werden: entweder wird durch Überlagerung eines Vorganges mit positiver Charakteristik ein Minimum der Gesamtcharakteristik erzeugt, wodurch ein stationärer Zustand ermöglicht wird, oder unter speziellen Bedingungen kommt es zur Selbsterregung von Schwingungen, d.h. infolge irgendwelcher

1) P. und Th. Ehrenfest, Encycl. d. math. Wissensch. Bd. IV, 32, S. 82

2) Enskog, loc. cit.; E. Einstein, Ann. d. Phys. 69 (1922) 24.

Trägheitskräfte findet eine periodische Pendelung um eine Gleichgewichtslage statt. Die Schwingungserscheinungen sollen uns hier jedoch nicht interessieren.

Eine negative Charakteristik eines Vorganges liegt dann vor, wenn bei einem Anstieg des Stroms die zur Hervorrufung des Stromes erforderliche Kraft sinkt. Dabei sind die Ausdrücke Kraft und Strom im verallgemeinerten Sinne gebraucht und sollen irgendeinen irreversiblen Vorgang bezüglich Ursache und Geschwindigkeit charakterisieren<sup>1)</sup>. Ein Vorgang mit negativer Charakteristik sich selbst umlassen läuft mit wachsender Geschwindigkeit ab; wird der Vorgang infolge Koppelung mit einem zweiten Vorgang mit positiver Charakteristik stationär, so ist klar, dass der Gesamtverlauf in Anbetracht der vorgegebenen Bedingungen mit maximaler Geschwindigkeit vor sich geht. Für solche Vorgänge also, die unter Koppelung zweier Teilvorgänge mit negativer und positiver Charakteristik ablaufen, ist das Extremalprinzip evident.

Ein Vorgang mit negativer Charakteristik ist durch seine Selbstverstärkung oder Selbstbeschleunigung ausgezeichnet. Umgekehrt kann man auch sagen, dass jeder sich selbstverstärkende Vorgang eine negative Charakteristik hat, denn mit der Selbstverstärkung sinkt die zu einem vorgegebenen "Strom" notwendige "Kraft". Die Charakteristik eines solchen Vorganges lässt sich nach dem bekannten Beispiel der Lichtbogencharakteristik durch Kopplung mit einem Vorgang mit positiver Charakteristik, z.B. durch Vorschalten eines Ohmschen Widerstandes messen. Ein einfacheres Modell dieser Vorgänge bietet die Stromleitung eines Glasstabes bei Störung des thermischen Gleichgewichtes<sup>2)</sup>. Besonders das letztere Beispiel mag erkennen lassen, dass es sich bei dem vielleicht bekanntesten selbstbeschleunigenden Reaktionen, den Explosionen, ebenfalls um Vorgänge mit negativer Charakteristik handelt, denn die exponentiell verlaufende Erhitzung des Glasstabes stellt nichts anderes als eine Wärmeexplosion dar.

Die Selbstverstärkung oder Selbstbeschleunigung führt entweder wie bei einer Explosion zur Erschöpfung der Energiequelle oder schreitet so lange fort, bis durch einen entgegengesetzt wirkenden Prozess (z.B. Energieableitung) als Optimum für den zeitlichen Ablauf des Gesamtvorganges ein stationärer Gleichgewichtszustand erreicht wird,

1) J. Meixner, Z.f. phys. Chem. B 53 (1945) 235

2) Vergl. R.W. Pohl, Einführung i.d. Elektrizitätslehre Berlin 1941 S. 181

000404

d.h. dass der Vorgang mit maximaler Geschwindigkeit abläuft. Die dazugehörigen stationären Verteilungen werden durch Differentialgleichungen beschrieben, die natürlich mit dem Extremalprinzip, falls dieses allgemein gültig ist, verträglich sein müssen.

Es ist nun leicht einzusehen, dass die so Überlegungen für alle stationären Zustände Geltung haben. Ein stationärer Zustand unterscheidet sich von einem Gleichgewichtszustand dadurch, dass das System nicht abgeschlossen ist, sondern einerseits etwas (z.B. Energie) zugeführt und andererseits durch einen Transportvorgang (Strom) in gleicher Masse abgeführt wird. Würde nun nicht der erstere Vorgang der Zuführung oder Erzeugung selbstverstärkend sein, so könnte sich zwischen Zufuhr und Abfuhr nie ein stationärer Gleichgewichtszustand einstellen, sondern der Vorgang würde allmählich abklingen. Ein stabiler Gleichgewichtszustand muss durch das Extremum einer Größe gekennzeichnet sein, das sich durch die Überlagerung zweier entgegengesetzter Charakteristiken bildet. Schon Ehrenfest hat nach einer Funktion gesucht, "die als Verallgemeinerung der H-Funktion gelten kann" und deren Minimum den stationären Zustand kennzeichnet.

3. Labilitätserscheinungen.

Im Falle eines stationären Zustandes müssen also immer zu mindest zwei irreversible gekoppelte Vorgänge ablaufen, ein erzeugender und ein zerstreuer Vorgang. Im stationären Zustand herrscht Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Dissipation. Wir wollen nun zunächst zeigen, dass durch den Vorgang der Selbstverstärkung bemerkenswerte und unerwartete Labilitätserscheinungen von normalerweise homogenen Verteilungen hervorgerufen werden können, als deren Auftreten auf die Existenz von Extremalbedingungen geschlossen werden ist.

Dass man diese Effekte sumeist übersieht, hängt damit zusammen, dass gewöhnlich die Irreversibilität der Vorgänge gering ist. Das wird jedoch anders, wo starke Kräfte und folglich hohe Ströme auftreten. Solche Voraussetzungen liegen bei Flammen- und Gasentladungen vor und es ist nicht verwunderlich, dass gerade bei diesen Vorgängen experimentelle Hinweise auf das Extremalprinzip sich zeigen.

Um uns mit den Labilitätsrechnungen und deren quantitativer Formulierung vertraut zu machen, wollen wir einen recht einfachen und bekannten Vorgang betrachten, nämlich die elektrische Heizung eines homogenen Drahtes, wobei unter bestimmten Bedingungen

wie Busch entdeckte, die gleichmässige Temperaturverteilung des Drahtes in eine unstätige umschlägt<sup>1)</sup>, und zwar dann, wenn der Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes grösser ist als der Temperaturkoeffizient der Wärmeabgabe; als Stabilitätsbedingung ergibt sich

$$\frac{1}{A(T)} \frac{dA(T)}{dT} < \frac{1}{R(T)} \frac{dR(T)}{dT}$$

wobei die Wärmeabgabe bzw. der Widerstand als Funktion der Temperatur mit  $A(T)$  bzw.  $R(T)$  bezeichnet sind. Es ist leicht einzusehen, dass unter dieser Bedingung eine Selbstverstärkung einer zufälligen kleineren Temperatursteigerung eines Drahtstückes eintritt, da die Erhitzung durch Stromwärme, die eine Funktion des Widerstandes ist, die Wärmeabgabe übertrifft und damit das thermische Gleichgewicht gestört ist. Die schliesslich resultierende stationäre Temperaturverteilung hängt von den üblichen thermischen Bedingungen ab und interessiert hier nicht. Die Erscheinung lässt sich als einen Zerfall einer homogenen "Phase", nämlich der Temperaturverteilung, auffassen.

Ein Ähnlicher unter den extremen Bedingungen der Flammenfront auftretender unerwarteter Effekt ist die auf dem Frittblech sichtbar gemachte Auflösung einer homogenen Brennfläche in einzelne Brennflecke<sup>2)</sup>. Wie an anderer Stelle näher ausgeführt<sup>3)</sup>, geschieht dies durch Kopplung der chemischen Reaktion mit der Diffusion und tritt bei Stoffen mit grossen Diffusionsvermögen auf, z.B. bei der Verwendung von Wasserstoff als Brenngas. Und zwar tritt die Auflösung der homogenen Brennfläche immer dann ein, wenn entsprechend den obigen Bedingungen

$$\frac{1}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} > \frac{1}{Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx} \quad \text{gilt.}$$

$A(x)$  Umwandlungsgeschwindigkeit als Funktion der effektiven Konzentration  $x$

$Z(x)$  Zustromgeschwindigkeit als Funktion der effektiven Konzentration  $x$

Auflösung tritt in dem Konzentrationsgebiet ein, wo der Stoffverzehr schneller ansteigt als der Zustrom, was nichts anderes als die Erzeugung einer effektiven Konzentrationskissen durch Zustrom bedeutet. Die Erscheinung lässt sich wiederum auffassen als ein kinetisch

1) H. Busch, Ann.d.Phys.(4) 64 (1921) 401

A. Farkas u.H.H.Rowley, Z.Phys.Chem. B 22 (1933) 335

2) H. Behrens, Habilitationarbeit

3) H. Behrens, Selbsterregung von Flammenschwingungen in Rohrstrecken